

Útban a precíziós nehézion-fizika felé

Habilitációs dolgozat

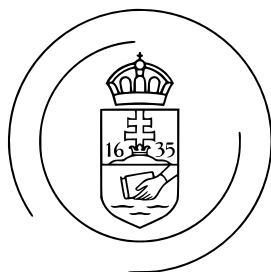
Nagy Márton

2023.

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Atomfizikai Tanszék



ELTE

EÖTVÖS LORÁND
TUDOMÁNYEGYETEM

Előzetes megjegyzések

Számolatlan olyan fogalom van, amire — sajnos vagy nem sajnos, de — a beszélt szakmai nyelvben magyarul is egyszerűen az angol kifejezést használjuk. Itt-ott megpróbálok megfelelőnek tűnő magyar kifejezést használni (vagy elsőként, vagy a már használatosak közül választva) a saját ízlésem szerint; semmiképpen sem szeretnék olajat önteni a nyelvújítási viták tüzére.

A háromdimenziós vektorokat félkövér betűkkel, skalárszorzatukat egymás mellé írással, abszolútértéküket a megfelelő dőlt, nem félkövér betűvel jelölöm. Négydimenziós vektorokat dőlt betűkkel jelölök, Lorentz-szorzatukat pontszorzással vagy indexekkel (összegzési konvencióval) jelölöm ki. (Így néha egy nem félkövér betű jelölhet egy négyesvektort is illetve egy megfelelő hármasektor-abszolútértéket is; a kontextusból mindig világos kell, hogy legyen, hogy melyikről van szó. Az 1-től 3-ig futó háromdimenziós indexekre a k, l, m, p, \dots betűket, a 0-tól 3-ig futó négydimenziósakra a $\mu, \nu, \rho, \sigma, \dots$ betűket használom.) Csak Minkowski-térídőben dolgozunk most, a $g_{\mu\nu}$ metrikus tenzorra a $+- --$, azaz a $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ konvenciót használom.

A használt egységek alapja az SI rendszer, de az energia (és a c fénysebességet 1-nek véve a tömeg és az impulzus) mértékegysége inkább elektronvolt és többszörösei (eV, MeV, GeV), vagy például impulzus esetében a c -t kiírva MeV/ c , GeV/ c . Nem teljesen igaz, hogy $c=1$ -et vennék mindenhol, de ahonnan a mértékegységek alapján hiányzik a c , onnan valóban le hagytam. (Nem egységes a „szokásjog” sem; például a 3. fejezetben felidézett, egy részecske útját, repülési idejét, tömegét és impulzusát összekapcsoló (3.4) képletet sokszor úgy írják, ahogy ott írtam, noha az út és az idő közötti átváltáshoz szerepel benne c , a tömeg és az impulzus közöttihez azonban nem.)

A \hbar redukált Planck-állandót is néha kiírom, de legtöbbször 1-nek veszem, azaz nem írom ki. Például egy \mathbf{k} hullámszám és a megfelelő $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ impulzus jelölésben és elnevezésben is összemósíthat; konkrét számok behelyettesítésekor persze nem lehet gond ebből. (A \hbar állandó értéke kb. $198 \frac{\text{MeV}\cdot\text{fm}}{c}$; így érdemes most megjegyezni, mert a magreakciók femtométeres (fm, 10^{-15} m) méret- és ennek megfelelően fm/ c , azaz $\sim 10^{-23}$ s időskálájúak, az energiákat pedig MeV vagy GeV egységekben mérjük. A c fénysebesség a kísérletekben 30 cm/ns alakban kerül elő.) A T hőmérsékletet viszont energiaegységekben mérem, azaz a k_B Boltzmann-állandót nem használom.

Ismert fajta részecskékre a szokásos jelöléseket alkalmazom. Néhány ezek közül: e^\pm (elektron és pozitron), μ^\pm (műion), π^\pm és π^0 (töltött illetve semleges pion), K^\pm , K_S^0 , K_L^0 (töltött illetve rövid- és hosszúélettartamú semleges kaon), p , \bar{p} , n , \bar{n} (proton, antiproton, neutron, antineutron) stb.

Néhol előkerülnek komplex számos műveletek; nagyon fontos a hatványozáshoz, hogy az $\arg z$ fázis, így az $\text{Ln } z \equiv \ln |z| + i \arg z$ komplex logaritmus és a $z^w \equiv e^{w \text{Ln } z}$ hatványozás is egyértékű függvények, ami azon múlik, hogy az $\arg z$ fázis értéke határozottan a $]-\pi, \pi]$ intervallumba esik.

A dolgozatot nagyjából témák szerint osztottam fel fejezetekre. Mindegyikbe került „kitekintés”, ahol az utolsó fejezetben felsorolt tézispontokban nem szereplő, e dolgozat írása közben is művelt kutatásokat villantok fel, mutatva, hogy friss és virágzó témákról van szó. Sok részletszámolást kihagytam, ugyanakkor néhány témát (főleg a bevezetőben) alaposabban kifejtettem arra gondolva, hogy a dolgozat esetleg referenciaként is használható lesz érdeklődő diákok számára.

Tartalomjegyzék

Előzetes megjegyzések	1
Tartalomjegyzék	2
1. Bevezetés	3
1.1. Nagyenergiás nehézion-fizika	3
1.2. A kvark-gluon plazma felfedezése	8
1.3. További eredmények, jelenlegi kihívások	13
2. Bose-Einstein-korrelációk vizsgálata	15
2.1. Bose-Einstein-korrelációk a nehézion-fizikában	15
2.2. Coulomb-effektus Lévy-eloszlás alakú forrásfüggvények esetén	21
2.3. A végállapotú erős kölcsönhatás szerepe	32
2.4. Coulomb-kölcsönhatás és Fourier-transzformáció	37
2.5. Összefoglalás és kitekintés	47
3. Bose-Einstein-korrelációk mérése	48
3.1. A PHENIX kísérlet	48
3.2. Korrelációs függvények mérése: adatanalízis	52
3.3. Korrelációs függvények: eredmények	65
3.4. Összefoglalás, kitekintés	71
4. Hidrodinamikai modellezés	73
4.1. Hidrodinamika a nehézion-fizikában; alapegyenletek	73
4.2. Forgó tágulás analitikus tárgyalása	82
4.3. Polarizált barionok keltése analitikus hidrodinamikai modellben	96
4.4. Összefoglalás, további kutatási irányok	101
5. Tézispontok	103

1. Bevezetés

1.1. Nagyenergiás nehézion-fizika

1.1.1. Az erős kölcsönhatás kísérleti tanulmányozása

A fizika célja az anyagi világ legalapvetőbb szintű megértése; matematikai nyelven, de kísérletileg ellenőrizhetően. Az egyik „frontvonal” mindig is az volt, hogy az egyre kisebb méretek és egyre nagyobb energiakoncentrációk felé haladjunk: a molekulák atomokra, az atomok atommagra és elektronhíjra, az atommagok *nukleonokra* (protonokra és neutronokra) bonthatók. A nukleonok kölcsönhatásának leírására be kellett vezetni az elektromágneses kölcsönhatás mellett az *erős kölcsönhatást*, majd a béta-bomlásos részecskeátalakulásokéra a *gyenge kölcsönhatást*: a gravitációval együtt így teljessé vált a természetben előforduló kölcsönhatások ma is használt osztályozása.

Az 1960-as években világos lett, hogy az anyagszerkezet nem ér véget a nukleonok szintjén, de másképp folytatódik, mint „fentebb”. A protonok és a neutronok (és a további, az erős kölcsönhatásban résztvevő részecskék, a *hadronok*) még elemibbnak gondolt *kvarkokból állnak*: a szaporodó számú felfedezett hadronfajtákat kvarkok kötött állapotaiként sikerült rendszerezni, emellett a (mélyen rugalmatlan, azaz a néhány új részecske keltéséhez szükségesnél jóval nagyobb energiacseréjű) hadronütközéseket elemibb összetevők szórásaként lehetett értelmezni. Azt viszont csak fenntartásokkal mondhatjuk, hogy a hadronok kvarkokra *bonthatók*: a *kvarkbezárásnak* elnevezett kísérleti tapasztalat szerint kvarkok nem fordulnak elő a természetben szabad részecskékként, csak is hadronok (*mezonok*, azaz kvark-antikvark kötött állapotok, vagy *barionok*, azaz három kvarkból álló kötött állapotok, mint a nukleonok is) alkotóiként. Közben megszületett az erős kölcsönhatást a kvarkok (és a közvetítőrészecskék, a *gluonok*) szintjén leíró nemábeli mértékelmélet, mely a *kvantumszíndinamika* (Quantum Chromodynamics, QCD) nevet kapta (az $SU(3)$ mértékcsoport ábrázolási terét adó belső szabadsági fok, a *szín* után). A QCD alaptulajdonsága az *aszimptotikus szabadság*, miszerint (mintegy a kis energiás folyamatokat uraló kvarkbezárás ellenpontjaként) nagy impulzusátadású szórásfolyamatokban a kölcsönhatás csatolási állandója egyre kisebbé válik.¹

Ez alapján azt lehetett gondolni, hogy igen nagy hőmérsékletű anyagban a kvarkok (mivel a nagy átlagos mozgási energia miatt a kölcsönhatásuk gyengül) „kiszabadulhatnak”, és a hadronokból álló atommag-anyag „szétolvad”. Érdeemes megjegyezni, hogy ez más szempontból is kézenfekvőnek tűnt [1]: magas hőmérsékleten új halmazállapot (fázis) létezése feloldja a *Hagedorn-paradoxont* [2], melynek lényege, hogy a megfigyelt hadron-állapotok száma alapján a kb. $T_H \approx 150$ MeV értékű *Hagedorn-hőmérsékletet* univerzális felső határhőmérsékletnek kellett volna tekinteni.²

¹A mélyen rugalmatlan hadronszórások leírására feltett elemibb összetevőket, a *partonokat* a QCD keretein belül ténylegesen kvarkokkal és gluonokkal lehetett azonosítani. Ehhez már-már eleve szükség is van az aszimptotikus szabadságra: utóbbi gondolat tehát igényként merült fel még a QCD előtt.

²A megfigyelések szerint egy adott M felső tömeghatárig bezárólag lehetséges hadron-állapotok száma M növelésével $\sim e^{M/T_H}$ módon nő, így ha a T hőmérséklet T_H -nál nagyobb, akkor az állapotok számának exponenciális növekedése miatt nem létezhetne a termodinamikai $\sum_n e^{-E_n/T}$ állapotösszeg.

A mondott fajta új anyagnak az 1980-as években a *kvark-gluon plazma* (QGP) nevet adták [3]. A hadronok ilyen szétolvasztásához szükséges (a T_H értéke alapján nagyjából 150 MeV, vagyis nagyságrendileg billió fokos) hőmérséklet a természetben nagy léptékben „utoljára” 13,7 milliárd évvel ezelőtt, az Ősrobbanás utáni mikromásodpercekben fordult elő: ekkor a mai, lényegében protonokból, neutronokból és elektronokból álló anyag helyett kvark-gluon plazma töltötte ki az Univerzumot. A kvark-gluon plazma tanulmányozása tehát az Univerzum korai szakaszának ismeretéhez is közelebb visz. Földi körülmények között ilyen extrém hőmérsékletet (és nyomást) nehéz atommagok („nehézionok”) részecskegyorsítókban való ütköztetésével sikerülhet előállítani. Ha ilyen ütközésben létrejön kvark-gluon plazma, az rohamosan tágul és hűl (mintegy kis méretskálán „megismételve” az Ősrobbanást), és végül a kiszabadult kvarkokból újra ismert hadronok jönnek létre (*hadronizáció*). Ez a hadronikus közeg is tovább tágul: végül abbamaradnak a hadronszórások is; ennek neve *kifagyás* („freeze-out”). Ezután a végső keletkezett hadronok (vagy bomlástermékeik) az ütközési pont körüli detektorokba érkeznek.

Az a kutatási irány, mely tehát az erősen kölcsönható anyag fázisszerkezetének tanulmányozására született, illetve vált ki a magfizikából az anyagszerkezet-kutatás következő „lépcsőjeként”, így a (nagyenergiás) *nehézion-fizika* nevet kapta. Az említett energiájú atommag-ütközések vizsgálatát célzó kísérletek sok helyen működtek és működnek ma is, kezdve a berkeley-i Bevalac gyorsítóval, ahol $\sqrt{s_{NN}} = 1$ GeV-es (nukleononként 1 GeV tömegközépponti energiájú) ütközéseket vizsgáltak.³ A BNL (Brookhaveni Nemzeti Laboratórium) AGS gyorsítójánál (Alternating Gradient Synchrotron) ez a mennyiség 5 GeV, a CERN SPS-nél (Super Proton Synchrotron) 17 GeV, a brookhaveni Relativisztikus Nehézion-Ütköztetőnél (Relativistic Heavy-Ion Collider, RHIC) 200 GeV, a CERN Nagy Hadronütköztetőnél (Large Hadron Collider, LHC) 2760 GeV értéket ért el.

Az áttörést talán a brookhaveni RHIC gyorsító kísérletei (a STAR, a PHENIX, a PHOBOS és a BRAHMS) hozták a 2000-es évektől kezdődően: itt vált világossá, hogy ($\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV energiájú mag-mag ütközésekben) valóban létrejön az erősen kölcsönható anyag új halmazállapota, ami azonban a várt gázszerű állapot helyett majdnem tökéletes folyadékként viselkedik. Erre a következtetésre több (itt a bevezetőben alább részletezett) kísérleti eredmény szintéziséből lehetett jutni; 2005-ben mind a négy kísérlet összefoglaló cikket írt erről, ld. a [4–7] hivatkozásokat. Az új halmazállapotot ettől kezdve sokszor sQGP-nek („strongly coupled”, erősen csatolt QGP-nek) nevezik. A CERN LHC-nél végzett mérések megerősítették ezt a következtetést egy nagyságrenddel nagyobb ütközési energián is.

Az alapvető felfedezések (a 2000-es évek eleje) után a nehézion-fizika átlépett abba az időszakba, amelyet „precíziós nehézion-fizikának” nevezhetünk. Ez a gyorsítótechnika és a kísérleti berendezések (és párhuzamosan a fenomenológiai modellek) fejlődésével vált lehetővé: a mérhető mennyiségek statisztikai jellegűek, így több ütközés megfigyelése differenciáltabb információkat ad. Néhány mostanában aktuális alapvető kérdés: pontosan milyen ütközési energia és atommagméret kell a kvark-gluon plazma létrejöttéhez; hanyadrendű a fázisátmenet különböző ütközési

³Az s a részecske-ütközések leírásában használt egyik *Mandelstam-változó*: a tömegközépponti rendszerben mért össz-energia négyzete. Tehát \sqrt{s} az ütközési energia; az $_{NN}$ index jelentése pedig, hogy ez nukleonpáronként értendő.

energiákon; létezik-e a fázistérképen *kritikus pont* (másodrendű fázisátalakulás); mit mondhatunk kísérletileg a keletkezett anyag állapotegyenletéről, kinetikus együtthatóiról (viszkozitás, vezetőképességek)?⁴ Úgy tűnhet talán, hogy ezek vizsgálata nem kínál annyi izgalmat, mint az első felfedezések, de távolról sincs így: a részletes vizsgálatokat igénylő kérdések nem kevésbé fontosak az erős kölcsönhatás megértése szempontjából. Elméleti oldalról persze QCD is egyre pontosabb válaszokat kínál, azonban mégiscsak a kísérleti ellenőrzés az, ami a fizikai kutatás lényege marad.

Ez az első fejezet bevezető jellegű: elővesszük azokat a ma már nehézion-fizikai „alpműveltségnek” számító, jórészt a RHIC gyorsító kísérleteiből származó eredményeket, melyek szerint nagyenergiás atommag-ütközésekben valóban létrejön az erősen csatolt kvark-gluon plazma. Utalunk a későbbi, új szempontokat adó mérésekre is. Először azonban összefoglalunk néhány mérhető mennyiséget; a bonyolultabb kérdésekre adható kísérleti válaszok is ezekre (és ezeknek a kérdésfeltevésekkel való, fenomenologikus megfontolásokból kapható kapcsolatára) épülnek.

1.1.2. Nehézion-fizikai mérhető mennyiségek

A koordinátarendszer z tengelyét a atommagok gyorsításának irányában (nyalábirányban) szokás felvenni, az x - y sík erre merőleges. A felgyorsított (ultrarelativisztikus esetben a Lorentz-kontrakció miatt mintegy lapos korong alakú) magok valamekkora b *ütközési paraméterrel* eltalálják egymást, majd azon részük, amely így „átlapol”, reakcióba lép, az át nem fedő („spektátor”) rész pedig továbbhalad. Az ütközés *centralitását*, azaz hogy mennyire átfedő módon találták el egymást az atommagok, százalékban adják meg (az összes eseményhez viszonyítva). Jobban átfedő ütközéseket hívjuk *centrális*(abb)aknak, kevésbé átfedőeket *periférikus*(abb)aknak, és például a 20-40%-os centralitás-osztály azt jelenti, hogy az ilyen eseményeknél az ütközések 20%-a már centrálisabb, de 40%-a legalább ilyen centrális. Centrálisabb ütközésekben nagyobb térfogatban zajlik reakció, több részecske keletkezik: a centralitást az ütközés ilyen „globális” jellemzőjét (például a keletkező össz-részecskeszámot) mérve lehet kísérletileg meghatározni eseményenként.

Az ütközésből a detektorok felé tartó részecskék impulzusa és esetleg típusa mérhető (kisebbségű bizonytalansággal). A részecskék kinematikai jellemzőinek jelölései:

$$\begin{array}{ll}
 m : & \text{tömeg,} & \vartheta : & \text{polárszög (a } z \text{ tengelytől mérve),} \\
 \mathbf{p} : & \text{(hármás)impulzus,} & \varphi : & \text{azimutszög (egy laborrendszer-} \\
 E : & \text{energia, } E^2 = m^2 + p^2, & & \text{beli kijelölt irányhoz képest).}
 \end{array} \tag{1.1}$$

Az impulzust *longitudinális* és *transzverz* (nyalábirányú és arra merőleges) komponensekre bontjuk:

$$p_z := p \cos \vartheta, \quad p_t := p \sin \vartheta \quad \Rightarrow \quad p^2 = p_z^2 + p_t^2. \tag{1.2}$$

⁴Az anyagszerkezet ilyen eggyel magasabb szintű strukturális vizsgálata szinte már a *kémia* felségterülete. Érdekes (és elsőre elgondolkodtató) ezzel kapcsolatos tapasztalat volt számomra, hogy kiváló, nemzetközileg is ismert nehézion-fizikai kutatócsoportok sok helyen (például a New York állambeli Stony Brook egyetemen is, ahol volt szerencsém látogatóként némi időt eltölteni) nemcsak a fizikai, hanem a kémiai intézet keretein belül is működnek.

A felsoroltak mellett a következő kinematikai jellemzők is használatosak, melyekre megadunk néhány gyakran használt könnyen ellenőrizhető összefüggést is:

$$\begin{aligned}
 m_t &:= \sqrt{m^2 + p_t^2} && (\text{transzverz tömeg}), && E^2 = m_t^2 + p_z^2, \\
 y &:= \frac{1}{2} \ln \frac{E + p_z}{E - p_z} && (\text{rapiditás}), && \text{th } \eta = \cos \vartheta, \\
 \eta &:= \frac{1}{2} \ln \frac{p + p_z}{p - p_z} && (\text{pszeudorapiditás}) && p_z = p_t \text{ sh } \eta, \\
 &&& && p = p_t \text{ ch } \eta, \\
 &&& && p_z = m_t \text{ sh } y, \\
 &&& && E = m_t \text{ ch } y.
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

A kísérleti elrendezés lehet *fix céltárgyas* vagy *ütközőnyalábos*. Az y rapiditás z irányú Lorentz-boostokra additív (azaz egy $V_z = \text{th } \omega$ sebességű rendszerbe átülve $y \rightarrow y - \omega$ módon változik). A nehézion-fizikában a tömegközépponti rendszerben (ütközőnyalábos esetben ez a laborrendszer is) a nyalábra merőlegesen, $y \approx 0$ -val (azaz a központi rapiditástartományban) keletkező részecskék talán a legérdekesebbek. Az η pszeudorapiditás $E \approx p$ (ultrarelativisztikus) esetben egybeesik y -nal, és lényegében a ϑ polárszöget helyettesíti. Tömegközépponti rendszerben $\eta = 0$ a midrapiditásnak ($\vartheta = 90^\circ$) felel meg, $\eta \rightarrow \pm\infty$ pedig az előre- vagy hátraszórásnak ($\vartheta \rightarrow 0^\circ$ vagy $\vartheta \rightarrow 180^\circ$).

Az alapvető mérhető mennyiség az $N_1(\mathbf{p})$ *egyrészecske-eloszlás* (vagy: spektrum, hozam), a keletkező részecskék invariáns impulzustérfogatelemre vonatkoztatott várható száma ütközésenként:

$$N_1(\mathbf{p}) = E \frac{dn}{d^3\mathbf{p}} = \frac{E}{p_t} \frac{dn}{dp_t dp_z d\varphi} = \frac{E}{p} \frac{1}{p_t} \frac{dn}{dp_t d\eta d\varphi} = \frac{1}{p_t} \frac{dn}{dp_t dy d\varphi}. \tag{1.4}$$

Természetesen ez minden típusú részecskére (pionok, kaonok, protonok, fotonok stb.) külön-külön értelmezhető. Ellenőrizhető az is, hogy a felírt további alakok valóban ekvivalensek az elsővel. Érdekes a φ azimutuszög szerinti Fourier-sorfejtést is használni; ennek szokásos felírása

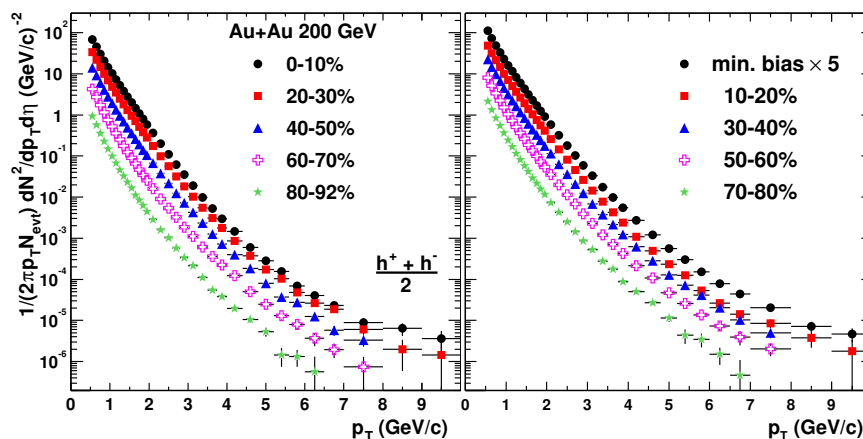
$$N_1(\mathbf{p}) = \frac{1}{p_t} \frac{dn}{dp_t dy d\varphi} = \frac{1}{2\pi p_t} \frac{dn}{dp_t dy} \cdot \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cos[n(\varphi - \Psi_n)] \right]. \tag{1.5}$$

A v_n -ek az azimutális *anizotrópia-paraméterek* (nem írtuk ki, de ezek is p_t és y függvényei), a Ψ_n -ek pedig a (különböző rendű) *reakciósíkok*. A 2010-es évek óta, az egyre több adat birtokában lehetségessé vált sorban a v_3 , v_4 , v_5 stb. mérése, azonban sok esetben nincs ehhez (azaz lényegében a teljes $N_1(\mathbf{p})$ eloszlás letapogatásához) elég adat. Ekkor a v_2 a legfontosabb: ennek neve *elliptikus folyás*, ezt már a nehézion-fizikai kutatások kezdete óta kiterjedten mérik és modellezik.⁵ Mint kiderül, a v_2 (és kisebb részben a v_4 , v_6 , stb. azaz a párosadrendű paraméterek) ténylegesen a részecskekeltő forrás geometriai jellemzőivel vannak kapcsolatban, a páratlan rendű v_n -ek (különösen a v_3) pedig az ütközésben közvetlenül létrejött kezdeti állapot fluktuációival.

A szögre átlagolt $\frac{1}{2\pi p_t} \frac{dn}{dp_t dy}$ eloszlás leginkább az $y \approx 0$ midrapiditás környékén az érdekes (ahol y függvényében általában széles maximum található). „Spektrum” alatt sokszor ezt a (p_t -függő) mennyiséget értik; az 1.1 ábra illusztrációként ilyet mutat. A mért eloszlás értéke több nagy-

⁵Ha a v_n -ek közül csak a v_2 -re koncentrálnunk, akkor ennek reakciósíkjához rögzíthetjük az x - y koordinátarendszert; sokszor ezért nem jelenik meg Ψ_2 a v_2 -t így bevezető Fourier-sor alakú képletben.

ságrendet átölel. Napjainkban sikereket érnek el azok a módszerek, melyek az egész spektrumot egyszerre, egy függvényalakkal írják le.⁶ Nagyon hasznos mégiscsak, ha megkülönböztetjük a „kis” és a „nagy” impulzusokat. A „nagy” impulzusú ($p_t \gtrsim 2-3$ GeV) tartományt a „kemény” folyamatok, a QCD perturbatív megoldásával leírható partonszórások (és az ezek hadronizációjából kialakuló „részcsekezapórok”, *jet*-ek) határozzák meg; ebben a tartományban a spektrum csökkenése hatványfüggvény-szerű. A részecskék nagy része viszont a „lágú” kinematikai tartományban, „kis” impulzussal ($p_t \approx 0,3$ GeV) keletkezik; itt a spektrum csökkenése exponenciális. Kiderült, hogy a részecskék átlagos impulzusa (melyet tehát a kis impulzusok tartománya dominál) alig függ az ütközés energiájától, centralitásától. Az exponenciális csökkenés pedig azt sugallja (és a részletesebb vizsgálatok messzemenően alátámasztják), hogy a kis impulzusú részecskék keltése statisztikus folyamat: a sok, egyedileg nem követhető elemi ütközés nyomán kialakul egy termalizált közeg, amiből megfelelő termikus eloszlással keletkeznek a megfigyelt részecskék. A következő fejezetekben részletesebben lesz szó ilyen statisztikus leírásra alkalmas hidrodinamikai modellekről.



1.1. ábra. Példa nagyenergiás ütközésekben mért részecskespektrumokra (a PHENIX kísérletben): azonosítatlan töltött hadronok keletkezése különféle centralitású $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV-es arany-arany ütközésekben [8]. Látható a „kis” és a „nagy” impulzusok tartománya közötti különbség.

Egy további mérhető mennyiség a kétrészecskés korrelációs függvény; ennek definíciója

$$C_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{N_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)}{N_1(\mathbf{p}_1)N_1(\mathbf{p}_2)}; \quad (1.6)$$

persze itt is fontos megmondani, hogy milyen részecskefajták párosításáról van szó. A nevezőben két egyrészecske-eloszlás szorzata szerepel, a számlálóban pedig a kétrészecskés invariáns impulzuseloszlás: adott \mathbf{p}_1 és \mathbf{p}_2 körüli $\frac{d^3\mathbf{p}_1}{E_1}$ és $\frac{d^3\mathbf{p}_2}{E_2}$ impulzustérfogat-elembe eső részecskepárok várható száma. Ez a C_2 1-gyel egyenlő, ha a részecskék korrelálatlanul keletkeznek; 1-től való eltérésének számos oka lehet, például az azimutális anizotrópia nemeltűnő volta, összetett részecskék bomlása, vagy nagyenergiás kvarkok korrelált hadronizációja (*jet*ek).

Rendkívül fontos az azonos bozonok (például egyforma töltésű pionok) esete, mert itt az azonos részecskék kvantummechanikai megkülönböztethetlensége kap szerepet. Az ilyen korrelációkat

⁶Úgynevezett *Tsallis-Pareto-eloszlásokkal*; a dolgozatban ezzel a kérdéskörrel nem foglalkozunk.

ezért *Bose-Einstein-korrelációknak* hívjuk. A 2. és a 3. fejezetekben részletesen lesz szó ezekről a korrelációkról (és a velük kapcsolatos kutatási témáimról); most csak röviden megjegyezzük, hogy ezek jelentősége abban áll, hogy segítségükkel a részecskekeltő forrás geometriai mérete, időbeli dinamikája figyelhető meg femtométeres pontossággal, kitágítva ezzel a nagyenergiás reakciókról való képalkotás lehetőségeit. Azok a(z) alább röviden bemutatott) mérési eredmények, melyek a kvark-gluon plazma felfedezése során a részecskekeltő forrás (tehát a keletkezett, táguló és hűlő anyag) méretével kapcsolatosak, nagyjából ilyen korrelációs mérésekből származnak.

1.2. A kvark-gluon plazma felfedezése

1.2.1. Új anyag keletkezése

A RHIC részecskegyorsítónál állt rendelkezésre először elég adat ahhoz, hogy a — ritkának számító — nagyimpulzusú részecskék spektrumát is részletesen megmérjék nehézion-nehézion (A+A) ütközésekben; a RHIC-nél konkrétan arany-arany (Au+Au) ütközésekben. Az ebből származó első komoly felfedezés gerince az, hogy ezeket a spektrumokat összehasonlíthatjuk ugyanolyan energiájú nukleon-nukleon (konkrétan: proton-proton, p+p) ütközésekben mért részecskespektrummal. Így definiálható az R_{AA} , az úgynevezett *nukleáris módosulási tényező* („nuclear modification factor”):

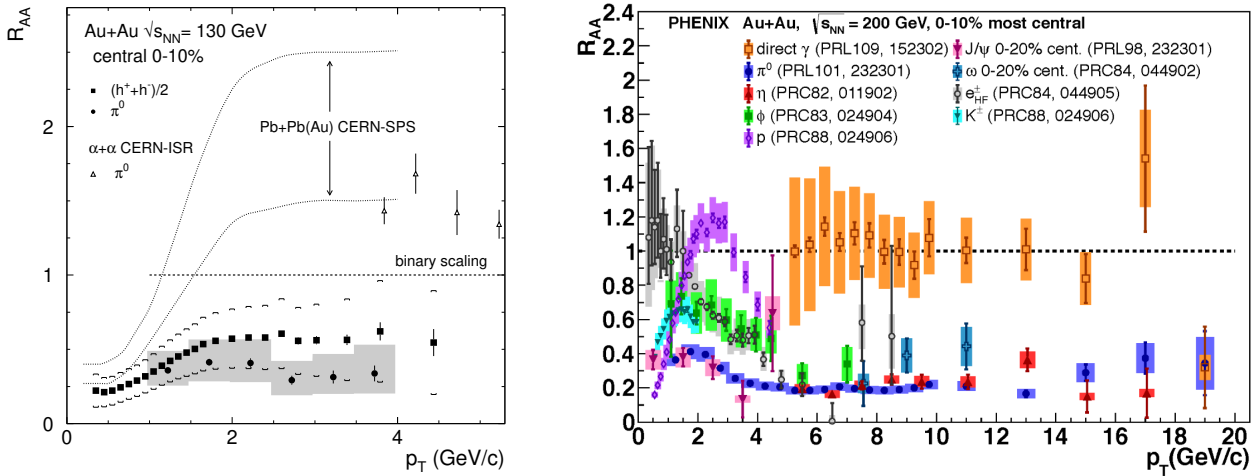
$$R_{AA} := \frac{\langle \text{spektrum A+A ütközésekben} \rangle}{\langle \text{spektrum p+p ütközésekben} \rangle \times \langle \text{bináris ütközések A+A-ban} \rangle}. \quad (1.7)$$

Ez a mennyiség is p_t -függő (mint a spektrum is), és érzékeny (lehet) arra, hogy milyen típusú keletkezett részecskékről van szó. A felírt kifejezés nevezőjének második tényezője az egy mag-mag ütközésben történő elemi nukleon-nukleon ütközések várható száma: ez (a mag-mag ütközés centralitását is figyelembe véve) az úgynevezett *Glauber-moddellel* határozható meg. Ha egy nehézion-ütközés csupán a magokat alkotó nukleonok ütközéseinek inkoherens összege, akkor $R_{AA} = 1$.

Az 1.2. ábra két R_{AA} -eredményt mutat a PHENIX kísérlet mérései közül. A 2001-es futási időszakból származón az akkor mért $\sqrt{s_{NN}} = 130$ GeV-es Au+Au ütközésekben egyértelműen látszik az R_{AA} érték 1-nél kisebb volta töltött hadronokra és semleges pionokra is [9]. Ez egy új, korábban nem látott jelenség volt tehát. A másik ábra későbbi, nagyobb statisztikájú, RHIC-standard $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV energiájú Au+Au ütközésekben mért nukleáris módosulási tényezőket mutat (az ábrán jelölt hivatkozásokból vett adatokat a PHENIX együttműködés által kedvelt módon egy ábrán tömörítve): jól látszik, hogy centrális ütközésekben minden típusú részecskére nagy impulzusnál $R_{AA} < 1$, kivéve úgynevezett *direkt fotonokra*, melyekre R_{AA} 1-gyel konzisztens (ennek jelentőségét ld. lentebb). Később az LHC kísérletei is megerősítették az R_{AA} 1-nél kisebb voltát hadronokra [10, 11], valamint lehetővé vált az egyedi keletkező hadronok mellett egész *jetek* rekonstrukciója: $R_{AA} < 1$ fennáll mag-mag (ott Pb+Pb) ütközésekben keletkező jetekre is [12].

A megfigyelt jelenségre (a nagyimpulzusú hadronok „elnyomására”) az lett a magyarázat (vagyis: ezzel igazolódtak be az ilyen irányú, perturbatív QCD alapú jóslatok; ld. pl. [13, 14]), hogy ilyen nehézion-ütközésekben új, erősen kölcsönható anyag keletkezik, amiben a nagyenergiás szórt

partonok (kvarkok és gluonok) energiát veszítenek, így adott impulzussal a vártnál kevesebben keletkeznek. A jelenség közkeletű neve pedig *jet quenching*, „jet-elnyomás” lett.



1.2. ábra. Bal oldalon: a PHENIX kísérlet első mérése az R_{AA} nukleáris módosulási tényezőről [9]. Jobb oldalon: R_{AA} értékek különféle részecskékre későbbi részletesebb mérések alapján.

A későbbi, nagyobb statisztikájú (részletesebb) mérésekből a következők derültek ki:

- d+Au (deutérium-arany) ütközésekben nem figyelhető meg elnyomás [15], így az Au+Au ütközésekben látott elnyomás nem az ütköző magok kezdeti állapotának nagy mozgási energiánál történő megváltozása, hanem valóban a kialakult állapot (anyag) hatása miatt lép fel.
- Különféle végállapotú részecskék (π^0 , η , többi mezonok stb.) tömegüktől függetlenül hasonló mértékben nyomódnak el Au+Au ütközésekben (ld. az iménti 1.2. ábrán is). Ez is arra utal, hogy a keletkezett részecskék energiavesztesége még parton-szinten, hadronizáció „előtt” történik.
- Igen fontosak a *direkt fotonok*: ezek azok a fotonok, amelyek közvetlenül az ütközési zónában keletkeznek.⁷ Az ilyen fotonok az úgynevezett *áthatoló próbák* körébe tartoznak, mert keletkezésük után nem hatnak kölcsön a színtöltéssel, így azt gondolhatjuk, hogy ilyen értelemben „adadálytalanul” áthaladnak a keletkező erősen kölcsönható anyagon. „Megnyugtató” tehát, hogy a mérések szerint ők elnyomás-mentesen figyelhetőek meg, azaz R_{AA} -juk 1-gyel konzisztens (ld. az 1.2. ábrát). Vagyis: a más részecskékre megfigyelt elnyomás valóban a színtöltéssel, azaz az erős kölcsönhatással kapcsolatos. A direkt fotonok elnyomásmentessége más szempontból nézve arra érv, hogy az R_{AA} (1.7) szerinti definíciójában *tényleg* a bináris nukleon-ütközések számával kell összenormálni a p+p és A+A ütközésekben mért spektrumokat. Ezt a gondolatot azóta a centralitás fogalmának kis (d+A, p+A) ütköző rendszerekben való validálására is használják [16].
- $R_{AA} < 1$ a nehéz kvarkokat tartalmazó hadronokra is [17–19]: ez is azt bizonyítja (mivel ilyen kvarkok nem a termalizált közegben, hanem csakis a kezdeti partonszórásokban keletkeznek),

⁷A kísérletileg megfigyelhető összes foton (az „inkluzív” fotonspektrum) jórészt a semleges pion (π^0), kisebb részben további hadronok (például az η -mezon) bomlásterméke; közepes p_t -nél a direkt fotonok csak mintegy 10% járulékot adnak. Nagy ($\gtrsim 20$ GeV) impulzusnál várhatóan átbillen a mérleg a direkt fotonok javára.

hogy valóban az erősen kölcsönható közeg hatásáról van szó.⁸ Megfigyelhető továbbá, hogy (a modellekkel összhangban) a b-kvarkok kevésbé nyomódnak el, mint a c-kvarkok.

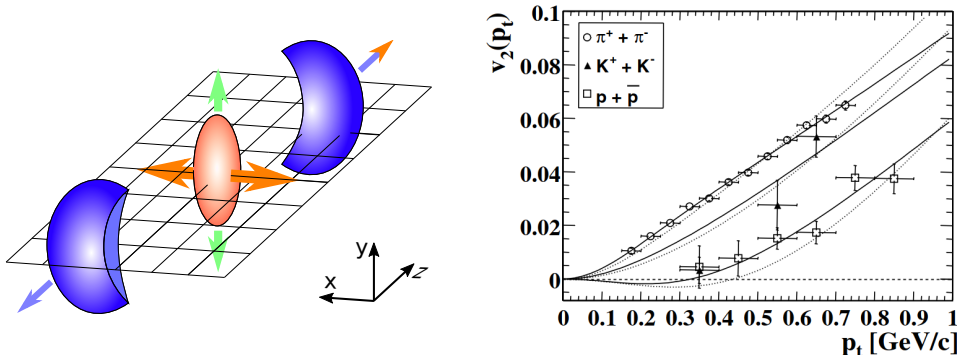
1.2.2. Kvarkok tökéletes folyadéka

A kis impulzusú ($p_t \lesssim 2-3$ GeV) részecskék nehézion-ütközésekben $e^{-E/T_{\text{eff}}}$ alakú Boltzmann-eloszlással leírható spektrummal keletkeznek (itt E a részecske energiája). Az egyik legelső és legalapvetőbb megállapítás az (volt), hogy az így bevezetett T_{eff} paraméter („effektív hőmérséklet”) a részecsketípustól, konkrétan a vizsgált részecske m tömegétől függ, mégpedig első közelítésben

$$T_{\text{eff}} = T_0 + m \langle u^2 \rangle \quad (1.8)$$

módon. Itt az $\langle u^2 \rangle$ mennyiség kísérleti értéke kb. 0,5, míg a T_0 értéke kb. 170 MeV. Ebből arra lehet következtetni, hogy a hadronon egy termikus, T_0 hőmérsékletű közegből keletkeznek. Ez megfelel annak, hogy ilyen a közeg hőmérséklete akkor, amikor a kvark-gluon plazma „kifagy”, és visszaalakul a megfigyelt hadronokká; T_0 mondott értéke összhangban van a rács-QCD számítások szerinti kvarkanyag-hadronanyag fázisátmeneti hőmérséklettel is [20]. Az $\langle u^2 \rangle$ mennyiség pedig a közeg tágulási sebességének feleltethető meg: a mozgó közegben termalizált hadronok tömegüktől függő impulzust szereznek a tágulás miatt. A későbbi 4. fejezetben egy konkrét példán látni fogjuk, hogy hogyan adódik hidrodinamikai számításokból ilyen m -függésű T_{eff} effektív hőmérséklet.

Nem teljesen centrális ütközésekben a spektrum mellett az egyik legfontosabb mérhető mennyiség a v_2 elliptikus folyás. Az első ilyen mérések a RHIC-nél azt mutatták, hogy a keletkező hadronok v_2 paramétere egyáltalán nem elhanyagolható [21, 22], ami pedig lenne a helyzet, ha a keletkezett közegben a részecskék szabad úthossza nagy volna (mint egy gáz-szerű halmazállapotban).



1.3. ábra. Bal oldal: illusztráció nemcentrális ütközésről. A magok egy része továbbhalad; az ütközésben létrejött anyagból keletkező részecskék elliptikus folyása a kezdeti aszimmetria hatására jelenik meg. Jobb oldalt: egy első mérés a v_2 -ről a transzverz impulzus függvényében (STAR, [21]).

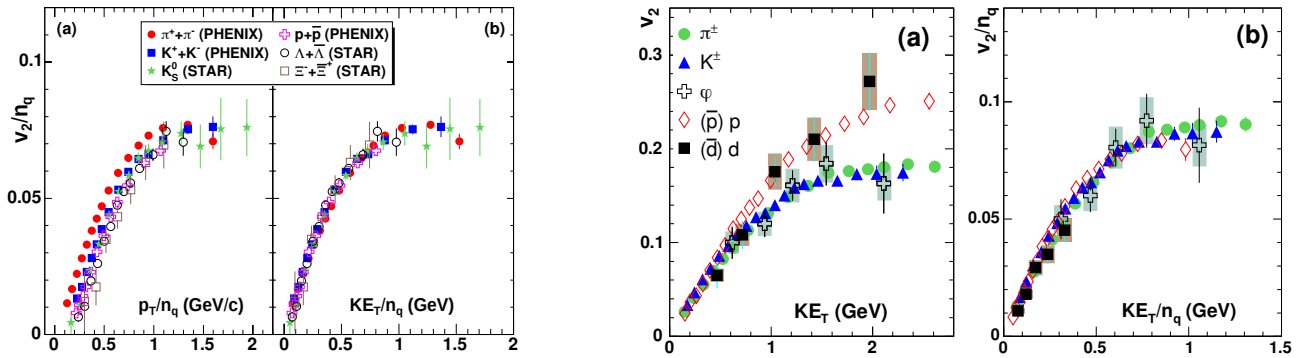
Az elliptikus folyás megfigyelése tehát kollektív, folyadékszerű mozgásra enged következtetni. Az iménti 1.3. ábra az egyik első v_2 -mérés eredményét mutatja, illetve egy szokásos illusztrációt arról,

⁸A PHENIX kísérletben ezen mezonok (D , B stb.) bomlástermékeit: elektronokat (és pozitronokat) lehetett megfigyelni; az iménti 1.2. ábrán ezek az adatok mint e_{HF}^{\pm} (mint HF=„heavy flavor”) szerepelnek.

hogy a kezdeti geometriai aszimmetria a nagyobb nyomásgradiens (a kisebb geometriai méret) irányában intenzívebb tágulást okoz, és ez vezet az impulzuseloszlás anizotrópiájához.

Az adatmennyiség növekedése a v_2 (és a többi v_n paraméterek) tekintetében is egyre finomabb részletekre érzékeny méréseket tett lehetővé. Ezekből a következők derültek ki:

- A különféle típusú hadronokra mért v_2 mennyiségek *kvarkszám-skálázást* mutatnak: a v_2/n_q mennyiség az $(m_t - m)/n_q$ függvényében ábrázolva a hadronfajtától függetlenül mutatkozik (itt n_q az adott hadronban lévő kvarkok száma, az $m_t - m$ mennyiség neve pedig néha „transzverz kinetikus energia; KE_t módon is jelölik). Ebből arra lehet következtetni, hogy a hidrodinamikai viselkedés már kvark-szinten megjelenik ilyen ütközésekben [23].
- A v_2 ilyen skálázást követ ritka (s) kvarkokat tartalmazó mezonokra is; például az $s\bar{s}$ kötött állapot ϕ -mezonra is, pedig tisztán hadronikus kölcsönhatások mellett ezek kevésbé „vennék át” a közeg folyását [24]. Továbbá a nehéz kvarkok is részt kapnak a közeg folyásából [17].



1.4. ábra. Bal oldalon: különféle hadronokra mért v_2 értékek; a transzverz kinetikus energia ($KE_t \equiv m_t - m$) egy kvarkra eső értéke függvényében az egy kvarkra jutó v_2/n_q érték univerzális függvény. Következtetés: a hadronok tényleg kvark-közegből jönnek létre. Jobb oldalon: ugyanez a skálázás érvényes ϕ -mezonokra és deuteronokra is.

- A spektrum azimutális sorfejtésében a következő páros rendű együttható, a v_4 sem elhanyagolható; a releváns $v_4/(v_2)^2$ mennyiség 1-hez közeli [25]. Ez (illetve a v_2 értékek részletes hidrodinamikai elemzése) arra utal, hogy a folyadékszerű tágulás szinte nulla sűrűdással történik.⁹ A releváns fajta kinematikai viszkozitás (η/σ , ahol η a dinamikai viszkozitás, σ a tömeg szerepét játszó entrópiasűrűség) értéke $\frac{1}{4\pi}$ körülnek adódik [26, 27], ami egyúttal egy általánosan elfogadott sejtés szerint az η/s mennyiség univerzálisan lehetséges legkisebb értéke [28]. Az ilyen ütközésekben létrejött kvarkanyag tehát szinte tökéletes folyadékként viselkedik.
- A v_2 és v_4 mellett a (csakis a kezdeti állapot fluktuációi miatt megjelenő) v_3 illetve v_5 is mérhetővé vált (a megfelelő Ψ_3 illetve Ψ_5 reakciósíkokhoz viszonyítva; ld. a korábbi (1.5) egyenletbeli definíciót). Ezen anizotrópia-paraméterek viselkedése is a folyadék tökéletességét támasztja alá [29].

⁹Nem célunk itt az ilyen számolások részleteibe belemenni; azt azonban nagyon egyszerű intuitívan megérteni, hogy mint szinte minden fizikai helyzetben, itt is a nagyobb sűrűdés hamarabb „kimosná” a magasabb felharmonikusokat; a v_4 mennyiség jelentős volta tehát η/σ kicsiségéről árulkodik.

- A direkt fotonok (azaz amelyek nem bomlástermékként keletkeznek; ld. fentebb is) elliptikus folyása is jelentős [30,31]. Ez egyfajta „rejtély”, melynek lényege, hogy a direkt fotonok *áthatoló próbák*, azaz a megfigyelt direkt fotonok nemcsak a kifagyáskor, hanem az egész folyamat során keletkeznek, így jelentős részük az időfejlődésnek azon részéből kell származzon, amikor még nem alakult ki az aszimmetrikus tágulás miatti anizotrópia. A direkt fotonok v_2 -jének leírása ma is érdekes kérdésként áll a modellek előtt (ld. például a [32] összefoglalót).

1.2.3. A fázisátalakulás jellege

Mint említettük, elméleti oldalról, rács-QCD számítások alapján tudvalevő, hogy kb. 170 MeV hőmérsékleten történik meg a kvarkanyag-hadronanyag fázisátmenet (és ez hozzávetőlegesen összhangban van a bevezetőben említett Hagedorn-hőmérséklettel is). A PHENIX kísérlet (mely különösen is alkalmas ilyen mérésekre) meghatározta alacsonyabb impulzusú ($p_t \lesssim 3$ GeV) direkt fotonok spektrumát is [33]. A nagyobb impulzusú direkt fotonok jelentőségét már fentebb, az R_{AA} nukleáris módosulási tényező kapcsán láttuk; a kisebb impulzusú fotonok mérése pedig azt mutatja, hogy ezek hőmérsékleti sugárzás spektrumával keletkeznek, és a spektrum $T \gtrsim 300$ – 600 MeV kezdeti hőmérsékletre utal. Így tehát kísérleti oldalról is bizonyított, hogy a $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV-es ütközésekben létrejövő termalizált közeg kezdeti hőmérséklete mindenképpen túllépi azt az értéket, aminél hadronikus anyag még elképzelhető.

Következő kérdés a megfigyelt kvarkanyag-hadronanyag fázisátmenet rendje (természete) lehet: vajon elsőrendű, vagy másodrendű fázisátalakulásról, netán folytonos átmenetről („crossover”) lehet szó.¹⁰ Rácstérelméleti számítások szerint az átmenet folytonos [34].¹¹ Kísérleti oldalról ez a kérdés a részecskekeletkezésnek Bose-Einstein-korrelációkkal feltárt téridőbeli szerkezete alapján vizsgálható. Ennek alapja az, hogy a korrelációs függvényekből lesűrűsíthető a részecskekeltés sugárparamétere a részecskepárok átlagos impulzusának irányában, valamint az erre merőleges transzverz síkbeli irányban, és a részecskekeltés hidrodinamikai leírásából kapható egybehangzó eredmények szerint ezek különbsége a részecske kibocsátás $\Delta\tau$ időtartamáról árulkodik közelítőleg

$$R_{\text{out}}^2 - R_{\text{side}}^2 \propto (\Delta\tau)^2 \quad (1.9)$$

módon. Egy korai példa olvasható ilyen eredményre vezető számításra például a [35] hivatkozásban. (Itt R_{out} a mondott átlagosimpulzus-irányú, R_{side} pedig az erre merőleges irányú sugárparaméter; ezen irányok neve szokásosan „out” illetve „side”.) Mármost elsőrendű fázisátmenet esetén $\Delta\tau$ nem elhanyagolható nagy(obb) érték (a véges látenshő miatt; egy ezt alátámasztó számolást ld. pl. a [36] cikkben), így ilyen esetben R_{out} mérhetően nagyobb kellene, hogy legyen R_{side} -nál. A kísérleti eredmények szerint azonban (ld. pl. [37]) $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV-es Au+Au ütközésekben $R_{\text{out}}/R_{\text{side}}$ értéke 1-gyel konzisztens, így az elsőrendű fázisátalakulás kizárható.

¹⁰Elsőrendű fázisátalakulás például a szokásos víz-gőz átmenet, másodrendű például a paramágneses-ferromágneses átmenet; „crossover” a szuperkritikus víz-gőz átmenet, vagy a hidrogéngáz-ionizált plazma átmenet.

¹¹Ez azt is jelenti, hogy nincs értelme egzakt módon definiált fázisátmeneti hőmérsékletnek; különféle definíciók (pionkondenzátum várható értékének mediánja, inflexiós pontja stb.) kicsit más hőmérsékleteket adnak.

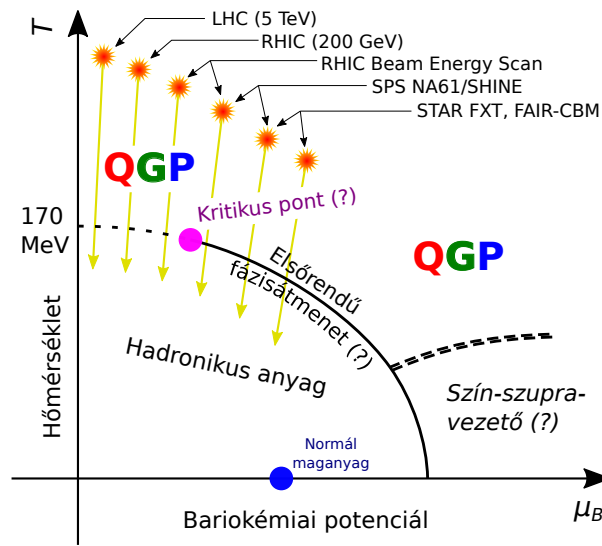
1.3. További eredmények, jelenlegi kihívások

Az előző fejezetben leírtakat összefoglalva kijelenthetjük, hogy $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV-es arany-arany ütközésekben új anyag jön létre, mely színtöltéseket hordoz, megjelennek benne a kvarkok mint szabadsági fokok, szinte tökéletes folyadékként viselkedik, kezdeti hőmérséklete messze a gondolt kvarkanyag-hadronanyag fázisátmeneti hőmérséklet felett van, és a tágulás és hűlés után folytonos átmenettel tér vissza a hadronikus fázisba. Ezek után kérdés lehet, hogy mi történik nagyobb vagy kisebb ütközési energián. Nagyobb energiájú mag-mag (Pb+Pb, $\sqrt{s_{NN}} = 2,76$ TeV) ütközéseket az LHC-nál vizsgáltak, és (mint részben említettük) a jet-elnyomás [10,11], az elliptikus folyás [38,39], illetve a direkt fotonok mérése [40,41] hasonló eredményeket hozott, hasonló tökéletes kvarkfolyadék létrejöttére utalt ilyen nagyobb energiájú ütközésekben is.

Kiseb energiájú ütközésekben viszont talán megfigyelhetjük, hogy pontosan milyen energia kell a QGP létrejöttéhez, illetve hogy milyen érdekességeket rejt még az erős kölcsönhatás fázisdiagramja. Ezt a $T-\mu_B$, azaz hőmérséklet-bariokémiai potenciál síkon szokták ábrázolni. A RHIC-nél megfigyelt maximális energiájú ütközések, illetve az LHC-nél megfigyelt ütközések esetén a kezdeti hőmérséklet magas (mint mondtuk, biztosan $\gtrsim 300$ MeV), azonban a bariokémiai potenciál alacsony, és itt tudjuk, hogy folytonos az átmenet („crossover”). Elméleti oldalról (az úgynevezett előjelprobléma miatt) igencsak nehéz rács-QCD számításokat végezni véges (nem kicsi) μ_B értékeknél; a QCD alapvonásait remélhetőleg tükröző effektív modellekből úgy tűnik, hogy a fázisátmeneti görbén van egy *kritikus pont*, aminél nagyobb μ_B esetén az átmenet már elsőrendű. Másrészt nagyon nagy μ_B -nél, de kis hőmérsékleten (ilyen körülmények nem nehézion-ütközésekben, hanem kompakt csillagokban várhatók) még újabb fázisok is megjelennek.

A nehézion-fizikai kutatások egyik fő célja ma az, hogy felderítsék ezt a fázistérképet, például és elsősorban megtalálják a kritikus pontot, ha létezik. Ehhez nemcsak az LHC, de a maximális RHIC energiánál is kisebb ütközési energia kell. Számos kísérlet vagy program indult/indul a közeljövőben ilyen ütközések vizsgálatára. A németországi GSI-ben a FAIR (Facility for Antiproton and Ion Research) gyorsítót és ott a CBM („Compressed Baryonic Matter”) nevű kísérletet, az oroszországi dubnai Egyesített Atommagkutató Intézetben (JINR) a NICA (Nuclotron-based Ion Collider fAcility) gyorsítót és itt az MPD (nemes egyszerűséggel „Multi-Purpose Detector”) és a BM@N („Baryonic Matter at Nuclotron”) nevű kísérleteket, Japánban a JPARC-HI (Japan Proton Accelerator Research Complex – Heavy Ions) komplexumot és a dedikált JHITS („J-PARC Heavy-Ion Toroidal Spectrometer”) kísérletet tervezik/építik. Jelenleg is rendelkezésre áll azonban az a mérési program (amely adatfelvétel szempontjából lezárult, de az adatanalízist tekintve messze-menően folyamatban van), amely során a RHIC gyorsító energiáját szisztematikusan változtatva különféle energiájú nehézion-ütközéseket vizsgáltak: ez a RHIC Beam Energy Scan (BES) program, illetve ennek második fázisa, a BES-II; utóbbinak részeként a STAR kísérlet fix céltárgyas ütközéseket is vizsgált (STAR FXT program) az $\sqrt{s_{NN}}$ további csökkentése kedvéért.¹²

¹²Ütközőnyalábos esetben $\sqrt{s_{NN}} = 2E_n$, fix céltárgynál azonban $\sqrt{s_{NN}} = \sqrt{2m_n E_n}$ (ahol E_n az egy nukleonra jutó nyalábbenergia, m_n a nukleontömeg). Így fix céltárggyal elérhető olyan kicsi $\sqrt{s_{NN}}$, amelynek ütközőnyalábos vizsgálatához már a gyorsítótechnika szempontjából kényelmetlenül le kellene csökkenteni a nyalábbenergiát.



1.5. ábra. Az erős kölcsönhatás fázisdiagramja a $T-\mu_B$ síkon, a különféle kísérleteknél az anyag által a hűlés során bejárt részeket jelölve. A normál maganyag ($T=0$, $\mu_B = m_n$) esetén túl a $\mu_B \approx 0$ tartomány felderített kísérletileg. Hogy vannak-e új fázisok nagy μ_B -nél, vagy hogy létezik-e kritikus pont (és „megtalálják-e” a jelölt ütközések), nyitott kérdés; az ábra jelenleg csak illusztráció.

Az sem magától értetődő, hogy adott energiájú ütközések esetén milyen T és μ_B értékeknél vannak a kifagyáskori végállapotok (melyeket az iménti 1.5. ábrán a nyilak végei jelölnek). A STAR kísérlet a mért hadronspektrumok analíziséből statisztikus fizikai alapú modellekkel [42] meghatározta ezeket [43]: az ütközési energia csökkenésével valóban nő a végső μ_B . Az sem lezárt kérdés, hogy „hol kezdődnek a nyilak”, azaz milyen T és μ_B értéknél termalizálódik az ütközésben létrejött közeg.

Az is védhető álláspont, hogy noha a termodinamikai limeszben egy első- vagy másodrendű átalakulásnak félreérthetetlen jelei lennének, a nagyon is véges méretű atommag-ütközésekben ezek nem jelennek meg élesen (mintha az 1.5. ábrán a nyilak egy „plusz dimenzióban” elkerülnék a fázisátmenet vonalát). Ezt továbbgondolva (végesméret-skálázást használva) már több éve felmerült (már akkor elérhető mérési adatokra támaszkodva), hogy a $\Delta\tau$ kifagyási időtartam $\sqrt{s_{NN}}$ függvényében való nem-monoton viselkedése a kritikus pontra utalna [44]. (A $\Delta\tau$ -t a mérhető R_{out} és R_{side} Bose-Einstein-korrelációs sugarakból az (1.9) egyenlet adná meg.) Ez azonban nem egységesen elfogadott; a kutatások fókuszában továbbra is az áll, hogy a kritikus pont helyzete egyéb mérhető mennyiségek segítségével is meghatározható legyen.

* * *

E rövid bevezetőben számos kérdéstről szó sem eshetett; egyik ilyen megemlítem: paradigmaváltást jelent annak felismerése, hogy kis ütköző rendszerekben ($p+p$, $p+A$, $d+A$) is kollektivitás, hidrodinamikailag táguló közegre utaló, statisztikus részecskeprodukción figyelhető meg (ld. pl. [45]). Hangsúlyos kutatási irány tehát éppen az, hogy milyen tulajdonságú kvark-gluon plazma alakul ki kis rendszerekben. A következőkben kifejtett saját kutatások inkább a nehézion-ütközések vizsgálatához kapcsolódnak: egyik fő fonál a hidrodinamikai leírás fejlesztése, a másik pedig Bose-Einstein-korrelációk vizsgálata, mind az elméleti leírást, mind a kísérleti mérést fejlesztendő.

2. Bose-Einstein-korrelációk vizsgálata

2.1. Bose-Einstein-korrelációk a nehézion-fizikában

Már a bevezető fejezetben említettük, hogy az egyrészesekés impulzuseloszláson (és származékain, például a v_2 elliptikus folyáson és az azimutális Fourier-sorfejtés többi v_n együtthatóján) túlmenően fontos megfigyelhető mennyiség a kétrészesekés korrelációs függvény:

$$C_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{N_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)}{N_1(\mathbf{p}_1)N_1(\mathbf{p}_2)}, \quad (2.1)$$

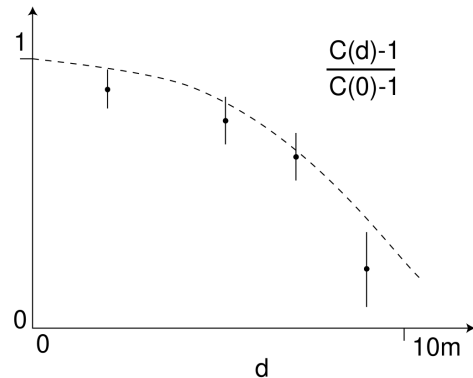
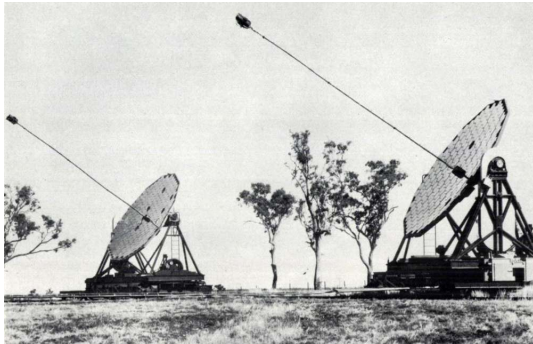
ahol $N_1(\mathbf{p})$ az egyrészesekés, $N_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ pedig a kétrészesekés invariáns impulzuseloszlás: utóbbi tehát a \mathbf{p}_1 és \mathbf{p}_2 impulzusú keletkezett részecskékből álló párok átlagos száma eseményenként.¹³ Említettük azt is, hogy a $C_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ korrelációs függvény 1-től eltérő voltának számos oka lehet, úgy mint: *jetek*, a kollektív folyás, illetve gyorsan (és így kísérletileg a reakciózónától elkülöníthetetlen helyen) elbomló részecskék/rezonanciák bomlástermékei is korreláltak. Ezek a hatások azonban a multiplicitással (a keletkező részecskék átlagos számával) csak lineárisan skálázódnak, úgy érteve, hogy egy kétszeres multiplicitású eseményben $N_1(\mathbf{p})$ is kétszeres, azonban például a *jetek*, valamint a részecskepárra bomló rezonanciák száma, így az ezen hatásokból származó részecskepárok száma is csak kétszeres. A most vizsgálandó, és a nehézion-fizikában kis impulzusú részecskékre a legfontosabb típusú korreláció azonban azonos bozonok között lép fel, és nulladik közelítésben nem csökken a multiplicitás növelésével: éppen ezért ez lesz a legfontosabb a nagy multiplicitású nehézion-ütközésekben. Ennek a korrelációnak végső soron az azonos bozonok megkülönböztethetetlenléte, így kvantummechanikai hullámfüggvényük szimmetrikus volta az „oka”. Ezért az ilyen korrelációkat *Bose-Einstein-korrelációknak* hívjuk. (A napjainkban leginkább úzótt korrelációs mérések a nehézion-fizikában valóban bozonpárokat használnak; leginkább pionpárokat: $\pi^+\pi^+$, $\pi^-\pi^-$, illetve még kisebb részben kaonpárokat: K^+K^+ , K^-K^- , $K_S^0K_S^0$.)¹⁴

Érdemes egy kis történeti kitéréssel bevezetni ezt a témakört; azonos bozonok intenzitáskorrelációját ugyanis először nem a részecskefizikában, hanem a csillagászatban figyelték meg. Az alapvető felfedezések az 1950-es években történtek; kísérleti oldalról nagy részük leginkább R. Hanbury Brown nevéhez köthető. Ő először rádiótávcsövekkel, majd (R. Q. Twiss-sel közösen) optikai távcsövekkel vizsgálta égi rádióforrások rádióhullámaiban illetve csillagok fényében a különböző helyeken, különböző detektorokkal észlelt intenzitások (vagyis azok fluktuációinak) korrelációját [46, 47]. Közben azt, hogy fotonokra, azaz látható fényre is valóban van korreláció a különböző detektorokban észlelt intenzitások között, egy asztali jellegű kísérletben is demonstrálták [48].

¹³Sokszor négyesimpulzus-jelölést írnak ezen eloszlások változóiba; mindenesetre ez csakis jelölés-ízlés kérdése, ugyanis végső állapotbeli, mérhető, ismert fajta és így ismert m tömegű részecskékről van szó, amikre az $E = \sqrt{m^2 + p^2}$ energia már nem újabb független változó.

¹⁴Fermionok (antiszimmetrikus hullámfüggvény) esetén antikorreláció („Fermi-Dirac-antikorreláció”) adódik, még spinállapotokra átlagolás után is; a mai kísérletekben lehetetlen a detektorokban észlelt részecskék spinjét mérni. A mai kutatási környezetben, mint mondtuk, a Bose-Einstein-korrelációk jelentősége a nagyobb.

Az ilyen típusú korrelációk összefoglaló neve (Hanbury Brown és Twiss neveiből) *HBT-jelenség* vagy *HBT-korreláció* is lett ezután. Az, hogy *több különböző* részecske (foton) között egyáltalán korreláció lehetséges, elméleti meglepetésnek számított; részben azért, mert a megfigyelt korrelációt „interferenciának”, a vonatkozó eszközöket „interferométer”nek is hívni kezdték, és ez félreértésre adott okot.¹⁵ A HBT-jelenségben nem arról van szó, mint a klasszikus optikai interferencia-kísérletekben: utóbbiakban *egy* fényforrás fénye osztódik ketté, és a más utakon, de végül *egy detektorba* megérkező fénysugarak interferálnak (azaz: adódnak össze az egyes irányokba haladás amplitúdói), a detektor helyzetétől függő megfigyelt intenzitást, így interferencia-mintázatot produkálva. Ez a jelenség „koherens” fénysugarak esetén a legnagyobb; „kaotikus” fénysugarak (például hőmérsékleti sugárzás) esetén nem igazán látható interferencia. A HBT-jelenségben különböző (de azonos fajta) részecskéknek (fény esetében: fotonoknak) különböző detektorokba való megérkezési valószínűsége korrelált, és mint később kiderült, éppen hogy kaotikus fényforrás esetén figyelhető meg ez a legjobban. Ezen kérdések (és egyúttal a koherencia mint „interferenciára való képesség” eléggé levegőben lógó fogalmának) tisztázása a *kvantumoptika* születéséhez vezetett az 1960-as évektől kezdve, jórészt R. J. Glauber munkái nyomán [49, 50]. A HBT-korrelációk gyakorlatibb jelentősége pedig abban áll, hogy (amint nemsokára látjuk) az ilyen korrelációk a részecskéket kibocsátó forrás geometriai jellemzőivel kapcsolatosak, a forrás egyfajta integráltranszformáltját (ha a végállapotú részecskék kölcsönhatásmentesen haladnak, a Fourier-transzformáltját) tükrözik. Hanbury Brown és Twiss ezen az alapon meg tudta mérni csillagok (a Szíriusz) szögátmérőjét [47], a módszer pedig azóta fontos asztronómiai megfigyelőeszközzé lépett elő.



2.1. ábra. Bal oldalon: Hanbury Brown és Twiss csillagfényt megfigyelő berendezése a két detektorból szimultán érkező jel korrelációinak mérésére. Jobb oldalon: a (mozgatható) detektorok távolságának függvényében megfigyelt (normált) intenzitáskorreláció; a szaggatott vonal a Szíriusz-átmérőjű (0,0063”) fényes korong Fourier-transzformáltjából kapott várt függvényalak.

1960-ban aztán hasonló korrelációkat fedeztek fel a részecskefizikában is: G. Goldhaber és társai [51] a részben általuk végzett, és eredetileg a (leginkább $\pi^+\pi^-$ párra bomló, akkor még kérdéses létezésű) ρ -mezon keresésére irányuló proton-antiproton ütközésekben. A megfigyelt pion-mintán

¹⁵Dirac „The Principles of Quantum Mechanics” című könyvében expliciten olvasható (hevenyészett saját fordításban), hogy „A fotonok csak önmagukkal interferálnak. Különböző fotonok között nem fordulhat elő interferencia.”

az *azonos töltésű* (azaz $\pi^+\pi^+$ illetve $\pi^-\pi^-$) pionpárok eloszlásában korrelációt találtak, és ezt magyarázták meg úgy, hogy a pionok bozontermészete miatt a hullámfüggvényük szimmetrikus volta korrelációt okoz.¹⁶ Innentől kezdve az azonos bozonok közötti korrelációk vizsgálata a nagyenergiás fizika önálló fejezetévé vált; nevet is kapott: *femtoszakópia*. Az elnevezés értelme az, hogy mint mondtuk, az ilyen korrelációk kapcsolatban állnak a részecskekibocsátó forrás geometriájával, a nagyenergiás fizikában femtométeres skálán tárva fel azt.

Ennek megértéséhez bevezetjük a részecskekeltés $S(x, \mathbf{p})$ *forrásfüggvényét* (tulajdonképpen a rendszer sűrűségmátrixának *Wigner-függvényét*), amely megadja az x (négyes)koordináta és \mathbf{p} impulzus körüli d^4x és $d^3\mathbf{p}$ koordináta- és impulzustérfogatelemben keletkező részecskék várható számát. Az egyrészecskés impulzuseloszlás ebből az egész térre vett integrállal adódik:

$$N_1(\mathbf{p}) = \int d^4x S(x, \mathbf{p}), \quad (2.2)$$

a megfigyelt Bose-Einstein-korrelációk leírásának alapja pedig az, hogy a kétrészecskés eloszlást a kétrészecskés (azaz a részecskepárok terjedését leíró) $\Psi_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^{(2)}(x_1, x_2)$ hullámfüggvényből kaphatjuk:

$$N_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \int d^4x_1 d^4x_2 S(x_1, \mathbf{p}_1) S(x_2, \mathbf{p}_2) |\Psi_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^{(2)}(x_1, x_2)|^2. \quad (2.3)$$

Ezen formula neve szokásosan *Yano-Koonin-formula* [53]; ezek a szerzők egyik elsőként alkalmazták ezt a formulát (és alább kifejtendő következményeit) nagyenergiás fizikai korrelációk értelmezésére.

Megjegyzés: az alábbiak megértéséhez bőven elég a mondott szemléletes tartalmat (a párdetektálási valószínűséget) tulajdonítani a kétrészecskés hullámfüggvénynek, és ez alapján felírni ezt a (2.3) kifejezést. Levezethető azonban ez alaposabban is, a vizsgált részecskék megtalálási valószínűségét a kvantumtérelméletükből kifejezve; erről ld. pl. az [54] összefoglaló cikket.

Ezen a ponton érdemes áttérni a \mathbf{p}_1 és \mathbf{p}_2 helyett a $K \equiv (K^0, \mathbf{K})$ átlagos impulzusra illetve a $Q \equiv (Q^0, \mathbf{Q})$ relatív impulzusra. Hármavektorként használni fogjuk a relatív impulzus felét is:

$$\begin{aligned} K &:= \frac{1}{2}(p_1 + p_2), & \mathbf{K} &= \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2), & \text{továbbá } \mathbf{k} &:= \frac{1}{2}\mathbf{Q} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2). \\ Q &:= p_1 - p_2, & \mathbf{Q} &= \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

Azonos m tömegű részecskéink vannak, azaz $p_1^\mu p_{1\mu} = p_2^\mu p_{2\mu} = m^2$: ebből kiderül, hogy K és Q pszeudoortogonálisak. Továbbá Q^0 -t is kifejezhetjük így:

$$Q^\mu K_\mu = Q^0 K^2 - \mathbf{Q}\mathbf{K} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q^0 = \frac{\mathbf{K}\mathbf{Q}}{K^0} = \beta\mathbf{Q}, \quad \text{ahol } \beta := \frac{\mathbf{K}}{K^0}. \quad (2.5)$$

A K négyesvektorra $K^\mu K_\mu = m^2 - \frac{1}{4}Q^\mu Q_\mu$, azaz ő csak $Q \rightarrow 0$ esetén van az m tömegű tömeghéjon.

A korrelációs függvény $N_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ és $N_1(\mathbf{p}_1)$ iménti (2.3) illetve (2.2) kifejezései alapján

$$C_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{\int d^4x_1 d^4x_2 S(x_1, \mathbf{p}_1) S(x_2, \mathbf{p}_2) |\Psi_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^{(2)}(x_1, x_2)|^2}{\int d^4x_1 d^4x_2 S(x_1, \mathbf{p}_1) S(x_2, \mathbf{p}_2)}. \quad (2.6)$$

¹⁶A mai, milliárdos eseményszámokkal dolgozó kísérletekhez szokott ember számára érdekesség, hogy „milyen kevésből” születtek fontos eredmények annak idején: erre a mondott következtetésre vezető mérést 2500 darab, buborékkamrában fényképezett $p+\bar{p}$ ütközési eseménnyel végezték [52].

Ha elhanyagoljuk a részecskék végállapotú kölcsönhatását, akkor $\Psi_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^{(2)}(x_1, x_2)$ síkhullám jellegű:

$$\Psi_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [e^{-ip_1 \cdot x_1} e^{-ip_2 \cdot x_2} + e^{-ip_1 \cdot x_2} e^{-ip_2 \cdot x_1}], \quad (2.7)$$

azonban mint írtuk, szimmetrikus (ugyanis bozonokról van szó), és végső soron ezért lesz az abszolútértéke nem triviális (azaz nem konstans 1):

$$|\Psi_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^{(2)}(x_1, x_2)|^2 = 1 + \cos[(p_1 - p_2) \cdot (x_1 - x_2)]. \quad (2.8)$$

Ezzel az iménti kifejezésből arra jutunk (a $^{(0)}$ indexszel a kölcsönhatásmentességre utalva), hogy

$$C_2^{(0)}(p_1, p_2) = 1 + \operatorname{Re} \frac{\tilde{S}(Q, \mathbf{p}_1) \tilde{S}^*(Q, \mathbf{p}_2)}{\tilde{S}(0, \mathbf{p}_1) \tilde{S}^*(0, \mathbf{p}_2)}, \quad (2.9)$$

ahol $\tilde{S}(Q, \mathbf{p})$ a forrásfüggvény tér(idő)változók szerinti Fourier-transzformáltja:

$$\tilde{S}(Q, \mathbf{p}) = \int d^4x S(x, \mathbf{p}) e^{-iQ \cdot x}. \quad (2.10)$$

A korrelációs függvényt a K átlagos impulzus valamint a Q relatív impulzus függvényeként szokták vizsgálni; kiderül ugyanis, hogy a Q -tól való függés sokkal hangsúlyosabb, mint a K -tól való. Emiatt szinte mindig az úgynevezett „simasági közelítéssel” élünk [55], miszerint a (2.9) egyenletben $\mathbf{p}_1 \approx \mathbf{p}_2 \approx \mathbf{K}$ írható az S forrásfüggvény második változójába, így \tilde{S} -ébe is. Ezzel

$$C_2^{(0)}(\mathbf{Q}, \mathbf{K}) \approx 1 + \frac{|\tilde{S}(Q, \mathbf{K})|^2}{|\tilde{S}(0, \mathbf{K})|^2}. \quad (2.11)$$

Itt a \approx jel a mondott simasági közelítésre utal, de a továbbiakban = egyenlőséget írunk.

A korrelációs függvény mérésével tehát ezen \tilde{S} Fourier-transzformálton keresztül „letapogatható” a nehézion-ütközésben létrejött anyag mérete, dinamikája. A legelterjedtebb módszertani következő lépés az, hogy gondolatilag „szétválaszthatjuk” a K -tól illetve a Q -tól való függést: feltezzük, hogy $S(x, \mathbf{K})$ koordinátafüggése valamilyen (néhány paraméterrel jellemzett) adott függvényalak (például Gauss-görbe), és a \mathbf{K} -függés a paramétereken keresztül jelenik meg. Így a korrelációs függvényt különféle \mathbf{K} értékeknél \mathbf{Q} függvényében megmérve, majd illesztve a mondott függvényalak Fourier-transzformáltjával megmérhetjük a forrásfüggvény paramétereinek \mathbf{K} -függését.

Ha visszatérünk a (2.3) egyenlethez, és egyelőre nem tesszük fel azt, hogy szabad részecskék vannak a végállapotban, akkor is érdemes megtenni a simasági közelítést; \approx helyett =-t írva

$$C_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{\int d^4x_1 d^4x_2 S(x_1, \mathbf{K}) S(x_2, \mathbf{K}) |\Psi_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^{(2)}(x_1, x_2)|^2}{\int d^4x_1 d^4x_2 S(x_1, \mathbf{K}) S(x_2, \mathbf{K})}. \quad (2.12)$$

Érdemes itt az $x_1 \equiv (t_1, \mathbf{r}_1)$ és $x_2 \equiv (t_2, \mathbf{r}_2)$ koordináták helyett is áttérni az $X \equiv (T, \boldsymbol{\rho})$ tömegközépponti koordinátákra illetve az $x \equiv (t, \mathbf{r})$ relatív koordinátákra:

$$\begin{aligned} X &:= \frac{1}{2}(x_1 + x_2), & \Leftrightarrow & & T &:= \frac{1}{2}(t_1 + t_2), & \boldsymbol{\rho} &:= \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2), \\ x &:= x_1 - x_2, & & & t &:= t_1 - t_2, & \mathbf{r} &:= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

A kétrészecskés hullámfüggvény (kölsönható, de összességében szabadon mozgó részecskepárról lévén szó) csak $2K$ impulzusú szabad mozgásnak megfelelő síkhullám-formában, $e^{-2iK \cdot X}$ módon tartalmazza a tömegközépponti X koordinátát. Ez utóbbi pedig kiesik az abszolútértékből:

$$\Psi_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}^{(2)}(x_1, x_2) \equiv \Psi_{\mathbf{K}, \mathbf{Q}}^{(2)}(X, x) = e^{-2iK \cdot X} \psi_{\mathbf{Q}, \mathbf{K}}^{(2)}(x) \quad \Rightarrow \quad |\Psi_{\mathbf{Q}, \mathbf{K}}^{(2)}(x, X)|^2 = |\psi_{\mathbf{Q}, \mathbf{K}}^{(2)}(x)|^2. \quad (2.14)$$

Átírjuk az integrálokat az x_1, x_2 koordinátákról az X, x koordinátákra (ellenőrizhetjük, hogy a Jacobi-determináns itt 1, úgyhogy egyszerűen $d^4x_1 d^4x_2 \rightarrow d^4X d^4x$ módon):

$$C_2(\mathbf{Q}, \mathbf{K}) = \frac{\int d^4X d^4x S(X + \frac{x}{2}, \mathbf{K}) S(X - \frac{x}{2}, \mathbf{K}) |\psi_{\mathbf{Q}, \mathbf{K}}^{(2)}(x)|^2}{\int d^4X d^4x S(X + \frac{x}{2}, \mathbf{K}) S(X - \frac{x}{2}, \mathbf{K})}, \quad (2.15)$$

amiből egy új definíció bevezetésével arra jutunk, hogy

$$C_2(\mathbf{Q}, \mathbf{K}) = \frac{\int d^4x D(x, \mathbf{K}) |\psi_{\mathbf{Q}, \mathbf{K}}^{(2)}(x)|^2}{\int d^4x D(x, \mathbf{K})}. \quad (2.16)$$

Az itt használt $D(x, \mathbf{K})$ pár-eloszlásfüggvény tehát a relatív x koordináta eloszlása:

$$D(x, \mathbf{K}) := \int d^4X S(X + \frac{x}{2}, \mathbf{K}) S(X - \frac{x}{2}, \mathbf{K}). \quad (2.17)$$

Fontos megjegyezni, hogy $D(x, \mathbf{K})$ mindenképpen x páros függvénye (akkor is, ha $S(x, \mathbf{p})$ nem az).

Tulajdonképpen tehát ez a párelaszás-függvény az, ami felderíthető a korrelációs függvény mérésével, és a (kis ψ -vel jelölt, relatív mozgáshoz tartozó) hullámfüggvény az, ami „elkódolja” a végállapotbeli kölsönhatást. Szabad mozgás esetén (megint $^{(0)}$ indexszel jelölve) egyszerűen

$$\psi_{\mathbf{Q}, \mathbf{K}}^{(2,0)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{-i\frac{1}{2}Q \cdot x} + e^{i\frac{1}{2}Q \cdot x} \right] \quad \Rightarrow \quad |\psi_{\mathbf{Q}, \mathbf{K}}^{(2,0)}(x)|^2 = 1 + \cos(Q \cdot x). \quad (2.18)$$

Ezzel a $D(x, \mathbf{K})$ használatával is megkapjuk az eredményt, ami persze megegyezik (2.11)-gyel:

$$C_2^{(0)}(\mathbf{Q}, \mathbf{K}) = 1 + \frac{\tilde{D}(Q, \mathbf{K})}{\tilde{D}(0, \mathbf{K})}, \quad \text{ahol} \quad \tilde{D}(Q, \mathbf{K}) := \int d^4x D(x, \mathbf{K}) e^{-iQ \cdot x}. \quad (2.19)$$

Az egyik legegyszerűbb és sokszor használatos feltevés az lehet, hogy a pár-eloszlásfüggvény Gauss-alakú, impulzusfüggő sugár-mátrixszal (azaz kitevőbeli kvadratikus formával, melyet most kényelmesen \mathbf{R}^{-2} módon jelölünk mint az \mathbf{R}^2 jelű mátrix inverzét); időben pedig a $t=t_f$ kifagyási időben pillanatszerűen játszódik le a részecskekeltés. Konkrétan tehát

$$S(x, \mathbf{p}) = \delta(t-t_f) \mathcal{C}(\mathbf{p}) e^{-\frac{1}{2} \mathbf{r} \mathbf{R}^{-2}(\mathbf{p}) \mathbf{r}} \quad \Rightarrow \quad D(x, \mathbf{K}) = \delta(t) \frac{\mathcal{C}(\mathbf{K})}{2^{3/2}} e^{-\frac{1}{4} \mathbf{r} \mathbf{R}^{-2}(\mathbf{K}) \mathbf{r}}, \quad (2.20)$$

ahol $\mathcal{C}(\mathbf{p})$ normálási tényező, mely megjelenik, ha ezt az $S(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ -t az $N_1(\mathbf{p})$ spektrum leírására használnánk (hiszen (2.2) alapján $N_1(\mathbf{p})$ éppen az $S(x, \mathbf{p})$ x -re vett integrálja), azonban a korrelációs függvények szempontjából nincs jelentősége: a fenti képletekből láthatóan kiesik C_2 -ből.¹⁷ Ebben

¹⁷Ha (korrelációkat vizsgálván elfelejtve, hogy az $N_1(\mathbf{p})$ persze nem konstans) minden \mathbf{p} -nél 1-re normálva akarjuk megadni $S(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ -t, akkor persze $\mathcal{C}(\mathbf{p}) = (2\pi)^{-3/2} \det \mathbf{R}(\mathbf{p})$ a jó választás.

az esetben tehát a páreloszlás is Gauss-alakúnak adódik, amint írtuk is; Fourier-transzformációval pedig arra jutunk, hogy ekkor a kölcsönhatásmentes korrelációs függvény is Gauss-alakú lesz a \mathbf{Q} változóban (mely a fentebb mondott értelemben a „fő” változó):

$$C_2^{(0)}(\mathbf{Q}, \mathbf{K}) = 1 + \exp(-\mathbf{Q}\mathbf{R}^2(\mathbf{K})\mathbf{Q}). \quad (2.21)$$

Ez az alak alkalmas arra, hogy a \mathbf{Q} -tól és \mathbf{K} -tól függő teljesen differenciált mérést leírjunk, és a forrás $\mathbf{R}(\mathbf{K})$ paramétereit illesztéssel meghatározzuk. A tipikus kísérleti felbontásokkal a \mathbf{Q} néhány 10-100 MeV/c értéktartományban mérhető, így valóban az adódik (tudva, hogy az itt hagyott \hbar állandó értéke $\approx 200 \frac{\text{MeV fm}}{c}$), hogy az \mathbf{R} sugárparaméterek femtométeres skálán mérhetőek így.

* * *

Röviden összefoglaljuk a használandó kinematikai változókat. A hármasvektorok értelme függ a korrelációsfüggvény-mérésre használt koordinátarendszertől. Két szokásos választás lehet:

- az LCMS (Longitudinally Co-Moving System): ez a laborrendszerből z irányú boost-tal kapható; definiáló tulajdonsága, hogy benne a részecskepár longitudinális impulzusa nulla; $K_z=0$,
- a PCMS (Pair Co-Moving System): a pár tömegközépponti rendszere.

Általában midrapiditás környékére koncentrálnak; ekkor a K_z -függés nem, inkább a K_t -függés a lényeges (ahol K_t a \mathbf{K} transzverz komponense). Az LCMS-ből nézve pedig ekkor nem is jelenik meg a K_z változó. A \mathbf{Q} vektor szempontjából az úgynevezett Bertsch-Pratt–(BP-)koordinátákat szokták használni (a névadók az [56, 57] cikkek szerzői; itt kerültek kiterjedten elő ilyen koordináták). Ezek a transzverz síkbeli *out* és *side*, azaz a \mathbf{K} vektorral párhuzamos illetve arra merőleges irányok; a z irány neve szokásosan *long* (mint „longitudinális”):

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_t \cos \varphi \\ K_t \sin \varphi \\ K_z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} q_{\text{out}} := Q_x \cos \varphi + Q_y \sin \varphi, \\ q_{\text{side}} := Q_y \cos \varphi - Q_x \sin \varphi, \\ q_{\text{long}} := Q_z \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} Q_x = q_{\text{out}} \cos \varphi - q_{\text{side}} \sin \varphi, \\ Q_y = q_{\text{side}} \cos \varphi + q_{\text{out}} \sin \varphi, \\ Q_z = q_{\text{long}}, \end{array} \quad (2.22)$$

ahol az x - y koordinátarendszert a reakciósíkhöz viszonyítjuk, és most \mathbf{K} azimuttszögét jelöltük φ -vel. Ezen koordináták előnye, hogy rögtön a \mathbf{K} mért irányához viszonyíthatók, reakciósíkra összesített (azaz φ szerint nem differenciált) mérés is végezhető: ekkor a rekonstruált Gauss-alak diagonálisnak bizonyul, (K_t -függő) R_{out} , R_{side} , R_{side} sugárparaméterekkel.¹⁸

$$C_2^{(0)}(\mathbf{Q}, \mathbf{K}) = 1 + \exp(-q_{\text{out}}^2 R_{\text{out}}^2 - q_{\text{side}}^2 R_{\text{side}}^2 - q_{\text{side}}^2 R_{\text{side}}^2); \quad (2.23)$$

Sok esetben (főleg ha Gauss-alaknál általánosabb forrásfüggvényt tennénk fel) még az ilyen „háromdimenziós” (azaz a K_t -ben differenciált, és \mathbf{Q} három komponensétől való függést külön-külön letapogató) mérésre sincs elég kísérleti statisztika. Ekkor előlép az „egydimenziós” mérés lehetősége, azaz amikor csupán egy impulzuskülönbség-kombinációtól függő $C^{(2)}$ korrelációs függvény rekonstruálható. Ilyen célra megfelelő az impulzuskülönbség nagysága. Ennek PCMS-beli

¹⁸(Reakciósík szerint differenciált Gauss-alak esetén nemcsak a K_t -, hanem a φ -függés is érdekes, továbbá megjelennek a nemdiagonális $R_{\text{out,side}}^2$, illetve az $R_{\text{out,long}}^2$ és $R_{\text{side,long}}^2$ mennyiségek is (ld. később a 4. fejezetben is).

értékének külön neve van: ez a q_{inv} invariáns impulzuskülönbség:

$$q_{\text{inv}} = |\mathbf{Q}_{\text{PCMS}}| = \sqrt{-Q^\mu Q_\mu}; \quad (2.24)$$

ezt tehát a Q^μ négyesvektorral is kifejezhetjük („invariáns” módon; innen az elnevezés). A q_{out} , q_{side} és q_{long} mennyiségeket viszont leggyakrabban az LCMS-ben értik; ezekkel is kifejezhetjük q_{inv} -et:

$$q_{\text{inv}} = \sqrt{(1-\beta_t^2)q_{\text{out}}^2 + q_{\text{side}}^2 + q_{\text{long}}^2}, \quad \text{ahol } \beta_t = \frac{K_t}{K^0}. \quad (2.25)$$

Használhatjuk az LCMS-beli hármásimpulzus-különbség nagyságát is egydimenziós változónak:

$$Q_{\text{LCMS}} := |\mathbf{Q}_{\text{LCMS}}| = \sqrt{q_{\text{out}}^2 + q_{\text{side}}^2 + q_{\text{long}}^2}. \quad (2.26)$$

A RHIC-nél végzett mérések szerint (ld. pl. [37]) $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV energiájú nehézion-ütközésekben az LCMS-ben megközelítőleg gömbszimmetrikusak a forrásfüggvények, azaz (Gauss-alakot feltételezve) közelítőleg leírhatók $C^{(0)}(\mathbf{Q}) \approx 1 + e^{-Q_{\text{LCMS}}^2 R^2} = 1 + e^{-q_{\text{out}}^2 R^2 - q_{\text{side}}^2 R^2 - q_{\text{long}}^2 R^2}$ alakban; más szóval, LCMS-ben $R_{\text{out}} \approx R_{\text{side}} \approx R_{\text{long}}$ érvényes. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy a PCMS-ből nézve a korrelációs függvény közelítőleg sem gömbszimmetrikus. (Ugyanis a q_{inv} (2.25) szerinti kifejezésében megjelenik az egyik, „out” irányú tagnál az $1-\beta_t^2$ faktor, ami a vizsgált K_t -tartományban közelítőleg sem 1, hanem legfeljebb 0,2 körüli érték). Ez motiválta kutatásainkban azt a megközelítést, hogy amennyiben egydimenziós mérést akarunk végezni, a Q_{LCMS} -t használjuk változónak $q_{\text{inv}} \equiv Q_{\text{PCMS}}$ helyett. (Egydimenziós mérésre vagyunk „kényszerítve” sok esetben; például kisebb statisztikájú adatsorok esetén, vagy Gauss-nál általánosabb Lévy-alakokat illesztve; ld. lentebb is.)

2.2. Coulomb-effektus Lévy-eloszlás alakú forrásfüggvények esetén

2.2.1. A Coulomb-kölcsönhatás tárgyalása

A valóságban ha például (mint sokszor) töltött pionok vagy kaonok korrelációit mérjük, akkor nem hanyagolható el a végállapotbeli kölcsönhatás. Leginkább a Coulomb-taszítás kap szerepet: a mért korrelációs függvényben kis relatív impulzusnál csökkenés („Coulomb-lyuk”) jelenik meg, mintha a részecskepárok „kitaszítanák” onnan egymást. Módosul tehát az az egyszerű kép, hogy a korrelációs függvény a forrásfüggvény Fourier-transzformáltja lenne. Azt, hogy ezzel együtt milyen függvényalakkal írjuk le a $C_2(Q)$ függvényeket, a korrelációs méréseknek egy régóta diszkutált nehézsége. Először felidézzük, hogy hogyan írhatók le ilyenkor a korrelációs függvények, aztán rátérek az ezen a téren végzett fejlesztéseimre. Ezekről több módszertani cikket írtunk kollégáimmal [58–60]; itt egységesen tárgyalom őket illetve korábbi munkákra támaszkodó bevezetőjüket.

Coulomb-kölcsönhatás esetén a C_2 korrelációs függvényt megadó (2.16) képletben a relatív mozgás $\psi_{\mathbf{Q},\mathbf{K}}^{(2)}(x)$ hullámfüggvénye síkhullám helyett az a hullámfüggvény kell, hogy legyen, ami tartalmazza a Coulomb-taszítást is. Ha a két részecske relatív mozgása nemrelativisztikus, akkor a Schrödinger-egyenlet vonatkozó megoldását vehetjük, méghozzá azt, amelyik egy úgynevezett szórás *out*-állapot; ez aszimptotikusan egy (egységnyi valószínűségi áramsűrűsége normált) sík-

hullámot és egy *befutó* gömbhullámot tartalmaz. Ennek most összefoglalt tárgyalása megtalálható például Landau és Lifsic kvantummechanika-könyvében [61]; itt is, és például a [62] hivatkozásban is olvasható az is, hogy miért ezt a mondott *out*-állapotot kell használni.

A (Coulomb-taszító, z_1q_e illetve z_2q_e töltésű, m_1 illetve m_2 tömegű, \mathbf{r}_1 és \mathbf{r}_2 helykoordinátájú) két részecske $\Psi^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ hullámfüggvényére felírt Schrödinger-egyenlet a következő:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\Delta_{\mathbf{r}_1} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\Delta_{\mathbf{r}_2} + \frac{z_1z_2q_e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|} \right] \Psi_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \left[\frac{\hbar^2k_1^2}{2m_1} + \frac{\hbar^2k_2^2}{2m_2} \right] \Psi_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2); \quad (2.27)$$

ezt eleve olyan alakban írtuk, ami alkalmas az aszimptotikusan síkhullám alakú megoldások keresésére, az energiát a hullámszámvektorokkal kifejezve (persze itt $k_1 \equiv |\mathbf{k}_1|$ és $k_2 \equiv |\mathbf{k}_2|$). Áttérünk a tömegközépponti és relatív változókra a következő (részben már felírt) módon:

$$\begin{aligned} \mu &:= \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}, & \mathbf{K} &:= \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2), & \boldsymbol{\rho} &:= \frac{m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2}, \\ M &:= m_1+m_2, & \mathbf{k} &:= \frac{m_2\mathbf{k}_1-m_1\mathbf{k}_2}{m_1+m_2}, & \mathbf{r} &:= \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2. \end{aligned} \quad (2.28)$$

A μ neve redukált tömeg. Néhány kézenfekvő jelölést használva az egyenlet úgy alakul, hogy

$$\left[-\frac{1}{2M}\Delta_{\boldsymbol{\rho}} - \frac{1}{2\mu}\Delta_{\mathbf{r}} + \frac{1}{\mu r}\eta \right] \Psi_{\mathbf{K},\mathbf{k}}^{(2)}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}) = \left[\frac{(2K)^2}{2M} + \frac{k^2}{2\mu} \right] \Psi_{\mathbf{K},\mathbf{k}}^{(2)}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}). \quad (2.29)$$

Itt bevezettük a relatív \mathbf{k} impulzustól függő η úgynevezett Sommerfeld-paramétert:

$$\eta := z_1z_2 \frac{\alpha_{em} \cdot \mu c^2}{\hbar k \cdot c}, \quad \alpha_{em} \equiv \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137,036}; \quad (2.30)$$

α_{em} -mel jelölve a finomszerkezeti állandót (a szokásos α -val ugyanis nemsokára mást jelölünk).

A (2.29) egyenlet megoldásában leválasztjuk a tömegközéppont $2\mathbf{K}$ impulzusú szabad mozgását:

$$\Psi_{\mathbf{K},\mathbf{k}}^{(2)}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}) = e^{i2\mathbf{K}\boldsymbol{\rho}} \psi_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad \left[\Delta_{\mathbf{r}} + k^2 - \frac{2\eta}{r} \right] \psi_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.31)$$

és az ez utóbbi egyenletben ismeretlen $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ -re nekünk kellő megoldás a következőképpen írható:

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \mathcal{N}^* e^{-ikr} M(1-i\eta, 1, i(kr+\mathbf{k}\mathbf{r})). \quad (2.32)$$

Itt \mathcal{N} egy normálási tényező, melynek $|\mathcal{N}|^2$ abszolútérték-négyzete az úgynevezett *Gamow-faktor*:

$$\mathcal{N} = e^{-\pi\eta/2} \Gamma(1+i\eta) \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{N}|^2 = \frac{2\pi\eta}{e^{2\pi\eta} - 1}; \quad (2.33)$$

ahol $\Gamma(z)$ a gamma-függvény, melynek egyszerű (és itt is használt) tulajdonságai $z\Gamma(z)=\Gamma(z+1)$ illetve $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$. Végül $M(a, b, z)$ az elfajult hipergeometrikus függvény:

$$M(a, b, z) = 1 + \frac{a}{b} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b+n)} \frac{z^n}{n!}. \quad (2.34)$$

Ez a sor az egész $z \in \mathbb{C}$ komplex síkon analitikus függvényt definiál minden $a \in \mathbb{C}$ és minden $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ paraméterek esetén (tehát annyi feltétellel, hogy b nem lehet nempozitív egész). Az

$M(a, b, z)$ függvény kielégíti az ismeretlen f függvényre felírt alábbi elfajult hipergeometrikus egyenletet:

$$zf''(z) + (b-z)f'(z) - af(z) = 0; \quad (2.35)$$

ebből leszűrhető, hogy (2.32) valóban megoldása (2.31)-nek. Megemlítünk néhány azonosságot:

$$\begin{aligned} M(0, b, z) &= 1, & M(a, a, z) &= e^z, \\ M(a, b, z=0) &= 1, & M(a, b, z) &= e^z M(b-a, b, -z), \end{aligned} \quad (2.36)$$

valamint a $|z| \rightarrow \infty$ esetre levezethető alábbi aszimptotikus képletet:

$$\frac{M(a, b, z)}{\Gamma(b)} = \frac{(-z)^{-a}}{\Gamma(b-a)} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right) \right] + \frac{e^z z^{a-b}}{\Gamma(a)} \left[1 + \frac{(b-a)(1-a)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right) \right]; \quad (2.37)$$

ebből (gondosan kezelve a komplex hatványozásokat) a (2.32)-ben felírt hullámfüggvény $r \rightarrow \infty$ esetén érvényes aszimptotikus kifejezése valóban a megfelelő alakúnak bizonyul (síkhullám+befutó gömbhullám; logaritmikus korrekciókkal); vagyis jó normálási tényezők kerültek oda:

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{e^{i\eta \ln[kr+\mathbf{k}\mathbf{r}]}} \left[1 + \frac{i\eta^2}{kr} \frac{1}{1+\frac{\mathbf{k}\mathbf{r}}{kr}} \right] + \frac{e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{r} e^{i\eta \ln[kr+\mathbf{k}\mathbf{r}]} \cdot \frac{\eta}{k} \frac{e^{-2i \arg \Gamma(i\eta)}}{1+\frac{\mathbf{k}\mathbf{r}}{kr}}. \quad (2.38)$$

Azonos, $m_1=m_2 \equiv m$ tömegű részecskékre a redukált tömeg $\mu = \frac{m}{2}$, és bozonok esetén a $\Psi_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ hullámfüggvény szimmetrikus kell, hogy legyen. Ezt a felírt (2.32)-ből úgy kapjuk, hogy a $\psi_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r})$ relativmozgás-hullámfüggvénybe beépítjük az $\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_2$ cserének megfelelő $\mathbf{r} \leftrightarrow -\mathbf{r}$ szimmetrizációt:

$$\psi_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) + \psi_{\mathbf{k}}(-\mathbf{r})}{\sqrt{2}} = \frac{\mathcal{N}^*}{\sqrt{2}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \left[M(1-i\eta, 1, i(kr+\mathbf{k}\mathbf{r})) + M(1-i\eta, 1, i(kr-\mathbf{k}\mathbf{r})) \right]. \quad (2.39)$$

Ezt kell a korrelációs függvényt a pár-eloszlással megadó (2.16) képletében használni:

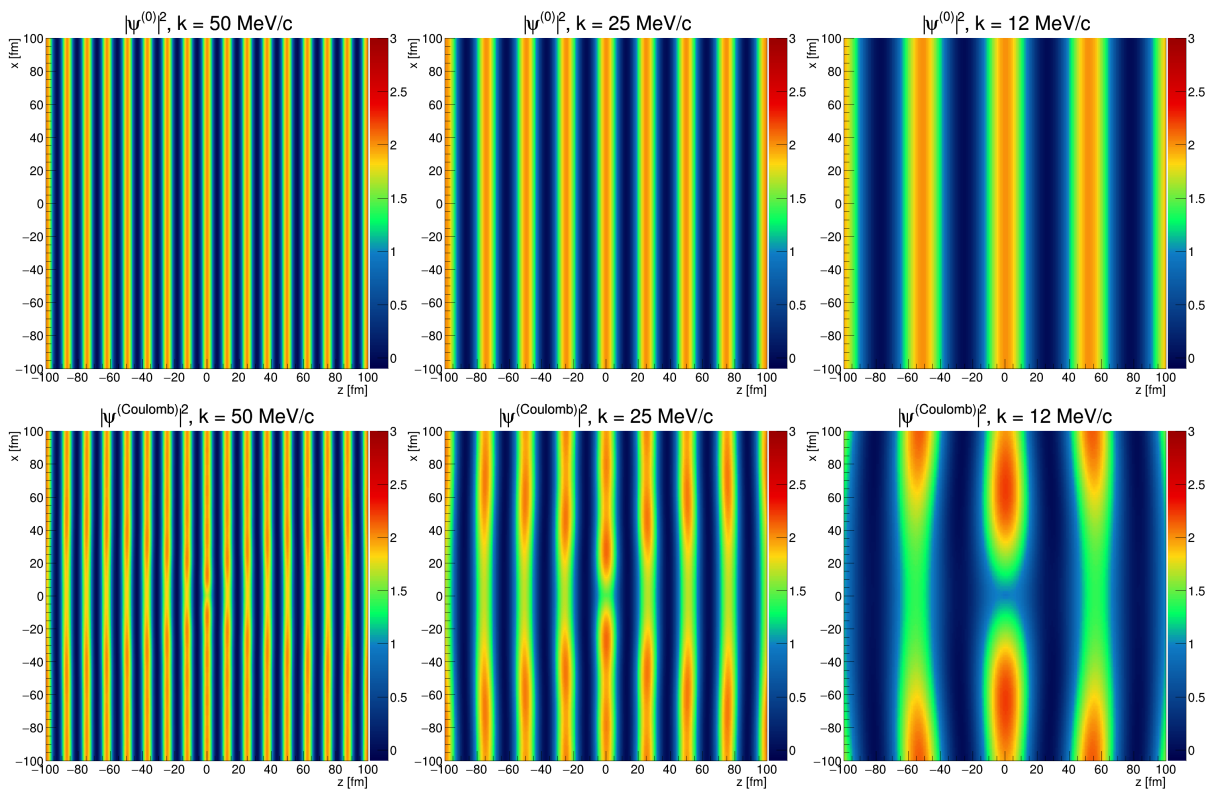
$$C_2(\mathbf{Q}, \mathbf{K}) = \frac{\int d^3\mathbf{r} D(\mathbf{r}, \mathbf{K}) |\psi_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r})|^2}{\int d^3\mathbf{r} D(\mathbf{r}, \mathbf{K})}; \quad \text{ahol persze } \mathbf{Q} = 2\mathbf{k}. \quad (2.40)$$

Néhány megjegyzés kívánkozik a felírt képletekhez:

- A (szokásosan alkalmazott) iménti (2.40)-ben tehát csak a térváltozókra integrálunk, mintha időben pillanatszerű lenne a kifagyás. Ez nem feltétlenül „előrevívő” feltevés: a kifagyás $\Delta\tau$ időtartama éppen egy érdekes keresett mennyiség lenne (ld. a bevezető 1.2.3. szakaszt; a fázisátmenet rendjéről árulkodhat). Azonban sok modellszámolás szerint (ld. pl. [63]) a $\Delta\tau$ a korrelációs függvények szempontjából „beskálázható” a forrás térbeli méretébe. (Az (1.9) egyenlet is lényegében ilyet mutat: $\Delta\tau \neq 0$ megnöveli az egyik sugarat a másikhoz képest.) Írhatjuk tehát $D(x, \mathbf{K})$ -t az időváltozót hagyva, mintha csak $t=0$ -nál lenne nem nulla, emlékezve, hogy a forrásfüggvény paraméterei már hordozzák a $\Delta\tau \neq 0$ miatti látszólagos méretváltozásokat.
- A HBT-korrelációs mérések az LCMS rendszerben kellemesek (ld. fentebb), azonban a Coulomb-kölcsönható hullámfüggvényt a PCMS-ben használnánk; itt ugyanis a leginkább megengedhető a nemrelativisztikus közelítés. Háromdimenziós mérés esetén ez nem okoz(na) gondot, a

Q_{LCMS} -ből (2.25) alapján rekonstruálható a PCMS-beli q_{inv} , így \mathbf{k} is. Egydimenziós mérés esetén azonban „súlyozni” kell a Coulomb-korrekciót: adott K_t és Q_{LCMS} esetén kísérletileg meg kell határozni k várható értékét, és ezzel az értékkel kiszámított Coulomb-korrekciót kell használni. Erre a kérdésre részben visszatérünk alább.

- A felírt $\psi_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r})$ hullámfüggvény mondott alkalmazása HBT-korrelációk fenomenológiájában jól ismert az irodalomban [64–66]; néha (pl. ezekben a cikkekben) nem a mondott módon az „out”-, hanem az „in”-állapotokkal dolgoznak, melyek alakja aszimptotikusan síkhullám és kifutó gömbhullám, és a felírt „out”-állapotokból komplex konjugálással és $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ cserével kaphatók. Mindenesetre (amiatt, mert $D(\mathbf{r})$ páros függvény) ez a két lehetőség itt azonos eredményre vezet.



2.2. ábra. Illusztráció a hullámfüggvény $D(\mathbf{r})$ páreloszlással összeintegrálandó $|\psi_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r})|^2$ abszolútérték-négyzetéről a szabad esetben (a fenti sorban; ez csupán a 0 és 2 között váltakozó síkhullám) és a Coulomb-kölcsönható esetben (a lenti sorban), pionokra, a k relatív impulzus különféle értékeire.

2.2.2. Mag-glória-modell, Coulomb-korrekció

A korrelációs függvények értelmezésében nagy szerepet kap az úgynevezett mag-glória- („core-halo”)-modell [67, 68], melyet most némileg „fordítva”, a fizikai alapgondolatból a megfigyelt jelenség felé haladva foglalok össze. Az alapgondolat az, hogy a forrásfüggvény egy „mag” (*core*) és egy „glória” (*halo*) részre bontható; előbbi írja le a közvetlenül az ütközési zónában keletkező

részecskéket (így a sugara $\simeq 10$ fm nagyságrendű), utóbbi pedig az olyanokat, amelyek az ütközési zónától fm-es skálán mérve jóval messzebb keletkeztek. Töltött pionokat tekintve (melyek a korrelációs mérések egyik gyakori célpontjai) például számos néhány fm/ c -nél lényegesen hosszabb élettartamú részecske illetve rezonancia van (K_0^S , ω , η , η' , stb.), amely π^\pm pionokra bomlik, az ütközési zónától (keletkezési helytől) várhatóan jónéhány száz vagy ezer fm-nyire vagy még többre: az ilyenek bomlástermékei a pion-forrásfüggvény glóriájához járulnak hozzá.

Feltesszük tehát, hogy az $S(\mathbf{r}, \mathbf{K})$ forrásfüggvény egy $S_c(\mathbf{r}, \mathbf{K})$ „mag” (core) és egy $S_h(\mathbf{r}, \mathbf{K})$ „glória” (halo) részre osztható. Az egész forráshoz képest a „mag” részarányát $\sqrt{\lambda}$ módon írjuk:

$$S(\mathbf{r}, \mathbf{K}) = \sqrt{\lambda} \cdot S_c(\mathbf{r}, \mathbf{K}) + (1 - \sqrt{\lambda}) \cdot S_h(\mathbf{r}, \mathbf{K}). \quad (2.41)$$

Feltesszük, hogy S , S_c és S_h ugyanúgy normált; így a most $\sqrt{\lambda}$ módon jelölt paraméter (mely függ(het) \mathbf{K} -tól, de ezt nem írtuk ki) valóban a magból jövő részecskék részarányát mondja meg:

$$N_1(\mathbf{p}) = \int d^3\mathbf{r} S(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \sqrt{\lambda} \int d^3\mathbf{r} S_c(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + (1 - \sqrt{\lambda}) \int d^3\mathbf{r} S_h(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \Rightarrow \quad (2.42)$$

$$\Rightarrow N_{1c}(\mathbf{p}) := \sqrt{\lambda} \int d^3\mathbf{r} S_c(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \sqrt{\lambda} N_1(\mathbf{p}) = \int d^3\mathbf{r} S(\mathbf{r}, \mathbf{p}). \quad (2.43)$$

Itt N_{1c} és N_1 tehát a magból jövő spektrum-rész illetve az egész spektrum. A korrelációs függvényből viszont $S(\mathbf{r})$ abszolút normálása kiesik: az alábbi képletek egyszerűsítése végett feltesszük, hogy (minden \mathbf{K} -nál) $S(\mathbf{r}, \mathbf{K})$ egyre normált.

A $D(\mathbf{r}, \mathbf{K})$ pár-eloszlást is szétbonthatjuk a mag-glória-felosztás alapján:

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{K}) = \lambda \cdot D_{cc}(\mathbf{r}, \mathbf{K}) + 2\sqrt{\lambda}(1 - \sqrt{\lambda}) \cdot D_{ch}(\mathbf{r}, \mathbf{K}) + (1 - \sqrt{\lambda})^2 \cdot D_{hh}(\mathbf{r}, \mathbf{K}), \quad (2.44)$$

$$\text{ahol } D_{cc}(\mathbf{r}, \mathbf{K}) = \int d^3\boldsymbol{\rho} S_c(\boldsymbol{\rho} + \frac{1}{2}\mathbf{r}, \mathbf{K}) S_c(\boldsymbol{\rho} - \frac{1}{2}\mathbf{r}, \mathbf{K}), \quad (2.45)$$

$$D_{ch}(\mathbf{r}, \mathbf{K}) = \int d^3\boldsymbol{\rho} S_c(\boldsymbol{\rho} + \frac{1}{2}\mathbf{r}, \mathbf{K}) S_h(\boldsymbol{\rho} - \frac{1}{2}\mathbf{r}, \mathbf{K}), \quad (2.46)$$

$$\text{és } D_{hh}(\mathbf{r}, \mathbf{K}) = \int d^3\boldsymbol{\rho} S_h(\boldsymbol{\rho} + \frac{1}{2}\mathbf{r}, \mathbf{K}) S_h(\boldsymbol{\rho} - \frac{1}{2}\mathbf{r}, \mathbf{K}), \quad (2.47)$$

A korrelációs függvényt ebből (2.40) adja meg. A lényeges állítás most a következő: ha az $S_h(\mathbf{r}, \mathbf{K})$ függvénynek van egy jellemző R_h sugara, amivel végtelenhez tartunk, akkor

$$\lim_{R_h \rightarrow \infty} \int d^3\mathbf{r} D_{ch}(\mathbf{r}, \mathbf{K}) |\psi_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r})|^2 = \lim_{R_h \rightarrow \infty} \int d^3\mathbf{r} D_{hh}(\mathbf{r}, \mathbf{K}) |\psi_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r})|^2 = 1. \quad (2.48)$$

Ebből¹⁹ (mivel a maradék λ -kat tartalmazó szorzók értéke összevonva $1 - \lambda$) arra jutunk, hogy

$$C_2(\mathbf{Q}, \mathbf{K}) = 1 - \lambda + \lambda \int d^3\mathbf{r} D_{cc}(\mathbf{r}, \mathbf{K}) |\psi_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r})|^2. \quad (2.49)$$

Ez a formula Bowler-Sinyukov-formula néven ismert [69, 70]; lényege, hogy csak az S_c mag-járulék

¹⁹Ez az állítás egzakt matematikai tartalmú, de formálisan bebizonyítani igen keserves. Lényeg: nagy r -ekre $\psi_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r})$ biztosan a szabad részecskés síkhullámhoz tart, és az integrálási változó $\mathbf{r} \rightarrow R_h \mathbf{r}$ átskálázása után már felcserélhetjük a határértéket és az integrálást, így a (visszaskálázott) D_{ch} és D_{hh} integráljai maradnak, 1-et adva.

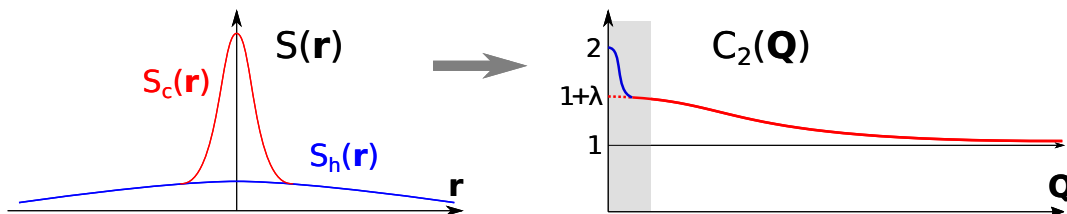
szerepel benne; azt pedig, hogy ez nem az egész forrás, a λ paraméter ilyen megjelenése tömöríti. Szabad részecskék esetén $|\psi_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r})|^2 = 1 + \cos(\mathbf{Q}\mathbf{r})$, így az adódik (vö. a (2.19) egyenlettel), hogy

$$C_2^{(0)}(\mathbf{Q}, \mathbf{K}) = 1 + \lambda \cdot \tilde{D}_{cc}(\mathbf{Q}, \mathbf{K}). \quad (2.50)$$

Ennek legjellemzőbb következménye, hogy $C_2^{(0)}(\mathbf{Q}, \mathbf{K})$ $1+\lambda$ -hoz tart $\mathbf{Q}=0$ -ban.²⁰ Kísérletileg ez volt az alapvető tapasztalat: a rekonstruált szabad korrelációs függvény $\mathbf{Q}=0$ -beli határértéke 2 helyett $1+\lambda$ -nak adódott, így vezették be a λ -t mint „tengelymetszeti” (*intercept*) paramétert, melynek eredetére tehát a mag-glória-modell egy magyarázatot nyújtott.

Természetesen a valóságban nem végtelen az S_h glória-járulék sugara; véges de nagy R_h esetén az S_h -ból adódó járulék keskeny, kb. \hbar/R_h szélességű csúcsot ad $Q=0$ körül $C_2^{(0)}$ -ban; ez és az S_c $1+\lambda$ -hoz tartó járuléka együtt már 2-höz tart. Azonban a kísérletekben mindig jelenlévő (a mondott keskeny csúcsnál lényegesen nagyobb értékű, jellemzően ~ 5 – 10 MeV) relativimpulzusfelbontás (azaz aminél kisebb \mathbf{Q} nem mérhető) miatt a mért $C_2(\mathbf{Q})$ mégis látszólag $1+\lambda$ -hoz tart.

Fontos megjegyezni, hogy az így kísérletileg definiált λ tengelymetszeti paraméter 1-től való eltéréseinek más okai is lehetnek, nemcsak a „glória” megjelenése: például az, ha a pionok (részben) koherens, vagy akár úgynevezett „préselt” állapotokat keltő forrásból származnak.²¹ Kiderül, hogy ezeket a lehetséges hatásokat úgy lehet egymástól elkülöníteni, ha a kétrészecskés C_2 mellett az analóg módon definiált több- (három-, négy- stb.) részecskés C_3, C_4 stb. korrelációs függvények tengelymetszeteit is mérjük. Ezt például a [71, 72] publikációk tárgyalják; ezen gondolatoknak kísérleti ellenőrzése jelenleg is őrölt téma, kutatócsoportunk (és saját magam) aktív részvételével.



2.3. ábra. Illusztráció mag-glória-modellről: az $S(\mathbf{r})$ forrásfüggvény nagyméretű komponense (a glória) a szabad részecskés korrelációs függvényben egy kis, kísérletileg feloldhatatlan csúcsot eredményez, emiatt a megfigyelt korrelációs függvény $\mathbf{Q}=0$ -ban 2 helyett $1+\lambda$ -hoz tart.

A mért C_2^{exp} korrelációs függvény eddigieket figyelembe vevő kezelése többféleképpen történhet:

1. A $D(\mathbf{r}, \mathbf{K})$ páreloszlásra egy (összességében \mathcal{P} -vel jelölt) paraméterekkel jellemzett $D^m(\mathbf{r}, \mathcal{P})$ függvényalakot teszünk fel (m mint „modell”), amiben a \mathbf{K} -függést a \mathcal{P} paraméterek hordozhatják. Ezután ezen $D^m(\mathbf{r}, \mathcal{P})$ -ből kiszámolt $C_2^m(\mathbf{Q}, \mathcal{P})$ -vel közvetlenül illesztjük a mért $C_2^{\text{exp}}(\mathbf{Q})$ -t a \mathcal{P} paramétereket meghatározva (minden \mathbf{K} -nál).

²⁰Ugyanis most $\tilde{D}(\mathbf{Q}=0, \mathbf{K}) = \int d^3\mathbf{r} D(\mathbf{r}, \mathbf{K}) = 1$; persze más normálással is ugyanez adódik a tengelymetszetre.

²¹Igazság szerint a $\lambda < 1$ megfigyelés értelmezésére a koherencia feltételezése talán még előbb is előkerült, mint az egyszerűbb fenti mag-glória-modell; szimulációk alapján mindenesetre azt mondhatjuk, hogy (legalábbis töltött pionok esetén) a bomlástermékek (a glória) aránya van olyan nagy, hogy talán mégis ez utóbbi a jellemzőbb hatás.

2. A mért $C_2^{\text{exp}}(\mathbf{Q})$ -ból először rekonstruáljuk a „mért” szabad $C^{(0),\text{exp}}(\mathbf{Q})$ korrelációs függvényt, majd ezt illesztjük a $D^{\text{m}}(\mathbf{r}, \mathcal{P})$ modellből kiszámolt szabad $C^{(0),\text{m}}(\mathbf{Q}, \mathcal{P})$ korrelációs függvénnyel. Utóbbi a (2.50) egyenlet szellemében a páreloszlás $\tilde{D}^{\text{m}}(\mathbf{Q}, \mathcal{P})$ Fourier-transzformáltjából kapható, ami egyszerűbb, és akár analitikusan is felírható. Az első lépéshez bevezetjük a

$$K(\mathbf{Q}, \mathcal{P}) := \frac{C_2^{\text{m}}(\mathbf{Q}, \mathcal{P})}{C_2^{(0),\text{m}}(\mathbf{Q}, \mathcal{P})} \quad (2.51)$$

Coulomb-korrekción. A módszer lényege: felteszünk egy \mathcal{P}_0 kiindulási paraméterhalmazt, kiszámítjuk a $K(\mathbf{Q}, \mathcal{P}_0)$ Coulomb-korrekción, ezzel $C^{\text{exp}}(\mathbf{Q})$ -t elosztva megkapjuk a $C^{(0),\text{exp}}(\mathbf{Q}, \mathcal{P}_0)$ „kísérleti szabad korrelációs függvényt”, amely nyilván függ attól, hogy milyen \mathcal{P}_0 paramétereket használtunk a Coulomb-korrekciónhoz. Ezt a $C^{(0),\text{exp}}(\mathbf{Q}, \mathcal{P}_0)$ -t illesztjük a modell $C^{(0),\text{m}}(\mathbf{Q}, \mathcal{P})$ függvénnyel, új \mathcal{P}_1 paramétereket kapva. A \mathcal{P}_1 paraméterekkel újraszámoljuk a Coulomb-korrekción, majd az ezzel kapott $C^{(0),\text{exp}}(\mathbf{Q}, \mathcal{P}_1)$ -et illesztjük, és így tovább. Ez tehát iterációs módszer; elég sok lépéssel remélhetőleg megtalálja a fixpontot: a végleges \mathcal{P} paramétereket.

3. Az előző két módszer elvileg pontos, de nem „úszhatjuk meg” a (2.49)-beli integrál sokszori numerikus kiszámítását (analitikusan ez kicsit is valóság-hű forrásfüggvények esetén sem kezelhető); vagy az illesztőalgorithmus, vagy a Coulomb-korrekción igényli ezt. A korai HBT-mérésekben ez nagy(obb) problémát jelentett, így általában előre fixált \mathcal{P}_0 paraméterhalmazzal (vagy akár: fixált forrásfüggvény-alakkal) számították ki a Coulomb-korrekción, azt alkalmazva rekonstruálták $C^{(0),\text{exp}}(\mathbf{Q})$ -t, majd illesztették a modell- $C^{(0),\text{m}}(\mathbf{Q}, \mathcal{P})$ -vel. Ez a módszer visszamenőleg nézve az iteráción „lebutítása”; kevesebb számítás igényel, de nyilván nem pontos: nem a végül az illesztésből kapott forrásfüggvénnyel számolódik a Coulomb-korrekción.

A legelső fajta próbálkozás a Coulomb-korrekciónra pedig még ennél is egyszerűbb volt; az úgynevezett Gamow-korrekción, mely a $D(\mathbf{r}) = \delta^{(3)}(\mathbf{r})$ pontszerű forrás feltételezéséből adódik:

$$K^{\text{Gamow}}(\mathbf{Q}) = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} + \frac{2\lambda}{1+\lambda} |\mathcal{N}|^2; \quad \lambda = 1 \text{ esetben} \quad K^{\text{Gamow}}(\mathbf{Q}) = |\mathcal{N}|^2, \quad (2.52)$$

ahol $|\mathcal{N}|^2 = |\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}=0)|^2$ a már korábban is így nevezett *Gamow-faktor*, a $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ hullámfüggvény normálása (ld. (2.33) egyenletet). A mai statisztikájú mérésekben azonban már kicsit is kiterjedtebb forrás esetén is rossz az illeszkedés, ha ezzel végezzük a Coulomb-korrekción.

4. Megemlítjük az úgynevezett „imaging”-módszert [73], amely az \mathbf{r} változó diszkretizációjával és a térszög-változóban Y_{lm} gömbfüggvények szerinti sorfejtéssel közvetlenebbül invertálja (2.49)-et, meghatározva $D(\mathbf{r})$ -et a mért $C_2(\mathbf{Q})$ -ból (adott \mathbf{K} -nál). Néha ezt *modellfüggetlennek* mondják, azonban a gyakorlatban szükséges „levágás” (véges sok l és diszkretizációs szakasz megengedése) matematikailag ugyanúgy „modell”nek számít, mint egy véges sok paramétertől függő $D(\mathbf{r})$ -függvényalak. Továbbá a rekonstruált $D(\mathbf{r})$ pontjain a hibák korreláltak lesznek, ami hátrány, ha ezután a rekonstruált $D(\mathbf{r})$ -et mégiscsak valamilyen $D^{\text{m}}(\mathbf{r})$ modellel illesztjük.

Az alábbiakban az első két módszerre, tehát egy modellfeltevésből kapható C_2^{m} függvényalak illesztésére koncentrálunk, akár közvetlen illesztésről, akár iteráló Coulomb-korrekciónról legyen szó.

2.2.3. Lévy-eloszlás alakú forrásfüggvények

A részecskekeltő forrásfüggvényt Gauss-alakkal közelíteni egy elég természetes első próbálkozás; sok fontos HBT-korrelációs mérés ezen alapult/alapul. Azonban például a RHIC-nél hamar kiderült, hogy túl kell lépni ezen a módszertanon: $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV-es arany-arany-ütközésekben az imént említett „imaging”-módszerrel rekonstruált egydimenziós forrásfüggvény Gauss-tól eltérő, hatványfüggvény-szerűen lecsengő hosszútávú viselkedést mutatott [74].

Elméleti oldalról is már korábban felmerült, hogy a nehézion-fizikai Bose-Einstein-korrelációk leírásához Gauss-alak helyett általánosabb, úgynevezett Lévy-eloszlás alakú $D(\mathbf{r})$ modell-forrásfüggvényeket lehetne használni [75]. A Lévy-eloszlás a Gauss-eloszlás egyfajta általánosítása, amennyiben a nagyságot megadó \mathbf{R}^2 mátrix mellett egy plusz paramétert, az α jelű „Lévy-kitevőt” vagy „Lévy-(stabilitási) indexet” is tartalmazza, és a következő Fourier-transzformált definiálja:

$$\mathcal{L}(\alpha, \mathbf{R}, \mathbf{r}) := \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \exp\left(-\frac{1}{2}|\mathbf{q}\mathbf{R}^2\mathbf{q}|^{\alpha/2}\right), \quad \text{ahol } 0 < \alpha \leq 2. \quad (2.53)$$

Ez így felírva egyre normált: $\int d^3\mathbf{r} \mathcal{L}(\alpha, \mathbf{R}^2, \mathbf{r}) = 1$ a Fourier-transzformáció tulajdonságai alapján. Az α megszorításának értelmét ld. rögtön; mindenesetre $\alpha=2$ esetén valóban Gauss-eloszlásról van szó (hiszen ekkor a felírt integrandus is Gauss-alakú \mathbf{q} -ban). Gömbszimmetrikus esetben (amikor az \mathbf{R}^2 mátrix diagonális), az egy sugárparaméter kiskálázható, és a térszög-integrál is elvégezhető:

$$\mathcal{L}(\alpha, R, r) = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{q}R|^\alpha} = \frac{1}{R^3} \mathcal{L}(\alpha, 1, \frac{r}{R}) = \frac{1}{2\pi^2 R^2 r} \int_0^\infty dq q \sin(q \frac{r}{R}) e^{-\frac{1}{2}q^\alpha}. \quad (2.54)$$

Az $\alpha=2$ (Gauss-)eset mellett az $\alpha=1$ eset is speciális, mert ekkor Cauchy-eloszlás adódik:

$$\mathcal{L}(\alpha=2, R, \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi R^2)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{2R^2}}, \quad \mathcal{L}(\alpha=1, R, \mathbf{r}) = \frac{8}{\pi^2 R^3} \frac{1}{\left(1 + \frac{4r^2}{R^2}\right)^2}. \quad (2.55)$$

Ha viszont $\alpha \neq 2$ és $\alpha \neq 1$, akkor az $\mathcal{L}(\alpha, R, r)$ Lévy-alak nem fejezhető ki egyszerű ismert függvényekkel. Tudvalevő azonban az aszimptotikus alakja: hacsak $\alpha \neq 2$, akkor r -ben hatványfüggvény-szerűen csökken (amit mutat a Cauchy-eloszlás imént látott speciális esete is, ahol is $\alpha=1$):

$$\text{nagy } r\text{-ekre } 4\pi^2 \mathcal{L}(\alpha, 1, r) \approx \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \Gamma(\alpha+2) \cdot r^{-3-\alpha}, \quad (2.56)$$

úgy érve, hogy a két oldal különbsége $r^{\alpha+3}$ -nal szorozva is 0-hoz tart. A képlet láthatóan nem sokat mond $\alpha=2$ esetben, viszont például $2 < \alpha < 4$ esetén nagy r -ekre $\mathcal{L}(\alpha, 1, r)$ negatív: nem rendes eloszlásfüggvény tehát. Ha viszont $\alpha < 2$, akkor $\mathcal{L}(\alpha, 1, r)$ jól viselkedő (pozitív) eloszlásfüggvény. Nagyon fontos viszont, hogy az $\alpha=2$ (Gauss-)esetet kivéve nincsen véges szórásnégyzete: $0 < \alpha < 2$ esetén az $\int d^3\mathbf{r} r^2 \mathcal{L}(\alpha, R, r)$ integrál, mely ezt adná meg, nem létezik.

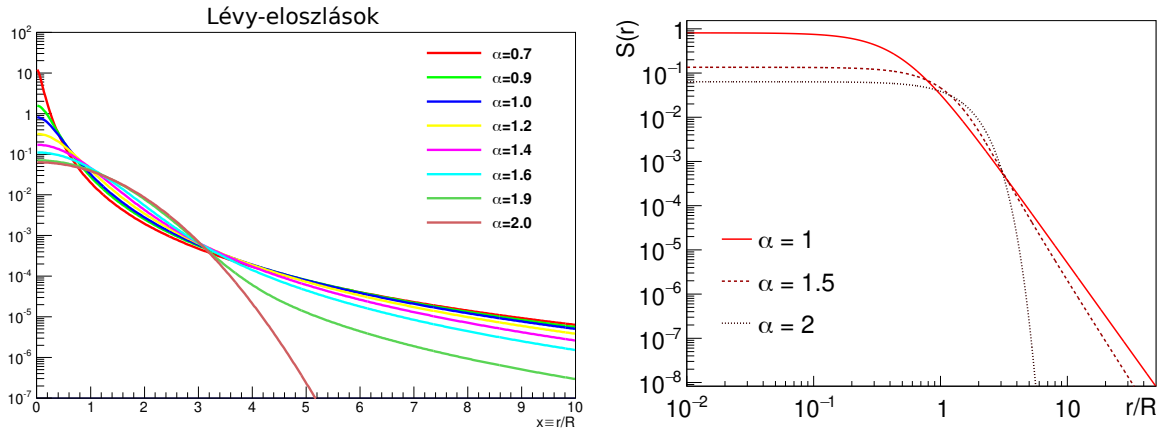
Az imént definiált Lévy-eloszlások olyan értelemben is a Gauss-eloszlás általánosításai, hogy (gömbszimmetrikus esetben) megőrzik a „stabilitási tulajdonságot”: azonos α -jú Lévy-eloszlások konvolúciója ismét ilyen eloszlás, amint az könnyen látható a Fourier-transzformációs definícióból:

$$\int d^3\boldsymbol{\rho} \mathcal{L}(\alpha, R_1, \boldsymbol{\rho} + \frac{1}{2}\mathbf{r}) \mathcal{L}(\alpha, R_2, \boldsymbol{\rho} - \frac{1}{2}\mathbf{r}) = \mathcal{L}(\alpha, R, \mathbf{r}), \quad \text{ahol itt } R^\alpha = R_1^\alpha + R_2^\alpha. \quad (2.57)$$

Ha tehát az $S_c(\mathbf{r})$ forrásfüggvény Lévy-alakú, akkor az lesz a $D_{cc}(\mathbf{r})$ pár-eloszlás is:

$$S_c(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathcal{L}\left(\alpha(\mathbf{p}), R(\mathbf{p}), \mathbf{r}-\mathbf{r}_0(\mathbf{p})\right) \quad \Rightarrow \quad D_{cc}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathcal{L}\left(\alpha(\mathbf{p}), 2^{1/\alpha(\mathbf{p})}R(\mathbf{p}), \mathbf{r}\right), \quad (2.58)$$

ahol még egy \mathbf{p} -függő tetszőleges $\mathbf{r}_0(\mathbf{p})$ eltolást is megengedhettünk (ami $D(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ -ben nem jelenik meg), és expliciten kiírtuk, hogy a paraméterek \mathbf{p} -függőek lehetnek.



2.4. ábra. Gömbszimmetrikus Lévy-függvények az $x \equiv \frac{r}{R}$ redukált koordináta függvényében („lin-log” és „log-log” skálán). Csak az $\alpha = 2$ (Gauss) esetben nem hatványfüggvény-szerű a lecsengés.

Sok lehetséges motivációja van annak, hogy a részecskekeltő forrásfüggvényre Lévy-alakot tegyünk fel. Lényegében mind a stabilitási tulajdonságon alapul, ami miatt ilyen függvényalak ugyanúgy határeloszlás lehet, mint a Gauss-alak véges szórású esetben.

- A [76] cikkben a jetek hadronizációjának fraktál-jellegéből következtetnek Lévy-eloszlás megjelenésére $e^+ + e^-$ vagy $p + p$ ütközésekben; ezen gondolat alapján az α kitevő a QCD anomális dimenziójával van kapcsolatban.
- A [77] cikkben az anomális diffúziót (vagyis amikor az egyedi részecskeprodukciónak szórásfolyamatokat jellemző variancia nem véges, ahogy ez el is képzelhető táguló közegben) javasoljuk hatványfüggvény-szerű forrásfüggvények eredetként. Eszerint az α kitevő értéke mérhetően különböző lenne különböző „szórási hajlandóságú” hadronokra, például pionokra és kaonokra.
- A [78] publikáció a Lévy-eloszlások megjelenését jósolja, ha a kvarkanyag-hadronanyag fázisátmenet (feltételezett) kritikus pontjának közelében vagyunk. Itt egy olyan gondolatot is bevezetnek, ami alapján az α stabilitási index megegyezne a QCD kritikus pontját jellemző egyik (szokásosan η -val jelölt) kritikus indexszel. Ez az η az az index, ami a rendparaméter (amely itt a ϕ pionkondenzátum) kritikus pontbeli térbeli korrelációs függvényének lecsengését (mely itt hatványfüggvény-szerű) szabályozza $\langle \phi(r)\phi(0) \rangle \propto r^{-1-\eta}$ módon. Ez a gondolat a RHIC Beam Energy Scan program során érintett kisebb energiájú nehézion-ütközésekben lehet releváns.

Ezek mind érdekes fizikai elképzelések; a [79] cikkben viszont azt fejtik ki, hogy akár egyszerűen az (egydimenziós méréseket jellemző) irányra átlagolás vagy a különböző eseményekre való átlagolás miatt is látszólag megjelenhetnek ilyen Lévy-alakú forrásfüggvények; erről megjegyezhetjük,

hogy a nemrég [80] vizsgálat szerint realiztikus szimulációkban eseményenként is megjelenik a Lévy-eloszlás mint forrásfüggvény-alak. A mondottak tehát mindenképpen elegendő motivációt jelentenek arra, hogy a Bose-Einstein-korrelációs függvényeket Lévy-eloszlás alakú forrásfüggvényt feltételezve mérjük és illesszük, az α paraméter viselkedését felderítendő. Ilyen vizsgálat egyúttal a mért korrelációs függvénynek a Gauss-feltevésnél pontosabb leírására is használható lehet, azaz az olyan következtetéseket, amelyek a forrás „mértén” (az R sugáron) vagy a korreláció erősségén (az előző szakaszban bevezetett λ paraméteren) múlnak, megerősítsük vagy árnyaljuk.

2.2.4. Konkrét számítások

A következő 3. fejezetben tárgyalt, a PHENIX kísérlet keretei között végzett mérés/adatanalízis már „kényszerítő erővel” mutatja, hogy a Gauss-eloszlás feltételezése helyett (legalábbis egydimenziós mérés esetén) mindenképpen a Lévy-eloszlás használandó. Ehhez a méréshez használtuk először a Coulomb-kölcsönhatást a (2.49) képlet szerint figyelembe véve (jórészt általam) kiszámított elméleti korrelációs függvényeket Lévy-eloszlás alakú forrásfüggvények esetén. A numerikus integrálás itt nagyon lassú folyamat, ezért kétféle módszertannal is dolgoztunk. Készítettünk egy számítógép-memóriába betölthető táblázatot: ezzel már az illesztőalgoritmushoz szükséges sebességgel működhetett a kiolvasás, illeszthetők voltak a mért korrelációs függvények. Továbbá empirikus közelítő formulát is kidolgoztunk. Ez viszonylag nehéz feladat volt, hiszen Q -ban, R -ben és α -ban egyszerre kellett illeszteni; némi segítséget nyújtott a CMS kísérletben $\alpha=1$ (azaz Cauchy-eloszlás) esetén már korábban is alkalmazott egyfajta parametrizáció [81]. Az újabb, általánosabb parametrizációk technikai részletei az [58,59] cikkekben található; illusztrációként megadunk egy ilyen $K_{\text{emp}}(Q)$ parametrizációt a Coulomb-korrekcióna:

$$\frac{1}{K_{\text{emp}}(Q)} = (1+E(Q)) \cdot (1-F(Q)) + \frac{F(Q)}{|\mathcal{N}|^2} \frac{1}{1+P_{\text{mod}}(Q)}, \quad (2.59)$$

ahol előkerül az $|\mathcal{N}|^2$ Gamow-faktor; az ezen túlmenő parametrizáció lényege a $P_{\text{mod}}(Q)$ függvény, az $E(Q)$ és az $F(Q)$ pedig „simán átváltó” függvények; bevezetésük azt szolgálja, hogy az illesztőalgoritmus megbízhatóan működjön olyan nagy Q -tartományban is, ahol az integrált (és így a K_{mod} illesztését) már nem tudtuk megfelelően pontosan kiszámítani:

$$P_{\text{mod}} = \frac{\pi\eta A_{\alpha,R} \frac{QR}{\alpha}}{1+B_{\alpha,R} \frac{QR}{\alpha} + C_{\alpha,R} \left(\frac{QR}{\alpha}\right)^2 + D_{\alpha,R} \left(\frac{QR}{\alpha}\right)^4}, \quad E(Q) = \frac{A_{\alpha,R}}{e^{QB_{\alpha,R}}}, \quad F(Q) = \frac{1}{1+\left(\frac{Q}{70 \text{ MeV}}\right)^{20}},$$

a Q -függések (α - és R -függő) paraméterei pedig a következők lettek:

$$A_{\alpha,R} = (a_A\alpha + a_B)^2 + (a_C R + a_D)^2 + a_E(\alpha R + 1)^2, \\ B_{\alpha,R} = \frac{1+b_A R^{b_B} - \alpha^{b_C}}{\alpha^2 R(\alpha^{b_D} + b_E R^{b_F})}, \quad C_{\alpha,R} = \frac{c_A + \alpha^{c_B} + c_C R^{c_D}}{c_E (R/\alpha)^{c_F}}, \quad D_{\alpha,R} = d_A + \frac{R^{d_B} + d_C \alpha^{d_F}}{R^{d_D} \alpha^{d_E}}.$$

Ezzel a K_{emp} formulával való illesztéssel egyrészt visszakapjuk a memóriába tölthető táblázattal való illesztés eredményeit, másrészt kiküszöbölhetjük az interpolációs táblázatbeolvasás numerikus

fluktuációit. Összefoglalva az eddigieket: a mutatott számítások elvégzésével vált lehetségessé megbízható illesztéseket végezni a Gauss-alakon túlmenően Lévy-eloszlást használó egydimenziós korrelációsfüggvény-mérésekhez.²² Az ezt elvégző programcsomagot publikusan is elérhetővé is tettük [82]; illusztráló ábrákat a következő szakaszban láthatunk majd.

A nem gömbszimmetrikus Coulomb-korrektions számítás is előkerül a háromdimenziós Lévy-eloszlást feltételező (jelenleg fejlesztés alatt álló) mérésnél is, azaz amikor az LCMS-ben

$$D(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \exp\left(-|\mathbf{q}\mathbf{R}^2\mathbf{q}|^{\alpha/2}\right), \quad (2.60)$$

itt diagonális \mathbf{R} mátrixszal; eszerint ilyenkor a szabad korrelációs függvény ilyen alakú:

$$C_2^{(0)}(\mathbf{Q}) = 1 + \lambda \cdot \exp\left(-|q_{\text{out}}^2 R_{\text{out}}^2 + q_{\text{side}}^2 R_{\text{side}}^2 + q_{\text{long}}^2 R_{\text{long}}^2|^{\alpha/2}\right). \quad (2.61)$$

Akkor is érdemes azonban ilyet vizsgálni, ha egydimenziós mérést akarunk végezni az LCMS-ben (ahol közelítőleg gömbszimmetrikus a forrás): ekkor a PCMS-ben, ahol (a nemrelativisztikus közéletés jgsultsága miatt) a (2.49) integrált kiszámolnánk, biztosan nincs gömbszimmetria. Háromdimenziós esetben a (2.49) integrál nehézkes; egyelőre leginkább csak ellenőrzési cézzattal végeztük el, a Metropolis-(Hastings-)algoritmust használva (a $D(\mathbf{r})$ forrásfüggvényt tekintve valószínűségi eloszlásnak, a $|\psi_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r})|^2$ mennyiséget pedig ezzel súlyozott integrandusnak).²³ A fő motiváció az volt, hogy megvizsgáljuk, hogy mennyire lehetséges a nem gömbszimmetrikus esetben a (kevesebb számolást igénylő) gömbszimmetrikus Coulomb-korrektions használni. Az ilyen irányú vizsgálatokból a következőket állapíthattuk meg [60]:

- A háromdimenziós méréshez is első körben elfogadható pontossággal használhatjuk a gömbszimmetrikus számolásból kapott Coulomb-korrektions, ha ebben a sugarak megfelelő módon számított R_{PCMS} átlagát használjuk (melyet a q_{inv} és \mathbf{Q}_{LCMS} közötti (2.25) összefüggés sugall):

$$R_{\text{PCMS}} := \sqrt{\frac{R_{\text{out}}^2}{1-\beta_t^2} + R_{\text{side}}^2 + R_{\text{long}}^2}, \quad (2.62)$$

és a $\psi_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r})$ hullámfüggvény \mathbf{k} változójának a $q_{\text{inv}} \equiv |\mathbf{Q}_{\text{PCMS}}|$ invariáns impulzus felét használjuk.

- LCMS-beli egydimenziós mérésekhez (melyek, noha biztosan információvesztéssel járnak a háromdimenzióshoz képest, mégis szükség lehet rájuk kisebb statisztikájú adatsorok esetén) az

²²A teljesség kedvéért megadjuk a fenti parametrizációban szereplő konkrét számok értékeit is:

$a_A = 0.26984$	$a_B = -0.49123$	$a_C = 0.03523$	$a_D = -1.31628$	$a_E = 0.00359$	
$b_A = 2.37267$	$b_B = 0.58631$	$b_C = 2.24867$	$b_D = -1.43278$	$b_E = -0.05216$	$b_F = 0.72943$
$c_A = -4.30347$	$c_B = 0.00001$	$c_C = 3.30346$	$c_D = 0.000001$	$c_E = 0.000003$	$c_F = 1.68883$
$d_A = 0.00057$	$d_B = -0.80527$	$d_C = -0.19261$	$d_D = 2.77504$	$d_E = 2.02951$	$d_F = 1.07906$
$A_a = 0.12625$	$A_b = 0.05385$	$A_c = -0.00913$	$A_d = -0.01846$	$A_e = 0.00085$	$A_f = 0.00042$
$B_a = 19.31620$	$B_b = 5.58961$	$B_c = 2.26264$	$B_d = -1.28486$	$B_e = -0.08216$	$B_f = 0.02384$

²³A Metropolis-algoritmus olyan $I := \int dx f(x)g(x)$ integrálok kiszámításához használható, amelyekben az egyik jelölt függvény (például most az f) egy pozitív értékű eloszlás: az f -fel definiált eloszlással vett véletlen x -ekben a g kiértékelgetésével majd ezek összeadásával kapjuk az integrál egyre pontosabb értékét.

előbbi kifejezésnek megfelelően a következő sugárral számolt Coulomb-korrekciónak kell használni:

$$R_{\text{PCMS}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2}{3}\beta_t^2}{1 - \beta_t^2}} R_{\text{LCMS}}, \quad (2.63)$$

és azt a tényt, hogy a Coulomb-korrekciónak q_{inv} -et kell használni, de a mérést a Q_{LCMS} változóban végezzük, egy (adott Q_{LCMS} esetén a különféle q_{inv} értékek „hozzájárulását” megadó súlyozással vesszük figyelembe, és az így adódó $K_{\text{súlyozott}}$ Coulomb-korrekciónak használjuk:

$$K_{\text{súlyozott}}(Q_{\text{LCMS}}) = \frac{\int dq_{\text{inv}} K(q_{\text{inv}} A(q_{\text{inv}}, Q_{\text{LCMS}}))}{\int dq_{\text{inv}} A(q_{\text{inv}}, Q_{\text{LCMS}})}, \quad (2.64)$$

ahol tehát az $A(q_{\text{inv}}, Q_{\text{LCMS}})$ mennyiség súlyoz; ez a méréshez használt párok (részben a kísérleti elrendezéstől is függő, adatanalízis közben megállapítandó) eloszlása a két jelölt változóban.

Az ilyen módszerekkel történő korrelációsfüggvény-mérések már folyamatban vannak, vagy eredményre is jutottak különféle kísérleti kollaborációk keretei között [83–85].

2.3. A végállapotú erős kölcsönhatás szerepe

A nyers kísérleti adatok mennyiségének növekedése pontosabb méréseket tesz lehetővé, másrészt éppen emiatt a túlegyszerűsített modellfeltevések egyre kevésbé elfogadható leírást adnak. Hangsúlyosan előkerül ez a STAR kísérletben mért korrelációs függvényeknél: itt nemcsak arról van már szó, hogy a Gauss-alakkal való leírás nem működik, de még az (extra α paramétert tartalmazó) Lévy-eloszlás illesztése is szisztematikusan a megfigyelt $C_2(Q)$ -tól eltérő függvényalakra vezet. Keresni kezdtük ezért azon (eddig elhanyagolt) effektusokat, amelyek figyelembevételével további finomítást hozhat. Ebben a szakaszban arról a munkáról számolok be [86], amelyben Lévy-alakú forrásfüggvényekre meghatároztuk a töltött pionok és kaonok végállapotú erős kölcsönhatásának jelentőségét és az adatokra illesztésben emiatt „elkövetett hibát”, vagyis hogy hogyan változ(ná)nak a forrás paraméterei, ha figyelembe vennénk ezt az effektust. Az újabb kísérleti analízisekben kutatócsoportunkkal már eleve az erős kölcsönhatást is figyelembe vevő illesztéseket végzünk.

Azzal az esettel foglalkoztunk tehát, amikor az erős kölcsönhatás a Coulomb-kölcsönhatással együtt jelenik meg. Az erős kölcsönhatás természetesen bonyolultabb, de éppen rövid hatótávolsága miatt elég egy közelítő leírását használni. Ennek lényegét már Landau és Szmorogyinszkij kidolgozták az 1940-es években, és az ismert [61] könyvben, valamint a gondolatmenetünkben inkább követett [87] cikkben is megtalálható: az erős kölcsönhatás csakis az s -hullámot (a parciálshullám-kifejtésben az $l=0$ -s tagot) módosítja egy a relatív impulzustól függő fázistolással; ez utóbbi fázistolás \mathbf{k} -függése „tömöríti” a részecskék erős kölcsönhatásának hatását.

A szükséges $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ relatívmozgás-hullámfüggvény felírásához visszatérünk a 2.32-ben felírt szórási „out”-állapothoz, és sorbafejtjük azt a Coulomb-kölcsönható Schrödinger-egyenlet olyan megoldásai szerint, amelyeket az $\varepsilon \equiv \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$ energia mellett az impulzusmomentum határozott értéke jellemez (szokásosan l, m kvantumszámokkal). Ez utóbbi hullámfüggvények szögfüggését az Y_{lm} gömbfügg-

vények adják meg, az r sugártól való függésüket pedig az alábbiakban definiált $\mathcal{F}_{k,l}(r)$ függvény, az úgynevezett *reguláris* Coulomb-hullám adja meg. Bevezetjük emellé a most $\mathcal{G}_{k,l}(r)$ módon jelölt úgynevezett *szinguláris* Coulomb-hullámot is; ezek kifejezései

$$\mathcal{F}_{k,l}(r) = e^{\pi\eta/2}(-1)^{l+1}4k(2kr)^l \times \operatorname{Re} \left[e^{ikr+i\delta_l^c} U(l+1+i\eta, 2l+2, -2ikr) \right], \quad (2.65)$$

$$\mathcal{G}_{k,l}(r) = -e^{\pi\eta/2}(-1)^{l+1}4k(2kr)^l \times \operatorname{Im} \left[e^{ikr+i\delta_l^c} U(l+1+i\eta, 2l+2, -2ikr) \right]. \quad (2.66)$$

Itt δ_l^c az úgynevezett Coulomb-fázistolás (ami persze az η -n keresztül k -tól is függ):

$$\delta_l^c = \arg \Gamma(l+1+i\eta). \quad (2.67)$$

Az $U(a, b, z)$ úgynevezett Tricomi-függvény pedig szintén a (2.35) elfajult hipergeometrikus egyenlet megoldása; $M(a, b, z)$ -től lineárisan független, $z=0$ -ban nem reguláris, továbbá a $z \rightarrow \infty$ -nél érvényes aszimptotikus alakja rá egyedülként jellemző a (2.35) egyenlet megoldásai közül:

$$U(a, b, z) = \frac{\pi}{\sin(\pi b)} \left\{ \frac{M(a, b, z)}{\Gamma(b)\Gamma(a+1-b)} - \frac{M(a+1-b, 2-b, z)}{z^{b-1}\Gamma(2-b)\Gamma(a)} \right\}, \quad \text{és } z \rightarrow \infty\text{-nél} \quad (2.68)$$

$$U(a, b, z) \approx z^{-a}.$$

A $b \in \mathbb{Z}$ esetről ld. az alábbi 26 lábjegyzetet is. Ez alapján kiadódik az $\mathcal{F}_{k,l}$ és $\mathcal{G}_{k,l}$ Coulomb-hullámok aszimptotikus alakja is (sőt éppen ezek egyszerűsége miatt érdemes őket használni): $r \rightarrow \infty$ -re

$$\mathcal{F}_{k,l}(r) \approx \frac{2}{r} \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l^c - \eta \ln(2kr) \right), \quad \mathcal{G}_{k,l}(r) \approx \frac{2}{r} \cos \left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l^c - \eta \ln(2kr) \right). \quad (2.69)$$

Az $\mathcal{F}_{k,l}$ -ből és a $\mathcal{G}_{k,l}$ -ből összerakhatjuk a Schrödinger-egyenlet olyan megoldását is, ami a δ_l^c Coulomb-fázistoláson kívül egy (akár k -tól és l -től függő) tetszőleges $\Delta_{k,l}$ fázistolást is tartalmaz:

$$\mathcal{M}_{k,l}(r) := \mathcal{F}_{k,l}(r) \cos \Delta_{k,l} + \mathcal{G}_{k,l}(r) \sin \Delta_{k,l} \stackrel{r \rightarrow \infty}{\approx} \frac{2}{r} \cos \left(kr - \frac{l\pi}{2} + \Delta_{k,l} + \delta_l^c - \eta \ln(2kr) \right). \quad (2.70)$$

Az $r=0$ origóban a $\mathcal{G}_{k,l}$ függvény valóban szinguláris, $\mathcal{F}_{k,l}$ azonban véges itt, és ezen utóbbiakat kell használni az origóban szintén reguláris, a (2.32) egyenletben felírt szórási jellegű $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ hullámfüggvény parciálshullám-kifejtéséhez, mely a következő alakú:²⁴

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \mathcal{N}^* e^{-ikr} M(1-i\eta, 1, i(kr+\mathbf{k}\mathbf{r})) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2k} (-i)^l P_l(\cos \vartheta) e^{-i\delta_l^c} \mathcal{F}_{k,l}(r). \quad (2.71)$$

Az erős kölcsönhatást figyelembevételéhez tehát az $l=0$ -s tagbeli $\mathcal{F}_{k,l=0}$ -t lecseréljük egy $\Delta_{k,0}^s$ fázistolást tartalmazó $\mathcal{M}_{k,0}$ függvényre. Így kapjuk a $\psi_{\mathbf{k}}^{\text{cs}}(\mathbf{r})$ függvényt („cs” mint „Coulomb+strong”):

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{k}}^{\text{cs}}(\mathbf{r}) &= \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) - \frac{e^{-i\delta_0^c}}{2k} \mathcal{F}_{k,0}(r) + \frac{e^{-i(\delta_0^c + \Delta_{k,0}^s)}}{2k} \mathcal{M}_{k,0}(r) = \\ &= e^{-ikr} \left[\mathcal{N}^* M(1-i\eta, 1, i(kr+\mathbf{k}\mathbf{r})) + 2i \sin \Delta_{k,0}^s e^{-i\Delta_{k,0}^s - 2i\delta_0^c} e^{\pi\eta/2} U(1-i\eta, 2, 2ikr) \right]. \end{aligned} \quad (2.72)$$

²⁴A parciálshullám-kifejtés általános képletei szerint valóban így kell a szórási állapotokat összetenni a határozott impulzuszórájú megoldásokból az adott potenciálra jellemző fázistolásokat használva (melyek most a δ_l^c Coulomb-fázisok). A Coulomb-esetben a logaritmikus fáziskorrekciónak, $\eta \ln(2kr)$ miatt kétségek támadhatnak; mindezenre a felírt képlet (legalábbis a sorösszegzés \mathbf{r} -ben pontonkénti konvergenciájára vonatkozólag) közvetlenül is ellenőrizhető az elfajult hipergeometrikus függvény komplex integrálokkal való különféle előállításait kihasználva.

Végül a korrelációs függvényt megadó (2.49) Bowler-Sinyukov-formulában használandó $\psi_{\mathbf{k}}^{(2,cs)}(\mathbf{r})$ hullámfüggvényt $\mathbf{r} \leftrightarrow -\mathbf{r}$ szimmetrizálással kapjuk:

$$\psi_{\mathbf{k}}^{(2,cs)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{\mathbf{k}}^{cs}(\mathbf{r}) + \psi_{\mathbf{k}}^{cs}(-\mathbf{r})]. \quad (2.73)$$

Az utolsó kérdés az, hogy milyen $\Delta_{k,0}^s(k)$ függést tételezzünk fel. Ha nincs Coulomb-kölcsönhatás, csak erős, akkor a szokásos kvantummechanikai szóráselméleti megfontolások szerint az $f_s(k)$ szórásmplitúdó a következő kapcsolatban van $\Delta_{k,0}^s$ -sel:

$$\sin \Delta_{k,0}^s e^{i\Delta_{k,0}^s} = k f_s(k) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{f_s(k)} = k(\text{ctg} \Delta_{k,0}^s - i), \quad (2.74)$$

és ha a kölcsönhatás hatótávolsága $\frac{1}{k}$ -nál jóval kisebb (ami a kis k -k határesetét jelenti), akkor nulladik közelítésben a $\Delta_{k,0}^s$ konstans; ez adódik abból, ha a szabad hullámfüggvény origó körüli menetét összeillesztjük egy fiktív, kicsi de mély potenciálgödörnek képzelt potenciálból kapott origó körüli megoldással. Ha viszont „bekapcsoljuk” a Coulomb-kölcsönhatást az erős kölcsönhatás mellé, akkor a Coulomb-kölcsönható $\mathcal{M}_{k,l=0}(r)$ megoldás $r=0$ körüli menetét kell ide illeszteni (ld. [61], 138.§ illetve [87]), és ekkor arra jutunk, hogy a $\Delta_{k,0}^s$ fázistolás és a megvalósuló $f_{cs}(k)$ szórásmplitúdó kapcsolata illetve ez utóbbinak használható fajta paraméterezése

$$\sin \Delta_{k,0}^s e^{i\Delta_{k,0}^s} = k |\mathcal{N}|^2 f_{cs}(k) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{f_{cs}(k)} = k |\mathcal{N}|^2 (\text{ctg} \Delta_{k,0}^s - i), \quad \text{és} \quad (2.75)$$

$$\frac{1}{f_{cs}(k)} = \frac{1}{K(k)} - 2k\eta h(\eta) - ik |\mathcal{N}|^2, \quad \text{ahol} \quad h(\eta) = \text{Re} \psi(i\eta) - \ln \eta, \quad (2.76)$$

ahol $\psi(z) \equiv \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ a digamma-függvény. Az $\eta=0$ esetben visszakapjuk a Coulomb-kölcsönhatás nélküli esetet, ugyanis ekkor $|\mathcal{N}|^2 = 1$ és $\eta h(\eta) = 0$.²⁵ Ha viszont van Coulomb-kölcsönhatás, akkor a mondott kis r -es hullámfüggvény-összeillesztésből²⁶ az adódik, hogy a kis k -k határesetében nem maga a $\Delta_{k,0}^s$ fázistolás, hanem a $K(k)$ függvény tekinthető nulladik közelítésben konstansnak. Azonban ez nem ad túl pontos leírást. Sokféle jobb parametrizáció ismeretes az irodalomban töltött pionok erős kölcsönhatásának ilyen figyelembevételére, ld. pl. [88–91]; ezeket a [86] cikkünkben némileg körbejártuk, és arra jutottunk, hogy a minket érdeklő k -tartományban ($k \lesssim 100$ MeV) eléggé hasonló menetet adnak, úgyhogy a legújabbat használtuk, ami a [91] hivatkozásbeli:

$$K(k) = \frac{2}{\sqrt{s}} \frac{s-2z_2^2}{m_\pi^2} \left(B_0 + B_1 \frac{\sqrt{s}-\sqrt{\hat{s}-s}}{\sqrt{s}+\sqrt{\hat{s}+s}} \right)^{-1}, \quad \text{ahol } s = 4(k^2 + m_\pi^2), \text{ továbbá} \quad (2.77)$$

$$B_0 = -79,4, \quad z_2 = 143,5 \text{ MeV},$$

$$B_1 = -63,0, \quad \sqrt{\hat{s}} = 1050 \text{ MeV}.$$

²⁵Kis η -kra $h(\eta) \approx -\ln \eta - \gamma + \zeta(3)\eta^2$, ahol $\gamma \approx 0,577$ és $\zeta(3) \approx 1,202$ ismert matematikai állandók.

²⁶Ehhez kell az $U(a, b, z)$ Tricomi-függvény $b \equiv m+1 \in \mathbb{N}^+$ egész esetben érvényes definíciója/sorfejtése, melyet a (2.68) definícióból (ami ilyenkor 0/0 típusú képlet) a l'Hospital-szabállyal kaphatunk:

$$U(a, m+1, z) = \frac{\ln z}{m!} \frac{M(a, m+1, z)}{(-1)^{m+1} \Gamma(a-m)} + \sum_{s=1}^m \frac{(s-1)!}{(m-s)!} \frac{(-1)^{s-m} \Gamma(a-s)}{\Gamma(a) \Gamma(a-m)} z^s + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^s}{s!} \frac{\psi(s+1) - \psi(a+s) + \psi(s+m+1)}{\Gamma(a-m) (-1)^m (m+s)!} \frac{\Gamma(a+s)}{\Gamma(a)}.$$

Összetéve az eddigieket arra jutunk, hogy a korrelációs függvény

$$C_2(k) = 1 - \lambda + \lambda \cdot \mathcal{I}_{cc}(k), \quad \text{ahol} \quad \mathcal{I}_{cc}(k) = \int d^3\mathbf{r} D_{cc}(\mathbf{r}) |\psi_{\mathbf{k}}^{(2,cs)}(\mathbf{r})|^2; \quad (2.78)$$

ebbe behelyettesítve $\psi_{\mathbf{k}}^{2,cs}(\mathbf{r})$ felírt képleteit, gömbszimmetrikus $D_{cc}(r)$ forrásfüggvény esetén különválasztva az r sugár és a térszög szerinti integrálokat azt kapjuk, hogy

$$\frac{\mathcal{I}_{cc}(k)}{2\pi} = |\mathcal{N}|^2 (\mathcal{I}^{(1)}(k) + \mathcal{I}^{(2)}(k)) - 8 \sin^2 \Delta_{k,0}^s e^{\pi\eta} \mathcal{I}^{(3)}(k) - 8 \sin \Delta_{k,0}^s e^{\pi\eta/2} \text{Im} \frac{\mathcal{N} \mathcal{I}^{(4)}(k)}{e^{i(\Delta_{k,0}^s + 2\delta_{k,0}^c)}}, \quad (2.79)$$

ahol is a kijelölt integrálok (az $y \equiv \cos \vartheta$ jelöléssel, ahol ϑ a \mathbf{k} és a \mathbf{r} bezárt szöge) a következők:

$$\mathcal{I}^{(1)}(k) = \int_0^\infty dr r^2 D_{cc}(r) \int_{-1}^1 dy \left| M(1-i\eta, 1, ikr(1+y)) \right|^2, \quad (2.80)$$

$$\mathcal{I}^{(2)}(k) = \int_0^\infty dr r^2 D_{cc}(r) \int_{-1}^1 dy M(1-i\eta, 1, ikr(1+y)) M(1+i\eta, 1, -ikr(1-y)), \quad (2.81)$$

$$\mathcal{I}^{(3)}(k) = 2 \int_0^\infty dr r^2 D_{cc}(r) |U(1-i\eta, 2, 2ikr)|^2, \quad (2.82)$$

$$\mathcal{I}^{(4)}(k) = \int_0^\infty dr r^2 D_{cc}(r) U(1-i\eta, 2, 2ikr) \int_{-1}^1 dy M(1+i\eta, 1, -ikr(1+y)). \quad (2.83)$$

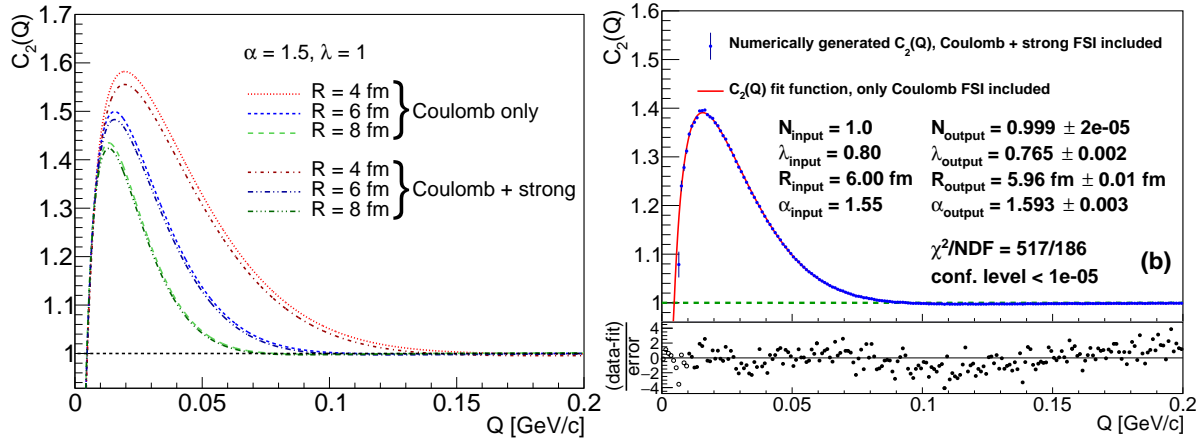
Itt a $\Delta_{k,0}^s$ mennyiség k -függését a fentebbi (2.75)–(2.77) képletek adják meg, azonban könnyen „betáplálhatunk” másfajta $\Delta_{k,0}(k)$ függést is, ha egyszer (adott $D_{cc}(r)$ forrásfüggvény esetén) numerikusan kiszámítjuk az $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3, \mathcal{I}_4$ integrálokat.

Így is tettünk; az előző szakaszban tárgyalt (2.54) Lévy-féle forrásfüggvények esetére voltunk kíváncsiak, elvégeztük tehát a mondott numerikus integrálásokat az R és α paraméterek illetve a k változó széles tartományában, majd az eredményeket (az előző szakaszban a tiszta Coulomb-esetre mondotthoz hasonlóan) egy számítógép-memóriába tölthető táblázatba mentettük, így egy a konkrét adatsorok illesztésekhez jól használható programcsomag keletkezett [92].

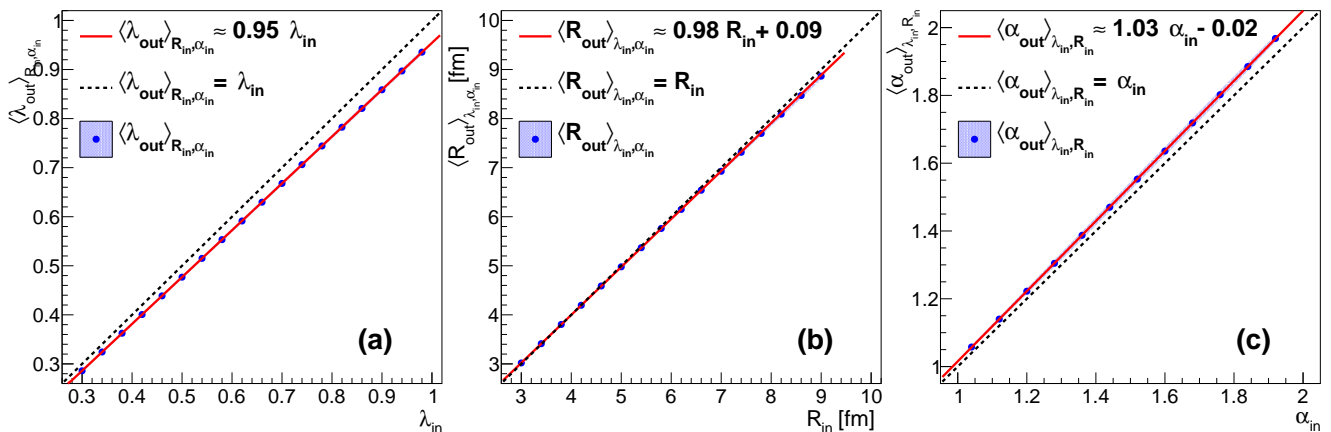
A 2.5. ábra illusztrálja az erős kölcsönhatás figyelembevételével illetve az enélkül számított $\pi^+\pi^+$ illetve $\pi^-\pi^-$ korrelációs függvényeket néhány paraméterválasztás esetére (a kétféle töltésű eset nem különbözik a számítások szempontjából). Szemmel látható a különbség, de ennél több információt is kinyerhettünk: becsléseket végeztünk arra nézve is, hogy az erős kölcsönhatás figyelembevétele mennyire módosíthatja a csak a Coulomb-effektust tartalmazó korábbi eredményeket. Ehhez szimulált korrelációs függvényeket készítettünk az erős kölcsönhatást is tartalmazóan a most általunk kiszámított módon, továbbá realiztikus „hibákat” tettünk fel a szimulált adatpontokra.²⁷ Ezután a szimulált korrelációs függvényeket illesztettük úgy, hogy csakis a Coulomb-effektust tápláltuk be az illesztőalgoritmusból. Kicsinek tűnő, de a mai kísérleti felbontással mindenképpen észrevehető különbség keletkezett, ahogy a 2.5. ábra jobb oldala is mutatja egy példán. A 2.6. ábra pedig azt mutatja, hogy ezt az eljárást sok különböző betáplált paraméter esetén megismételvén

²⁷A kísérletekben (amint a következő fejezetben látjuk) a mért $C_2(Q)$ korrelációs függvény két eloszlásnak (histogramnak), az $A(Q)$ úgynevezett „aktuális” páreloszlásnak illetve a $B(Q)$ úgynevezett „háttér”-páreloszlásnak a hányadosaként adódik, és ezek betöltöttsége legalábbis kis Q értékeknél körülbelül Q^2 -tel arányos: ebből a Poisson-eloszlás alapján az adódik, hogy a korrelációs függvény adatpontjainak relatív hibája Q -val fordítva arányos.

milyen empirikus összefüggést tudtunk megállapítani arra, hogy az eredetileg csak a Coulomb-effektust figyelembe vevő illesztéssel kapott R , α és λ forrásparaméterek hogyan módosulnak, ha a pionok erős kölcsönhatását is figyelembe vesszük.



2.5. ábra. Bal oldalon: töltött pionok Bose-Einstein-korrelációs függvénye gömb-szimmetrikus Lévy-eloszlás alakú forrásfüggvény feltételezésével, különféle paraméter-választások eseteire, külön a végállapotú erős kölcsönhatás figyelembevételével illetve anélkül (azaz csak a Coulomb-kölcsönhatással). A jobb oldalon: egy példa arra, hogy adott paraméterekkel szimulált korrelációs függvény illesztése mennyire pontosan adja vissza a paramétereket, ha nem vesszük figyelembe az erős kölcsönhatást. (Az N paraméter itt csak egy abszolút normálást jelent, mely a kísérleti vizsgálatokban is megjelenik, a „conf. level” pedig az illesztés konfidenciaszintje, mely itt a gyakorlatban sokszor elfogadhatatlannak tekintett mértékben kicsi.)



2.6. ábra. Illusztráció arról, hogy a végállapotú erős kölcsönhatás figyelembevétele hogyan módosítja az illesztés eredményeként kapott paramétereket, sok különböző paraméter-érték esetén elvégzett erős kölcsönhatással szimulált $C_2(Q)$ függvény erős kölcsönhatás nélküli illesztése alapján.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy kicsi de (a mostani mérési statisztikáknál már szükséges módon) a pontosságot érdemben javító fejlesztést sikerült tenni azért, hogy a Bose-Einstein-korrelációs függvények Lévy-típusú forrásfüggvénnyel való illesztéséhez már a pionok végállapotú erős kölcsönhatását is figyelembe tudjuk venni.

2.4. Coulomb-kölcsönhatás és Fourier-transzformáció

E szakaszban egy nemrégiben végzett munkát mutatok be [93], amely „felteszi a koronát” az előző szakaszokban látott Coulomb-korrekciós számításokra. Az alapprobléma az, hogy ha a forrásfüggvény nagy méretű, illetve ha lassan lecsengő fajta (például egy Lévy-eloszlás), akkor a látott (2.49) képletbeli $\int d^3\mathbf{r} D(\mathbf{r})|\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})|^2$ integrál numerikus kiszámítása lassú és megbízhatatlan (ezért is volt szükség memóriába tölthető táblázat gyártására az adatanalízishez). Ráadásul éppen a nagy Q -értékeknél a legmegbízhatatlanabb (ezért is volt szükség a 2.2. szakasz vége felé látott parametrizációban egy empirikus $E(Q)$ „átlapolófüggvényre”; nagy Q -értékekre egyszerűen nem lehetett robusztusnak tekinteni a numerikus integrálás eredményét). Ami a nem gömbszimmetrikus forrásfüggvény esetét illeti, itt még rosszabb a helyzet, ami az integrálok kiszámítási sebességét illeti; eleddig nem is sikerült közvetlenül a (2.49) integrál értelmes ideig tartó kiszámításával szisztematikusan figyelembe venni a Coulomb-kölcsönhatást ilyen esetben. A most bemutatandó új módszer viszont megnyitja az utat efelé. Továbbá matematikai szempontból is igen érdekes, és „közel áll a szívemhez”, ugyanis itt összeér az egyetemi matematika-tanításom és a nehézion-fizika világa.

A legfontosabb esetekben (ilyen a Gauss-eloszlás is, de a Lévy-eloszlásra méginkább igaz ez) a $D(\mathbf{r})$ páreloszlás-függvény maga egy Fourier-transzformáción keresztül adott:

$$D(\mathbf{r}) := \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} f(\mathbf{q})e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \quad \Leftrightarrow \quad f(\mathbf{q}) = \int d^3\mathbf{r} D(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}, \quad (2.84)$$

ahol nem írtuk ki a \mathbf{K} -függést; úgy gondolhatjuk, hogy az alábbi számítások minden \mathbf{K} -nál külön-külön igazak. Matematikai szempontból az oda-vissza Fourier-transzformált ilyen felírásában (vagyis hogy az inverz Fourier-transzformált is valódi integrál) implicite már feltevődik, és így is vesszük a továbbiakban, hogy f is és D is integrálható függvények; emiatt ekkor a Fourier-transzformáció ismert tulajdonságai szerint korlátosak és folytonosak is mindketten.

A bevezetett $f(\mathbf{q})$ függvény jelentése ugye az, hogy lényegében ő adja meg a kölcsönhatásmentes $C_2^{(0)}(\mathbf{Q})$ korrelációs függvényt a (2.50) egyenletet szerint:²⁸

$$C_2^{(0)}(\mathbf{Q}) = 1 + f(\mathbf{Q}). \quad (2.85)$$

Innentől (mint korábban is) feltesszük, hogy $D(\mathbf{r})$ egyre normált (minden \mathbf{K} -nál):

$$\int d^3\mathbf{r} D(\mathbf{r}) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad f(\mathbf{q}=0) = 1. \quad (2.86)$$

A Coulomb-kölcsönható esetben a korrelációs függvényt a (2.49) formulával számítanánk ki; össze-rakva a (2.84)-gyel és a $\psi_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r})$ Coulomb-hullámfüggvényt (2.39)-ből véve

$$C_2(\mathbf{Q}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{r} |\psi_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r})|^2 \int d^3\mathbf{q} f(\mathbf{q})e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}. \quad (2.87)$$

Kézenfekvően úgy haladhatnánk tovább (ahogy például a már tárgyalt [58, 86] cikkekben is tettünk Lévy-forrásfüggvények esetén), hogy (esetleg csak numerikusan) kiszámítjuk $D(\mathbf{r})$ -et $f(\mathbf{q})$ -ból

²⁸A λ tengelymetszeti paramétert itt 1-nek vesszük; a többi eset lekezelhető a (2.49) Bowler-Sinyukov-formulával.

Fourier-integrállal, majd elvégezzük az \mathbf{r} -integrált; utóbbiban jelenik meg $|\psi_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r})|^2$. Numerikusan ez sok esetben igen megterhelő: például Lévy-eloszlások esetén a Fourier-tranzformált (azaz maga a $D(\mathbf{r})$ függvény) lassan, hatványfüggvényszerűen csökken r -ben; ugyanakkor $|\psi_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r})|^2$ oszcillál: nagy r -értékek esetén majdnem síkhullám, de nehezen kezelhető logaritmikus korrekciók adódnak hozzá (ld. a (2.38) egyenletet). Továbbá koncepciónálisan is furcsa a helyzet: az $f(\mathbf{q})$ Fourier-tranzformáltját vesszük, majd az eredményként kapott $D(\mathbf{r})$ -et „majdnem-vissza-Fourier-tranzformáljuk”, azaz az \mathbf{r} -integrált a „majdnem síkhullám” $|\psi_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r})|^2$ -tel mint „magfüggvénnyel” végezzük, hogy végül megkapjuk $C_2(\mathbf{Q})$ -t. Kölcsönhatásmentes esetben $|\psi_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r})|^2$ valóban síkhullám, és a (2.85) eredmény valóban azt mutatja, hogy a két Fourier-tranzformáció kiejti egymást. Nagyon jól jönne tehát egy olyan számítási módszer, ahol ezt az „oda-vissza transzformációt” nem szükséges a teljes életnagyságában végrehajtani. Például a $C_2(\mathbf{Q})$ nagy Q -nál egyre kevésbé „izgalmas”, ugyanis egyre inkább 1, mégsem igazán lehet az integrálás folyamatát jelentősen egyszerűsíteni, vagy egyszerű közelítésekkel élni itt, és komoly számítási kapacitásra van szükség itt is, ugyanis nagy \mathbf{k} -nál a $\psi_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r})$ oszcillálása egyre gyorsabbá válik.

Az lehet a természetes ötlet, hogy a Fourier-tranzformációt a $|\psi_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r})|^2$ függvényre hattatnánk, majd ennek eredményével mint \mathbf{k} - és \mathbf{q} -függő integráloperátor-magfüggvénnyel „hatnánk” $f(\mathbf{q})$ -ra:

$$C_2(\mathbf{Q}) \stackrel{??}{\leftrightarrow} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{q} f(\mathbf{q}) \int d^3\mathbf{r} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} |\psi_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r})|^2; \quad (2.88)$$

vagyis megcserélnénk az integrálokat (2.87)-ben. Ez azonban így nem működhet: $\psi_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r})$ aszimptotikusan síkhullám; abszolútértéke nem integrálható (hogy a Fourier-tranzformáltját integrálként számolhatnánk). Úgy léphetünk túl ezen itt, hogy (a fizikusi gyakorlatban talán szokatlan módon) gondosan kezeljük az integrálhatóságot illetve integrálok és határértékek megcserélését. Ehhez a Lebesgue-integrálhatóságról szóló (egyúttal a *disztribúcióelmélet* alkalmazását megalapozó) alapvető tételeket kell használnunk, melyek gyakorlati szempontból a következőkben foglalhatók össze:

- A Lebesgue-integrálfogalomban minden az abszolútértéken múlik. Valós, komplex, vagy normált tér értékű F függvény pontosan akkor integrálható, ha $|F|$ is az. Ha van olyan G függvény, hogy majdnem minden x -re $|G(x)| \geq |F(x)|$, és G integrálható, akkor F is az. (Itt x bármilyen valós integrálási változó lehet.) Fordítva, ha $|G(x)| \geq |F(x)|$, és F nem integrálható, akkor G sem.
- Legyenek $F_\lambda(x)$ -ek integrálható függvények, ahol λ paraméter (folytonos, vagy diszkrét index), és létezzen majdnem minden x -re a pontokénti $F(x) := \lim_\lambda F_\lambda(x)$ határértékfüggvény (bármilyen értelmes fajta limeszre; például $\lambda \rightarrow 0$ vagy $\lambda \equiv n \rightarrow \infty$). A *Lebesgue-tétel* szerint ha van olyan (λ -tól független) integrálható G függvény, amivel majdnem minden x -re és minden λ -ra $|G(x)| \geq |F_\lambda(x)|$, akkor az F_λ függvények $\int F_\lambda$ integráljai konvergálnak, az F határértékfüggvény integrálható, és az integrálok határértéke megegyezik a határértékfüggvény integráljával: $\lim_\lambda \int F_\lambda = \int F$. Vagyis ekkor a limesz és az integrál felcserélhető.

A dolog az „integrálható majoráns” G létezésén múlik: ha nincs ilyen függvény, a tétel egyik állítása sem biztos, hogy teljesül. Egy egyszerű (ellen)példa az, amikor a Dirac-deltát megközelítjük pontonként nullához tartó függvényekkel; ebben az ismert esetben talán nem is tűnik fel ez a

körülmény. Azonban kevésbé „felderített” esetekben (mint amilyen a most tárgyalt is) óvatosan szabad csak megcserélni az integrálokat és a határértékeket, és ez a tétel sokszor kiségit.

- A Fubini-tétel többszörös (illetve sorrendi) integrálokról szól. A lényeg: ha egy $F(x, y)$ függvény olyan, hogy az abszolútértéke integrálható az egyik sorrendben, azaz az $\int dx (\int dy |F(x, y)|)$ integrál létezik, akkor maga F is integrálható mindkét sorrendben, és ezek az integrálok megegyeznek: $\int dx \int dy F(x, y) = \int dy \int dx F(x, y)$; azaz ekkor megcserélhetjük az integrálokat.

Visszatérve (2.87)-re kiderül, hogy egy $e^{-\lambda r}$ regularizáló tényező bevezetésével haladhatunk tovább; itt $\lambda > 0$ paraméter, mellyel végül 0-hoz tartunk. Így a következő átalakítást tehetjük:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{C_2(\mathbf{Q})}} &= \int d^3\mathbf{r} |\psi_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r})|^2 D(\mathbf{r}) \stackrel{1.}{=} \int d^3\mathbf{r} \lim_{\lambda \rightarrow 0} e^{-\lambda r} |\psi_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r})|^2 D(\mathbf{r}) \stackrel{2.}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int d^3\mathbf{r} e^{-\lambda r} |\psi_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r})|^2 D(\mathbf{r}) \stackrel{3.}{=} \\ &\stackrel{3.}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int d^3\mathbf{r} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} f(\mathbf{q}) e^{-\lambda r} |\psi_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r})|^2 e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \stackrel{4.}{=} \underline{\underline{\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} f(\mathbf{q}) \int d^3\mathbf{r} e^{-\lambda r} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} |\psi_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r})|^2}}. \quad (2.89) \end{aligned}$$

Az 1. lépésben betettük $e^{-\lambda r}$ -et; nyilván $\lim_{\lambda \rightarrow 0} e^{-\lambda r} = 1$. Mivel $D(\mathbf{r})$ integrálható, a korlátos $|\psi_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r})|^2$ -tel szorozva is az, tehát $|\psi_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r})|^2 |D(\mathbf{r})|$ jó integrálható majoráns (nagyobb-egyenlő az integrandusoknál λ -tól függetlenül). Tehát a Lebesgue-tétel miatt megcserélhettük a $\lambda \rightarrow 0$ limeszt az \mathbf{r} -integrállal a 2. lépésben. A 3. lépésben beírtuk $D(\mathbf{r})$ Fourier-integrállal való előállítását, figyelve az integrálok sorrendjére. Azonban $|e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}| = 1$, így az itteni kettős integrandus abszolútértéke egy \mathbf{q} -ban és egy \mathbf{r} -ben integrálható függvény, $|f(\mathbf{q})|$ és $e^{-\lambda r} |\psi_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r})|^2$ szorzata: az abszolútérték sorrendi integrálja létezik, így a Fubini-tételt tudva megcserélhetjük az \mathbf{r} -integrált a \mathbf{q} -integrállal a 4. lépésben. A végül kapott képletben azonban *nem* vehetjük az integrandus $\lambda \rightarrow 0$ határértékét; ez éppen a (2.88)-ban írt (helytelen) átalakítást jelentené. Ehelyett ki kell számítani az integrálokat, majd *ezután* elvégezni a $\lambda \rightarrow 0$ limeszt.

Jelen állás szerint egyelőre gömbszimmetrikus esetben vittük végig a vizsgálatokat: feltesszük most tehát, hogy $D(\mathbf{r})$ gömbszimmetrikus; ekkor $f(\mathbf{q})$ is az, amit az s indexszel jelölünk ki, illetve úgy, hogy q -függést írunk \mathbf{q} helyett. Ekkor a \mathbf{q} -beli térszög-integrált elvégezve egyszerűsödik a helyzet (és noha $\psi_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r})$ függ $\mathbf{k} = \mathbf{Q}/2$ irányától, az eredmény már csak a Q nagyságtól fog függeni):

$$\begin{aligned} f(\mathbf{q}) \equiv f_s(q) &\Leftrightarrow D(\mathbf{r}) \equiv D(r) = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty dq q \sin(qr) f_s(q) \\ &\Rightarrow C_2(Q) = \frac{1}{2\pi^2} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^\infty dq q^2 f_s(q) \int d^3\mathbf{r} e^{-\lambda r} \frac{\sin(qr)}{qr} |\psi_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r})|^2. \quad (2.90) \end{aligned}$$

Beírva (2.39)-ből $\psi_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r})$ kifejezését az abszolútérték-négyzet négy tagra vezet (az $M(a, b, z)$ -k különböző párosításából); két tagban $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ változócsere végezve végül csak két tag marad:

$$C_2(Q) = \frac{|\mathcal{N}|^2}{2\pi^2} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^\infty dq q^2 f_s(q) [\mathcal{D}_{1\lambda s}(q) + \mathcal{D}_{2\lambda s}(q)], \quad \text{ahol} \quad (2.91)$$

$$\mathcal{D}_{1\lambda s}(q) = \int d^3\mathbf{r} \frac{\sin(qr)}{qr} e^{-\lambda r} M(1+i\eta, 1, -i(kr+\mathbf{k}\mathbf{r})) M(1-i\eta, 1, i(kr+\mathbf{k}\mathbf{r})), \quad (2.92)$$

$$\mathcal{D}_{2\lambda s}(q) = \int d^3\mathbf{r} \frac{\sin(qr)}{qr} e^{-\lambda r} M(1+i\eta, 1, -i(kr-\mathbf{k}\mathbf{r})) M(1-i\eta, 1, i(kr+\mathbf{k}\mathbf{r})). \quad (2.93)$$

Ezeket az integrálokat kiszámíthatjuk egy ahhoz nagyon hasonló módszerrel, amit Nordsieck alkalmazott egy a fékezési sugárzás illetve a párkeltés elméletében előkerülő hasonló integrálra [94]; erről röviden ld. e szakasz végén. A mi esetünkben a következő eredmények adódnak:

$$\mathcal{D}_{1\lambda s}(q) = \frac{4\pi}{q} \operatorname{Im} \left[\frac{1}{(\lambda - iq)^2} \left(1 + \frac{2k}{q + i\lambda} \right)^{2i\eta} {}_2F_1 \left(i\eta, 1 + i\eta, 1, \frac{4k^2}{(q + i\lambda)^2} \right) \right], \quad (2.94)$$

$$\mathcal{D}_{2\lambda s}(q) = \frac{4\pi}{q} \operatorname{Im} \left[\frac{(\lambda - iq - 2ik)^{i\eta} (\lambda - iq + 2ik)^{-i\eta}}{(\lambda - iq)^2 + 4k^2} \right], \quad (2.95)$$

ahol a (teljes) hipergeometrikus függvény került elő:

$${}_2F_1(a, b, c, z) = 1 + \frac{ab}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!}. \quad (2.96)$$

Ez a hatványsor $|z| < 1$ esetre érvényes, azonban ${}_2F_1(a, b, c, z)$ kiterjeszthető minden $z \in \mathbb{C}$ komplex változóra is analitikus elfolytatással; ld. pl. a [95] hivatkozásban.

Következő lépésként megpróbálnánk most a $\mathcal{D}_{1\lambda s}$ és $\mathcal{D}_{2\lambda s}$ megadott kifejezései alapján $C_2(Q)$ -t kiértékelni (2.91) szerint. Ehhez a $\lambda \rightarrow 0$ határértékkel óvatosan kell bánni. Kiderül, hogy $\lambda \rightarrow 0$ közben $\mathcal{D}_{1\lambda s}$ és $\mathcal{D}_{2\lambda s}$ függvényalakjai „patologikusan” viselkednek; a q -integrál kívánt határértéke nem fejezhető ki mint egy határértékként kapott q -függvénnyel szorzott $f_s(q)$ integrálja. Ehelyett a végső képletben $f_s(q)$ egy lineáris *funkcionálját* kell majd venni.²⁹ A közbenső lépéseket szintén a szakasz végére hagyva most felírjuk a Coulomb-kölcsönható $C_2(Q)$ -ra kapott eredményt:

$$C_2(Q) = |\mathcal{N}|^2 \left(1 + f_s(2k) + \frac{\eta}{\pi} [\mathcal{A}_{1s} + \mathcal{A}_{2s}] \right), \quad (2.97)$$

$$\text{ahol } \mathcal{A}_{1s} = -\frac{2}{\eta} \int_0^{\infty} dq \frac{f_s(q) - f_s(0)}{q} \operatorname{Im} \left[\left(1 + \frac{2k}{q} \right)^{2i\eta} {}_2F_1 \left(i\eta, 1 + i\eta, 1, \frac{4k^2}{q^2} - i0 \right) \right], \quad (2.98)$$

$$\text{és } \mathcal{A}_{2s} = -\frac{2}{\eta} \int_0^{\infty} dq \frac{f_s(q) - f_s(2k)}{q - 2k} \frac{q}{q + 2k} \operatorname{Im} \frac{(q + 2k)^{i\eta}}{(q - 2k + i0)^{i\eta}}. \quad (2.99)$$

Ha itt $\eta \rightarrow 0$ -t veszünk (mintegy formálisan kikapcsolva a Coulomb-kölcsönhatást), \mathcal{A}_{1s} és \mathcal{A}_{2s} véges határértékhez tartanak (mert az η nevező és a felírt képzetes részek is nullához tartanak). Emiatt $\eta \rightarrow 0$ -nál a (2.97) képletben az \mathcal{A}_{1s} és \mathcal{A}_{2s} járuléka (ahol ők újfent η -val szorozva jelennek meg) eltűnnek; ennek kihangsúlyozása végett írtuk ilyen módon szétosztva az η szorzókat.

Érdekes azt is megfigyelni, hogy a felírt (2.97) képletünkben a Coulomb-hatás kézenfekvő, „lenyomozható” módon jelenik meg. Ha le hagyjuk az $|\mathcal{N}|^2$ -et és az \mathcal{A} -kat is, akkor mivel $\mathbf{Q} = 2\mathbf{k}$,

²⁹Hasonló a helyzet, mint abban a sokkal egyszerűbb (és jól ismert) esetben, amikor a Dirac-deltát egységnyi területű keskenyedő csúcsos függvényekkel közelítjük. Tekintsük például a következő azonosságot:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x - x_0)^2} g(x) = g(x_0).$$

Ez alapján mondjuk, hogy itt a keskenyedő és csúcsosodó Lorentz-görbék „megközelítik a $\delta(x - x_0)$ delta-függvényt”; ezen mondás tartalma pontosan a felírt képlet. Praktikusan nézve pedig azt „nyerjük”, hogy ahelyett, hogy numerikusan el kellene végezni a bal oldali integrál $\lambda \rightarrow 0$ határértékét, a jobb oldal sokkal egyszerűbb „számítási utasítást” mond (értékeljük ki a g függvényt x_0 -ban); azonban ez nem egy igazi integráltranszformáció g -re való hatása.

egyszerűen a szabad esetre vonatkozó (2.85) képletet kapjuk. Visszatéve $|\mathcal{N}|^2$ -et (de az \mathcal{A} -kat nem) a közelítő *Gamow-korrekciónak* eredménye adódik (ld. fentebb a (2.52) képlet környékét), amikor a forrásfüggvényt pontszerűnek tekintjük a Coulomb-integrál szempontjából (de a kölcsönhatásmentes $C_2^{(0)}(Q)$ szempontjából nem). Az \mathcal{A}_{1s} és az \mathcal{A}_{2s} tagok tehát „kikorrigálják a Gamow-korrekciónak”: annak hatását kódolják el, hogy a forrás mégsem pontszerű.

A normálásunk szerint $f_s(0) = 1$, mégis megtartottuk $f_s(0)$ kijelölését \mathcal{A}_{1s} (2.98) kifejezésében, hogy jól látszódjék, hogy az ottani f_s -et tartalmazó tört jól definiált függvény még $q=0$ környékén is (hacsak f_s folytonosan differenciálható). Ugyanígy, \mathcal{A}_{2s} (2.99) kifejezésében is az f_s -et tartalmazó tört $q=2k$ környékén is jól definiált függvény (ugyanilyen f_s esetén). Valójában lazíthatunk is f_s folytonos differenciálhatóságának követelményén: az általánosabb feltételt a szakasz végi kifejtésben adjuk meg; most megjegyezzük, hogy ez teljesül nemcsak folytonosan differenciálható f_s -re, hanem például Lévy-eloszlásra is (ahol $f_s(q) = e^{-|qR|^\alpha/2}$ nem differenciálható $q=0$ -ban, ha $\alpha \leq 1$).

Emlékezzünk (ld. a fűszöveget a dolgozat elején), hogy a $z \mapsto z^w$ komplex hatványozás egyértékű függvény, de vágása van a $z \in \mathbb{R}_0^-$ negatív valós félegyenesen (az $\arg z$ fázis ugrása miatt). Negatív valós számok hatványozásakor tehát tudnunk kell, hogy a vágás melyik oldalán vagyunk; ezt jelöli ki a (2.99) képletbeli $+i0$ „tag”. Hasonlóan, ha a ${}_2F_1(a, b, c, z)$ hipergeometrikus függvényt kiterjesztjük az eredeti (2.96) hatványsor konvergenciakörén ($|z| \geq 1$ -en) kívülre, $z=1$ -ben elágazási pontot kapunk, és a szokásos menet szerint a vágás az $[1, \infty] \subset \mathbb{R}^+$ valós félegyenesre kerül. A (2.98)-beli $-i0$ „tag” ekkor kijelöli, hogy ennek melyik oldalát kell venni.

Az integrálok konkrét numerikus kiszámításhoz érdemes áttérni egy $x \in [0, 1]$ változóra a $q = 2kx$ illetve a $q = \frac{2k}{x}$ helyettesítésekkel a $q \in [0, 2k]$ illetve a $q \in [2k, \infty]$ szakaszokon; azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{A}_{1s} = -\frac{2}{\eta} \int_0^1 dx \operatorname{Im} \left[\frac{f_s(2kx) - f_s(0)}{x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2i\eta} {}_2F_1\left(i\eta, 1+i\eta, 1, \frac{1}{x^2} - i0\right) + \frac{f\left(\frac{2k}{x}\right) - f_s(0)}{x} (1+x)^{2i\eta} {}_2F_1\left(i\eta, 1+i\eta, 1, x^2 - i0\right) \right], \quad (2.100)$$

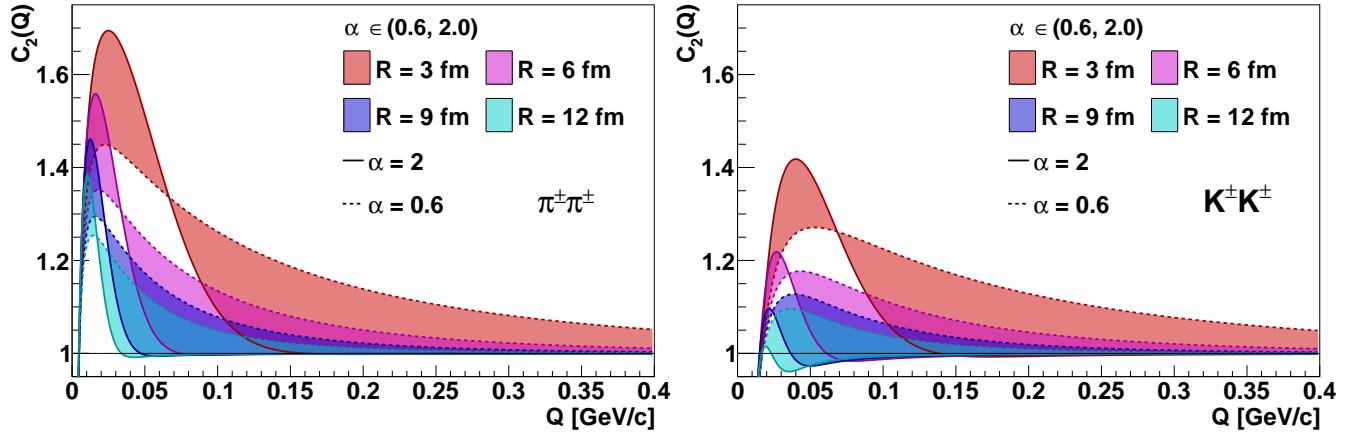
$$\mathcal{A}_{2s} = -\frac{2}{\eta} \int_0^1 dx \frac{\sin(\eta \ln \frac{1+x}{1-x})}{x(x+1)} \left[\frac{f_s\left(\frac{2k}{x}\right) - f_s(2k)}{1-x} - x^2 e^{\pi\eta} \frac{f_s(2kx) - f_s(2k)}{1-x} \right]. \quad (2.101)$$

A kapott képletek fő előnye az, hogy az \mathcal{A}_{1s} -et és \mathcal{A}_{2s} -et megadó integrálok integrandusai viszonylag „szép”, numerikus szempontból könnyen kezelhető függvények.

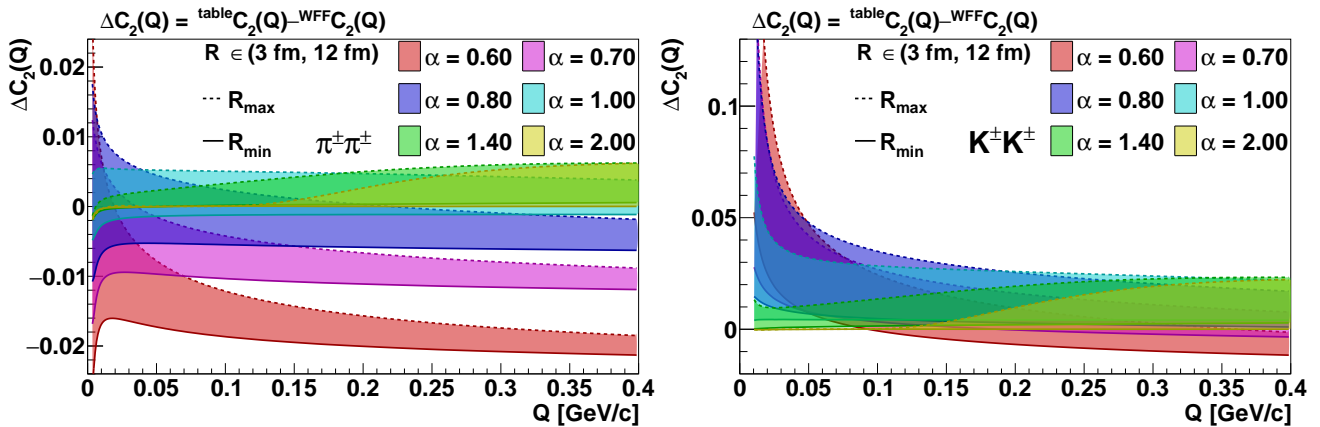
* * *

A módszer numerikus kidolgozását a fő érdeklődésünket jelentő Lévy-eloszlások esetén vittük véghez. Mivel a numerikus integrálás során az integrandus mint függvény meghívása a „legköltségesebb”, ezért olyan algoritmust választottunk, ami ezt a lehető legkevesebbszer teszi meg. Az úgynevezett *Gauss-Kronrod-módszer* mellett tettük le a voksot [96]; ez fixált számú „nódus” (=kiértékelési hely) helyzetét iteratíván változtatja az egyre jobb eredmény érdekében; beállítható továbbá a „tolerancia” (mekkora szukcesszív eltérés esetén fogadja el késznek az integrál eredményét) illetve a maximális számú iteráció. A `boost C++` könyvtárat használtuk, és az így született programcsomagot is publikusan elérhetővé tettük [97]. Némi optimalizálás után úgy találtuk, hogy

az integrandus számára 15 kiértékelési hely és 4 maximális iteráció gyorsan konvergáló elég pontos eredményt ad; a tolerancia 10^{-3} fölé növelése ront a pontosságon, ez alatti csökkentése viszont érdemben nem javít, de az integrandus-kiértékelések számát fölöslegesen növelné. A tolerancia 10^{-3} értéken való tartásával végül néhány száz integrandus-kiértékeléssel megkapjuk a bőven elég pontos eredményt $C_2(Q)$ -ra.



2.7. ábra. Példák Lévy-alakú forrásfüggvény esetén az új módszerrel kiszámított korrelációs függvényekre (bal oldalon pionok, jobb oldalon kaonok esetére; 4 különböző R és két szélső α érték közötti α -k esetére). Adott R érték esetén a korrelációs függvény görbéje az α -t változtatva „átsöpör” a satírozott tartományon. A „csomópontok” csak látszólagosak; erősebb nagyításnál eltűnnének.



2.8. ábra. Lévy-eloszlás alakú forrásfüggvény esetén a közvetlen numerikus integrálással kapott korrelációs függvény (ld. [86]), ${}^{\text{table}}C_2(Q)$ és a most tárgyalt módszerrel számolt korrelációs függvény, ${}^{\text{WFF}}C_2(Q)$ különbsége 6 különböző α és két szélső R érték között átsöpörő R sugárparaméterek esetén; bal oldalon töltött pionokra, jobb oldalon töltött kaonokra.

Ellenőrzésképpen összehasonlítottuk a korábbi eredményeket (ennek jele az iménti 2.8. ábrán *table*, minthogy ezeket memóriába tölthető táblázatban tároltuk el) a mostani módszerrel számoltakkal (ennek jele *WFF*, mint „hullámfüggvény-Fourier-transzformált” módszer angolul). Nem túl nagy méretű forrásfüggvények és Q értékek esetén elfogadható egyezés adódik.³⁰ Másrészt viszont

³⁰Ennek meglátása amolyan „hegycsúsról letekintő” pillanat volt; megnyugtatóan pozitív kimenetelű önellenőrzés.

nagyobb Q -nál illetve a forrásméret növelése esetén (utóbbit a Lévy-eloszlás hatványfüggvény-lecsengését is megadó α paraméter csökkentése vagy az R sugár növelése is megvalósítja) már észrevehető az eltérés: ezt ezen önellenőrzés után betudjuk a régi (a $D(r)|\psi_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r})|^2$ közvetlen numerikus integrálására támaszkodó) módszer megbízhatatlanságának (amely éppen ilyen esetekben a leginkább valószínű az integrandus oszcilláló jellege és lassú csökkenése miatt). Emellett persze különösen is szembetűnő a régebbi módszer és a mostani közötti különbség nemcsak a pontosság, de a sebesség szempontjából is: előbbi esetben a numerikus integrálás során sok tízezer függvénykiértékelés kellett, és a szükséges α - illetve R -tartományokat végigszántó (a memóriába tölthető táblázatot legyártó) kód sok száz szálon napokig fut; emellett a kis α - illetve nagyobb R -értékeket így sem érthetjük el. A mostani módszer viszont annyira gyors, hogy lehetővé vált a Coulomb-kölcsönható $C_2(Q)$ korrelációs függvénynek a kísérleti analízis során valós időben numerikus integrálással való kiszámítása. Összefoglalva tehát mind matematikai érdekesség, mind gyakorlati alkalmazhatóság terén jelentős újítást sikerült elérni a Coulomb-kölcsönhatás tárgyalásában.

* * *

Illusztrációként bemutatom a fentebbi számítások néhány kihagyott részletét a [93] cikkünk alapján. A $\mathcal{D}_{1\lambda_s}$ és $\mathcal{D}_{2\lambda_s}$ integrálok (2.94)-ben és (2.95)-ben megadott eredményeinek levezetéséhez átírjuk a (2.92)–(2.93) definíciókat a $\sin(qr)$ -et exponenciálissal kifejezve:

$$\mathcal{D}_{1\lambda_s}(q) = \frac{1}{2i} [\mathcal{D}_{1\lambda_s}^{(+)}(q) - \mathcal{D}_{1\lambda_s}^{(-)}(q)], \quad \mathcal{D}_{2\lambda_s}(q) = \frac{1}{2i} [\mathcal{D}_{2\lambda_s}^{(+)}(q) - \mathcal{D}_{2\lambda_s}^{(-)}(q)], \quad (2.102)$$

$$\text{ahol } \mathcal{D}_{1\lambda_s}^{(\pm)}(q) = \frac{1}{q} \int d^3\mathbf{r} \frac{e^{-\lambda r}}{r} e^{\pm iqr} M(1+i\eta, 1, -i(kr+\mathbf{k}\mathbf{r})) M(1-i\eta, 1, i(kr+\mathbf{k}\mathbf{r})), \quad (2.103)$$

$$\text{és } \mathcal{D}_{2\lambda_s}^{(\pm)}(q) = \frac{1}{q} \int d^3\mathbf{r} \frac{e^{-\lambda r}}{r} e^{\pm iqr} M(1+i\eta, 1, -i(kr-\mathbf{k}\mathbf{r})) M(1-i\eta, 1, i(kr+\mathbf{k}\mathbf{r})). \quad (2.104)$$

A Nordsieck által is alkalmazott módszer [94] a következő komplex integrál-előállítással indít:

$$M(a, 1, z) = \frac{1}{2\pi i} \oint^{(0+,1+)} dt e^{tz} \frac{1}{t} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-a}, \quad (2.105)$$

ahol integrációs útnak jó bármilyen olyan zárt út, ami pozitív irányban egyszer megkerüli a $t \in [0, 1]$ vágás-szakaszt a $t \in \mathbb{C}$ síkon. Kétszer beírva ezt (2.103)-ba és (2.104)-be a két $M(a, 1, z)$ helyére (t -vel és u -val jelölve a változókat) arra jutunk, hogy

$$\mathcal{D}_{1\lambda_s}^{(\pm)}(q) = -\frac{1}{4\pi^2 q} \int \frac{d^3\mathbf{r}}{r} e^{-\lambda r \pm iqr} \oint \frac{du}{u} \oint \frac{dt}{t} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-1-i\eta} \left(1 - \frac{1}{u}\right)^{-1+i\eta} e^{-i(t-u)(kr+\mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad (2.106)$$

$$\mathcal{D}_{2\lambda_s}^{(\pm)}(q) = -\frac{1}{4\pi^2 q} \int \frac{d^3\mathbf{r}}{r} e^{-\lambda r \pm iqr} \oint \frac{du}{u} \oint \frac{dt}{t} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-1-i\eta} \left(1 - \frac{1}{u}\right)^{-1+i\eta} e^{-i(t-u)kr + i(t+u)\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (2.107)$$

Gondosan megvizsgálva az integrálhatóságot arra jutunk a *Fubini-tétel* segítségével, hogy pontosan akkor, ha az u - és t -utak úgy futnak (ami lehetséges), hogy minden előkerülő u és t esetén $\mathcal{D}_{1\lambda_s}$ esetén $\text{Im}(t-u) < \frac{\lambda}{2k}$, $\mathcal{D}_{2\lambda_s}$ esetén pedig $\text{Im } u > -\frac{\lambda}{2k}$ és $\text{Im } t < \frac{\lambda}{2k}$ teljesüljön, megcserélhetjük itt az \mathbf{r} -integrált a vonalintegrálokkal, ami után pedig elvégezhetjük az \mathbf{r} -integrálokat a következő,

minden $\beta \in \mathbb{C}$ és $\mathbf{B} \equiv (B_x, B_y, B_z) \in \mathbb{C}^3$ esetén érvényes segédképlettel:³¹

$$\int \frac{d^3\mathbf{r}}{r} e^{-\beta r + \mathbf{B}\mathbf{r}} = \frac{4\pi}{\beta^2 - \mathbf{B}^2}, \quad \text{ha } \operatorname{Re} \beta > \sqrt{(\operatorname{Re} B_x)^2 + (\operatorname{Re} B_y)^2 + (\operatorname{Re} B_z)^2}, \quad (2.108)$$

amivel arra jutunk némi egyszerűsítés után, hogy

$$\mathcal{D}_{1\lambda s}^{(\pm)}(q) = -\frac{1}{\pi q} \frac{1}{\lambda \mp iq} \oint \frac{dt}{t} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-1-in} \oint \frac{du}{u} \left(1 - \frac{1}{u}\right)^{-1+i\eta} \frac{1}{\lambda \mp iq + 2ik(t-u)}, \quad (2.109)$$

$$\mathcal{D}_{2\lambda s}^{(\pm)}(q) = -\frac{1}{\pi q} \oint \frac{dt}{t} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-1-in} \frac{1}{2kt - i(\lambda \mp iq)} \oint \frac{du}{u} \left(1 - \frac{1}{u}\right)^{-1+i\eta} \frac{1}{2ku + i(\lambda \mp iq)}. \quad (2.110)$$

Most elvégezhetjük az u -integrált (fix t -nél), ugyanis u -ban a $[0, 1]$ vágás mellett mindkét integrandusnak csak egy egyszerű pólusa van; $\mathcal{D}_{1\lambda s}$ esetén az $u_{1s}(t) \equiv t \mp \frac{q}{2k} - \frac{i\lambda}{2k}$ helyen, $\mathcal{D}_{2\lambda s}$ esetén az $u_{2s}(t) = -\frac{i\lambda}{2k} \mp \frac{q}{2k}$ helyen. Meggyőződhetünk róla, hogy éppen akkor, ha az u - és t -utakra teljesülnek az \mathbf{r} -integrál előszörre elvégzéséhez megkövetelt, a (2.106)–(2.107) képletek után mondott plusz korlátozások, ezek a pólusok biztosan az u -utakon kívül fekszenek, így az u -utat (az integrandus analitikussága és $\sim \frac{1}{u^2}$ szerinti elég gyors csökkenése miatt) kitérítjük a végtelenbe, amivel csak az u -pólusok járulékaik maradnak (negatív előjellel a körüljárás irányja miatt). Ebből arra jutunk ($\mathcal{D}_{2\lambda s}$ esetében rögtön beírva $u_{2s}(t)$ kifejezését), hogy

$$\mathcal{D}_{1\lambda s}^{(\pm)}(q) = -\frac{1}{q} \oint \frac{dt}{t} \frac{\left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-1-in}}{k(\lambda \mp iq)} \frac{1}{u_{1s}} \left(1 - \frac{1}{u_{1s}}\right)^{-1+i\eta}, \quad (2.111)$$

$$\mathcal{D}_{2\lambda s}^{(\pm)}(q) = -\frac{1}{q} \frac{2}{\lambda \mp iq} \left(\frac{\lambda \mp iq - 2ik}{\lambda \mp iq}\right)^{-1+i\eta} \oint \frac{dt}{t} \frac{\left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-1-in}}{2kt - i(\lambda \mp iq)}. \quad (2.112)$$

Itt $\mathcal{D}_{2\lambda s}$ -re ugyanezt a módszert használhatjuk a t -integrálra, mert a megkerült $t \in [0, 1]$ vágáson kívül egy egyszerű pólus van $t_{2s} \equiv \frac{i\lambda}{2k} \pm \frac{q}{2k}$ -ban (emiatt itt kicsit más, egyszerűbb a helyzet, mint a Nordsieck által kiszámolt eredeti integrál esetében). Ezen t_{2s} pólusról szintén kiderül, hogy a t -úton kívül fekszik (hacsak az még úgy fut, ahogy kell), és itt is $\sim \frac{1}{t^2}$ módon csökken az integrandus, vagyis felfújhatjuk a t -utat, és a t_{2s} pólus járuléka marad. Ebből az adódik, hogy

$$\mathcal{D}_{2\lambda s}^{(\pm)}(q) = \frac{4\pi}{q} \frac{1}{\lambda \mp iq} \left(\frac{\lambda \mp iq - 2ik}{\lambda \mp iq}\right)^{-1+i\eta} \frac{1}{\lambda \mp iq} \left(\frac{\lambda \mp iq + 2ik}{\lambda \mp iq}\right)^{-1-in}, \quad (2.113)$$

amiből már a $\mathcal{D}_{2\lambda s}$ -re megadott (2.95) eredményt kaphatjuk. A $\mathcal{D}_{1\lambda s}$ esete bonyolultabb, mert itt a t -integrandusnak nem pólusa, hanem vágása van, egy egyenes szakasz $t = \pm \frac{q}{2k} + i \frac{\lambda}{2k}$ és $t = 1 \pm \frac{q}{2k} + i \frac{\lambda}{2k}$ között (ahol $u_{1s}(t)=0$ illetve $u_{1s}(t)=1$), és ez is a t -úton kívül fekszik. Itt a teljes ${}_2F_1(a, b, c, z)$ hipergeometrikus függvény következő integrál-előállítására hajthatunk:³²

$${}_2F_1(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-c+1)}{\Gamma(b)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau=-\infty}^{(0+, z+)} d\tau \tau^{a-c} (1-\tau)^{c-b-1} (\tau-x)^{-a}. \quad (2.114)$$

³¹Ezt a (2.108) segédképletet valós β és \mathbf{B} esetén könnyű levezetni; komplex esetre is igaz, mivel analitikus függvények egyenlőségét állítja (hacsak teljesül a felírt feltétel, ami éppen az integrál létezésének feltétele).

³²Ez az előállítás jól ismert a hipergeometrikus függvény elméletében, és megadja ${}_2F_1$ analitikus elfolytatását is, ugyanis az $x \in [1, \infty]$ vágás híján minden $x \in \mathbb{C}$ -re analitikus függvényt ad, továbbá $|x| < 1$ -re ekvivalens a (2.96) sorral (ami kiadódik az integrandus x -beli sorfejtéséből és a gamma-függvény hasonló integrál-előállításából).

Ebben a τ integrációs útja $\text{Re } \tau = -\infty$ -ből jön, oda is megy vissza, elkerülve a $\tau \in \mathbb{R}_0^-$ és a $\tau - x \in \mathbb{R}_0^-$ vágásokat, de nem metszve a $\tau \in [1, \infty]$ vágást. Kiderül (most mellőzve a gondolkodás menetének megvilágítását), hogy a következő $t \rightarrow s$ majd $s \rightarrow \tau$ változóhelyettesítéseket kell tenni (2.111)-ben:

$$t = \frac{1}{s}, \quad \text{majd } s = B + (1-B)\tau, \quad \text{ahol } B = \frac{2k}{i\lambda \pm q + 2k}; \quad (2.115)$$

ezzel arra jutunk, hogy

$$\mathcal{D}_{1\lambda s} = -2i \oint^{(0+, x+)} d\tau \frac{((1-B)(1-\tau))^{-1-i\eta}}{q(\lambda \mp iq)^2(\tau-x)} \left(\frac{(B-1)(\tau-x)}{B\tau} \right)^{1-i\eta}, \quad \text{ahol } x = \frac{4k^2}{(q \pm i\lambda)^2}. \quad (2.116)$$

Ez már némi szenvedéssel a fentebbi (2.114) integrál formájába önthető. Ehhez a τ -integrációs utat az ott írt alakúba kell vinni, és közben egyszerűsíteni (kettébontogatni) az itt kijelölt komplex hatványozásokat. Ez azért nem teljesen triviális, mert komplex hatványokra $(ab)^c = a^c b^c$ csak akkor igaz, ha $\arg a + \arg b = \arg(ab)$, vagyis ha $-\pi < \arg a + \arg b \leq \pi$. Ezt az esetünkben elég nehézkes közvetlenül ellenőrizgetni minden előkerülő τ esetén, azonban kisegít az, hogy ha az átalakítás során az eredeti és a kívánt alak is az út környékén τ analitikus függvénye, és egy kis helyen megegyeznek, akkor mindenhol az út mentén is (az analitikus függvények ismert „merevsége” miatt). Ezt alaposan végiggondolva a felírt (2.116) képletből tényleg a $\mathcal{D}_{1\lambda s}$ -re megadott (2.94) eredményt kapjuk (még a legvégén $\mathcal{D}_{1\lambda s}^{(+)}$ -t és $\mathcal{D}_{1\lambda s}^{(-)}$ -t újra összekombinálva (2.103) szerint).

Eddig tartott a Nordsieck-féle módszer. Most betesszük a (2.91) képletbe $\mathcal{D}_{1\lambda s}$ and $\mathcal{D}_{2\lambda s}$ kifejezéseit; ideiglenesen újra háromdimenziós \mathbf{q} -integrált írva. Az első perdöntő lépés: „leválasztjuk” az $f_s(0)$ és az $f_s(2k)$ értékeket. (Az motiválhat, hogy ezek jelennek meg a kölcsönhatásmentes $C_2^{(0)}(Q) = f_s(0) + f_s(2k)$ esetben a „sima” és a „keresztezett” szorzat-tagból a hullámfüggvény négyzetéből, épp mint $\mathcal{D}_{1\lambda s}$ és $\mathcal{D}_{2\lambda s}$ a kölcsönható esetben.) Azt írjuk tehát, hogy

$$\begin{aligned} C_2(Q) &= \frac{|\mathcal{N}|^2}{8\pi^3} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int d^3\mathbf{q} f_s(q) [\mathcal{D}_{1\lambda s}(q) + \mathcal{D}_{2\lambda s}(q)] = \\ &= \frac{|\mathcal{N}|^2}{8\pi^3} f_s(0) \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int d^3\mathbf{q} \mathcal{D}_{1\lambda s}(q) + \frac{|\mathcal{N}|^2}{8\pi^3} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int d^3\mathbf{q} [f_s(q) - f_s(0)] \mathcal{D}_{1\lambda s}(q) + \\ &+ \frac{|\mathcal{N}|^2}{8\pi^3} f_s(2k) \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int d^3\mathbf{q} \mathcal{D}_{2\lambda s}(q) + \frac{|\mathcal{N}|^2}{8\pi^3} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int d^3\mathbf{q} [f_s(q) - f_s(2k)] \mathcal{D}_{2\lambda s}(q). \end{aligned} \quad (2.117)$$

Mármost $\lambda > 0$ esetén a $\mathcal{D}_{1\lambda s}$ és a $\mathcal{D}_{2\lambda s}$ (ideiglenesen I_1 -gyel és I_2 -vel jelölt) integráljai léteznek:

$$I_1 \equiv \int d^3\mathbf{q} \mathcal{D}_{1\lambda s}(\mathbf{q}) = 4\pi \int_0^\infty dq q^2 \mathcal{D}_{1\lambda s}(q), \quad I_2 \equiv \int d^3\mathbf{q} \mathcal{D}_{2\lambda s}(\mathbf{q}) = 4\pi \int_0^\infty dq q^2 \mathcal{D}_{2\lambda s}(q), \quad (2.118)$$

ami ellenőrizhető a (2.94)–(2.95) kifejezéseikből: $q^2 \mathcal{D}_{1\lambda s}(q)$ és $q^2 \mathcal{D}_{2\lambda s}(q)$ folytonosak minden korlátozott q -intervallumon, és $\sim \frac{1}{q^2}$ szerint csökkennek a végtelen felé (a képzeterész-képzésnek köszönhetően, a hipergeometrikus függvény hatványsorát is tudva). Emiatt I_1 -et és I_2 -t az integrandusaiknak, $\mathcal{D}_{1\lambda s}$ -nek és $\mathcal{D}_{2\lambda s}$ -nek a Fourier-transzformáltjaiknak origóbeli értékei adják meg.³³ Azonban

³³Integrálható függvény Fourier-transzformáltja nem feltétlenül integrálható; ha viszont az (mint esetünkben is, bár ezt konkrétan ellenőrizni kellett), akkor az (inverz) Fourier-transzformálás is valódi integrált jelent.

éppen Fourier-transzformálással definiáltuk (2.92)-ben és (2.93)-ban $\mathcal{D}_{1\lambda s}$ -et és $\mathcal{D}_{2\lambda s}$ -et; most tehát csupán ki kell értékelnünk (2.92) és (2.93) integrandusait $\mathbf{r}=0$ -ban. Ebből azt kapjuk (tudva, hogy $M(a, b, z=1) = 1$), hogy $I_1 = I_2 = 8\pi^3$, λ -tól függetlenül. Így tehát

$$C_2(Q) = |\mathcal{N}|^2 \left[f_s(0) + \frac{1}{2\pi^2} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^\infty dq q^2 \mathcal{D}_{1\lambda s}(q) [f_s(q) - f_s(0)] + \right. \\ \left. + f_s(2k) + \frac{1}{2\pi^2} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^\infty dq q^2 \mathcal{D}_{2\lambda s}(q) [f_s(q) - f_s(2k)] \right]. \quad (2.119)$$

Az állítás az, hogy ez a két limesz \mathcal{A}_{1s} és \mathcal{A}_{2s} (2.98)-ban és (2.99)-ben felírt kifejezéseit adja, amiből aztán megkapjuk a fő eredményt, a (2.97) képletet. Ha az itteni (2.119) határértékekbe beírjuk $\mathcal{D}_{1\lambda s}$ és $\mathcal{D}_{2\lambda s}$ kifejezéseit (2.94)-ből és (2.95)-ből, akkor (az $\mathcal{F}_+(x) \equiv {}_2F_1(i\eta, 1+i\eta, 1, x)$ rövidítő jelölést használva) láthatjuk, hogy már csak a következőket kell bizonyítani:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^\infty dq \frac{f_s(q) - f_s(0)}{q} \operatorname{Im} \left[\frac{q^2}{(\lambda - iq)^2} \left(1 + \frac{2k}{q+i\lambda}\right)^{2i\eta} \mathcal{F}_+\left(\frac{4k^2}{(q+i\lambda)^2}\right) \right] = \\ = - \int_0^\infty dq \frac{f_s(q) - f_s(0)}{q} \operatorname{Im} \left[\left(1 + \frac{2k}{q}\right)^{2i\eta} \mathcal{F}_+\left(\frac{4k^2}{q^2} - i0\right) \right], \quad (2.120)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^\infty dq \frac{q}{q+2k} \frac{f_s(q) - f_s(2k)}{q-2k} \operatorname{Im} \frac{(\lambda - iq - 2ik)^{i\eta}}{(\lambda - iq + 2ik)^{i\eta}} \frac{q^2 - 4k^2}{(\lambda - iq)^2 + 4k^2} = \\ = - \int_0^\infty dq \frac{f_s(q) - f_s(2k)}{q-2k} \frac{q}{q+2k} \operatorname{Im} \frac{(q+2k)^{i\eta}}{(q-2k+i0)^{i\eta}}. \quad (2.121)$$

Mindkét bal oldali integrandus pontonkénti $\lambda \rightarrow 0$ határértéke éppen a jobb oldali integrandus; a *Lebesgue-tételt* tudva ha találunk (mindkét bal oldali integrandushoz) λ -független integrálható majoránst, akkor az integrálok határértékére is igaz lesz az állítás. Nem írjuk fel explicit módon ezeket a majoránsokat, de megadunk néhány becslést, amelyek segítségével megkonstruálhatók:

1. Az f_s korlátos; $f_s(q) \leq K$. Továbbá azért kellett levonni az $f_s(0)$ illetve az $f_s(2k)$ értékeket (2.120)-ban és (2.121)-ben, hogy a megjelenő tört majorálható legyen egy $q=0$ illetve $q=2k$ körül is: ha f_s folytonosan differenciálható, akkor véges q_{\max} esetén $\frac{|f(q)-f(0)|}{q}$ és $\frac{|f(q)-f(2k)|}{|q-2k|}$ korlátosak $[0, q_{\max}]$ -on, tehát integrálhatók itt. Ha nem vontuk volna le $f_s(0)$ -t illetve $f_s(2k)$ -t, akkor az $\frac{f_s(q)}{q}$ illetve az $\frac{f_s(q)}{q-2k}$ törtfüggvények nem lennének integrálhatók $q=0$ illetve $q=2k$ környékén.

A legfontosabb alkalmazás a Lévy-forrásfüggvények esete: ekkor $f_s(\mathbf{q}) = e^{-|qR|^\alpha/2}$ nem feltétlenül differenciálható $\mathbf{q}=0$ -ban. Azonban az integrálható majoráns létezéséhez elég annyi is, ha az előbb felírt törtfüggvények ha nem is korlátosak, de integrálható függvénnyel majorálhatók. Konkrétan az előbbi helyett Lévy-eloszlásokra minden \mathbf{q} és \mathbf{q}' esetén $|f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{q}')| \leq K' |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^\alpha$ igaz, és ez elég, ugyanis $q^{\alpha-1}$ integrálható $q=0$ körül $0 < \alpha < 1$ esetén is.

2. $X, Y \in \mathbb{R}$ esetén $e^{-\pi|Y|} \leq |X^{iY}| \leq e^{\pi|Y|}$. Az $\mathcal{F}_+(x)$ függvény minden $x \in \mathbb{C}$ -re korlátos, és folytonosan differenciálható $x=0$ körül, így $|\mathcal{F}_+(x) - 1| \leq C'|x|$ valamilyen C' konstanssal.
3. Ha $Y \in \mathbb{R}$ és $|z| \leq R < 1$, akkor $|(1+z)^{iY} - 1| \leq \frac{1}{1-R} e^{\pi|Y|} \cdot |Y| \cdot |z|$; ez jellegében a (valós kitevőkre érvényes) úgynevezett *Bernoulli-egyenlőtlenségre* hasonlít, de éppen fordított irányú.

Ezeket tudva némi szenvedéssel valóban megkonstruálhatók az integrálható majoránsok; legjobb ehhez külön kezelni egy $q \in [0, Q_{\max}]$ és a maradék $q \in [Q_{\max}, \infty]$ intervallumokat (ahol Q_{\max} egy a $2k$ -nál biztonságosan nagyobb fix érték, például $4k$). Így végül a limesz és az integrál tényleg felcserélhetőnek bizonyul (2.120)-ban és (2.121)-ben, ami a kívánt eredményre vezet.

2.5. Összefoglalás és kitekintés

Ebben a fejezetben bevezettem a nehézion-fizikai Bose-Einstein-korrelációkat, megtárgyaltam az elméleti leírás néhány pontját: forrásfüggvény, hullámfüggvény-szimmetrizáció, mag-glória-modell, Lévy-eloszlások, Coulomb-korrekción. Ezután rátértem az elméleti/fenomenológiai fejlesztéseimre.

A 2.2. szakaszban részletezett konkrét számítások nyomán vált konkrétan lehetővé a végállapoti Coulomb-kölcsönhatás szisztematikus, önkonzisztens figyelembevétele Lévy-alakú forrásfüggvények esetére. A Coulomb-effektust is tartalmazó korrelációs függvényekre számítógép-memóriába tölthető táblázatot illetve parametrizációkat is kidolgoztunk. A PHENIX kísérletnél végzett, a következő fejezetben tárgyalt mérésünk már ezeket használta.

A 2.3. szakaszban megvizsgáltuk, hogy a végállapoti erős kölcsönhatás figyelembevétele mennyire befolyásolja az illesztett paramétereket Lévy-eloszlás alakú forrásfüggvények esetén. Az eredmények szerint kicsi, de a pontosabb mérésekben már észrevehető eltérést okoz ez; kvantifikáltuk a hatást, az újabb adatanalízisekben pedig eleve figyelembe vesszük az erős kölcsönhatást is.

A 2.4. szakaszban egy elméleti, matematikai síkon általam kezdeményezett, kidolgozását tekintve kollégáimmal közösen kifejlesztett új módszert mutattam be a Coulomb-kölcsönhatás figyelembevételére, mely a forrásfüggvény Fourier-transzformáltját használja. Ez matematikai szempontból azért érdekes, mert tudomásom szerint először lehetett konkrétan megadni azt az „objektumot” (tulajdonképpen: temperált disztribúciót), amely a Coulomb-kölcsönható szórás hullámfüggvény négyzetének Fourier-transzformáltja. Gyakorlati szempontból pedig a közvetlen numerikus integrálásnál összehasonlíthatatlanul gyorsabb és megbízhatóbb is egyszerre.

Ami a továbbiakat illeti, nemsokára várható a hullámfüggvény-négyzet Fourier-transzformáltját használó módszer implementálása nem gömbszimmetrikus esetre (mely matematikai szinten készen van); ezzel végre lehetővé válik a nem gömbszimmetrikus Lévy-eloszlást feltételező korrelációs mérés (például a brookhaveni PHENIX-nél és STAR-nál); ez nagy érdeklődésre tart számot, és valóban az (volt) a fő kerékkötője, hogy a Coulomb-kölcsönhatás pontos figyelembevétele elmondhatatlanul lassú lett volna. Tervezem továbbá a módszert az erős kölcsönhatást leíró hullámfüggvényekre (ld. 2.3. szakaszt) is kiterjeszteni. Ez hasznos lesz azon (viszonylag új) kutatási irány számára is, amelyben éppen az (egzotikusabb, közvetlen kisenergiás kísérletekben nehezen vizsgálható, nehézion-ütközésekben viszont bőségesen keletkező részecskepárok közötti) erős kölcsönhatás természetét (szórás hosszait) határozzák meg korrelációs mérésekkel.

Összefoglalva talán megalapozottan remélem, hogy az itt bemutatott munka először is kutatócsoportunk, másodsor is a szélesebb nehézion-fizikus közösség számára is hasznos lépcsőfokot jelent vagy fog jelenteni a HBT-korrelációk egyre pontosabb, precíziós leírásához és kezeléséhez.

3. Bose-Einstein-korrelációk mérése

Kutatómunkám során részt vettem és veszek több nagy nehézion-fizikai kísérletben. Ebben a fejezetben a brookhaveni RHIC gyorsítónál működött PHENIX kísérletnél végzett Bose-Einstein-korrelációs méréseinkről [98] lesz szó.³⁴ Bemutatom a kísérletet, a kísérleti illetve adatanalízisbeli módszereket, majd az eredményeket, végül a kutatások természetes folytatásait.

3.1. A PHENIX kísérlet

A 2000-ben indult brookhaveni RHIC gyorsító két 3,8 km kerületű szinkrotronból áll: arany-arany-ütközéseket $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV, proton-proton ütközéseket pedig $\sqrt{s_{NN}} = 510$ GeV maximális energiával lehet itt megvalósítani. Sok tekintetben jól kiegészíti a nagyobb luminozitású és energiájú svájci CERN LHC-t is: jelenleg egyedül a RHIC-nél lehet polarizált nyalábokat ütköztetni, illetve (a két szinkrotrongyűrű függetlensége miatt) a szembe haladó nyalábok atommag-fajtáját és energiáját tetszőlegesen lehet változtatni. Továbbá mivel jórészt dedikált nehézion-fizikai gyorsító, az adatfelvételi idő nagy része ilyen kutatásra fordítható. A fő vizsgálatok proton-proton illetve arany-arany ütközéseket céloztak $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV energián, de sor került a nyalábenergia csökkentésére (az 1. fejezetben is említett RHIC Beam Energy Scan program során), valamint urán-urán, deutérium-arany, réz-réz, réz-arany, proton-arany, proton-alumínium és ^3He -arany ütközésekre is.³⁵

A RHIC-nél hat ütközési pontban találkoznak a nyalábok szembemenő „csomagjai”. Négybe kerültek kísérletek: két kisebb (a PHOBOS és a BRAHMS), illetve két nagyobb: a PHENIX és a STAR. Ez utóbbiak 2000-ben való indulásuk (és előtte ~ 10 év nagyságrendű előkészítő munka) után sok évig működtek, és az adatfelvétel lezárulta után is jó 10 évig tartó adatanalízis várható, új eredmények sorával. A PHENIX-ben 2004-től van intézményes magyar részvétel, a STAR-ban 2018-tól kezdve. A STAR kísérlet jelenleg is gyűjt adatokat. A PHENIX 2016-ban fejezte be az adatgyűjtést; itt jelenleg az utóbb említett „aratás” munkafázisa zajlik.³⁶

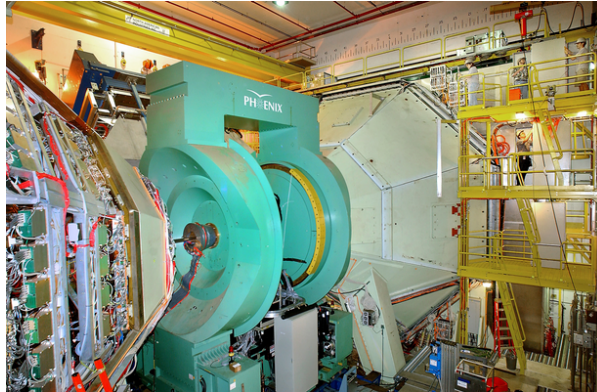
A PHENIX név amolyan szándékos mozaikszó, feloldása: „Pioneering High Energy Nuclear Interaction eXperiment”. Sok szempontból egyedi kivitelezésű, és kiegészíti a némileg hagyományosabb STAR detektort. Arra optimalizálták, hogy sokféle részecskét, ritka eseményeket tudjon mérni jó részecskeazonosítással. Ez (költség szempontjából) úgy volt kivitelezhető, ha „cserébe” a térbeli lefedettséget, azaz az *akceptanciát* csökkentik. A végső kialakításban két (a hozzávetőleges földrajzi irányokról elnevezve „East” és „West”, keleti és nyugati) *központi kar* („Central Arm”) és

³⁴Az ilyen kollaborációk tipikus munkamenete szerint minden (a PHENIX esetében jónéhán száz) tag részt vesz az adatfelvételben, szerző is minden kikerülő cikkben, azonban minden részt vevő intézménynek/kutatócsoportnak van saját kutatási területe, amelyből készülő cikkeken konkrétan dolgozik, nem kis munkát befektetve. A most tárgyalt munka eredménye, a [98] cikk is sokszerzős publikáció. Én is részt vettem az adatfelvételben, de az analízis minden részletében is: ötletelés, konkrét megvalósítás, cikkírás. Ösztönösen óvatoskodva használok csak egyes szám első személyt; ez nem jelenti azt, hogy ne tartanám éppen eléggé „saját gyermekemnek” ezt a fejezetet.

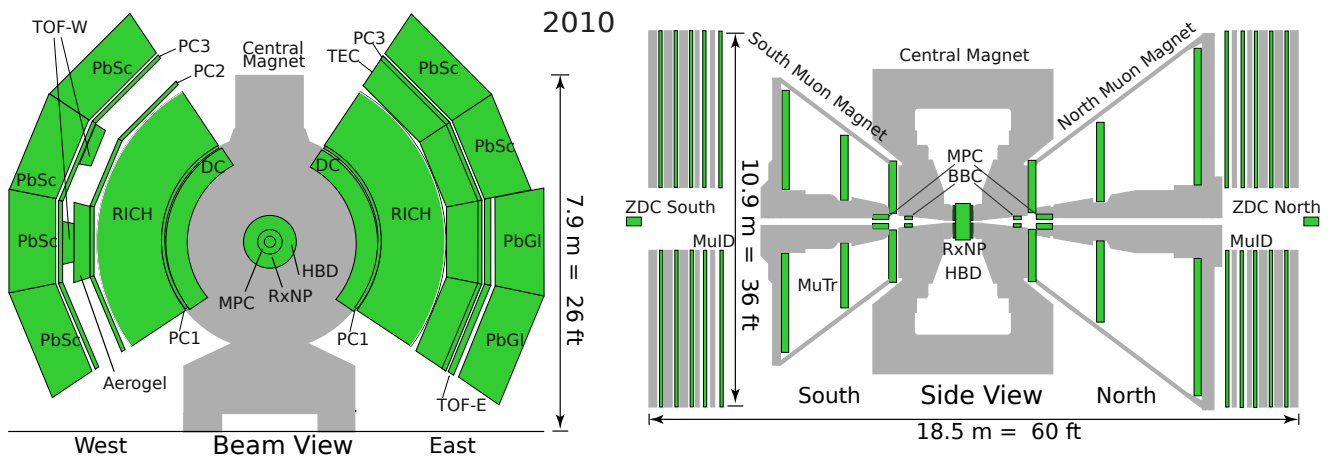
³⁵Az eddigi „kronológia” itt olvasható: <https://www.rhichome.bnl.gov/RHIC/Runs/>

³⁶A PHENIX kísérlet leírásakor is most a jelen időt használom, noha az adatgyűjtés befejezése után a detektor-rendszert szétszerelték, hogy helyet adjon az újabb, mostanában (2023) induló sPHENIX kísérletnek.

két *müon-kar* („Muon Arm”, North és South) valósult meg. A központi karok $2 \times 90^\circ$ azimut-szögbeli és $|\eta| \leq 0,35$ hosszirányú akceptanciájúak, míg a müonkarok előre- illetve hátraszórási irányban, kb. $1,2 \leq |\eta| \leq 2,2$ pszeudorapiditásnál vannak. Külön csoportot alkotnak továbbá az eseménykarakterizációs detektorok. A tárgyalandó analízisben ez utóbbiak mellett a központi kar detektorait használtuk. Röviden leírjuk a fontosabbakat; a kísérlet részletes leírása megtalálható például a [99] publikációban. Minden detektorról külön részletes publikáció is született; ezek elérése jelenleg (2023-ban) itt található: <https://www.phenix.bnl.gov/detectors/overview.html>.



3.1. ábra. Fénykép az összeszerelés alatt álló PHENIX detektorról; hangsúlyosan látszik a központi dipólmágnes (nyalábcsovet is körbeüelő) acélszerkezete illetve a müonkarok mágnesei.



3.2. ábra. A PHENIX kísérlet detektorai a 2010-es futási időszakban. Bal oldal: nyalábirányból nézve, a központi kar detektorainak kiemelésével; jobb oldal: oldalnézetben, az előre- és hátrafelé elhelyezkedő eseménykarakterizációs detektorok és a müon-karok detektorainak kiemelésével.

Az eseménykarakterizációs detektorok közül a legfontosabbak a következők:

- A nullafoki kaloriméter (ZDC) két hadronikus kalorimétert jelent, amelyek a névleges ütközési ponttól nyalábirányban ± 20 méternél (a gyorsítóalagútban) helyezkednek el, és a spektátorokról (az ütközésben továbbhaladt atommag-részekről) „lepárolgott”, és a nyalábkanyarító dipólmágnesek által már nem eltérített neutronok energiáját mérik. A ZDC fő feladata a *triggerelés*, azaz annak jelzése, hogy valóban ütközés történt; a gyorsító-üzemeltetés számára is visszajelez.

- A legfontosabb eseménykarakterizációs detektor a BBC (Beam-to-Beam Counter): ennek is két „karja” van („északi” és „déli”) ± 144 cm-re az ütközési ponttól ($3,0 \leq |\eta| \leq 3,9$ pszeudorapiditásnál). Karonként 64 „csőből” (kvarc-szcintillátorból és fotoelektron-sokszorozóból) áll.

A BBC-t tehát az odaérkező kirepülő töltött részecskék szólaltatják meg. Sokrétű feladatot lát el. Nehézion-fizikai futások során ő a fő „Minimum Bias” triggerdetektor.³⁷ A szokásosan alkalmazott triggerfeltétel (koincidenzában legalább két cső szólaljon meg mindkét karban) a nehézion-ütközések $92 \pm 3\%$ -át rögzíti. Az egy ütközésbeli összes fényhozam eloszlását egyenletesen beosztva 0% és a mondott 92% között megállapítható az ütközés centralitása (százalékban kifejezve; ld. a bevezető 1.1.2. szakaszt). A PHENIX ezt a centralitás-definíciót használta a $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV-es Au+Au ütköztetési adatgyűjtések nagy részében; 2010-ben is. A BBC csővenként $\simeq 40$ ps névleges felbontással méri a két karba való beérkezési időt is; ezek átlaga és a karok távolsága (és a c fénysebesség) alapján megadja az ütközési esemény t_{BBC} idejét (mely a többi időmérés nullpontjának számít), a két karba érkezés időkülönbségéből pedig az ütközés (a vertex) helyzetét a z nyalábtengely mentén. Utóbbi mennyiség felbontása periférikus ütközésekben $1,5$ cm körüli (a mondott időfelbontás alapján); centrális ütközésekben (a több csőből kapott több idő-információ miatt) javul; kb. $0,5$ cm értékig.

- A 2010-es futás alatt működött a szintén északi és déli „karok”ból álló, a BBC-nél kisebb $1,0 \leq |\eta| \leq 2,8$ pszeudorapiditásnál elhelyezkedő, 12 osztású azimutális szegmentációjú reakciósík-detektor (RXNP); ez műanyagscintillátor+fotóelektron-sokszorozó (PMT) alapú modulokból állt, és konverter-ólomréteget is tartalmazott (hogy a fotonok is részben jelet adjanak benne). Ezek miatt a BBC-énél nagyobb (kb. kétszeres) eseményenkénti felbontású reakciósík-mérés vált lehetővé általa. Az RXNP detektort nem használtuk az alább tárgyalt analízisben.

A központi kar észleli a midrapiditásnál keletkező részecskéket. Ide a szokásos „hagymahéj”-elrendezésben belülré töltött részecskéket érzékelő nyomkövető („tracking”) detektorok kerültek (amelyek lehetőleg minél kevésbé zavarják meg az észlelt részecskéket), kívülre pedig elektromágneses (azaz fotonok és elektronok energiáját mérő) kaloriméterek kerültek (melyek lehetőleg a teljes energiát elnyelik). A központi kar akceptanciája ($90^\circ + 90^\circ$ keleten és nyugaton) 4-4 szektorra osztható; több detektor kialakítása ezt a beosztást követi (ld. a fentebbi 3.2. ábrát).

A töltött részecskék impulzusmérése mágneses térbeli pályagörbületből lehetséges:

$$p = q_e B R, \quad \text{gyakorlatilag: } p[\text{GeV}/c] = 0,3 \cdot B[\text{T}] \cdot R[\text{m}], \quad (3.1)$$

ahol p az impulzus, B a mágneses tér, R a rekonstruált pályasugár, q_e az elemi töltés.³⁸ A PHENIX központi karjának akceptanciájában a mágneses teret egy dipólmágnes (Central Magnet) biztosítja, mely két külön vezérelhető koncentrikus tekercspárból áll 60 cm illetve 180 cm sugárnál. Ezek egyirányú működtetésével kb. $1,1$ T, nagyjából a nyalábtengellyel párhuzamos mágneses tér érhető

³⁷A „Minimum Bias” trigger elnevezés a *legkisebb torzításra* utal; arra gondolva, hogy az ilyenmel megjelölt események hasonlítanak átlagosan leginkább a (kissé idealisztikusan elképzelt) „átlagos ütközési eseményre”.

³⁸A rekonstrukciós algoritmus ± 1 elemi töltést feltételez; ha egy analízis többszörösen töltött (elnyésző számban keletkező) „részecskékre” (például He atommagokra) kíváncsi, akkor ezt utólagosan kell figyelembe venni.

el; így tehát a pályagörbületből a p_t transzverz impulzus mérhető. (Pontosabban fogalmazva: a dipólmágnes tere nem homogén; nagy impulzusnál a pályagörbület szempontjából az $\int B dl$ „mezőintegrál” a releváns mennyiség, és ennek maximális értéke $\approx 1,1 \text{ T} \cdot \text{m}$ lett.)

A fontosabb központi kari detektorok a következők:

- Driftkamra (Drift Chamber, DC): sokszálas kamra (külön a keleti és nyugati karban) a nyalábtengelytől számítva 200 cm és 246 cm között. A szálak nagyjából z irányúak, így a DC a részecskepályákat az x - y transzverz síkra vetítve rekonstruálja. Szögfelbontása kb. 1 mrad.
- Pad-kamrák (Pad Chamber, PC1, PC2, PC3): ezek jó pozícióérzékenységgű gáztöltésű detektorok, „pad”-enkénti kiolvasással. Az első PC1 réteg közvetlenül a DC mögött található, ez adja a nyomkövetéshez a z irányú pozíciót (kb. 1,7 mm felbontással). A második réteg PC2 (csak a nyugati karban, a nyalábtól kb. 4 méterre) illetve a harmadik réteg PC3 (mindkét karban, közvetlenül az elektromágneses kaloriméterek előtt, a nyalábtengelytől kb. 5,1 méterre) célja más: az ezekben detektált beütések a már rekonstruált részecskepályák verifikációjára valók.
- Rendelkezésre állnak jó időfelbontású repülésiidő- (Time of Flight, „TOF”-)detektorok, de csak kis akceptanciával: a(z eredeti kiépítésben is meglévő) TOF East a keleti 4 szektorból 1-et teljesen, 1-et pedig 1/3 részben foglal el, a nyalábtengelytől 5,1 méterre, a TOF West pedig a nyugati kar 4 szektorából kettőt félig, a nyalábtengelytől 4,8 méterre. A TOF East 960 műanyagscintillátor-rúdból („slat”) áll, minden rúd mindkét végén fotoelektron-sokszorozóval. Tervezett időfelbontása 80-100 ps; ez az évek során a scintillátor fényhozam-csökkenése miatt romlott: 2010-ben kb. 140 ps volt elérhető (ld. később). A TOF West későbbi beépítés; MRPC (multigap resistive plate chamber, többhézagos rezisztív lemezkamra) típusú gáztöltésű detektor, 2×256 kiolvasócsikkal („strip”). Tervezett időfelbontása 80 ps; tipikusan 90-100 ps érhető el.
- Legkívül, sugárirányban 5,1 m-től kezdve található az elektromágneses kaloriméter (EmCal); 4 nyugati és 2 keleti szektorban mintavevő (ólom-szcintillátor, „PbSc”), a maradék 2 keleti szektorban homogén (ólomüveg, „PbGl”) kaloriméter. Fő célja fotonok és elektronok által keltett elektromágneses záporok mérése. Szegmentáltsága világszinten egyedi: a PbSc 5,5 cm oldalú négyzetes hasáb alakú „tornyokból” áll (szektoronként 36×72 , összesen 15552 darabból; térszög-egységekben ez $\Delta\eta \times \Delta\phi = 0,011 \times 0,011$ szegmentáció); egy torony 66 ólom- és scintillátorréteget, fényvezetőket és egy fotoelektron-sokszorozót (PMT) tartalmaz. A PbGl még finomabb, $\Delta\eta \times \Delta\phi = 0,0082 \times 0,0082$ szegmentáltságú: szektoronként 48×96 , összesen 9216 torony (Cserenkov-sugárzást keltő ólomüvegblokk + PMT) alkotja. Energiafelbontásban is a PbGl jobb: itt tipikusan $\delta E/E \approx 1\% \oplus \frac{6\%}{E[\text{GeV}]}$; a PbSc-ben $\delta E/E \approx 4\% \oplus \frac{9\%}{E[\text{GeV}]}$. A mi analízisünkben hadronok repülési idejének mérése volt fontos; a PbSc erre is alkalmas. (A PbGl kevésbé; másrészt az ő akceptanciáját jórészt lefedi a TOF East detektor). A PbSc tervezett időfelbontása hadronokra $\simeq 200$ ps volt. Nem pontosan ismert okok miatt csak 400-600 ps volt elérhető (hosszadalmas kalibrációkkal, ld. alább is); mindenesetre ez is elégséges lehetett.

Az analízisünkben nem használtuk például a RICH (Ring Imaging Cherenkov) detektort: ez a PC1 mögött található; nagy térfogatú kamrájában $n = 1,00036$ törésmutatójú CO_2 -gázt tartal-

maz, és a töltött részecskék által itt keltett Cserenkov-sugárzást gömbtükörrel gyűrűvé képezi le a fotoelektron-sokszorozók síkjára. Elektronok azonosítására használható; a tipikus impulzusok esetén egyedül ők lépik át a c/n Cserenkov-sebességeküszöböt.

2011-ben beépítésre került egy pixeldetektor (VTX vagy SVX mint Silicon Vertex detektor), hogy a nehéz kvarkok bomlásából származó, az ütközési ponttól $\simeq 100 \mu\text{m}$ -re keletkező bomlás-termékeket elkülönítse. A 2010-es időszakban pedig a HBD (Hadron Blind Detector, az ütközési pont közelében elhelyezkedő Cserenkov-számláló) került főszerepbe; célja e^+e^- -párok mérése volt. Ezeket mi nem használtuk, csakúgy mint a müon-karok detektorait, a MuTr (Muon Tracker, müon-nyomkövető) illetve a MuID (Muon Identifier, müon-azonosító) detektorokat sem.³⁹

Az adatfelvételtől a fizikai eredményekig vezető út során több adatredukciós lépés történik. A nyers adatok minden ütközésben minden csatorna (fotoelektron-sokszorozók, gáztöltésű kamrák anódszáljai/anódlemezei, stb.) jelének digitalizált értékét tartalmazzák (egyedül az úgynevezett zéró-elnyomással tömörítve). Egy átlagos $\sqrt{s_{NN}} = 200 \text{ GeV}$ -es Au+Au ütközési esemény mérete néhány száz kB; egy futási időszak alatt több petabájt adat keletkezik tehát. Az ezutáni első „központilag” végrehajtott lépés az akár hónapokig is tartó „adatprodukciónak” (*Data Production*), amikor a detektorjelekből (az elsődleges kalibrációkat figyelembe véve) eggyel „használhatóbb” adatokat gyártanak. Ez utóbbiak már részecskepályákat, repülési időket, az EmCal-ben klasztereket (egy zápornak gondolt, egymás melletti torony-csoportokat) stb. tartalmaznak. A különféle analízisek (melyeket ilyen összefüggésben külön „méréseknek” hívunk) időszaka ezután jön, amikor is ki-ki a vizsgálni kívánt fizikai mennyiség mérésére külön módszert dolgoz ki és használ.⁴⁰

3.2. Korrelációs függvények mérése: adatanalízis

3.2.1. Bevezető gondolatok; adatsor-választás

A mi mérésünk töltött pionok Au+Au-ütközésekben megfigyelhető Bose-Einstein-korrelációjára, azaz a $C_2(\mathbf{q}, \mathbf{K})$ korrelációs függvényre irányult. Célunk az volt, hogy a forrásfüggvényre Lévy-alakot feltételezve (ld. a 2.2. szakaszt) megvizsgáljuk a λ tengelymetszeti paraméter, az R sugárparaméter és az α Lévy-kitevő értékét illetve \mathbf{K} -függését, majd az eredmények alapján ezek lehetséges fizikai interpretációját. Ehhez elsősorban pionok azonosítására és impulzusmérésére volt szükség, amihez az adatprodukciónak után még sok „újralibrációs” lépést kellett elvégezni: a PHENIX kísérletben nem csinálják meg ezeket központilag „előre”. A tárgyalt analízisünkhöz ezeket jórészt egyedül végeztem. Ebben a szakaszban ezt mutatom be, a „szokásosnál” talán kicsit részleteseb-

³⁹A müonok a többi szóba jövő részecske (hadronok, fotonok, elektronok) kiszűrésével azonosíthatók, ugyanis ők jóval zavartalanabban haladnak át minden anyagon. A PHENIX-ben a müondetektorok előre- és hátraszórás irányba helyezése beépíthetőségi (méretbeli) korlátokból adódott; mindenesetre így a központi mágnes acélpofája lehetett az első elnyelő réteg. A MuID detektor vastag acéllemezekből (és közöttük gáztöltésű kamrákból) áll: az áthaladt részecskéket azonosítja müonként. A müon-nyomkövető (MuTr) sokszálas proporcionális kamrákból áll a müonkarokban, ahol a pályagörbítést a központi dipólmágneztől különálló északi és déli „müon-mágnesek” végzik.

⁴⁰Ez egy viszonylag szokásos munkamenet a sokoldalú kísérleti kollaborációkban. Kevesebb lépést tartalmazó, gyorsabb adatredukció olyankor képzelhető el, ha előre világos, hogy csakis pontosan mi a cél; például a PHENIX-utód sPHENIX kísérletben már az adatgyűjtés alatt tervezik az „adatprodukciónak” és az analíziseknek az elvégzését.

ben: fontosnak tartom tudatosítani, hogy a magasröptű elméleti elgondolások kísérleti verifikációja „alacsonyabbrendű” manuális munkán is nyugodhat, és ez utóbbtól sem kell „visszarettenni”, ha érdekes kérdésekre keressük a választ. Kétféle újrakalibráció volt leginkább szükséges (ld. alább): a repülési idő alapján történő részecskeazonosítás és a részecskepályák verifikációjáé.

Ahhoz, hogy megbízható mérést végezzünk sok különböző K_t átlagos impulzusnál, mindenekelőtt nagy statisztikára van szükség. Az analízisünk elkezdésekor erre az akkor legfrissebb, 2010-ben felvett $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV energiájú arany-arany-ütközési adatok tűntek megfelelőnek: 7,3 milliárd Minimum Bias eseményről van szó, ezeken kezdtem el dolgozni. (A következő szóba jövő 2014-es adatsor ekkor még nem állt készen adatprodukción szempontból.) Hamar kitűnt azonban, hogy a választott adatsor más szempontból is ideális. A 2010-ben működő HBD detektor azt igényelte, hogy az ütközési pont mellett ne legyen mágneses tér, amit úgy lehetett elérni, hogy a központi mágnes két tekercsét ellentétes polaritással működtették. Ez a „+–” vagy „–+” jelölésű üzemmód. Ilyenkor az $\int B dl$ mezőintegrál az egyirányú („++” vagy „--” üzemmódban való) működtetéshez képest $\approx 40\%$ -ra csökkent, ami kisebb pályagörbületet, ezáltal rosszabb nagyimpulzusú impulzusfelbontást eredményezett ($\delta p_t/p_t \approx 1,3\% \oplus 1,2\% \cdot p_t [\text{GeV}/c]$, ld. [100]). Mi azonban kis- és közepes, $p_t \lesssim 0,85$ GeV/c impulzusokkal foglalkoztunk, így ez nem jelentett lényeges hátrányt. Cserébe viszont kis ($p_t \approx 0,2$ GeV/c) impulzusú részecskéket is megfigyelhettünk, amely nehéz (ha nem lehetetlen) lett volna a hagyományos „++” illetve „--” térkonfiguráció esetén. (Utóbbi esetben a kis impulzusú pályák túl nagy görbületet szenvednek még a driftkamrában és annál kintebb is az ide is jutó „maradék” dipólmágnes-tér miatt, így a driftkamra rekonstrukciós algoritmusai illetve a pályákhoz a külső (TOF, EMCal) detektorok beütéseit megkereső algoritmus, amelyek itt már egyeneseket feltételeznek, nem találják meg ezeket a pályákat hatékonyan.)

3.2.2. Kalibrációk: repülési idő az elektromágneses kaloriméterben

A PbSc tornyaiból az időinformáció-kimenet úgy születik, hogy ahogy a fotoelektron-sokszorozó analóg kimeneti jele felfut, ez átbillent egy diszkriminátort, ami ekkor egy ezután időben lineárisan növekvő feszültség-jelet indít („TAC”, Time to Analog Converter), majd ennek a PHENIX „Common Stop” elektronikus jeléig elért értéke alakul a TDC (mint Time to Digital Converter) nevű digitális jellé. Ebből kell rekonstruálni a toronyba való mért t_{meas} beérkezési időt:

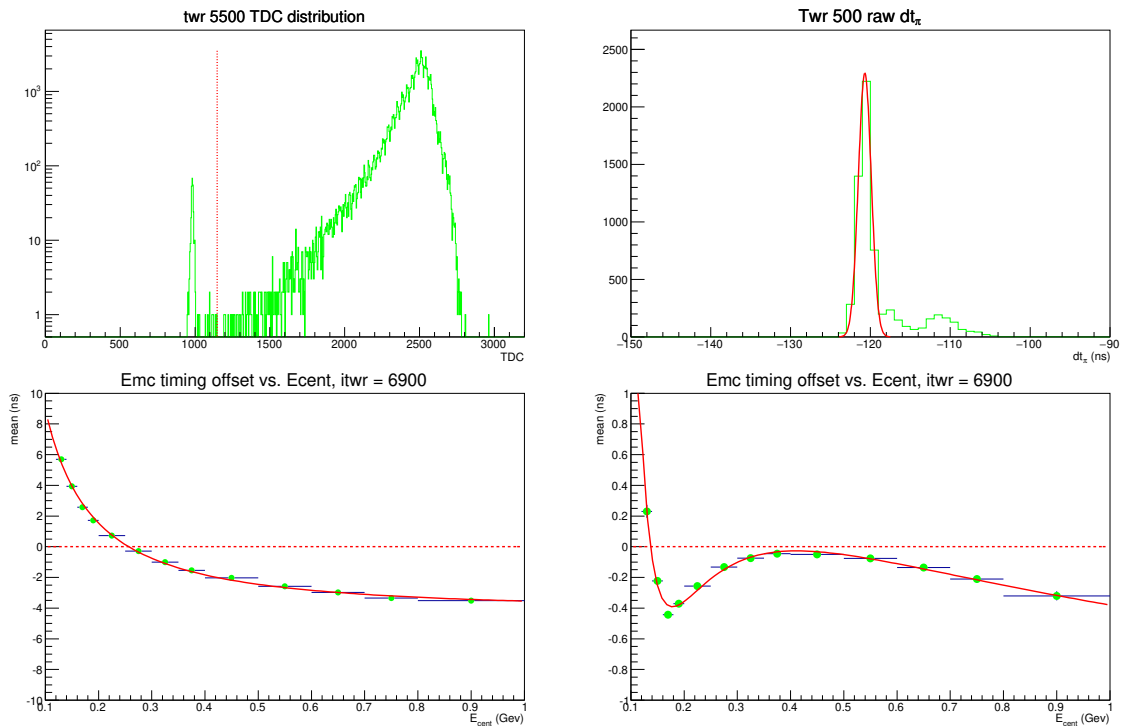
$$t_{meas} = t_0 - LC \cdot TDC - t_{BBC}, \quad \text{ahol} \quad t_0 = t_{stop} + t_{corr}, \quad (3.2)$$

és itt t_{BBC} a BBC által rögzített esemény-idő, az LC („least count”) az egy TDC-ugrásnak megfelelő (akár minden toronyra különböző) idő, t_{stop} pedig a gyorsító csomagkeresztezési órajelétől a Common Stop-ig eltelt idő. Az a lényeg viszont, hogy mindenféle effektusok miatt további t_{corr} időkorrekciót kell végezni, hogy a valódi repülési időt kaphassuk. Az adatok alapján a fent t_0 -lal jelölt összeget lehet kinyerni (ami elég) a töltött részecskék következő Δt_π jellemzőjének eloszlásából:

$$\Delta t_\pi := t_{meas} - t_{exp,\pi}, \quad \text{ahol} \quad t_{exp,\pi} \equiv \frac{L}{c} \sqrt{1 + \frac{m_\pi^2}{p^2}}. \quad (3.3)$$

Itt L a pályahossz (a track-modellből), p az impulzus, $m_\pi = 139$ MeV pedig a töltött pion tömege: a Δt_π tehát a valódi repülési idő eltérése attól, amennyi lett volna, ha a részecske töltött pion. A részecskék jelentős része viszont valóban töltött pion, így ha a fenti (3.2) egyenletbeli t_0 helyesen van beállítva, akkor a mondott eloszlásnak a $\Delta t_\pi=0$ értéknél lesz éles maximuma. Ha pedig ez a maximum nem nullában van, akkor eltolódása közvetlenül megadja a kellő korrekciót, $-t_0$ -t.

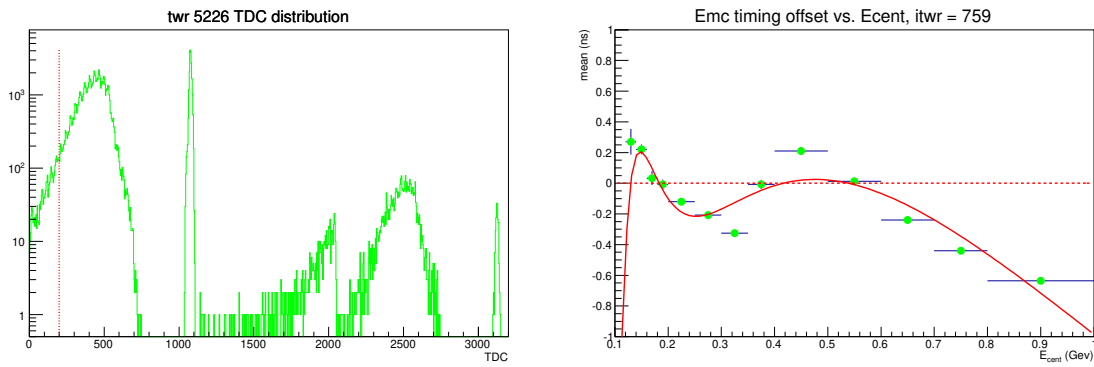
A detektor összetettsége miatt ezt a vizsgálatot több iterációval kell végezni. Először külön-külön mind a 15552 toronyra egy $t_{0,twr}$ értéket kell keresni. Ezután figyelembe kell venni azt, hogy az időmérés eltolódása a toronyban leadott energia nagyságának (a PHENIX-ben ennek neve E_{cent}) függvényében is változik.⁴¹ Ez utóbbi függés (sajnos) minden toronyra más; az ebből jövő $t_{0,twr,ecent}$ korrekciót (ami ráadásul jelentős) két iterációban volt érdemes kezelni (az automatizált illesztések jó működéséhez). Az alábbi 3.3. ábra ízelítőt ad ebből a munkafázisból.



3.3. ábra. Példa-illesztések a PbSc időkalibrációjára. Balra fent: a TDC eloszlása egy toronyban; leválasztva a „pedestal” beütéseket (amikor nem keletkezett használható időinformáció). Jobbra fent: a mondott Δt_π időkülönbség eloszlása egy toronyban; itt kb. -120 ns értékre kell(ett) korrigálni. Balra lent: tornyonkénti „slewing”-illesztés (amikor az időjel E_{cent} -függésére korrigálunk) első iterációja; itt *ad hoc* $A + B/\sqrt{E_{cent}} + C/E_{cent}$ függvényalakkal. Jobbra lent: a második iteráció (ami a függőleges skálából láthatóan már finomabb).

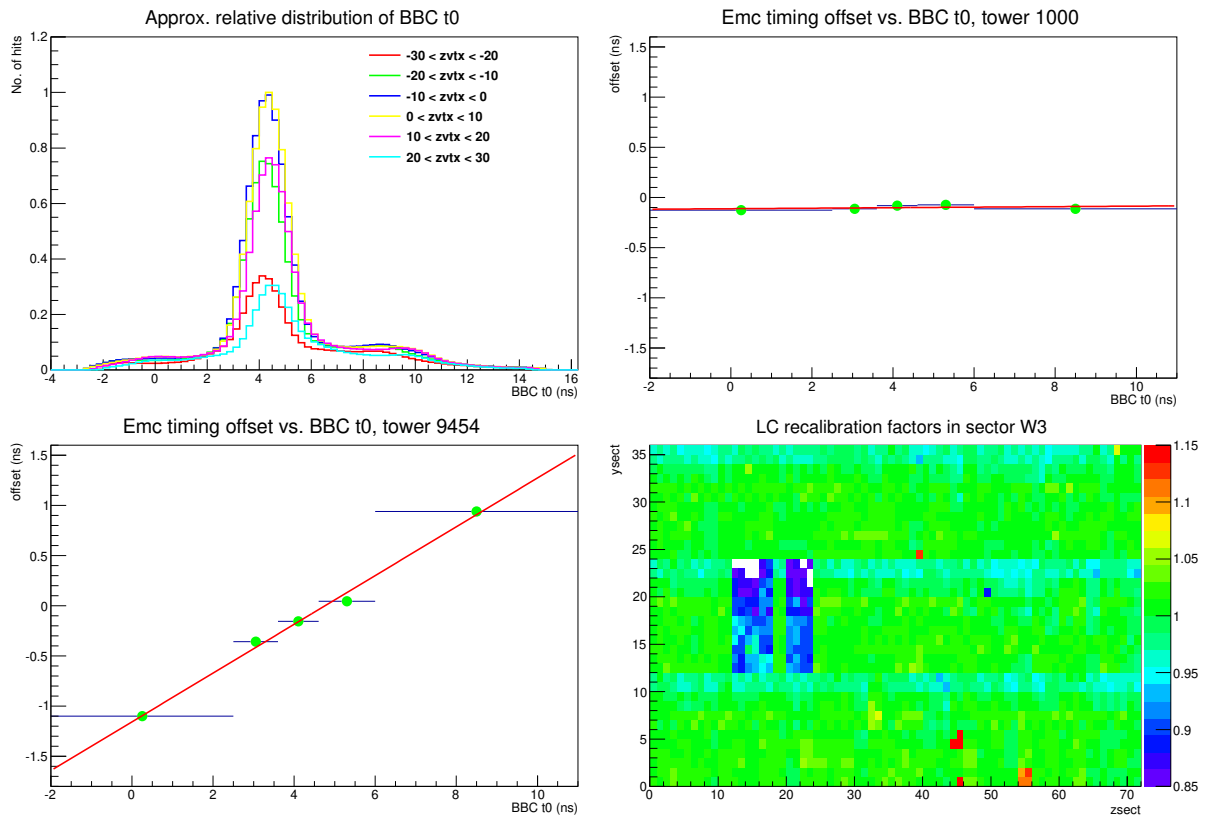
Néha szemmel végig kellett pásztázni a sok-sok hisztogramot: vannak olyan tornyok, amelyek nem adnak jelet, illetve olyanok is, amelyekben (elektronikai hiba miatt) nem jó az időjel, nem működik az időkalibráció sem. Az alábbi 3.4. ábra ilyen utóbbi eseteket mutat.

⁴¹Ennek legalább két oka van. Más-más energiájú torony-beütéseknek geometriailag máshol lesz a maximális fénykibocsátása, így a tornyok fényvezetőiben megtett fényút változik. Az úgynevezett *slewing*-hatás pedig elektronikai ok: a TAC-indító diszkriminátor-szint elérése hamarabb történik, ha nagyobb az analóg jel.



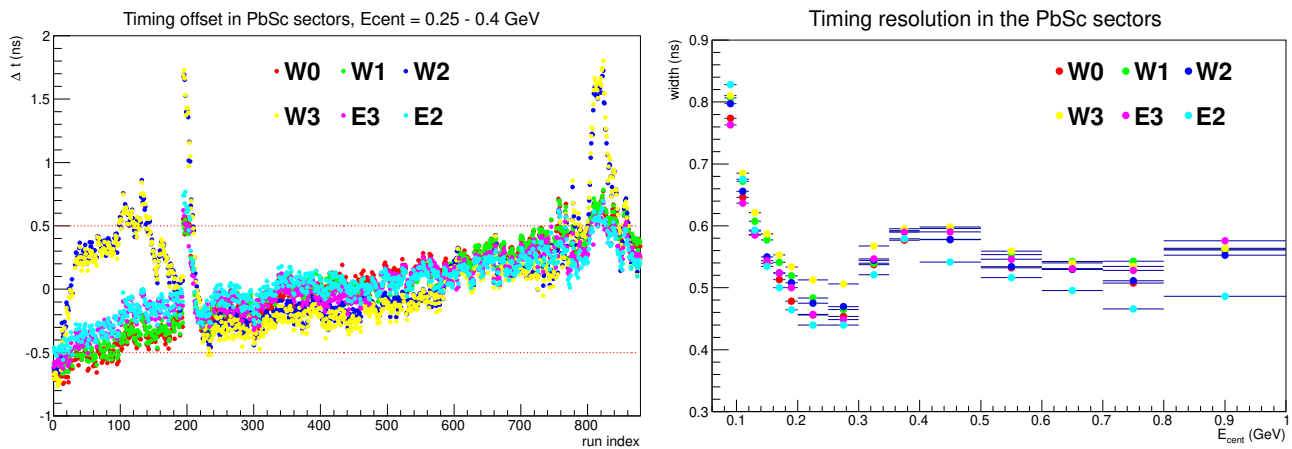
3.4. ábra. Példák „rossz” tornyokra a PbSc-ben. Bal oldalon: ahol már a TDC-eloszlás láthatóan patológikus (valószínűleg a TAC→TDC analóg-digitális konverterének hibás bitjei miatt). Jobb oldalon: bizonyos tornyok hibája a második körös E_{cent} -korrekció nem megbízható alakján látszik.

Jónéhány toronyban a hivatalos LC („least count”) TDC↔ns kalibrációs konstansokat is korrigálni kellett: a t_{BBC} esemény-indulási idő függvényében a Δt_π időeltolódás nem volt konstans, mert a valódi idő egy nem 1-szeres szorzóját adta a hibás LC-érték (ld a (3.2) egyenletet).



3.5. ábra. A „least count” (1 TDC-nek megfelelő idő ns-ban kifejezve) toronykénti újrakalibrációja. Balra fent az események BBC-ben mért idejének eloszlása: ez a gyorsítóvezérlés, a csomagminőség függvénye is; több ns-ot átölel. A legtöbb toronynál alig kellett változtatni az LC-értékeken (jobbra fent): ekkor a t_{BBC} függvényében nem tolódik el az időmérés. Jónéhány toronyban viszont igen (példa balra lent); ilyenkor módosítani kellett az LC-értékeket. A kapott szükséges szorzókat a PbSc egyik (nyugati kar, 3-as) szektorában jobbra lent láthatjuk (az itteni 36×72 toronyra).

Az adatfelvételi időszak („Run”) során kb. órás „működések” történnek (ezeket is „run”-oknak hívjuk): ezek azok az időtartamok, amikben az adatgyűjtő szoftver (DAQ, Data Acquisition) megszakítás nélkül működik. Jelentős hatása van annak is, hogy ezen „run”-ok között is módosul az időeltolódás: a megfigyelt, az eddigi korrekciókat már alkalmazva kapott Δt_π -eloszlás maximumhelye elvándorol 0-tól a „run”-ok során erre-arra. Ennek oka nem teljesen világos (akár időjárás- vagy hálózati áramfrekvencia-változás is okozhatja); mindenesetre korrigálni kell rá. Az alábbi 3.6. ábra mutatja ezt a korrekciót, valamint az eddigiék után kapott végleges időfelbontást (amelyet a Δt_π eloszlás szélessége ad meg): látszik, hogy ezen 400-600 ps értékek eléréséhez valóban szükség volt a tárgyalt (több esetben sok ns) eltolódásokra korrigálni.

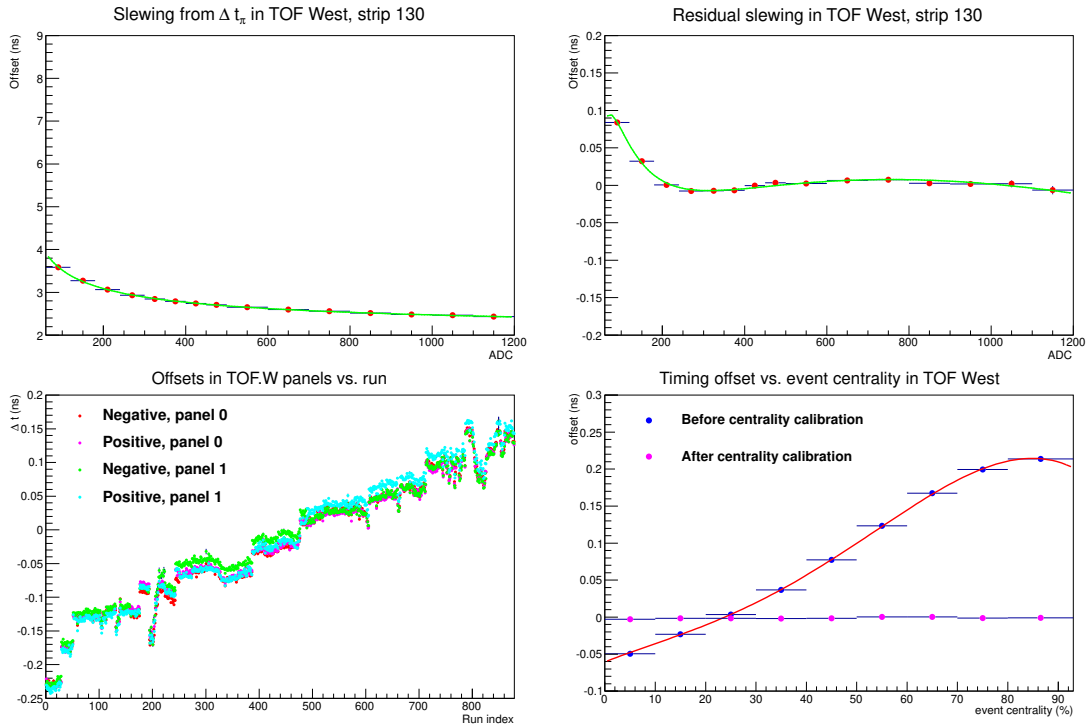


3.6. ábra. Balra: „run”-onkénti időeltolódás; ez szektoronként is különbözik. Jobbra: az eddigi korrekciók után kapott időfelbontás hadronokra, PbSc szektoronként, az E_{cent} függvényében. A hadron-beütések tipikus E_{cent} értéke kb. 0,2 GeV, ami pont a legkényelmesebb tartomány.

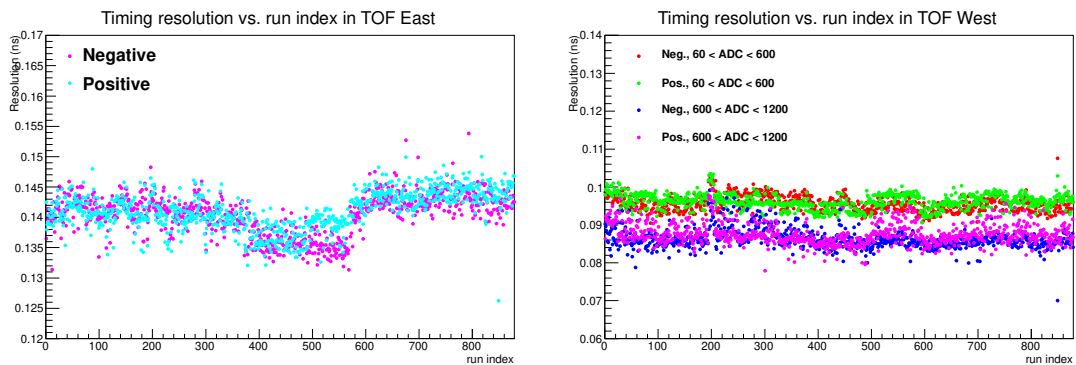
3.2.3. Kalibrációk: repülési idő a TOF detektorokban

A legnagyobb akceptanciát a PbSc fedi le, de fontos, hogy a mért korrelációs függvény vonatkozásában meggyőződjünk, hogy a különféle alkalmas detektorokkal mért eredmények egymással konzisztensek. Használni akartuk tehát a (szcintillátor-alapú) TOF East és az (MRPC-alapú) TOF West detektorokat is. A TOF East időkalibrációját már megcsinálták akkorra, amikor elkezdtük ezt az analízist, a TOF West-re azonban nem volt elérhető ilyen. Itt is szükség volt a repülési időnek az adatokból történő kalibrációjára. Ez is a track-ek valódi t_{meas} repüsi idejének a pionokra várt $t_{exp,\pi}$ repülési idővel való összehasonlítása alapján végezhető, ugyanúgy, mint a PbSc elektromágneses kaloriméter esetén: úgy kell korrigálni, hogy végül a $\Delta t_\pi = t_{meas} - t_{exp,\pi}$ mennyiség eloszlásának nullánál legyen a maximuma. Itt is szükség volt külön-külön mind az 512 kiolvasócsíkot („strip”-et) a jelnagyság (ADC) függvényében kalibrálni, több iterációval, továbbá itt is megjelent az adatfelvétel „run”-jaitól való függés. Az elvárt időfelbontás itt kb. 80-100 ps, így alaposabban kellett vizsgálni az eltéréseket. Itt fontos lett egy olyan effektus, ami a PbSc-ben kevésbé volt az (mellesleg ez az egy lépés a TOF East detektor adataiban sem volt előre elérhető az adatsorunkra): az időmérés nullpontját adó BBC detektorban is a jelnagyság függvényében egy

eltolódás jelentkezik (a BBC időmérés-bekapcsoló diszkriminátorainak „slewing”-hatása miatt). Ez befolyásolja a BBC-ben mért nulla-időt, t_{BBC} -t, ami végül centrális-függő időeltolódásként jelentkezik az összes időmérésben. Erre is korrigáltam tehát (mindkét detektor, a TOF East és a TOF West esetében is). Az alábbi 3.7. ábra mutat egy-két példát a mondott folyamatból, a 3.8. ábra pedig a végső kapott időfelbontást.



3.7. ábra. Példa-illesztések a TOF West detektor időkalibrációjára. Fent: példa egy kiolvasócsík („strip”) ADC-függő időeltolódására (balra: első iteráció, jobbra: második iteráció). Lent balra: adatfelvételi „run”-onkénti időeltolódás, a két (256 csíkot tartalmazó) panelben és pozitív/negatív részecskékre külön (utóbbi önellenőrzés). Jobbra lent: az eseménycentralitás függvényében szűkséges korrekció; ez nem a TOF West detektor, hanem a BBC működésére vezethető vissza.

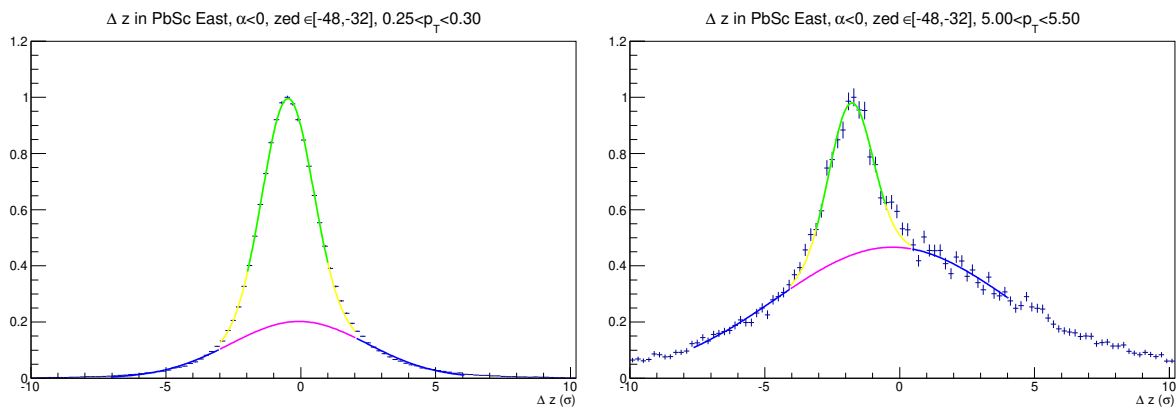


3.8. ábra. A TOF detektorok időfelbontása az adatainkban az adatfelvételi időszakok („run”-ok) sorszámának függvényében. Balra: a TOF East detektor; tipikus érték kb. 140 ns. Jobbra: a TOF West detektor (az ADC-jel nagyság két jellemző értékénél); a tipikus érték 90-100 ns.

3.2.4. Kalibrációk: pályaverifikáció, illeszkedési („matching”) vágások

A PHENIX nyomkövető algoritmus úgy veszi, hogy a részecskepályák a (BBC detektor által lokalizált) ütközési pontból („vertexből”) indulnak, így határozza meg pályahosszukat és impulzusukat. Ez a módszer első körben nem alkalmas jónéhány cm-re a vertextől (például Λ -barionok vagy K_0^S mezonok bomlásaiból) keletkező részecskék nyomkövetésére.⁴² Sőt a vertexből jövő pályák közül is ki kell szűrni kétféle „hátteret” (nem igazi részecskepályákat). Előfordulnak véletlen párosítások a DC-PC1-ben detektált pályák és a külső detektorok (EmCal, TOF) beütései között, ha az igazi részecske közben elbomlott, vagy a pályarekonstrukció hibázott: ez kis impulzusoknál jelentős. Előfordulnak továbbá bentebbi bomlásból keletkezett, de a DC-PC1 rétegre éppen majdnem merőlegesen repülő részecskék: ezeket (amúgy ritka) nagyimpulzusú részecskéknek gondolja az algoritmus, utóbbiakhoz így komoly arányú (hibás) hátteret adva.

Ezek kezelésére az *illeszkedési* („matching”) vágások használatosak. A külső (EmCal, TOF, PC3) detektorokban mért beütés-pozíció és a DC-PC1-ből tudott pálya oda extrapolált pozíciója z illetve φ irányú Δz illetve $\Delta\phi$ különbségének eloszlásai mutatják a valódi részecskéket jelentő csúcsot és a mondott hátteret: ezen eloszlásokra kell „vágni” a csúcs körül, hogy amennyire lehet, csak igazi részecskepályákat tartsunk meg. Az alábbi ábra példát mutat ilyen $\Delta\phi$ - és Δz -eloszlásokra.⁴³



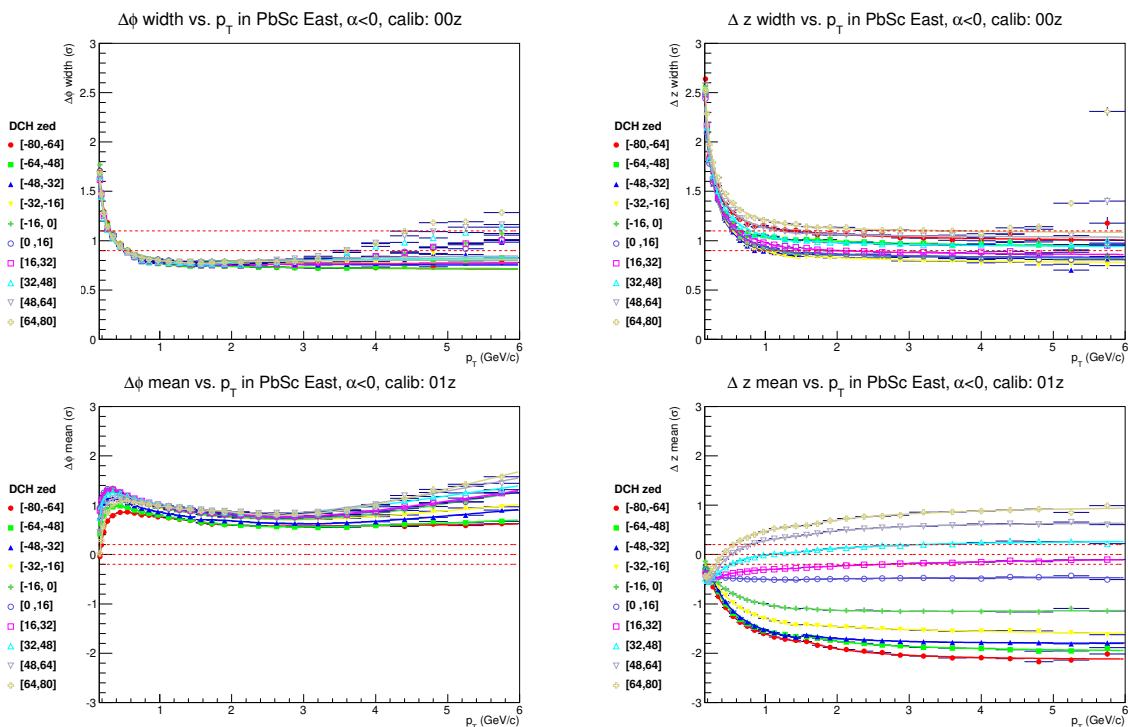
3.9. ábra. Példa az illeszkedési („track matching”) eloszlásokra: a PbSc detektorbeli Δz (ld. a szövegben) eloszlása adott kinematikai ablakban. Bal oldalon: egy kisimpulzusú, jobb oldalon egy nagyimpulzusú „ p_t -szelet”: mindkét esetben jelentős háttértől szabadulhatunk meg a vágással.

A probléma az, hogy a Δz és $\Delta\phi$ valódi részecskékre vonatkozó várható értéke általában nullától különböző (tipikusan cm nagyságrendű); szórása pedig nem konstans (de szintén cm nagyságrendű). Ez a várható érték és szórás összetett módon függ a részecskék töltésétől (görbületi irányától), impulzusától, polárszögétől, az esemény centralitásától és a vertex z -koordinátájától, és persze attól, hogy melyik detektor (EmCal, TOF, PC3) melyik szektoráról van szó. Néhány ilyen függés

⁴²A PHENIX eredeti kiépítésében nincsen nyomkövető detektor az ütközési pont és a driftkamra között. (2010-ben sem volt; a 2011-ben beépített pixeldetektor (SVX) elvileg segített ezen, de különféle okok miatt mégsem használták sok későbbi analízisben sem.) Mindenesetre az eredeti kiépítésben is lehet(ett) például a mondott Λ , K_0^S részecskékkel foglalkozó analíziseket végezni a bomlási hely eltolódásának statisztikus alapon való figyelembevételével.

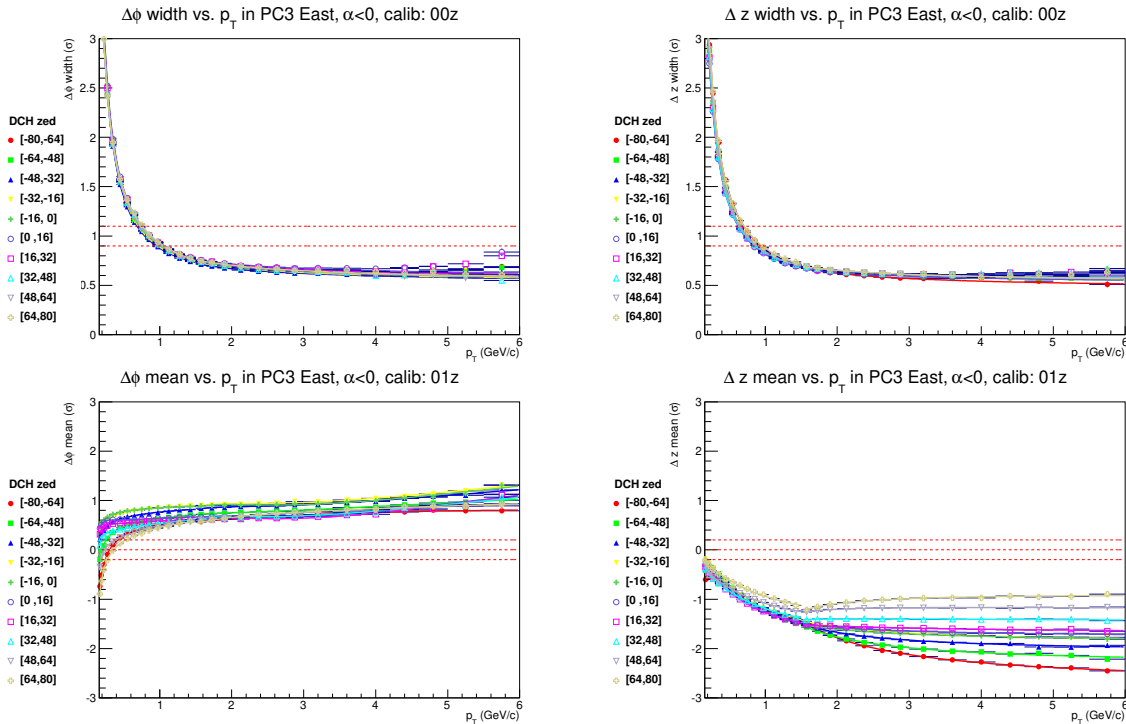
⁴³Ezen hisztogramokra nyilván dupla Gauss-függvény illesztése szükséges (a hátteret a jeltől szétválasztandó), sokszor mégsem ílyet illesztettek korábban; igen körülményes (volt) ugyanis automatizálni.

érthető: nyilván szerepet kap az egyes detektorok helyfelbontása, a $\Delta\phi$ -beli eltolódás kis p_t -nél jelentős a maradék (szórt) mágneses tér miatt, a PbSc-ben Δz -eltolást okoz nemnulla polárszögnél, hogy az (elektromágneses záporokra optimalizált) pozíciómérés kicsit torzít a hadronok beütési helyén, a Δz szélességek centralitásfüggése a BBC vertexpozíció-felbontását tükrözi, a szektoronkénti eltolódások a detektor pontos helyzetének („alignment”) függvényei. Végeredményben tehát paraméterezni kell a Δz - és $\Delta\phi$ -eloszlások szélességeit és helyzetét a mondott változók függvényében.⁴⁴ Ez is hosszadalmas, sok iterációs munka; néhány lépést mutatnak a 3.10. és a 3.11. ábrák. Ezen kalibrációkat (tehát a különféle detektorokban a Δz és $\Delta\phi$ mennyiségek eloszlásai szélességének és helyzetének p_t -függő, a többi releváns változótól való függését is figyelembe vevő paraméterezését) elvégezvén tudhattuk megbízhatóan használni az illeszkedési vágásokat a $\Delta\phi$ -re és/vagy a Δz -re valahány standard szórás (σ) értéknél kevesebbet megkövetelve, így kiszűrve az igazi részecskepályákat a nem igazi fizikai részecskéket jelentő háttérből.



3.10. ábra. Példa-illesztések a PbSc detektorban: balra a $\Delta\phi$, jobbra a Δz illeszkedési (matching-)változók, fent a szélesség, lent a várható érték (eltolódás), a p_t függvényében, különféle (a DC-PC1-ben mért) z -koordinátáknál (amely koordináta itt tehát lényegében a pálya polárszögét tükrözi). Jól látszik, hogy a Δz -beli eltolódás függ ettől. A függőleges tengelyen mért „ σ ” érték egy eredetileg „tippelt” értéket jelent; végső soron korrigálni kell tehát a tapasztalt függésre. *Megjegyzés:* az itt mutatott illesztések nem tűnnek megbízhatóknak nagy ($p_t \gtrsim 4 \text{ GeV}/c$) impulzusnál, mégis kiderül, hogy ott is használhatóak (lennének; erre a tartományra az analízisünkben nincs szükségünk).

⁴⁴ Jó tehát érteni néhány mondott okot, de ez az alkalmazáshoz nem kell; pláne, hogy sok megfigyelt függés oka nagyon nem érthető. Például a 3.10. és a 3.11. ábrákon is látható, hogy a megfigyelt p_t -függésnek „törése” van $1,5 \text{ GeV}/c$ -nél: ez, amennyire tudom, minden korábbi és későbbi adatsorban is megfigyelhető volt, de manapság már talán *senki* sem tudja ennek (valószínűleg valahol mélyen a rekonstrukciós szoftverben rejlő) okát.



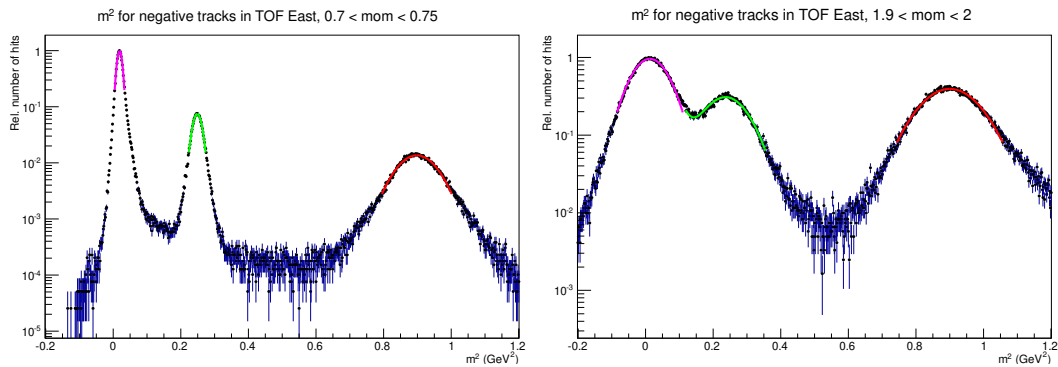
3.11. ábra. Az előbbi ábrához hasonló példa-illesztések a PC3 detektorban balra a $\Delta\phi$, jobbra a Δz mennyiségekre: fent a szélesség, lent a várható érték a p_t függvényében, a DC-PC1-ben mért z -koordináta szerint differenciáltan. Jól látszik a(z előző 44. lábjegyzetben említett ismeretlen okú) „törés” $p_t = 1, 5$ GeV/ c -nél, valamint a kis impulzusú szélesség-növekedés.

3.2.5. Kalibrációk: m^2 -spektrumok, részecskeazonosítás

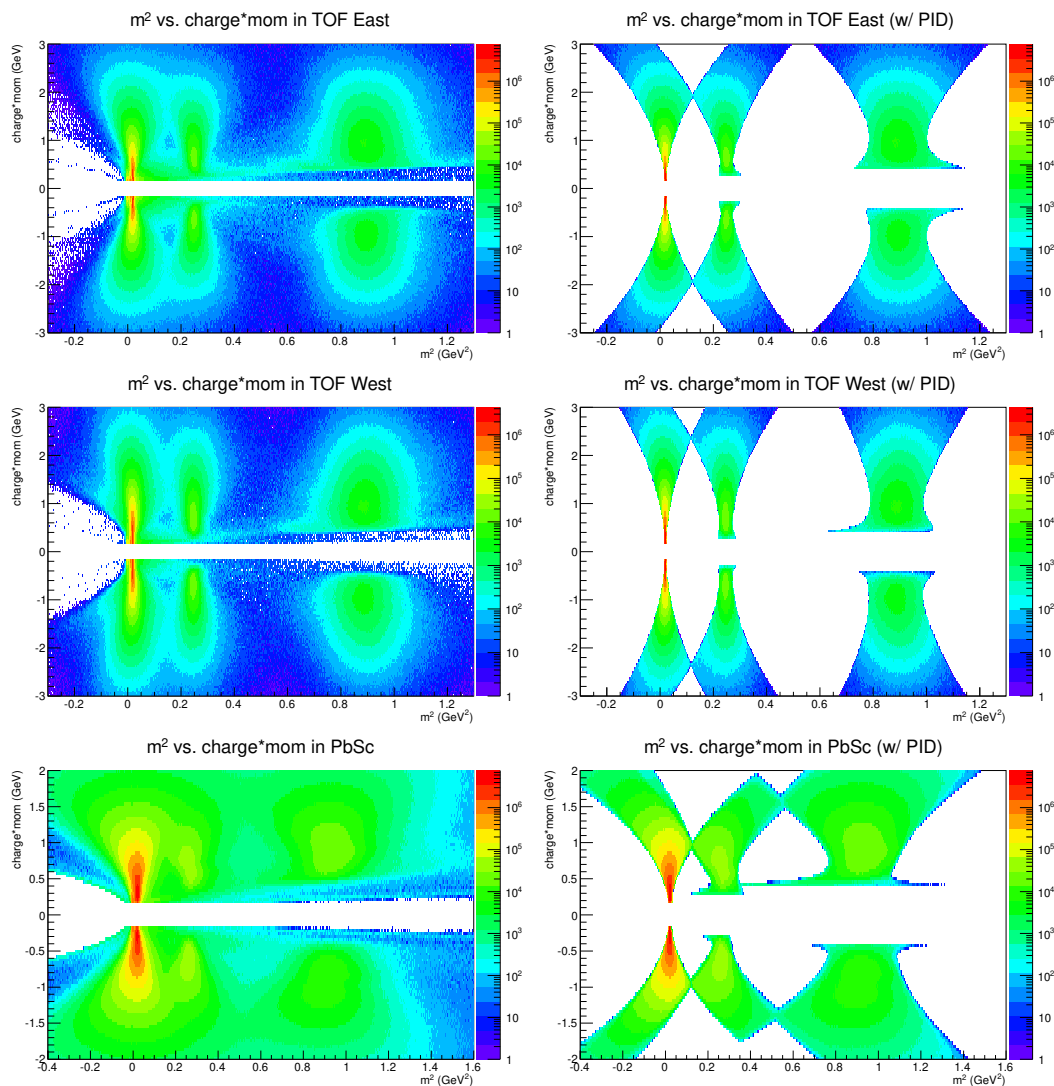
Az illeszkedési vágásokkal megtisztított részecskepálya-minta már alkalmas arra, hogy a (már kalibrált) t repülési idő alapján azonosítsuk a részecskéket. Szükség van még a p impulzusukra és az L pályahosszakra: ezekből a rekonstruált m^2 tömegnégyzet és annak $\delta(m^2)$ bizonytalansága

$$m^2 = p^2 \left[\left(\frac{ct}{L} \right)^2 - 1 \right] \quad \Rightarrow \quad \delta(m^2) = 2 \frac{m_0^2}{p} \delta p \oplus 2p \sqrt{m_0^2 + p^2} \frac{c}{L} \delta t \quad (3.4)$$

módon adódik, ahol δp illetve δt az impulzus- illetve a repülési időmérés felbontása, és az utóbbi képletbe visszaírtuk a részecske valódi m_0 tömegét. A $\delta(m^2)$ -ben a δp -s tag nagyjából konstans; kis p -nél ad növekményt (a δp felbontás p -független része miatt, ami a kisszögű Coulomb-szórások miatt van). Nem túl kicsi impulzusnál a repülési idő bizonytalansága fontosabb: nagy p -k felé p^2 -tel arányos. A részecskeazonosításhoz az m^2 -eloszláson látható, ismert részecskék (pion, kaon, proton) tömegnégyzetei környékén megvalósult csúcsok körül valahány standard eltérésnyire vágunk: azon pályákat fogadjuk el adott részecskéknek, amelyek ez alapján valószínűsíthetően azok (és nem másilyenek). Az m^2 -eloszlásokat a mondottak miatt impulzusfüggően kell nézni, a különböző δt időfelbontású detektorokban külön, és paraméterezni kell az m^2 -eloszlások közepét illetve szélességeit. Az alábbi 3.12. ábra egy példát mutat m^2 spektrumra, a 3.13. ábra pedig az impulzus- és m^2 -térképet mutatja az azonosított pionok, kaonok, protonok kiemelésével.



3.12. ábra. Példái repülési-idő-kalibrációk után kapott m^2 -spektrumokra a TOF East detektorban két impulzus-szeletben, a pionoknak, kaonoknak és protonoknak megfelelő csúcsokat kiemelve.



3.13. ábra. A végleges részecskeazonosítási ábrák: rekonstruált m^2 tömegnégyzet a töltés \times impulzus függvényében, balra az az összes, jobbra a pionnak, kaonnak vagy protonnak elfogadott (a tömegnégyzet-csúcs körül 2σ -nyira vágott, a többiektől pedig „vétó”, kizáró 2σ vágással megkülönböztetett) részecskékre a három időmérő detektorban: TOF East, TOF West, PbSc kaloriméter. Látszik utóbbi rosszabb időfelbontása (a függőleges tengely is más).

3.2.6. Eseménykeverés, párvágások

A tárgyalt kalibrációkat elvégezve megbízhatóan rekonstruálhattunk pionokat a 2010-es futási időszak arany-arany ütközési adataiban. Az analízisünkben ehhez a következő vágásokat alkalmaztuk:

- Az események (a vertex) z -pozícióját -30 cm és $+30$ cm közé korlátoztuk: így elkerülhető, hogy a részecskék nagy számban szóródjanak a központi dipólmágnes szerkezetén.
- Csak a „jó minőségű” részecskepályákkal foglalkoztunk: ezek azok, amelyek a driftkamra mindkét rétegében nyomot hagytak, és amelyekhez egyértelműen megtalálható volt a beütés a PC1 pad-kamrában (a z koordináta, így a polárszög rekonstrukciója végett).
- A TOFE, TOFW és PbSc detektorokban 2σ illeszkedési vágást alkalmaztunk $\Delta\phi$ és Δz irányban is (a valódi beütés és a pálya-extrapoláció közötti eltérésre).
- A piontömeg-négyzet körül 2σ -n belül, de a kaontömeg-négyzettől legalább 2σ -nyira lévő rekonstruált tömegnégyzetű részecskéket fogadtunk el pionokként (külön-külön a PbSc, a TOF East és a TOF West detektorokban is).

Az így kapott pion-mintával már mérhettünk $\pi^+\pi^+$ illetve $\pi^-\pi^-$ korrelációs függvényeket. Az összes Minimum Bias esemény helyett végül a 0%-30% centralitású eseményeket vizsgáltuk (ez kb. 2,2 milliárd eseményt jelentett); erre azért volt szükség (már az eredmények véglegesítése során), hogy elkerüljük a kezdeti geometria sokfélesége miatti értelmezésbeli bizonytalanságot.

A korrelációs függvény definíciója ugyebár (ld. az előző fejezetbeli (2.1) egyenletet)

$$C_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{N_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)}{N_1(\mathbf{p}_1)N_1(\mathbf{p}_2)} \equiv \frac{N_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)}{N_{11}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)} \quad \Leftrightarrow \quad C_2(\mathbf{Q}, \mathbf{K}) = \frac{N_2(\mathbf{Q}, \mathbf{K})}{N_{11}(\mathbf{Q}, \mathbf{K})}. \quad (3.5)$$

Itt ugye $N_1(\mathbf{p})$ az egyrészecskés, $N_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ a kétrészecskés invariáns impulzuseloszlás, és ideiglenesen bevezettük az $N_{11}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \equiv N_1(\mathbf{p}_1)N_1(\mathbf{p}_2)$ jelölést a kényelem kedvéért. A második felírt alak kihangsúlyozza, hogy amint az előző fejezetben körüljártuk, a változóktól való függésére úgy tekintünk, hogy adott \mathbf{K} -nál mérjük ki a \mathbf{Q} -függést; ugye \mathbf{K} az átlagos, \mathbf{Q} a relatív impulzus.

Kísérletileg ez úgy történik, hogy az adatsor eseményein végighaladva minden eseményen belül minden rekonstruált részecskepárt (például pionokra gondolva minden $\pi^+\pi^+$ vagy $\pi^-\pi^-$ párt) végignézzünk, és a \mathbf{K} értékekre szelektálva elkészítjük a \mathbf{Q} eloszlását ezen párokra (hisztogramokkal). Ezen eloszlást „aktuális eloszlás”nak hívjuk, és $A(\mathbf{Q}, \mathbf{K})$ módon jelöljük. Innen úgy lehetne megkapni az $N_2(\mathbf{Q}, \mathbf{K})$ pár-impulzuseloszlást, hogy ezt elosztjuk a detektor adott \mathbf{K} és \mathbf{Q} értékeknél, vagyis adott \mathbf{p}_1 és \mathbf{p}_2 részecske-impulzusoknál megvalósuló $\mathcal{E}_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ hatékonyságával:⁴⁵

$$N_2(\mathbf{Q}, \mathbf{K}) = \frac{A(\mathbf{Q}, \mathbf{K})}{\mathcal{E}_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)}. \quad (3.6)$$

Az \mathcal{E}_2 faktort nem könnyű pontosan ismerni, mert hozzájárul az akceptancia (térbeli lefedettség), az egyes detektor-elemek és a használt vágások hatékonysága, valamint a „pár-hatékonyság” is, vagyis hogy a detektor mennyire tud egy eseményen belül két részecskét megkülönböztetni. Mindenesre a (3.5) definíció nevezőjében szereplő $N_{11}(\mathbf{Q}, \mathbf{K})$ -t is meghatározhatjuk hasonlóan úgy, hogy *különböző*, (korrelálatlan) eseményekből vett részecskepárok \mathbf{Q} -eloszlását készítjük el ugyanígy:

⁴⁵Vissza kellene még osztani persze az összes vizsgált esemény számával is, de ez mindenhol kiesne alább.

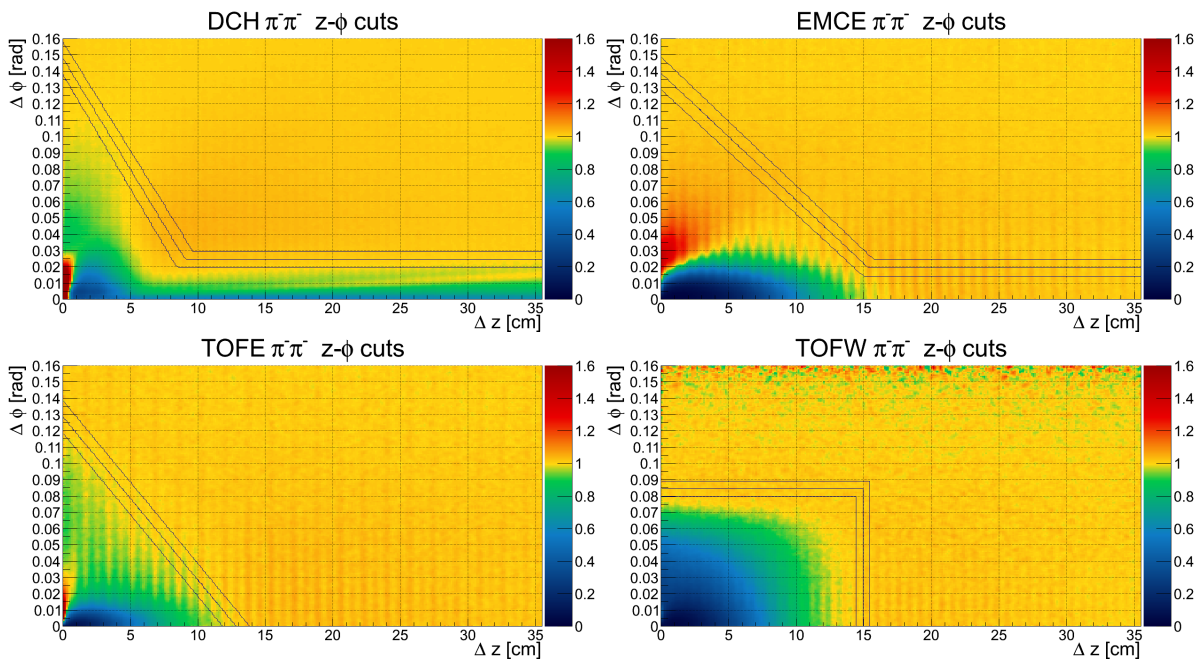
ennek neve „háttér-eloszlás”, jele $B(\mathbf{Q}, \mathbf{K})$. Ebből is megkaphatnánk az $N_{11}(\mathbf{Q}, \mathbf{K})$ eloszlást, de itt csak az $\mathcal{E}_1(\mathbf{p}_1)$ egyrészeszkés rekonstrukciós hatékonyság jelenik meg:

$$N_{11}(\mathbf{Q}, \mathbf{K}) = \frac{A(\mathbf{Q}, \mathbf{K})}{\mathcal{E}_1(\mathbf{p}_1)\mathcal{E}_1(\mathbf{p}_2)}. \quad (3.7)$$

Látható, hogy a nehezen kezelhető \mathcal{E} -faktorok egy jelentős részétől megszabadulhatunk hányados képzésével. Elhagyva a \mathbf{K} jelölést arra gondolva, hogy adott \mathbf{K} értékre/tartományra fókuszálunk:

$$C_2(\mathbf{Q}) = \frac{A(\mathbf{Q})}{B(\mathbf{Q})}, \quad \text{hacsak} \quad \mathcal{E}_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \mathcal{E}_1(\mathbf{p}_1)\mathcal{E}_1(\mathbf{p}_2). \quad (3.8)$$

Az utóbbi $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 \cdot \mathcal{E}_1$ egyenlőség igaz a detektor akceptanciájának illetve egyrészeszkés detektálási hatékonyságának szempontjából, azonban a részecskepálya-párok nyomkövetési hatékonysága eltérhet az egyes hatékonyságok szorzatától a detektorok véges szegmentáltsága miatt. Ezt úgy vizsgálhatjuk, ha a detektorokban a részecskepálya-párok térbeli $\Delta \mathbf{r}$ pozíciókülönbségének korrelációs függvényeit nézzük: ennek 1-től való eltérése utalhat arra, hogy $\mathcal{E}_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \neq \mathcal{E}_1(\mathbf{p}_1)\mathcal{E}_1(\mathbf{p}_2)$. A PHENIX-ben a használt detektoraink adott radiális pozíciónál vannak, így a mondott hatékonyságot a párok Δz longitudinális illetve $\Delta \phi$ azimutális szeparációja függvényében vizsgáltuk. Az alábbi 3.14. ábrán láthatjuk az így képzett korrelációs függvényeket.



3.14. ábra. Párrekonstrukciós hatékonysági ábrák (azaz $C(\Delta z, \Delta \phi)$ korrelációs függvények a párok $\Delta \phi$ illetve Δz pozíciókülönbségének függvényében) a használt detektorokban; sorrendben: driftkamra, PbSc (keleti kar; hasonló a nyugati kar is), TOF East és TOF West. A bejelölt vágásokon kívül ezek elfogadhatóan 1 értékűek; ezekből szűrtük le a (szövegben tárgyalt) párvágásokat.

Jól látszik, hogy kis szeparációnál (ami a driftkamrában a z irányú szálak hosszanti érzéketlensége miatt fennáll nagy Δz -értékekig is) a párok rekonstrukciós hatékonysága 1-nél kisebb: ez tehát nem kívánt detektor-effektus, neve kézenfekvően „részecskepálya-összeolvadás” (*track merging*). A

kis szeparációnál másutt megjelenő erős pozitív korreláció is kiszűrendő effektus: ez az úgynevezett „felhasadás” (*track splitting*), amikor az algoritmus egy eseményen belül egy valódi pályát (hibásan) két közeli pályaként rekonstruál, egy hamis „részecskepár” megjelenését okozva így.

Ezeztől tehát megszabadulhatunk, ha „pár-vágásokat” végzünk: nem engedünk meg olyan párokat sem az $A(\mathbf{Q})$, sem a $B(\mathbf{Q})$ hisztogramokban, amelyek az egyes detektorokbeli Δz illetve $\Delta\phi$ értékeik alapján a nem megfelelő hatékonysági tartományba esnének. Az imént látott ábrát (és sok hasonlót) részletesen megvizsgálva úgy láttuk, hogy ha a következő párvágásokat tesszük, az megfelelően biztosítja a posztulált $\mathcal{E}_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \mathcal{E}_1(\mathbf{p}_1)\mathcal{E}_1(\mathbf{p}_2)$ egyenlőséget:

$$\begin{aligned} \text{a driftkamrában: } & \Delta\phi > 0,025 \text{ rad} \quad \text{és} \quad \Delta\phi > \left(1 - \frac{\Delta z}{11 \text{ cm}}\right) \cdot 0,15 \text{ rad}, \\ \text{a PbSc kaloriméterben: } & \Delta\phi > 0,02 \text{ rad} \quad \text{és} \quad \Delta\phi > \left(1 - \frac{\Delta z}{18 \text{ cm}}\right) \cdot 0,14 \text{ rad}, \\ \text{a TOF East-ben: } & \Delta\phi > \left(1 - \frac{\Delta z}{13 \text{ cm}}\right) \cdot 0,13 \text{ rad}, \\ \text{a TOF West-ben: } & \Delta\phi > 0,085 \text{ rad} \quad \text{vagy} \quad \Delta z > 15 \text{ cm}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Megjegyezzük, hogy még egy pár-vágást is tettünk: ha az algoritmus két (közeli) pályához ugyanazt a repülési-idő-mérő modult (PbSc-beli „tornyot”, TOF East-beli „rudat” vagy TOF West-beli kiolvascsíkot) rendelte, akkor ezek közül az egyiket (véletlenszerűen) kidobtuk. Ez azonban (a többi párvágás gondos végrehajtása esetén) már nem okozott érdembeli hatást.

A párvágások alkalmazásával tehát nyugodtan mondhatjuk, hogy kísérletileg

$$C_2(\mathbf{Q}) = \frac{A(\mathbf{Q})}{B(\mathbf{Q})} \quad \begin{array}{l} \text{minden adott } \mathbf{K}\text{-nál, jól} \\ \text{normált } A(\mathbf{Q}) \text{ és } B(\mathbf{Q}) \text{ esetén.} \end{array} \tag{3.10}$$

Mérhetünk „egydimenziós” korrelációs függvényt is \mathbf{Q} helyett valamilyen kevesebb szabadsági fokot jelentő változót használva. Ahogy láttuk a 2.1. szakasz végén, a részecskepár LCMS koordinátarendszerét (a Longitudinally Co-Moving System-et) használva (és reakciósíkra átlagolva, azaz eszerint nem differenciáltan mérve) a \mathbf{K} a K_t transzverz vetületként jelenik meg, illetve tudhatjuk korábbi mérésekből, hogy itt $C_2(\mathbf{Q})$ \mathbf{Q} -ban nagyjából gömbszimmetrikus. Az alábbiakban ezért az LCMS-t és az ebben vett $|\mathbf{Q}|$ egydimenziós változót használjuk:

$$C_2(Q) = \frac{A(Q)}{B(Q)} \cdot \frac{\int_{Q \in \mathcal{Q}} dQ B(Q)}{\int_{Q \in \mathcal{Q}} dQ A(Q)} \quad \begin{array}{l} \text{minden } K_t\text{-szeletnél,} \\ \text{ahol tehát } Q \equiv |\mathbf{Q}_{\text{LCMS}}|, \end{array} \tag{3.11}$$

persze külön a $\pi^+\pi^+$ és a $\pi^-\pi^-$ párokra. Beírtuk, hogy az $A(Q)$ -t és $B(Q)$ -t normalni kell valamely (most Q -val jelölt) Q -tartományra vett integráljaikkal: a közvetlenül mért $A(Q)$ és $B(Q)$ normalása akármilyenek adódhat, attól függően is például, hogy hány eseményt használunk. A normalás után a $C_2(Q)$ remélhetőleg tényleg 1-hez tart nagy Q -ra, azonban a végső illesztésében így is biztosan szerepeltetni kell egy abszolút normalási paramétert.

Az $A(Q)$ hisztogramok legyártásához végigmegyünk minden eseményen, és azokon belül minden $\pi^+\pi^+$ illetve $\pi^-\pi^-$ részecskepárt beosztunk a(z LCMS-ükben kiszámított) K_t -jük szerint a megfelelő hisztogramba az adott Q értéküknél. A $B(Q)$ elkészítéséhez pedig az aktuális esemény mellett elkészítünk egy „kevert eseményt”, amiben csakis különböző igazi eseményekből származó pionokat válogatunk össze (véletlenszerűen), és ezeket párosítjuk egymással.

Igen fontos, hogy a kevert esemény létrehozásához csakis olyan események igazi pionjait használjuk, amelyek a globális jellemzőket tekintve egymáshoz nagyon hasonlóak, azaz lehetőleg majdnem azonos centralitásúak illetve z -irányú pozíciójúak legyenek: ilyenekre lehet feltételezni, hogy a rekonstrukciós hatékonyság megegyezik, ami pedig kell ahhoz, hogy a (fentebb \mathcal{E}_1 -gyel jelölt) rekonstrukciós hatékonyság valóban kiesik a korrelációs függvény, $\frac{A(Q)}{B(Q)}$ képzése során. Programozástechnikailag ez azt jelenti, hogy az eseményeket (z -vertex és centralitás szempontjából finom felosztású) csoportokba soroljuk, és minden csoportból megfelelő számú eseményt megtartunk a memóriában (hogy elkészíthessük belőlük a kevert eseményt); az aktuális eseményen továbbhaladva azt betöltjük a memóriába, ezzel párhuzamosan pedig a legrégebbi ilyen osztályú eseményt töröljük. Így végülis az egész adatsoron végighaladva megkapjuk az $A(Q)$ és a $B(Q)$ hisztogramokat, külön-külön minden vizsgált K_t -nél (és külön a $\pi^+\pi^+$ illetve a $\pi^-\pi^-$ párokra).

3.3. Korrelációs függvények: eredmények

3.3.1. A $C_2(Q)$ függvények mérése; hibaforrások

Analízisünkben (figyelembe véve a fentebbiekben kifejtett részecskeazonosítási lehetőségeinket) a $0,18 \text{ GeV}/c \leq K_t \leq 0,86 \text{ GeV}/c$ K_t -tartományra fókuszáltunk; ez a modell-alkotás szempontjából relevánsabb $m_t \equiv \sqrt{K_t^2 + m_\pi^2}$ változóban a $0,228 \text{ GeV} \leq m_t \leq 0,871 \text{ GeV}$ tartománynak felel meg. Részletes, 31 szakaszra („bin”re) való felosztással dolgoztunk, minden ilyenben külön mérve a $C_2(Q)$ korrelációs függvényt, végülis így képet kapva a $C_2(Q, K_t)$ összetett függésről.

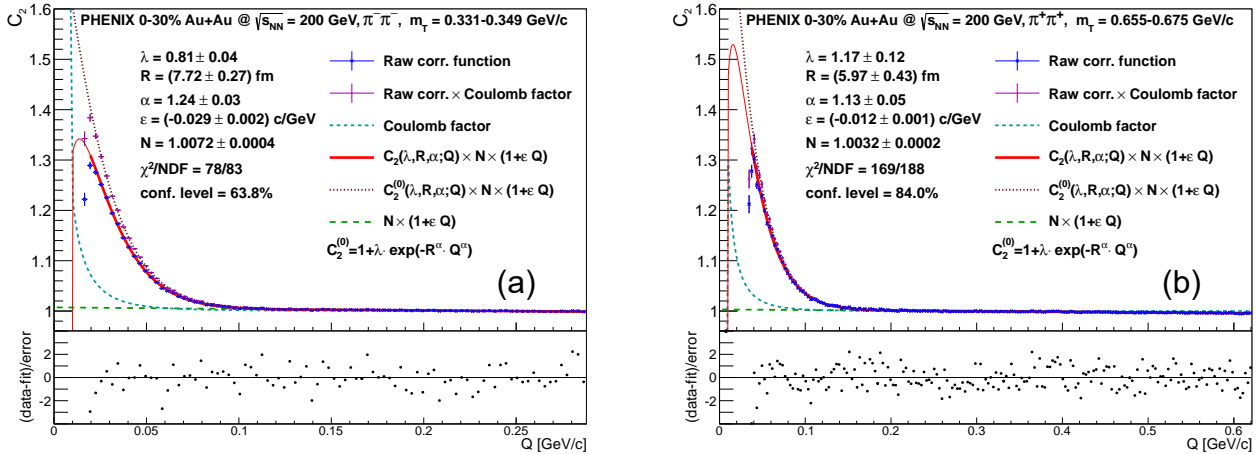
Ezután a korábbi 2.2.2. szakaszban a (2.51) egyenlet környékén leírt iteratív Coulomb-korrekciós módszerrel illesztettük ezeket gömbszimmetrikus Lévy-alakú forrásfüggvénnyel (ez utóbbi definícióját ld. a (2.54) egyenletben). Végülis tehát az illesztett függvény a következő:

$$C_2^{(\text{modell})}(Q) = K(Q) \times \left(1 + \lambda e^{-|QR|^\alpha}\right) \times N(1 + \epsilon Q), \quad (3.12)$$

ahol $K(Q)$ a Coulomb-korrekció. Az illesztési paraméterek pedig először is a fizikai jelentést hordozó λ korreláció-erősség, az R sugárparaméter illetve az α Lévy-stabilitási index, másodsorban pedig az itt bevezetett N normálási tényező és az ϵ meredekség. (Utóbbiakat a (3.11) egyenletben feltüntetett normálás bizonytalansága illetve a nagy Q -nál még mindig jelen lévő, és minden bizonnyal nem a vizsgált kvantumstatisztikus hatás miatti maradék korreláció teszi szükségessé.)

Az alábbi 3.15. ábra két példát mutat adott m_t -szeletnél mért ilyen korrelációs függvényekre és illesztésükre. Feltüntettük az illesztésekből kapott λ , R és α paramétereket statisztikus hibáikkal együtt. Az illesztési tartományt gondosan kellett megválasztani (külön-külön minden esetben, az ábrákon mutatottakban is): nagyon kis Q -értéknél látványosan elromlik az illeszkedés, ami arra vezethető vissza, hogy a párvágások hatása nem biztos, hogy kiszűr minden nem kívánt maradék detektor-hatást. Csak olyan illesztéseket fogadtunk el, ahol az algoritmus valódi χ^2 -minimumot talált, és a végső χ^2 -értékből és a szabadsági fokok számából (az angol rövidítés szerint: az NDF-ből) kiszámolt konfidenciaszint („hihetőség”) 0,1% fölött van. Ez a kritérium többé-kevésbé

általánosan elfogadott ilyen esetekre; kb. olyan erős feltétel, mint azt mondani, hogy egy paraméter nem térhet el a várható értékétől 3-4 standard eltérésnyinél (3-4 σ -nál) jobban.



3.15. ábra. Két példa „nyers” korrelációs függvény mérésére és a szövegben leírt módon való illesztésére, az így kapott λ , R és α (valamint N és ϵ) paraméter-értékek feltüntetésével. Láthatjuk az illesztés χ^2/NDF értékeit valamint az ebből számolt „CL” konfidenciaszint-értéket („confidence level”) is; a lényeg, hogy ez az elfogadhatónak mondható $CL > 0,1\%$ tartományban van. Az alsó sáv mutatja az adatpontoknak az illesztett függvényalaktól való, hibával normált eltérését: azt, hogy jó az illesztés, az mutatja, hogy ez a pontosorozat 1 eltérésű normális eloszlás 0 körül.

Természetesen fontos kérdés az eredmények bizonytalansága („hibája”). Ez egy részben statisztikus hiba, amelyet a χ^2 -érték minimalizálása során közvetlenül megad az illesztőalgorithmus:⁴⁶ 1σ -nyi hibát olyan paraméter-változás jelent, ami (a többi paraméter rögzítése esetén) a χ^2 -et éppen 1-gyel növeli. Az így kapott statisztikus hibáinkhoz annyi megjegyzés tartozik, hogy az illesztéseink során a λ , az R és az α értékek igen erősen korreláltak bizonyulnak; konkrétan: a (λ, R) párosításban erős (98% körüli) a korreláció, míg a (λ, α) és az (R, α) párosításokban erős ($\approx -97\%$) antikorrreláció figyelhető meg. A paraméterek önmagukban vett statisztikus hibái tehát annyiban eltúlozzák a bizonytalanság mértékét, hogy nem látszik rajtuk, hogy valójában képezhetnénk belőlük olyan kombináció(ka)t („módusokat”), amely(ek)nek a bizonytalansága(i) jóval kisebb(ek), mint önmagukban a λ -é, az R -é illetve az α -é. Ez jelenleg is érdekes kérdést jelent a kutatásainkban.⁴⁷

A másik kérdés a nehezebben kezelhető *szisztematikus bizonytalanság*; a statisztikus bizonytalanságon túlmenően ez hivatott megvilágítani, hogy „mennyire hihető” a mérésünk. Ez kissé szubjektívnek is tűnhet; eredendően a szisztematikus hibákat csak megbecsülni lehet, nincsen rájuk univerzális algoritmus (ahogy a statisztikus bizonytalanságra viszont van). A tárgyalt korrelációs mérések esetében azonban felderíthetők egy bevált módszertannal. Ennek lényege, hogy

⁴⁶Az illesztéseink során a MINUIT2 könyvtárat használtuk [101]; konkrétan a MINOS algoritmust.

⁴⁷Érdekesség, hogy viszonylag „véletlenül” sikerült olyan paraméterkombinációt találni, amely megfelelni látszik ennek a feltételnek: kevésbé korrelált az egyes paraméterekkel, ezzel párhuzamosan kisebb statisztikus hibával megkapható az illesztések során. Ez a [98] cikkünkben \hat{R} -pal jelölt $\hat{R} \equiv \frac{R}{\lambda(1+\alpha)}$ változó. Jelenleg nem ismerjük ennek a mennyiségnek (vagy bármi olyannak, aminek ez valamiféle közelítése lehetne) semmiféle fizikai interpretációját.

„tökéletes” detektor esetén a mért $C_2(Q)$ korrelációk és így az illesztett paraméterek statisztikus hibán kívül nem lennének érzékenyek a vágások változtatására, így a valódi esetben a használt vágások és módszerek variálásával kapott eredmények eltéréséből lehet megbecsülni módszereink „biztosságát”, azaz a szisztematikus bizonytalanságot. Alább sorra vesszük az ehhez használt „szisztematikus vizsgálatainkat”. (A kapott becült hibák értékeiről itt csak általános megjegyzéseket teszünk; a konkrét számértékeket ld. a hivatkozott [98] cikkben.)

1. Az adatpontok „fő értékét” adó mérést a TOFE, TOFW és PbSc detektorokból együtt kapott pionokon végeztük. Összehasonlítottuk a csak az egyik (TOF East, TOF West) vagy csak a másik fajta (PbSc) detektor által azonosított pionokból kapott eredményeket, illetve azt is, hogy mekkora az eltérés a keleti és a nyugati kar $C_2(Q)$ között. Ez utóbbi jelentős eltérést okozott; a becült szisztematikus bizonytalanságok egyik fő forrásának adódott.⁴⁸
2. Megvizsgáltuk, hogy mennyire érzékenyek az eredmények a részecskeazonosítási vágás erősségére (azaz hogy az m^2 spektrumon $1,5\sigma$, a standard 2σ vagy pedig a lazább $2,5\sigma$ módon vágunk a piontömeg-négyzet körül). Ahogy várható, ebből a korreláció erősségét jelentő λ paraméter bizonytalansága származik leginkább, ez is inkább a nagyobb m_t értékeknél, ahol (főleg a PbSc-ben) a részecskeazonosítás tisztasága már kicsit kérdésesebb.
3. Az illeszkedési (matching) vágások standard értékének (2σ a TOFE, TOFW, PbSc detektorokban, nincs követelmény a PC3-ban) megváltoztatását is vizsgáltuk: a PC3-ra megkövetelve $2,5\sigma$ -t illetve $1,5\sigma$ -t, valamint a TOFE, TOFW, PbSc detektorokban $2,5\sigma$ -t illetve $1,5\sigma$ -t is kipróbáltunk. Kis impulzusnál az m^2 -spektrumokból láthatóan még az illeszkedési vágások után is jelentős háttér származik a véletlen pálya-beütés-asszociációkból, 0,2 GeV környékén a TOFE és TOFW esetében 2-3%, a PbSc esetében 8-10%, de kicsit is nagyobb impulzusnál már jóval kisebb ez. Ezért ezen szisztematikus vizsgálatból főleg kis m_t -nél vártunk jelentős hatást. A tapasztalat azonban azt mutatta, hogy a hatásnak nincs ilyen durva m_t -függése.⁴⁹ Ugyanakkor (főleg a PC3 vágás változtatásának) nagy hatása volt, leginkább a λ -ra.
4. Megvizsgáltuk a párvágások (ld. a 3.2.6. szakaszt) változtatásait is: a standard mellett még 2 másik, egy „lazább” és egy „szigorúbb” geometriájú vágást kipróbáltunk a driftkamrában és a részecskeazonosító detektorokban is (ld. a fenti 3.14. ábrát is). Az ebből becült szisztematikus bizonytalanság nem elhanyagolható, de nem a legjelentősebb.
5. A nyers $C_2(Q)$ korrelációs függvények Lévy-alakkal való illesztését egy adott Q_{\min} és Q_{\max} értékek között kell végezni; ezen értékek változtatásának hatását is szisztematikus bizonytalanságként könyveltük el (10 darab lehetőséget vizsgáltunk). Ugyancsak megvizsgáltunk kétféle lehetőséget a Coulomb-korrekcióna. Egyikben egyszerűen az LCMS koordinátarendszerben mért Q változót írtuk a Coulomb-korrekcióna. A másik esetben (helyesnek gondolt módon, ld. az előző fejezet 2.2.1. szakaszában a (2.40) egyenlet utáni megjegyzéseket) a Coulomb-korrekcióna adott $Q \equiv Q_{\text{LCMS-nél}}$ a PCMS-beli $Q_{\text{PCMS}} \equiv Q_{\text{inv}}$ változó ehhez tartozó átlagos értékénél vettük.

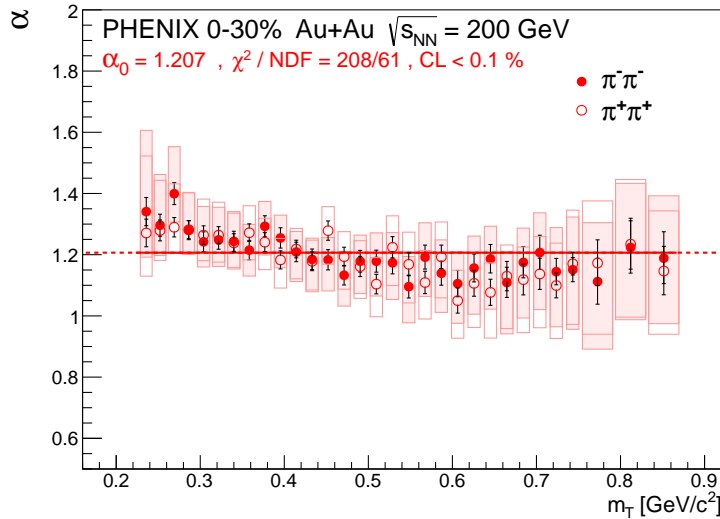
⁴⁸A mögöttes ok minden bizonnyal a nyomkövetés és impulzuszórási helytől függő változókéony érzékenysége: a driftkamra „öregszik”; a benne található kb. 50000 szál némelyike elszakad(t) az évek során.

⁴⁹A kis impulzusnál valószínűbb véletlen asszociációs esetben is a részecskepálya leginkább valódi pion, nem más.

3.3.2. A fizikai paraméterekre vonatkozó eredmények

Az alábbi ábrák az analízisünk fizikai eredményeit, azaz az illesztett paramétereket mutatják; a satírozott hibasávok a leírt vizsgálatok alapján becsült szisztematikus bizonytalanságokat jelentik. (A számértékek megtalálhatók a [98] cikkben; itt nem terhelem a szöveget a táblázatos közlésükkel.)

Elsőként tekintsük az α Lévy-index értékeit, melyet az alábbi 3.16. ábra mutat.

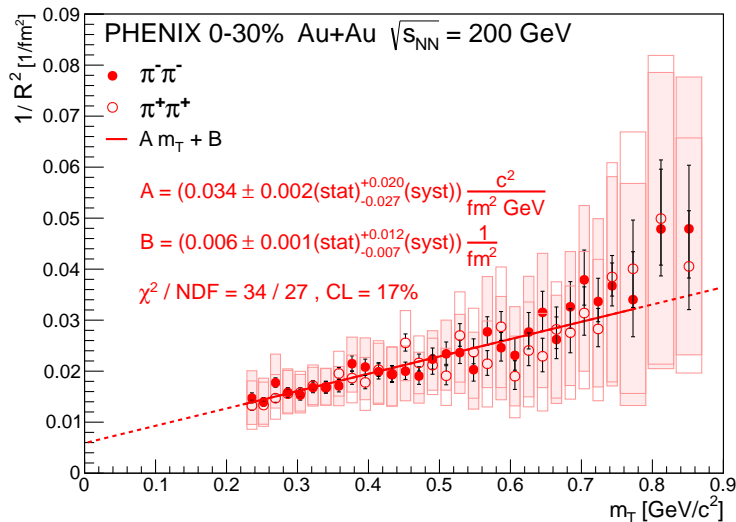


3.16. ábra. A mért α Lévy-index az m_t függvényében, statisztikus és szisztematikus hibákkal együtt. Az ábrán vízszintes vonallal jelölt átlag $\alpha = 1,207$ értékűnek adódik.

A mért α -értékek nulladik közelítésben kb. m_t -függetlenek; ugyanakkor az $\alpha(m_t) = \alpha_0 =$ konstans illesztés nem elfogadható statisztikailag. Megállapíthatjuk továbbá a következőket:

- Az α -értékek szignifikánsan (azaz statisztikus és szisztematikus hibán kívül) eltérnek az $\alpha=2$ Gauss-esettől; utóbbit feltételezve elfogadhatatlan konfidenciaszintre vezet az illesztés. Fontos megemlíteni, hogy az ismert hidrodinamikai modellszámítások egységesen Gauss-alakra vezetnek (ld. pl. [35, 102]); a mutatott eredmény komoly érdeklődést indított el az irányban, hogy vajon hogyan lehet hidrodinamikai képben Lévy-eloszlás alakú forrásfüggvényt leírni.
- Nem Gauss-alakú korrelációs függvények leírására korábbi analízisekben (például a CMS kísérletben p+p, p+Pb és p+Pb ütközésekben [81, 103]) gyakran az $\alpha=1$ -hez tartozó, azaz (a korábbi (2.55) egyenlet alapján láthatóan) Cauchy-eloszlás alakú forrásfüggvényt feltételeztek; eredményünk alapján a RHIC-nél Au+Au ütközésekben ez az eset is kizárható.
- Mint a 2.2.3. szakaszban említettük, a Lévy-eloszlások megjelenésének egyik forratókönyve a QCD kritikus pontjának közelsége. Ekkor az α kitevő az η jelű, a kritikus pontbeli térbeli korreláció hatványfüggvény-lecsengését megadó η kritikus indexszel egyezne meg. A QCD univerzalitási osztálya a háromdimenziós Ising-modellével egyezik meg [104], amiben pedig $\eta \approx 0,036$, illetve véletlen külső tér esetén $\eta \approx 0,5$ [105–107]. Eredményünk megnyugtató tehát abból a szempontból, hogy ha helyes is ez a forratókönyv, akkor sem látjuk a kritikus pont jelét $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV energiájú Au+Au ütközésekben, amint az egyéb eredmények alapján nem is várjuk azt.

Tekintsük ezután az R sugárparaméterre (más néven: a Lévy-alak skálaparaméterére) vonatkozó eredményeket, melyeket az alábbi 3.17. ábrán láthatunk. Itt nem magát az R -et, hanem az $1/R^2$ mennyiséget ábrázoltuk az m_t függvényében: ennek oka az, hogy a hidrodinamikai modellszámítások egybehangzó eredményei alapján az $1/R^2$ mennyiség m_t -ben közelítőleg lineáris növekedését várjuk [35, 102, 108], amit a korábbi (Gauss-alakot feltételező) mérések is alátámasztanak [37, 109]. Jól látszik, hogy a Lévy-alak feltételezésével kapott eredményeink konzisztensek ezzel a várakozással, ami más szempontból meglepő, tudva, hogy a hidrodinamikai kép Gauss-alakot sugall.



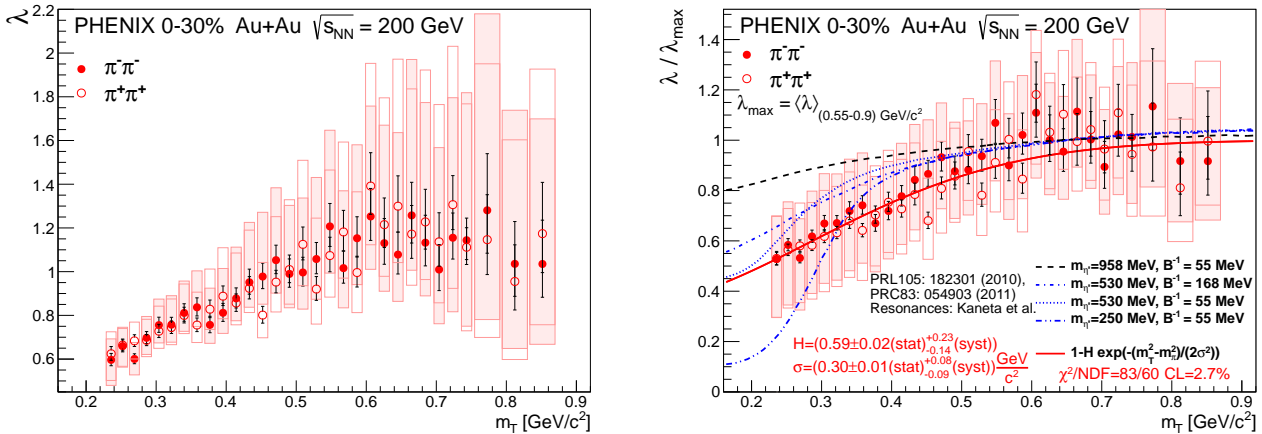
3.17. ábra. A Lévy-forrás R sugárparaméterére kapott eredménye: az $1/R^2$ mennyiség az m_t függvényében. Erre Gauss-forrás esetén közelítőleg m_t -ben lineáris függést várunk hidrodinamikai modellszámítások alapján. Az ábrán feltüntettük egy egyszerű ilyen illesztés paramétereit.

Végül a korrelációs függvény erősségét mérő λ paraméter m_t -függését az alábbi 3.18. ábra jobb oldalán látható. Ez semmiképpen nem konstans: nagy m_t -nél szaturálódik, kis m_t -nél csökken. A nagy bizonytalanságok részben abból származnak, hogy amint fentebb mondtuk, az α és a λ paraméterek erősen antikorreáláltak. Fontos továbbá, hogy több szisztematikus hibaforrás erősen m_t -korrelált: például a részecskeazonosítási vágások változtatása majdnem teljesen egy irányú elmozdulást eredményezett minden m_t -nél. Ezek miatt érdemes volt egy származtatott mennyiséget bevezetni: a $\lambda(m_t)$ függésre a nagyobb m_t -jú ($m_t > 0,55$ GeV) tartományon „ λ_{\max} ” konstanst illesztettünk, és az ezzel kiszámolt λ/λ_{\max} -ot vizsgáltuk. Ez a mennyiség látható a 3.18. ábra jobb oldalán: ebben több hibaforrás hatása kiesik vagy lecsökken, így a kis m_t -s csökkenés még szignifikánsabb.⁵⁰ Az ábrán megadtunk egy egyszerű, Gauss-alakú kis m_t -s „lyukat” feltételező,

$$\frac{\lambda}{\lambda_{\max}} = 1 - H \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} [m_t^2 - m_\pi^2]\right) \quad (3.13)$$

függvényt használó illesztést is, melyben még semmiféle modellfeltevés nincsen; bármiféle következtetések további vizsgálatához alkalmas lehet majd.

⁵⁰A szisztematikus hibát itt értelemsszerűen úgy kell(ett) becsülni, hogy minden mérés-beállításnál (vágások, illesztési tartomány stb.) az úgy jelentkező λ_{\max} -ot használva tekintettük a λ/λ_{\max} beállításoktól függő változását.



3.18. ábra. Bal oldalon: a mért korrelációs függvények erőssége (a λ paraméter) az m_t függvényében (Lévy-eloszlást feltételezve). Jobb oldalon: a szaturációs értékkel visszaosztott λ -érték (a szövegben részletezett módon Gauss-függvénnyel paraméterezve illetve egy elméleti elképzeléssel összevetve); ez utóbbi fajta adatsorban kiesik néhány szisztematikus hibaforrás.

Megjegyzendő, hogy régebbi HBT-mérésekben a λ paraméternek, noha ismert volt ennek a koherens részecskekeltéssel illetve a mag-glória-moddal kapcsolatos esetleges fizikai jelentése (ld. a korábbi 2.2.2. szakaszt), nem igazán tulajdonítottak „komoly” szerepet.⁵¹ A 2.2.2. szakaszban tárgyalt mag-glória-modell alapján azonban lehetséges lehet fizikai következtetést levonni: $\sqrt{\lambda}$ jelentése eszerint ugyanis ugye az, hogy (adott m_t -nél) megadja a közvetlenül az ütközési zónában (a „mag”-ban) keletkezett pionok összeshez viszonyított arányát.

A nem az ütközési zónában, azaz a „glóriában” keletkező töltött pionok hosszú (több mint néhányszor 10 fm/c) élettartamú rezonanciák vagy részecskék bomlásából származnak. Ilyen bomló részecskék például a K_0^S , az ω , az η vagy az η' . Az $\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ illetve az $\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma$ bomlás valószínűsége 22,7% illetve 4,6%, az $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma$ bomlásé 29,4%, az $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\eta$ bomlásé pedig 44,6% (és ez utóbbi az η -kon keresztül is töltött pionokat termel); az η és η' bomlástermék-pionjai hangsúlyosan szerepelnek tehát a „glória”-járulékbán.⁵²

Az η' mezon, és kisebb részben az η mezon esete más szempontból is érdekes: ők az u , d , s kvark-ízeken ható $SU(3)$ szimmetria η_8 oktett illetve η_1 szinglett ábrázolásának szuperpozíciói; az η_1 járuléka a megfigyelhető η' állapotban nagyobb. Az η_1 tömege az $U_A(1)$ íz-szimmetria spontán sérülése miatt a naiv kvarkmodelltől eltérő nagy értéket kap. Régóta ismert elképzelés, hogy forró hadronikus közegben az $U_A(1)$ szimmetria helyreállhat, így az η' mezon tömege csökkenhet [110] (és ez kisebb mértékben, de az η tömegére is hatással lehet [111]). Ha pedig egy nehézion-ütközésben létrejövő η' mezon ilyen módon csökkent tömeggel keletkezik, akkor a közeg

⁵¹Például nem igazán okozott fennakadást, hogy a q_{inv} invariáns impulzust használó egydimenziós és a q_{out} , q_{side} , q_{long} változókat használó háromdimenziós mérések szignifikánsan, trend-szinten eltérő λ -kra vezettek [37]. Mi ezért (is) kezdtünk el gondolkodni a „helyes” egydimenziós gömbszimmetrikus változó kérdésén (ld. a 2.1. szakaszt).

⁵²A K_0^S mezon 69,2%-ban $\pi^+\pi^-$ párra bomlik; $c\tau = 2,68$ cm-es élettartama miatt várhatóan több cm-re az ütközési ponttól, azonban a PHENIX-nél (a nyomkövetés tárgyalt sajátosságai miatt) ezen pionokat nem lehet hatékonyan kiszűrni, így ők is a „glóriához” járulnak. Az ω mezon fő kontribúciója pedig az $\omega \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ bomlás (89,2%).

elbomlása után úgy nyeri vissza vákuumbeli tömegét, hogy közben mozgási energiájából veszít, ami igen megnöveli a kis impulzusú glória-járulék pionok számát [112], vagyis ez egy magyarázat lehet a kis impulzusnál látott $\lambda(m_t)$ -csökkenésre. Ha elfogadjuk (a mag-glória-modell alapján), hogy a korrelációs függvények $\sqrt{\lambda(m_t)}$ paramétere tényleg teljesen pontosan megadja az adott m_t -jű pionokban a bomlásból származó pionok arányát, akkor a mondott elképzelést úgy tesztelhetjük, hogy a megfigyelt $\lambda(m_t)$ -t összevetjük a különféle keletkezett rezonanciák számarányait leíró modellekkell (úgynevezett „rezonancia-koktélokkal”). Korábbi analízisek (melyek $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV-es arany-arany ütközéseket vizsgáltak) is publikáltak már $\lambda(m_t)$ adatsorokat; ezek ilyen irányú vizsgálata arra vezetett [113, 114], hogy a kis m_t -s „lyukat” kézenfekvően úgy lehet leírni, ha valóban feltesszük, hogy a kis impulzusú η' -részecskék megnövekedett számaránnyal keletkeznek, ami tehát közvetett bizonyíték a közegbeli tömegcsökkenésükre.

A mi általunk mért adatokon, aholis mindenképpen előrelépést jelentett az, hogy konzisztensebben kezeltük a Coulomb-hatást és az illesztést (Gauss-alakú forrás helyett általánosabb Lévy-alakot feltéve), szintén teszteltük ezt az elképzelést. Az iménti 3.18. ábra jobb oldalán a mért λ/λ_{\max} adatokat összehasonlítottuk egy ismert alkalmazott rezonancia-koktélból (az úgynevezett Kaneta-Xu-modellből [115]) számolt menettel, különféle közegbeli $m_{\eta'}^*$ tömegértéket feltéve az η' -mezonra.⁵³ Látszik, hogy a vizsgált modell keretein belül a tömegmódosulás nélküli eset (amikor $m_{\eta'}^*$ a vákuumbeli $m_{\eta'} = 958$ MeV értékkel egyezik meg) nem igazán illeszkedik az adatokra, csökkent tömeg esetén viszont elfogadható leírást kaphatunk. Eredményeink tehát megerősítik az η' közegbeli tömegmódosulásra az említett korábbi [113, 114] analízisekben is látott közvetett bizonyítékot az η' mezon közegbeli tömegcsökkenésére.

3.4. Összefoglalás, kitekintés

Ebben a fejezetben bemutattam az első olyan nehézion-fizikai korrelációsfüggvény-mérést, ami-ben Gauss-alak helyett általánosabb Lévy-eloszlást tettünk fel a forrásfüggvény alakjára. Ezt a PHENIX kísérletnél végeztünk az egydimenziós Q_{LCMS} változó függvényében. Az eredmények nagy érdeklődésre tartanak számot. Hidrodinamikai jellegű viselkedést látunk az R sugárparaméter m_t -függésében, noha a Lévy-stabilitási α index mért értéke kizárja az $\alpha=2$ Gauss-estet, mely pedig a közkeletű hidrodinamikai alapú várakozás lenne. A korrelációs függvény erősségét jellemző λ paraméter viselkedése pedig e pontosabb tárgyalás esetén is érdekes struktúrát mutat, mely a mag-glória-modell keretein belül bizonyos részecskék (leginkább az η' mezon) közegbeli tömegének módosulására utal.

Mindenképpen további vizsgálatok szükségesek azonban itt. Például tisztázandó, hogy a λ paraméter látott kis m_t -s csökkenése nem származik-e koherens pionkeltésből. Ehhez (a korábbi 2.2.2. szakaszban is említett módon) a többrészecskés korrelációs függvények szimultán mérése

⁵³A modell ilyen módosításának finomhangolásához szükség volt még egy a 3.18. ábrán B^{-1} módon jelölt paraméter bevezetésére. Azok a csökkent tömegű η' mezonok, amelyek túl kicsi eredeti energiával keletkeznek ahhoz, hogy az fedezze a hiányzó $m_{\eta'} - m_{\eta'}^*$ tömeget, „csapdázódnának” nulla impulzusnál. Fel kell mégis tenni, hogy ők is valamilyen más hőmérséklet-paraméterű termikus eloszlást kapnak végül; ezen hőmérséklet-paraméter a B^{-1} .

segíthetne hozzá. Érdekes kérdés a pionok mellett kaonok korrelációjának vizsgálata, az egydimenziós mérés általánosítása háromdimenziós Bertsch-Pratt-koordinátákat használó (vagy akár a reakciósíktól mért azimutuszög szerint differenciált) mérésre, a Lévy-paraméterek centralitásfüggésének meghatározása. Ezen analízisekben komoly előrehaladást értünk el a PHENIX kísérletben is.

Jelenleg már a STAR kísérlet tagjaként ezen kísérletnél is dolgozom ilyen témákon, immáron diákok témavezetőjeként is. Ez a kísérlet bizonyos szempontból még alkalmasabb is az ilyen típusú HBT-korrelációs mérések kivitelezésére: jóval nagyobb (kis összeillesztési „lyukak” híján az $|y|=1$ rapiditásig és 2π azimutuszögben az egész térszögre kiterjedő) lefedettsége miatt több adat gyűlik, pontosabb mérés végezhető. Az itteni (jelenleg előzetes, „preliminary” státuszú) eredmények például annyiban már biztosan módosítják (azaz: pontosítják) a PHENIX-nél kapottakat, hogy Lévy-eloszlások illesztésével itt már kizárható a hidrodinamikai jellegű $\frac{1}{R^2} = A + Bm_t$ skálázás; m_t -nek egy törtkitevőjű hatványára van szükség. Ez a megfigyelés jelenleg szintén elméleti megalapozásra, magyarázatra vár.

A STAR kísérletben lehetőség nyílik a RHIC Beam Energy Scan program során felvett kisebb energiájú ütközések adatait is vizsgálni, ezeken is elvégezni a Lévy-alakú forrást feltételező femtoszkópiai mérést, mely újszerű módon ad löketet a kritikus pont keresésének illetve a fázisátmenet további részleteinek feltárásához.

A fejezetben bemutatott munka volt az első olyan adatanalízis, melyet kutatócsoportunk saját témaként a PHENIX kollaboráció keretein belül teljesen véghezvitt. Ez mintegy kinyitott egy ajtót számomra, számunkra: másfajta, nemcsak korrelációs függvénnyel foglalkozó mérések (analízisek) lehetősége is elérhető lett. Egyik a közeljövőben tervezett kutatási irányom például az, hogy konkrét, közvetlen mérést végezzek az η' mezonok spektrumára (ami fájdalmasan hiányzik mind a PHENIX, mind a STAR kísérlet eddigi eredményei közül), ilyen módon esetleg közvetlenebb bizonyítékot (vagy cáfolatot) kapva a közegbeli tömegcsökkenésre, egyúttal a mag-glória-modell érvényességi körének tisztázására.

4. Hidrodinamikai modellezés

Ebben a fejezetben nehézion-ütközések hidrodinamikai leírásának témakörében végzett kutatásokról számolok be. Doktori dolgozatomat csakis ebből a témakörből írtam; a már akkor bemutatott eredményeket most csak összefoglalom röviden, a hangsúlyt az azóta végzett kutatásokra teszem.

A főbb jelölések a következők. A Minkowski-féle metrikus tenzor jele $g^{\mu\nu}$, +--- szignatúrával. $x \equiv (t, \mathbf{r})$ a téridő-koordináta. A hidrodinamikailag leírt közeg σ entrópiasűrűsége, T hőmérséklete, \mathbf{v} sebességmezője (illetve $u^\mu \equiv \gamma(1, \mathbf{v})$ négyessebessége, ahol $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ a Lorentz-faktor), p nyomása, ε energiasűrűsége, esetleg μ kémiai potenciálja és megfelelő n részecskeszámsűrűsége ezen x függvénye. A sűrűségeket lokális nyugalmi rendszerben mért egységnyi térfogatra értjük.

4.1. Hidrodinamika a nehézion-fizikában; alapegyenletek

4.1.1. Bevezetés

A hidrodinamikai egyenletek nem tartalmazznak fizikai (energia-, idő-, méret)skálát, csak a lokális termikus eloszlásra felírt energia- és impulzusmegmaradást. Ezért lehet hidrodinamikát alkalmazni egymástól „távoli” területeken; az egész Univerzum tágulásától kezdve a köznapi folyamatokon át a nehézion-fizikai folyamatokig. Most ez utóbbi lehetőségre fókuszálunk. Ahogy az 1. fejezetben láttuk, a keletkezett kis impulzusú részecskék spektruma exponenciális, termikus jellegű. Ez valójában régebbi gondolat; már az 1950-es években megfigyelték nagyenergiás hadron-ütközésekben (melyeket akkoriban a kozmikus sugárzás „szolgáltatót”), hogy az átlagos transzverz impulzus 0,5 GeV/c körüli, az ütközési energiától szinte függetlenül [116,117]. Fermi 1950-ben statisztikus modellt javasolt az ilyen ütközésekben megfigyelt multiplicitás-eloszlásra [118]; mondván, hogy az erős kölcsönhatás gyorsan szétszítja az energiát a sok megjelenő szabadsági fok között. Landau állapította meg, hogy a részecskék spektrumának leírásához már hidrodinamikai leírás is szükséges [119]. Ezen megindulva írta fel a relativisztikus hidrodinamika egyenleteit, és munkatársaival közösen meg is adtak egy (azóta Landau-Halatsnyikov-megoldásnak hívott) egzakt megoldást, amit alkalmazni lehetett a rapiditáseloszlás leírására [120,121].

A Landau által bevezetett alapvető képet nagyjából ma is érvényesnek gondoljuk. A nagyenergiás nehézion-ütközésben keletkezett anyag hamar, nagyjából 1 fm/c idő alatt termalizálódik, majd a hidrodinamikailag leírható módon tágul. (Ma, a kvark-gluon plazma felfedezése után már tudjuk, hogy ennek során átalakul kvarkanyagból hadronanyaggá.) Ezután történik a hadronközeg *kémiai kifagyása*, amikor megszűnnek a részecsketípus-változtató rugalmatlan szórások, majd a *kinetikai kifagyás*, amikor a rugalmas szórások is abbamaradnak, így az akkori termikus eloszlás „állítja be” a végállapotot megfigyelhető hadronspektrumot. A hadronokra vonatkozó mérhető mennyiségek tehát leginkább csakis a végállapotra érzékenyek. Fotonok és leptonok (e^+ és e^-) viszont keletkeznek a kifagyás előtt is: amint korábban láttuk, ezek „áthatoló próbáknak” számítanak, mert kijutnak a közegből; az ő eloszlásuk tehát a teljes időfejlődésre is érzékeny.

Ami a hadronokat illeti, Landau a T_f kifagyási hőmérsékletet 140 MeV körülinek gondolta (a piontömeg alapján; mondván, hogy $T_f \simeq m_\pi$ esetén még éppen történnek részecsketípus-változtató szórások). Ma azt mondhatjuk, hogy hozzávetőlegesen helyes ez az érték, de nem világos, hogy mennyire különbözik a kémiai és a kinetikai kifagyás; modellalkotáshoz jók ezek a fogalmak, de nyilván nem éles váltásokról van szó, a kifagyási hőmérsékletek is „elkent” értékeket jelentenek, gondolatikag is összefolyhatnak. Mindenesetre hadronok keletkezésének hidrodinamikai leírására az a „recept”, hogy veszünk egy hidrodinamikai megoldást (azaz az egyenletek megoldásait adó $u^\mu(x)$, $T(x)$ stb. mezőket), és egy kifagyási feltételt, ami egy hiperfelületet definiál, majd az ez utóbbin érvényes, a hidrodinamikai megoldásból származtatott lokálisan termalizált eloszlásból (ld. rögtön) kiszámítjuk egy adott hadrontípus $S(x, \mathbf{p})$ forrásfüggvényét. Ez utóbbiból pedig kiadódnak a megfigyelhető mennyiségek. Például az egyrészecske-eloszlás és a Bose-Einstein-korrelációs függvény

$$N_1(\mathbf{p}) \equiv E \frac{dn}{d^3\mathbf{p}} = \int d^4x S(x, \mathbf{p}) \quad \text{és} \quad C_2^{(0)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \approx 1 + \lambda \frac{\tilde{S}(\mathbf{Q}, \mathbf{K})}{\tilde{S}(\mathbf{0}, \mathbf{K})} \quad (4.1)$$

módon írható fel (ld. a korábbi (2.2) és (2.10), (2.11) egyenleteket; utóbbit a λ szorzóval módosítottuk a 2.2.2. szakaszban felidézett mag-glória-modell figyelembevételével).

A lokálisan termalizált forrásfüggvény és a hozzá tartozó integrálási mérték az alábbi „kombinált” alakban írható fel (a jelölések értelmét ld. alább):

$$S(x, \mathbf{p}) d^4x = \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} \frac{p^\mu d^3\Sigma_\mu(x)}{\mathcal{B}^{-1}(x, p) + s_q} H(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau}. \quad (4.2)$$

Itt $g = 2s + 1$ a spin-degenerációs faktor (s tehát a részecske spinje); s_q értéke rendre 0, 1 illetve -1 Boltzmann-, Bose-Einstein- illetve Fermi-Dirac-eloszlás esetén, $\mathcal{B}^{-1}(x, p)$ a sebességmező által definiált nyugalmi rendszerbeli relativisztikus inverz Maxwell-Boltzmann-(Maxwell-Jüttner-)eloszlás:

$$\mathcal{B}^{-1}(x, p) = \exp\left(\frac{p^\mu u_\mu(x)}{T(x)} - \frac{\mu(x)}{T(x)}\right); \quad (4.3)$$

$d^3\Sigma_\mu(x)$ a kifagyási hiperfelület háromdimenziós vektori mértéke (mely négyesvektorként pszeudoortogonális erre a hiperfelületre); $\tilde{\tau}$ pedig olyan „lokális idő-jellegű” koordináta, melynek egyik szintfelülete a kifagyási hiperfelület (így értékét ott $\tilde{\tau}_f$ -nek hívhatjuk).⁵⁴ Például ha a kifagyási hiperfelület a laborrendszerben egyidejű, azaz rajta $t = \text{const}$, akkor egyszerűen $\tilde{\tau} = t$, és tér-idő-szeletelt felírásban $d^3\Sigma^\mu(x) = (1, \mathbf{0}) d^3\mathbf{r}$. Szokták például úgy is választani a kifagyási hiperfelületet, hogy az az úgynevezett *sajátidő-koordináta*, τ szintfelülete legyen; ekkor tehát:

$$\text{ha } \tilde{\tau} = \tau \equiv \sqrt{x^\mu x_\mu} = \sqrt{t^2 - r^2} \quad \Rightarrow \quad p^\mu d^3\Sigma_\mu(x) d\tilde{\tau} = p^\mu \frac{x_\mu}{\tau} d^3\mathbf{r} dt. \quad (4.4)$$

⁵⁴Az, hogy megadtuk egy szintfelületét, még nem rögzíti a $\tilde{\tau}$ koordináta menetét (a szintfelület környékén sem); a további előírás az, hogy úgy kell őt választani, hogy az integrálási mértékekre $d\tilde{\tau} d^3\Sigma(x) = d^4x = dt d^3\mathbf{r}$ teljesüljön, aholis $d^3\Sigma(x) = \sqrt{d^3\Sigma_\mu(x) d^3\Sigma^\mu(x)}$ a vektori mérték pszeudohosszaként kapott skaláris hiperfelület-mérték. Ha a kifagyási x_s hiperfelület-koordinátát az \mathbf{r} hármavektorral paraméterezve adjuk meg, azaz tér-idő-szeletelt felírásban $x_s(\mathbf{r}) = (f(\mathbf{r}), \mathbf{r})$, akkor $d^3\Sigma_\mu(x) = -\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_x x^\nu \partial_y x^\rho \partial_z x^\sigma d^3\mathbf{r}$, amiből $d^3\Sigma^\mu(\mathbf{r}) = (1, \nabla f) d^3\mathbf{r}$; ez pont akkor időszerű (azaz a hiperfelület térszerű), ha mindenhol $|\nabla f| < 1$ (persze $c=1$ -et véve). A $\tilde{\tau}$ választására itt a szakaszban mutatott két egyszerű példa ezekkel a megfontolásokkal összhangban van.

A $H(\tilde{\tau})$ függvény a kifagyásnak a $\tilde{\tau}$ „idő” szerinti eloszlása. Ha a kifagyást lokálisan pillanatszerűnek tekintjük, akkor a forrásfüggvény tartója a kifagyási hiperfelület, vagyis ekkor $H(\tilde{\tau}) = \delta(\tilde{\tau} - \tilde{\tau}_f)$. Megengedhetünk azonban $\tilde{\tau}$ szerint „elkent” kifagyást is. Végül az, hogy a (4.2) számlálójába $p^\mu d^3\Sigma_\mu(x)$ -et kell írni, az ezt tisztázó [122] cikk szerzőinek nevei alapján *Cooper-Frye-előírás* névre hallgat. Ennek értelme többek között az, hogy abban a lokális rendszerben, ahol a kifagyás egyidejű (vagyis $d^3\Sigma_\mu$ lokális időtengely-irányú), a részecskeenergia p^μ -nek a $d^3\Sigma_\mu$ irányú vetülete, és ezt véve fogjuk valóban relativisztikus invariáns módon az E szorzót kapni $N_1(\mathbf{p}) = E \frac{dn}{d^3\mathbf{p}}$ kifejezésében.

Adott hidrodinamikai megoldás és kifagyási feltétel esetén tehát kiszámíthatjuk a hadronokra vonatkozó mérhető mennyiségeket, amiket aztán összehasonlíthatunk a mérésekkel. Ez alátámaszthatja a hidrodinamikai leírást; elsősorban például így lehetett leszűrni a kvark-gluon plazma folyadék-jellegét. Részletesebb vizsgálatokkal az anyag érdeklődésre számot tartó további tulajdonságai tárulnak fel (nyomás, állapotegyenlet, viszkozitás stb). Ehhez persze nemcsak a végállapot ismerete lehet szükséges, hanem az időfejlődése is.⁵⁵ Ami a hidrodinamikai egyenletek megoldását illeti, kereshetünk numerikus illetve analitikus képletekkel felírható megoldásokat. Előbbiek gépiesebben alkalmazhatók, de utóbbiak szerepe sem tűnik el: önmagukban matematikai szempontból is érdekesek, és egyszerű képletekkel világíthatják meg a dinamika, a különféle hatások szerepét.

4.1.2. A hidrodinamikai egyenletek

Röviden megtárgyaljuk itt a hidrodinamika alapegyenleteit. A relativisztikus eset általánosabb; ezzel foglalkozunk most először. Tökéletes folyadékok esetén Landau nyomán a $T^{\mu\nu}$ energia-impulzus-tenzorból indulunk ki. Akkor tekintjük tökéletesnek (disszipatív folyamatok nélkülinek) a folyadékot, ha mindenhol található olyan vonatkoztatási rendszer, amiben $T^{\mu\nu}$ diagonális, $diag(\varepsilon, p, p, p)$ alakú, és ekkor a laborrendszerből ebbe való áttéréshez tartozó $u^\mu(x)$ -et tekintjük a folyadékelem négyessebességének, a felírt $p(x)$ és $\varepsilon(x)$ mezőket pedig nyomásnak és energiasűrűségnek. A $T^{\mu\nu}$ tenzor alakja ekkor akármilyen rendszerből nézve olyan kovariáns kifejezés, ami a lokálisan u^μ -höz rögzített rendszerben, ahonnan nézve $u^\mu = (1, \mathbf{0})$, az iménti diagonális alakot adja. Ez a következő:

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}. \quad (4.5)$$

A hidrodinamikai egyenletek ezután a lokális energia- és impulzusmegmaradásból származtathatók. Rögtön szétírjuk az u^μ irányú és a rá pszeudoortogonális vetületeket (1+3 független egyenlet):

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_\mu \partial_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad \text{és} \quad (g^{\mu\rho} - u^\mu u^\rho) \partial_\nu T_\rho{}^\nu = 0. \quad (4.6)$$

Továbbá ha van megmaradó n részecskeszámsűrűség, akkor annak N^μ áramsűrűségére

$$\partial_\mu N^\mu = 0, \quad \text{ahol} \quad N^\mu \equiv n u^\mu. \quad (4.7)$$

⁵⁵Az időfejlődés, mint mondtuk, nem rekonstruálható csakis a hadronok megfigyelhető mennyiségeiből egyértelműen. Vagy valamilyen modellfeltevésével kell élni a már termalizált kezdőállapotra, vagy a mondott áthatoló próbák (fotonok, leptonok) mérésével és modellezésével juthatunk információhoz.

Behelyettesítve $T^{\mu\nu}$ iménti (4.5) alakját a (4.6) egyenletekbe majd elvégezve a deriválásokat és a projekciókat (emlékezve, hogy $u^\mu u_\mu = 1$, és ebből következőleg $u^\nu \partial_\mu u_\nu = 0$), arra jutunk, hogy

$$(\varepsilon + p)u^\nu \partial_\nu u^\mu = (g^{\mu\rho} - u^\mu u^\rho) \partial_\rho p, \quad (4.8)$$

$$(\varepsilon + p) \partial_\mu u^\mu + u^\mu \partial_\mu \varepsilon = 0, \quad (4.9)$$

$$n \partial_\mu u^\mu + u^\mu \partial_\mu n = 0. \quad (4.10)$$

Az első az energiamegmaradási egyenlet, a második az Euler-egyenlet, a harmadik pedig valóban kontinuitási egyenlet. Ez még jobban látható, ha beírva, hogy $u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$, az u^k hármasektor $\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}$, a deriváltak pedig $\partial_0 = \partial_t$, $\partial_k = \nabla$, áttérünk háromdimenziós jelölésre:⁵⁶

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1-v^2}{\varepsilon + p} (\nabla p + \mathbf{v} \partial_t p), \quad (4.11)$$

$$\partial_t \varepsilon + (\mathbf{v} \nabla) \varepsilon = -(\varepsilon + p) (\nabla \mathbf{v}) - \frac{\varepsilon + p}{1-v^2} (\partial_t + \mathbf{v} \nabla) \frac{v^2}{2}, \quad (4.12)$$

$$\partial_t n + (\mathbf{v} \nabla) n = -n (\nabla \mathbf{v}) - \frac{n}{1-v^2} (\partial_t + \mathbf{v} \nabla) \frac{v^2}{2}. \quad (4.13)$$

Az előkerült $\partial_t + \mathbf{v} \nabla$ kombináció az *együttmozgó derivált*; egy a folyadékelemekhez rögzített mennyiség változási gyorsaságát fejezi ki. Az utolsó egyenlet egy ekvivalens alakja az $nu^0 = \frac{n}{\sqrt{1-v^2}}$ mennyiségre (a laborrendszerből látott sűrűsége) vonatkozó szokásos típusú kontinuitási egyenlet:

$$\partial_t \frac{n}{\sqrt{1-v^2}} + \nabla \cdot \left(\frac{n}{\sqrt{1-v^2}} \mathbf{v} \right) = 0. \quad (4.14)$$

Ahhoz, hogy elegendő számú egyenletet kapjunk, meg kell még adni az anyag állapotegyenletét. Felidézzünk az anyag E energiája, S entrópiája, T hőmérséklete, p nyomása és V térfogata (és ha van, μ kémiai potenciálja illetve N részecskeszáma) közötti termodinamikai összefüggéseket:

$$\begin{aligned} T(S, V, N) &= \partial_S E(S, V, N), \\ p(S, V, N) &= -\partial_V E(S, V, N), \\ \mu(S, V, N) &= \partial_N E(S, V, N), \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{vagy differenciálokkal felírva} \\ &dE = T dS - p dV + \mu dN. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Homogén anyagra $E(S, V, N) = V \varepsilon\left(\frac{S}{V}, \frac{N}{V}\right)$ függvényalak lehetséges; ezt visszaírva kiderül, hogy érvényes a Gibbs-Duhem-reláció, amit átírhatunk az $n \equiv \frac{N}{V}$, $\sigma \equiv \frac{S}{V}$, $\varepsilon \equiv \frac{E}{V}$ sűrűségekre is:

$$E = TS - pV + \mu N \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon + p = T\sigma + \mu n. \quad (4.16)$$

A különféle potenciálfüggvények, azaz az ε energiasűrűség, a p nyomás vagy az $f \equiv \varepsilon - T\sigma$ szabadenergia-sűrűség deriváltjaira vonatkozó összefüggések így alakulnak:

$$\begin{aligned} d\varepsilon &= T d\sigma + \mu dn & dp &= \sigma dT + n d\mu & df &= -\sigma dT + \mu dn \\ \Leftrightarrow \begin{cases} T(\sigma, n) = \frac{\partial}{\partial \sigma} \varepsilon(\sigma, n), \\ \mu(\sigma, n) = \frac{\partial}{\partial n} \varepsilon(\sigma, n), \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma(T, \mu) = \frac{\partial}{\partial T} p(T, \mu), \\ n(T, \mu) = \frac{\partial}{\partial \mu} p(T, \mu), \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma(T, n) = -\frac{\partial}{\partial T} f(T, n), \\ \mu(T, n) = \frac{\partial}{\partial n} f(T, n). \end{cases} \end{aligned} \quad (4.17)$$

⁵⁶Az egyik lépésben szükség lesz a háromdimenziós $\delta_{kl} + \alpha v_k v_l$ mátrix inverzére, mely $\delta_{kl} - \frac{\alpha}{1+\alpha v^2} v_k v_l$.

A (4.9) és (4.10) egyenletekből a $d\varepsilon = T d\sigma + \mu dn$ és $\varepsilon + p = T\sigma + \mu n$ relációkkal a σ entrópiasűrűsége is megmaradási törvény adódik (összhangban azzal, hogy tökéletes folyadékot tárgyalunk):

$$\partial_\mu(\sigma u^\mu) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_t \frac{\sigma}{\sqrt{1-v^2}} + \nabla \left(\frac{\sigma}{\sqrt{1-v^2}} \mathbf{v} \right) = 0. \quad (4.18)$$

Ha nincs megmaradó sűrűség, akkor az összes N -et, n -et és μ -t el kell hagyni a termodinamikai egyenletekből; azt is mondhatjuk, hogy ilyenkor $\mu \equiv 0$. Ha pedig többféle megmaradó N_j számsűrűség (töltés) is van, akkor az értelemszerű $\mu n \rightarrow \sum_j \mu_j n_j$, $\mu dn \rightarrow \sum_j \mu_j dn_j$ stb. helyettesítéseket kell tenni. A (4.18) entrópiamegmaradás ezekben az esetekben is érvényesnek bizonyul.

A (4.8)–(4.10) hidrodinamikai egyenletek az anyag állapotegyenletével együtt már zárt egyenletrendszer eredményeznek. Egy gyakori választás például az, ha az energiasűrűsége az ideális gáztörvény által sugallt p -vel arányos, de tetszőleges hőmérsékletfüggést megengedő $\kappa(T)$ együttműködő függést teszünk fel; ennek is speciális esete, ha ez a κ együttműködő konstans (például ultra-relativisztikus gázra $\kappa=3$). Továbbá ha van megmaradó részecskeszám, akkor ennek n sűrűsége és a nyomás között is ideális gáznak megfelelő alakot választhatunk:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \kappa(T)p, & \text{speciális esetben } \varepsilon &= \kappa p; \\ & & \text{továbbá ha van } n \text{ sűrűség, akkor } p &= nT. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Az iménti (4.16)–(4.17) összefüggésekből belátható, hogy (amint például a [123] hivatkozásban is felidézük) ezek minden $\kappa(T)$ függvény esetén valóban konzisztens állapotegyenlet-lehetőségek.⁵⁷

A nemrelativisztikus hidrodinamika egyenleteit úgy kaphatjuk meg, hogy figyelembe vesszük, hogy (most visszaírva a c fénysebességet) nemrelativisztikus esetben $v \ll c$, és hogy az energiasűrűség valamilyen m_0 tömegű részecskékből álló anyag esetén $\varepsilon = nm_0 c^2 + \varepsilon_{NR}$ alakban írható (vagyis leválasztható a nyugalmi energiasűrűség), és $p \ll nm_0 c^2$ illetve $\varepsilon_{NR} \ll nm_0 c^2$ teljesül. Ezekkel az ismerős alakú hidrodinamikai egyenletre jutunk; az ε_{NR} -et most ε -ra visszajelölve

$$nm_0(\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}) = -\nabla p \quad (\text{Euler-egyenlet}), \quad (4.20)$$

$$\partial_t \varepsilon + (\mathbf{v} \nabla) \varepsilon = -(\varepsilon + p)(\nabla \mathbf{v}) \quad (\text{energiamegmaradási egyenlet}), \quad (4.21)$$

$$\partial_t n + (\mathbf{v} \nabla) n = -n(\nabla \mathbf{v}) \quad (\text{részecskeszám-megmaradási egyenlet}). \quad (4.22)$$

Itt is a $p = nT$, $\varepsilon = \kappa p$ vagy $\varepsilon = \kappa(T)p$ a leggyakoribb állapotegyenlet-választás a nehézion-fizikai alkalmazások szempontjából; persze ε itt a nyugalmi energián felüli energiasűrűséget jelenti.

* * *

⁵⁷Azaz: léteznek a termodinamikai potenciálfüggvények. Konkrétan a $\Phi(T, T_0) \equiv \int_{T_0}^T d\xi \frac{\kappa(\xi)}{\xi}$ függvényjelöléssel $p(T, \mu) = n_0 T e^{\mu/T - \mu_0/T_0} e^{\Phi(T, T_0)}$, $f(T, n) = nT \left[\ln \frac{n}{n_0} + \frac{\mu_0}{T_0} - 1 - \Phi(T, T_0) \right]$, ha van megmaradó n ; ha nincsen, akkor $p(T) = -f(T) = \frac{p_0}{T_0} T e^{\Phi(T, T_0)}$. Speciálisan ha κ konstans, akkor az $\varepsilon(\sigma, n)$ illetve az $\varepsilon(\sigma)$ függvény is kifejezhető: $p(T, \mu) = n_0 T_0 e^{\mu/T - \mu_0/T_0} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\kappa+1}$, $f(T, n) = nT \left[\ln \frac{n T_0^\kappa}{n_0 T^\kappa} + \frac{\mu_0}{T_0} - 1 \right]$, illetve $\varepsilon(\sigma, n) = \kappa T_0 n \left(\frac{n}{n_0} \right)^{1/\kappa} \exp\left(\frac{\sigma}{\kappa n} - \frac{\sigma_0}{\kappa n_0} \right)$, ha van megmaradó n , ha pedig nincsen, akkor $p(T) = -f(T) = p_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\kappa+1}$, és $\varepsilon(\sigma) = \frac{\kappa+1}{\kappa} T_0 \sigma \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{1/\kappa}$. A klasszikus statisztikus fizikában az entrópia nullpontja tetszőleges; ez jelenik meg a p_0 , n_0 , T_0 stb. állandókban, melyeket úgy választottunk, hogy egy adott állapotban valósuljanak meg a közös értékek, azaz például $p(T_0, \mu_0) = p_0$ legyen. Egy további összefüggés közöttük a következő: $\frac{\sigma_0}{n_0} = \kappa(T_0) + 1 - \frac{\mu_0}{T_0}$.

Kitekintésként megemlítjük, hogy sűrűlódó folyadékokra az energia-impulzus-tenzor már nem a fenti (4.5)-szerű, hanem valamilyen új q_μ vektor- illetve szimmetrikus $\pi_{\mu\nu}$ tenzormennyiséget (hőáram-sűrűséget illetve belső sűrűlódási tenzort) is használó általánosabb szimmetrikus alakban írandó:

$$T_{\mu\nu} = (\varepsilon + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu} + q_\mu u_\nu + q_\nu u_\mu + \pi_{\mu\nu}, \quad \text{ahol} \quad u^\mu q_\mu = 0, \quad u^\mu \pi_{\mu\nu} = 0, \quad \pi^\mu{}_\mu = 0. \quad (4.23)$$

A q^μ -re és a $\pi_{\mu\nu}$ -re írt feltételek ahhoz kellene, hogy egyértelmű legyen ε és p definíciója.⁵⁸ A sűrűlódó folyadékok relativisztikus egyenleteire tett első próbálkozásokat ma „elsőrendű” elméleteknek hívjuk: ezek Eckart és Landau (illetve Lifsic) neveihez fűződnek (ld. a [124] illetve például a [125] hivatkozásokat).⁵⁹ Problémát jelent, hogy mivel relativisztikusan az energiaáramlás (például a hővezetés is) tömegáramlásnak is tekinthető, nem egyértelmű a sebességmező irányának fogalma. A Landau-féle tárgyalásban az u^μ -t az energiaáramlás irányában vesszük fel (így $q^\mu \equiv 0$), cserébe az N^μ részecskeáramsűrűség nem u^μ irányú, hanem kompenzálni kell; az Eckart-félében viszont u^μ a részecskeáram irányába mutat, de kell a q^μ vektor. A deriváltakban olyan elsőrendű kifejezéseket keresve (innen az elméletek megnevezése), amelyekkel az entrópiaprodukciónak mindenképpen nemnegatív, lényegében egyértelműen adódnak az alábbi kifejezések (itt $\Delta_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu$):

$$\begin{aligned} \text{Landau-eset: } q_\mu &\equiv 0, & N_\mu &= nu_\mu + j_\mu, & \text{Eckart-eset: } N_\mu &\equiv nu_\mu \quad (\text{vagyis } j_\mu \equiv 0), \\ j^\mu &= \lambda \left(\frac{nT}{\varepsilon + p} \right)^2 \Delta^{\mu\nu} \partial_\nu \frac{\mu}{T}, & q^\mu &= \lambda \Delta^{\mu\nu} (\partial_\nu T - T u^\rho \partial_\rho u_\nu), \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \pi_{\mu\nu} \text{ kifejezése pedig (noha } u^\mu \text{ mást jelent itt és ott) mindkét esetben} \\ \pi^{\mu\nu} = \eta (\Delta^{\mu\rho} \partial_\rho u^\nu + \Delta^{\nu\rho} \partial_\rho u^\mu) + \left(\zeta - \frac{2}{3} \eta \right) \partial_\rho u^\rho \Delta^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Három disszipatív együttható jelent meg: az η illetve ζ nyírási illetve térfogati sűrűlódási együtthatók, valamint a λ hővezetés (amelyek ilyen értelmét a nemrelativisztikus határátmenetből lehet leszűrni). A mozgásegyenletek ezután itt is a $\partial_\mu N^\mu = 0$, $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$ feltételekből származtathatók.

Ezen elsőrendű sűrűlódó hidrodinamikai egyenleteknek több hiányossága is van: amellet, hogy nem egyértelmű, hogy vajon a két módszer ekvivalens lenne, nemkauzálisak (azaz fénynél gyorsabb hatások terjedhetnek bennük), valamint instabilak (azaz a nyugvó folyadékot leíró megoldás nem stabil kis perturbációkra nézve) [126–128]. Az úgynevezett Israel-Stewart-féle elméletben [128], mely a kinetikus egyenletből származtatva dinamikai változókként kezeli a disszipatív tagokat is, ezen problémák (bizonyos nem túl egyszerű feltételek teljesülése esetén) eltűnnek; ebben az elméletben azonban nemcsak három, hanem több (az anyagra jellemző) együttható jelenik meg (például a relaxációs idők). Történt fejlődés az elsőrendű elméletek körében is: a relativisztikus termodinamikai relációk konzisztens kezelésével stabil és kauzális elsőrendű elméletet lehet alkotni [129].

Ha kifejezetten a viszkozitást vizsgálánk, akkor természetesen kell a sűrűlódó folyadékok egyenleteinek valamelyik változata. Azonban, mint a bevezető fejezetben is előkerült, az ilyen vizsgálatok arra vezettek, hogy a nagyenergiás nehézion-ütközésben keletkezett kvark-gluon plazma viszkozitása kicsi. Jó közelítéssel alkalmazhatjuk tehát a tökéletesfolyadék-egyenleteket a tágulás leírására.

⁵⁸Például ha nem követelnénk meg, hogy $\pi^\mu{}_\mu = 0$ legyen, akkor $\pi^\mu{}_\mu$ -ból egy tetszőleges részt beolvaszthatnánk a p nyomásba. Ilyen helyzet már a (térfogati sűrűlódást tartalmazó) nemrelativisztikus hidrodinamikában is előáll.

⁵⁹Az Eckart-féle [124] folyóiratcikkkel ellentétben a Landau-féle tárgyalásról úgy tűnik (némi utánanézés után is), hogy valóban csak a [125] tankönyvben (mármint az eredetiben) került először publikálásra.

4.1.3. Egzakt megoldások, korábbi eredmények

Ebben a fejezetben tehát tökéletes folyadékok táguló tűzgömböt leíró analitikus megoldásaival és ezek alkalmazási lehetőségével foglalkozunk; először korábban is ismert eredményeket áttekintve.

A nemrelativisztikus esetben ismert egy viszonylag általános, táguló tűzgömböt leíró megoldásosztály, mely fokozatosan került kidolgozásra. Alaptulajdonsága, hogy önhasonló, Hubble-folyás típusú sebességmezővel bír. Első „inkarnációja” 1978-ból származik, és Zimányi-Bondorf-Garpman-megoldásként szokták hivatkozni [130]: ez gömbszimmetrikus tágulást ír le speciális hőmérséklet- és nyomásprofillal. Ez a megoldás később messzemenően általánosításra került; viszonylag általános változatok olvashatók a [131] illetve a [123] cikkekben. Ezekben a sebességmező alakja

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \frac{\dot{X}(t)}{X(t)} r_x \\ \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} r_y \\ \frac{\dot{Z}(t)}{Z(t)} r_z \end{pmatrix}, \quad \text{ahol is} \quad \mathbf{r} \equiv \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Itt $X(t)$, $Y(t)$ és $Z(t)$ egyelőre tetszőleges időfüggvények (de alább már az időfüggést nem jelöljük ki). Bevezetjük az ehhez a sebességmezőhöz tartozó $s(\mathbf{r}, t)$ „skalaváltozót”, aminek az az ellenőrizhető tulajdonsága, hogy az együttmozgó deriváltja eltűnik, valamint a $V(t)$ mennyiséget:

$$V(t) \equiv XYZ, \quad s(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{r_x^2}{X^2} + \frac{r_y^2}{Y^2} + \frac{r_z^2}{Z^2} \quad \Rightarrow \quad (\partial_t + \mathbf{v}\nabla)s = 0. \quad (4.27)$$

Az s szintfelületei önhasonló ellipszoidok, melyek közül X , Y és Z az $s=1$ -hez tartozónak a tengelyei; V ezen ellipszoid térfogatának mértéke. Az s együttmozgó deriváltjának eltűnése azt jelenti, hogy egy folyadékelemre jellemző s érték nem változik az időfejlődés során.

A tárgyalandó megoldás a fentebb mondott ideáligáz-szerű állapotegyenlet esetén érvényes. Az egyik esetben a κ együttható konstans, és a következő képletekkel lehet felírni a megoldást [131]:

$$\begin{aligned} p = nT, \quad \varepsilon = \kappa p & \Rightarrow \begin{aligned} T(\mathbf{r}, t) &= T_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^{1/\kappa} \mathcal{T}(s), \\ n(\mathbf{r}, t) &= n_0 \frac{V_0}{V} \mathcal{V}(s), \end{aligned} \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{ahol a } \mathcal{V}(s) \text{ és a } \mathcal{T}(s) \text{ kapcsolatára} \\ &\text{illetve a tengelyek időfejlődésére} \\ \mathcal{V}(s) &= \frac{1}{\mathcal{T}(s)} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^s \frac{d\xi}{\mathcal{T}(\xi)}\right), \\ X\ddot{X} = Y\ddot{Y} = Z\ddot{Z} &= \frac{T_0}{m_0} \left(\frac{V_0}{V} \right)^{1/\kappa}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

A $\mathcal{T}(s)$ függvény tehát tetszőlegesen választható, de $\mathcal{V}(s)$ -t ő már meghatározza. A T_0 , V_0 , X_0 stb. a $t=t_0$ -beli kezdőértékeket jelentik. Az X -re, Y -ra, Z -re felírt differenciálegyenlet-rendszer egy tömegpont külső potenciálban való newtoni mozgásegyenlete; az ehhez tartozó Lagrange-függvény

$$L = \frac{m_0}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) - \kappa T_0 \left(\frac{X_0 Y_0 Z_0}{XYZ} \right)^{1/\kappa}. \quad (4.29)$$

Ellenőrizhető, hogy a felírt képletek valóban a (4.20)–(4.22) egyenletek megoldását adják; m_0 az ott

szereplő tömeg. A tengelyekre kapott mozgásegyenlet pedig könnyen kezelhető (numerikusan).⁶⁰

Akkor is kaphatunk megoldást a fentebbi (4.26) sebességmezőből és (4.27) skálaváltozóból kiindulva, ha az állapotegyenletben tetszőleges $\kappa(T)$ függvény szerepel [123], de „cserébe” a hőmérséklet csak térben homogén lehet. Ez a fajta megoldás a következőképpen fejezhető ki:

$$\begin{aligned} p = nT, \\ \varepsilon = \kappa(T)p \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} T(\mathbf{r}, t) &\equiv T(t), \\ n(\mathbf{r}, t) &= n_0 \frac{V_0}{V} e^{-s/2}, \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{és az időfejlődésekre} \\ X\ddot{X} = Y\ddot{Y} = Z\ddot{Z} &= \frac{T}{m_0}, \\ \frac{d}{dt}(T\kappa(T)) + T\frac{\dot{V}}{V} &= 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Ez is valóban megoldás a (4.20)–(4.22) nemrelativisztikus hidrodinamikai egyenletekre; az előbbi (4.28)-hoz képest a tengelyek és a hőmérséklet időfejlődése változott. A $\kappa(T) \equiv \kappa$ konstans esetben azonban visszakapjuk a (4.28) megoldás $\mathcal{T}(s) \equiv 1$ speciális esetét. Megjegyezzük, hogy a most tárgyalt megoldások több lépésben, a gömbszimmetriát, a speciális $\kappa = \frac{3}{2}$, vagy általában a konstans κ esetet, illetve a homogén hőmérsékletet fokozatosan feladva kerültek kidolgozásra [132–134].

* * *

A relativisztikus tökéletesfolyadék-hidrodinamika egyenleteinek is van több ismert, a nagyenergiás fizika szempontjából érdekes megoldása. A már említett Landau-Halatnyikov-megoldás [120, 121] egy implicit módon, bonyolult formulákkal adott 1+1 dimenziós (azaz egy, longitudinálisnak gondolt térdimenzióban érvényes tágulást leíró) egzakt megoldás. Kezdeti állapota egy véges „lépcső”, a végül keletkező részecskék $\frac{dN}{dy}$ rapiditás-eloszlását (a 4.1.1. szakaszban tárgyalt módon) kiszámítva pedig közelítőleg Gauss-alak adódik.

Egy sokkal triviálisabb, de elterjedt gondolkodásmódot eredményező megoldás a szintén 1+1 dimenziós úgynevezett Hwa-Bjorken-megoldás [135, 136], melynek lényege a hosszirányú boost-invariancia: ez ideálisan „végtelen nagy” ütközési energiánál tűnik valóságúnak. A sebességmező és az entrópiasűrűség ebben a megoldásban a következő (csak egy z térkoordináta van):

$$v_z = \frac{z}{t} \quad \Leftrightarrow \quad u^\mu = \frac{x^\mu}{\tau}, \quad \sigma = \sigma_0 \frac{\tau_0}{\tau}, \quad \text{ahol itt } \tau = \sqrt{t^2 - z^2}. \quad (4.31)$$

Ez a megoldás gyorsulásmentes (rá $u^\nu \partial_\nu u^\mu = 0$), valamint nagyon egyszerű; azért lett híres, mert Bjorken-nek erre alapozva sikerült becslést adni a nagyenergiás reakciók termalizált kezdeti állapotának energiasűrűségére az $y, \approx 0$ midrapiditásnál mérhető $\frac{dN}{dy}$ részecskehozam alapján (mely ebben a modellben a boost-invariancia miatt konstans lenne y függvényében). Említést érdemel, hogy később sikerült egy implicit 1+1 dimenziós megoldást találni, mely „interpolál” a Landau-Halatnyikov-megoldás és a Hwa-Bjorken-megoldás között [137, 138].

Többdimenziós megoldások is születtek szép számmal; több szerző próbálkozott (sikerrel) azazal, hogy a z -irányú boost-invariáns Bjorken-féle tágulást kiegészítse a transzverz síkbeli dinamikát

⁶⁰Analitikusan nemigen lehet megadni a megoldást; az energiamegmaradást kifejező első integrált persze felírhatjuk: $\frac{m_0}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \kappa T_0 \left(\frac{X_0 Y_0 Z_0}{XYZ}\right)^{1/\kappa} = E_0$. Továbbá a $\kappa=3/2$ esetben még egy első integrál megadható: $X^2 + Y^2 + Z^2 = (\dot{X}_0^2 + \dot{Y}_0^2 + \dot{Z}_0^2 + \frac{3T_0}{m_0}) \cdot (t-t_0)^2 + A_0(t-t_0) + B_0$, ahol $A_0 = 2(X_0 \dot{X}_0 + Y_0 \dot{Y}_0 + Z_0 \dot{Z}_0)$ és $B_0 = X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2$.

megragadó folyási képpel; egy ilyen megoldást olvashatunk például a [139] hivatkozásban. Feltártult egy a fentebb mutatott elliptikus szimmetriájú önhasonló nemrelativisztikus megoldások relativisztikus általánosításának tekinthető megoldás-osztály is [140, 141]; ez a következő módon írható:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}}{t} &\Leftrightarrow u^\mu = \frac{x^\mu}{\tau}, & T &= T_0 \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{3/\kappa} \mathcal{T}(s), \\ s &\equiv \frac{r_x^2}{\dot{X}_0^2 t^2} + \frac{r_y^2}{\dot{Y}_0^2 t^2} + \frac{r_z^2}{\dot{Z}_0^2 t^2}, & \text{a többi mennyiség pedig} & n = n_0 \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^3 \frac{1}{\mathcal{T}(s)}, \\ \tau &\equiv \sqrt{t^2 - r^2} = \sqrt{x^\mu x_\mu}, & & p = p_0 \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{3\frac{\kappa+1}{\kappa}}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Ez a megoldás hasonlít a nemrelativisztikus (4.26)–(4.30) megoldásokra: az itteni s és \mathbf{v} ugyanaz, mint az ottani, ha úgy vesszük, hogy a tengelyek időfejlődése állandó sebességű: $X(t) = \dot{X}_0 t$, $Y(t) = \dot{Y}_0 t$, $Z(t) = \dot{Z}_0 t$. Ez a mostani relativisztikus megoldás tehát gyorsulásmentes. A felírt alak a konstans κ -jú $\varepsilon = \kappa p$ (és $p = nT$) állapotegyenlet esetén érvényes; később általánosítottuk tetszőleges $\kappa(T)$ függvénnyel jellemzett állapotegyenlet esetére [142]. Megjegyzésre érdemes, hogy az önhasonló Hubble-folyás alakú sebességprofilon alapszik az úgynevezett Buda-Lund-modell [35, 143, 144], amely sokféle hadronikus megfigyelhető mennyiség leírásában sikeres [145, 146]: egy olyan végállapoti parametrizációról (azaz az $S(x, \mathbf{p})$ forrásfüggvényre vonatkozó modellről) van szó, ami speciális esetekben a látott (nemrelativisztikus és relativisztikus) megoldásokból származó végállapottal esik egybe, és egyfajta interpolációt valósít meg köztük.⁶¹

A [147, 148] publikációkban (és a doktori dolgozatomban) bemutatott relativisztikus hidrodinamikai megoldásosztály azért szép, mert gyorsuló, explicit egyszerű egzakt megoldásokról van szó, amely szempontból az elsők között van az irodalomban. Ez is az $\varepsilon = \kappa p$, $p = nT$ állapotegyenletet használja. Több különböző esetben érvényes megoldások tartoznak ide; talán a következő kettő a legfontosabb (D -vel a tér dimenziószámát jelölve):

$$\begin{aligned} \text{ha } D=\kappa=1, \text{ akkor egy} & v = \text{th}(\lambda\eta), & n &= n_0 \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^\lambda \mathcal{V}(s), \\ \text{megoldás a következő:} & s := \frac{\tau_0^{\lambda-1}}{\tau^{\lambda-1}} \text{sh}((\lambda-1)\eta), & T &= T_0 \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^\lambda \frac{1}{\mathcal{V}(s)}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \text{ha pedig annyi a kikötés, hogy } D=\kappa, \text{ akkor} & v = \text{th}(2\eta) = \frac{2tr}{t^2+r^2}, & n &= n_0 \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{2D} \mathcal{V}(s), \\ & s := \frac{\tau_0}{\tau} \text{sh } \eta = \frac{r}{t^2-r^2}, & T &= T_0 \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^2 \frac{1}{\mathcal{V}(s)}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

A megoldások gömbszimmetrikusak (illetve az első csakis egy térdimenzióban működik); r a sugárkoordináta, v a sebesség nagysága, és az η „rapiditás-koordinátát” használtuk:

$$\begin{aligned} \eta = \text{Arth } \frac{r}{t}, & \Leftrightarrow t = \tau \text{ch } \eta, \\ \tau = \sqrt{t^2 - r^2} & r = \tau \text{sh } \eta. \end{aligned} \quad (4.35)$$

A második megoldást az előtte lévő, tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén érvényes megoldásnak $\lambda=2$ -höz tartozó

⁶¹Olyan teljesen általános egyszerű relativisztikus hidrodinamikai megoldást, amely a Buda-Lund-modell forrásfüggvényére vezet, még nem sikerült találni, de érthető, hogy érdeklődés övezné.

speciális esetének tűnik, más szempontból viszont általánosabb, mert több dimenzióban, realiztikusabb állapotegyenlettel is működik.⁶² Az 1+1 dimenziós változatot használva a fentebb említett (a kezdeti energiasűrűségre vonatkozó) Bjorken-becslést sikerült pontosítanunk [148, 149]; mondhatjuk ugyanis, hogy a talált megoldások a λ paraméterrel általánosítja a ($\lambda=1$ -nek megfelelő) Hwa-Bjorken-megoldást. Később ezt a most tárgyalt, informálisan „ λ -megoldásoknak” hívható (4.33) megoldásoztályt (és az energiasűrűségbecslés-pontosítást) is általánosították [150]; a kapott 1+1 dimenziós megoldás explicit alakban az η rapiditás-koordinátát fejezi ki a v sebességgel (és nem fordítva), ugyanakkor általánosabb, például mert bármilyen κ -val működik.

A három dimenzióban is érvényes (és ott $\kappa=3$ -at használó) megoldást, (4.34)-et is sikerült később egy meglepő módszerrel tovább általánosítanom [151]. Az így kapott megoldás például forgást is tartalmazhat; tudtommal az első ilyen relativisztikus megoldás volt az irodalomban. Itt is $\kappa=3$ kell, hogy legyen; a megoldás kifejezése (a [151]-belihez képest kicsit kényelmesebb jelöléssel)

$$\mathbf{v} = \frac{2t\mathbf{r} + \rho_0^2\mathbf{v}_0 + \tau^2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}}{t^2 + r^2 + \rho_0^2}, \quad T = T_0 \frac{\tau_0^2}{t^2 + r^2 + \rho^2} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad n = n_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^3, \quad (4.36)$$

és persze most is $p = nT$ érvényes. Itt $\boldsymbol{\Omega}$ és \mathbf{v}_0 tetszőleges hármassvektorok, ρ_0 és τ_0 pedig méret- illetve időskála. Az $\boldsymbol{\Omega}$ vektor jelentése láthatóan valamiféle forgás szögsebessége, a (sebesség dimenziójú) \mathbf{v}_0 vektor viszont nem egyszerűen egy konstans mozgási sebességet jelent. Mindenesetre a \mathbf{v}_0 , $\boldsymbol{\Omega}$, ρ_0 és τ_0 konstansok 0 értékénél visszakapjuk a (4.34) megoldást. A most mutatott megoldást később a [151] publikációtól jórészt függetlenül újra felfedezték a [152] cikkben.⁶³

4.2. Forgó tágulás analitikus tárgyalása

A legutolsóként említett forogva táguló relativisztikus megoldás irányította rá a figyelmemet a nemrelativisztikus esetre (vagyis ilyen forgó megoldások hiányára); az egyszerűbb egyenletek miatt esetleg részletesebb, a nehézion-ütközések képéhez jobban illeszkedő megoldásokat lehetne találni a nemrelativisztikus esetben. Az alapvető motiváció az, hogy nemcentrális mag-mag ütközésben forgó közeg keletkezik: kérdés lehet, hogy ez hogyan befolyásolja az időfejlődést. Ez az állapotegyenlet vizsgálata szempontjából is érdekes: azt gondolhatjuk, hogy nagyobb κ érték (kisebb hangsebesség, „lágyabb” állapotegyenlet) esetén lassabb a tágulás, lassabban nő a tehetetlenségi nyomaték, tovább forog a tűzgömb, továbbá nagyobb κ esetén lassabb az adiabatikus hűlés, így több ideje van elfordulni a tűzgömbnek a kifagyás előtt. Ez a kérdéskör tehát kvantitatíven is vizsgálhatóvá válik, ha egy analitikus hidrodinamikai megoldásban megvizsgáljuk a végső szögsebességet illetve elfordulási szöget, majd ez utóbbiaknak a végállapotú mérhető mennyiségekkel való kapcsolatát.

⁶²Ezt felírtam a „hagyományos” koordinátákban is; ez volt az első talált megoldásom, és nem is a τ , η koordinátákban gondolkodva keletkezett, hanem más módszerekkel.

⁶³Ebben a [152] publikációban teljesen más, az 1+3 dimenziós relativisztikus hidrodinamikai egyenletek és a magasabb dimenziós (konkrétan: ötdimenziós AdS téridőbeli) általános relativitáselméleti feketelyuk-megoldások közötti megfeleltetés alapján dolgoztak, ami mindenképpen érdekes újdonság az énnekem a [151] cikkben végzett vizsgálataimhoz képest. Mindenesetre ide ebbe a dolgozatba nyugodtan le merem írni, hogy a mondott forgó megoldást már megtaláltam korábban; ennek tisztázása hivatalosan privát kommunikáció szintjén maradt.

Forogva táguló tűzgömböt leíró nemrelativisztikus megoldás kereséséhez kézenfekvő volt az ismert, az előző szakaszban a (4.26)–(4.30) egyenletekben leírt ellipszoid-jellegű megoldások általánosításait keresni: hátha ilyenekben is majd egy közöséges differenciálegyenlet-rendszerre sikerül visszavezetni a tűzgömb tágulásának és forgásának időfejlődését. Ebben a szakaszban az ilyen várakozásoknak megfelelő új nemrelativisztikus hidrodinamikai megoldásokat mutatok be. Ezeket fokozatos általánosítással sikerült megtalálni; a vonatkozó [153–155] publikációk közül lényegében az utolsó [155]-re koncentrálok most, amely mintegy részhalmozaként tartalmazza a megelőző kettőt.

4.2.1. Az új forgó megoldások kifejezése

A vizsgálatainkhoz itt is a $p = nT$, $\varepsilon = \kappa(T)p$ állapotegyenletet használjuk. Beírva ezeket a nemrelativisztikus (4.20)–(4.22) hidrodinamikai egyenletekbe a megoldandó egyenletek így alakulnak:

$$(\partial_t + \mathbf{v}\nabla)n = -n\nabla\mathbf{v}, \quad (4.37)$$

$$[T\kappa'(T) + \kappa(T)](\partial_t + \mathbf{v}\nabla)T = -n\nabla\mathbf{v}, \quad (4.38)$$

$$nm_0(\partial_t + \mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -n\nabla T - T\nabla n. \quad (4.39)$$

Alább ezeket az egyenletet használjuk, de megjegyezzük, hogy hasonló módszerrel lehetne vizsgálni az $n=0$ (azaz megmaradó részecskeszám nélküli) esetet is.⁶⁴ A keresett forgó ellipszoidális megoldás (utólag egyszerűnek tűnő) alapötlete az, hogy az ellipszoid-szintfelületek elfordulási szögének változása nem feltétlenül esik egybe a folyadékmozgás valamilyen fajta szögsebességével. Az eredeti laborrendszer most K -val jelöljük: a z az ütköző atommagok nyalábiránya, x az ütközési paraméter iránya; a forgás tehát az y tengely körül történik. Az elfordult ellipszoid leírásához bevezetjük tehát az y tengely körül $\vartheta(t)$ szöggel elforgatott K' koordinátarendszert és az ebbe a K -ból áttérő $\mathbf{M}(t)$ mátrixot, valamint az ezen elforduláshoz tartozó $\mathbf{\Omega}(t)$ szögsebesség-vektort:

$$\mathbf{M}(t) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta(t) & 0 & \sin \vartheta(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \vartheta(t) & 0 & \cos \vartheta(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Omega}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\vartheta}(t) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (4.40)$$

ezekkel az elforgatott K' -ben érvényes \mathbf{r}' helyvektor- illetve \mathbf{v}' sebességvektor-komponensek és az eredeti K rendszerbeli \mathbf{r} illetve \mathbf{v} komponensek kapcsolata (az időfüggés kijelölését elhagyva)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{r}, \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{v} - \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}'; \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} r'_x &= r_x \cos \vartheta - r_z \sin \vartheta, \\ r'_z &= r_x \sin \vartheta + r_z \cos \vartheta, \\ v'_x &= v_x \cos \vartheta - v_z \sin \vartheta - \dot{\vartheta} r'_z, \\ v'_z &= v_x \sin \vartheta + v_z \cos \vartheta + \dot{\vartheta} r'_x, \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{és az } y\text{-kom-} \\ \text{ponensekre} \\ v'_y = v_y, \quad r'_y = r_y. \end{array} \quad (4.41)$$

Az „álló” ellipszoidális (4.26)–(4.30) megoldásokhoz hasonlóan, de most az elforgatott K' rendszerből nézve feltesszük, hogy ellipszoid alakú szintfelületeink vannak, melyek jellemző tengelyei $X(t)$,

⁶⁴Ekkor az Euler-egyenlet is biztosan nem (4.20) alakú; kézenfekvő lehetőség például a $T(\partial_t + \mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla T$ egyenlet, ami úgy kapható, hogy a relativisztikus (4.8) egyenletbeli $\varepsilon + p$ helyébe $T\sigma$ -t, dp helyébe pedig σdT -t írunk.

$Y(t)$ és $Z(t)$. Bevezetjük tehát az s skálaváltozót, a V térfogatot (mint korábban):

$$s := \frac{r'_x{}^2}{X^2} + \frac{r'_y{}^2}{Y^2} + \frac{r'_z{}^2}{Z^2}, \quad V := XYZ. \quad (4.42)$$

Átírjuk a (4.37)–(4.39) egyenleteinket a K' rendszerbe. Ehhez a ∇' jelölést használjuk az r'_k -k szerinti deriváltakra, a ∂'_t jelölést pedig a K' rendszerbeli, azaz r'_k -k fix értékei mellett vett parciális időderiváltra (ami nem ugyanaz, mint az r_k fixen tartásával vett ∂_t , ugyanis az r'_k -k és az r_k -k kapcsolata időfüggő). A kontinuitási jellegű (4.37) és (4.38) egyenletek formailag nem változnak, a (4.39) Euler-egyenlet K' -beli alakjában viszont megjelennek az inerciális erők:

$$(\partial'_t + \mathbf{v}' \nabla') n = -n \nabla' \mathbf{v}', \quad (4.43)$$

$$[T \kappa'(T) + \kappa(T)] (\partial'_t + \mathbf{v}' \nabla') T = -T \nabla' \mathbf{v}', \quad (4.44)$$

$$(\partial'_t + \mathbf{v}' \nabla') \mathbf{v}' = -\frac{1}{m_0} \nabla' T - \frac{1}{m_0} \frac{T}{n} \nabla' n + \underbrace{2\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\Omega}}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}' \times \boldsymbol{\Omega})}_{\text{centrifugális}} + \underbrace{\mathbf{r}' \times \dot{\boldsymbol{\Omega}}}_{\text{szöggyorsulási}}. \quad (4.45)$$

A nem forgó ellipszoidális megoldás általánosítását keresve azt szeretnénk, ha 1) a sebességmező a koordináták lineáris függvénye lenne; ezt a K illetve a K' rendszerben kikötve ekvivalens követelményeket nyerünk, továbbá 2) az ellipszoidális s változó most is olyan lenne, hogy az együttmozgó deriváltja nulla; ezt is ekvivalens módon kiköthetjük a K és a K' rendszerben is. Arra jutunk ebből (és s imént megadott (4.42) alakjából), hogy a sebességmező csakis ilyen alakú lehet:

$$\begin{aligned} (\partial_t + \mathbf{v} \nabla) s = 0, \text{ azaz} \\ (\partial'_t + \mathbf{v}' \nabla') s = 0, \text{ és} \\ \mathbf{v}' \text{ lineáris } \mathbf{r}'\text{-ben} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}'(\mathbf{r}', t) = \begin{pmatrix} \frac{\dot{X}(t)}{X(t)} r'_x + g(t) \frac{X(t)}{Z(t)} r'_z \\ \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} r'_y \\ \frac{\dot{Z}(t)}{Z(t)} r'_z - g(t) \frac{Z(t)}{X(t)} r'_x \end{pmatrix}, \quad \nabla' \mathbf{v}' = \frac{\dot{V}}{V}. \quad (4.46)$$

Itt $g(t)$ egy egyelőre tetszőleges, az eddigi X , Y , Z tengelyeken és ϑ szögen kívüli további időfüggvény. A $\nabla' \mathbf{v}$ divergencia azonban a nem forgó (4.26)–(4.30) esettel teljesen analóg alakú, így tehát az ottanival lényegében azonos alakban, csak az elforgatott K' rendszerbeli koordinátákat használva most is megoldhatjuk a kontinuitási jellegű (4.43)–(4.44) egyenleteket:

ha κ konstans, akkor tetszőleges $\mathcal{T}(s)$ függvényünk lehet:

$$\begin{aligned} n(\mathbf{r}', t) &= n_0 \frac{V_0}{V} \mathcal{V}(s), \\ T(\mathbf{r}', t) &= T_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^{1/\kappa} \mathcal{T}(s), \\ \text{és } \mathcal{V}(s) &= \frac{1}{\mathcal{T}(s)} \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^s \frac{d\xi}{\mathcal{T}(\xi)} \right), \end{aligned}$$

ha pedig $\kappa(T)$ tetszőleges, akkor most is Gauss-alakú n és homogén T kell:

$$\begin{aligned} n(\mathbf{r}', t) &= n_0 \frac{V_0}{V} e^{-s/2}, \\ T(\mathbf{r}', t) &\equiv T(t), \quad \text{amire} \\ [T \kappa'(T) + \kappa(T)] \frac{\dot{T}}{T} + \frac{\dot{V}}{V} &= 0. \end{aligned} \quad (4.47)$$

A T -re és n -re megadott kifejezések koordinátafüggése a forgó K' rendszerben táguló ellipszoidokat ír le tehát (az s -függésen keresztül). Itt is a mondott két lehetőség közös esete ha κ konstans, $\mathcal{V}(s) = e^{-s/2}$ és $\mathcal{T}(s) = 1$. A tetszőleges $\kappa(T)$ esetében a T időfüggését megadó egyenlet (4.44)-ből származik; konstans κ esetén ez valóban az arra az esetre felírt $T \propto (V_0/V)^{1/\kappa}$ megoldásra vezet.

A $\mathcal{V}(s)$ -nek és $\mathcal{T}(s)$ -nek az iménti (4.47)-ben felírt kapcsolata már túlmutat a kontinuitási egyenleteken; ez itt is abból származik, hogy a (4.45) Euler-egyenletre továbbhaladva majd annak jobb oldalán is \mathbf{r}' -ben lineáris kifejezést kell kapnunk (ahogyan a bal oldalán is olyan jelenik meg).⁶⁵ Így viszont behelyettesítve kiderül, hogy a (4.45) Euler-egyenletre is valóban megoldást kapunk, ha csak az eddig tetszőleges időfüggvényekre teljesülnek az alábbi öt darab közönséges differenciálegyenlet (melyeket az r'_x , r'_y és r'_z együtthatóinak egyenkénti egyenlőségeiből kapunk):

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{X}}{X} - g^2 &= \frac{T}{m_0} \frac{1}{X^2} + 2\frac{Z}{X}g\dot{\vartheta} + \dot{\vartheta}^2, & \frac{\ddot{Y}}{Y} &= \frac{T}{m_0} \frac{1}{Y^2}, & \frac{X}{Z}\dot{g} + 2g\frac{\dot{X}}{Z} &= -\ddot{\vartheta} - 2\frac{\dot{Z}}{Z}\dot{\vartheta}, \\ \frac{\ddot{Z}}{Z} - g^2 &= \frac{T}{m_0} \frac{1}{Z^2} + 2\frac{X}{Z}g\dot{\vartheta} + \dot{\vartheta}^2, & & & \frac{Z}{X}\dot{g} + 2g\frac{\dot{Z}}{X} &= -\ddot{\vartheta} - 2\frac{\dot{X}}{X}\dot{\vartheta}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Úgy írjuk fel ezeket, mintha T csak az időtől függne; tetszőleges $\kappa(T)$ esetén eleve ez a helyzet, konstans κ esetén pedig ez a $\mathcal{T}(s)=1$ esetnek felelne meg, de a megoldás érvényes más $\mathcal{T}(s)$ esetén is (ha $\mathcal{V}(s)$ a fentebb (4.47)-ben megadott alakú).

Az $X=Z$ esetre (mely „szferoidális”, azaz forgási ellipszoid alakú szintfelületeknek felel meg) később térünk vissza; most az $X \neq Z$ esetben haladunk tovább. Ekkor (4.48) utolsó két egyenletéből ekvivalens átalakításokkal két másik, rögtön megoldható egyenletet kaphatunk:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[(X+Z)^2(g+\dot{\vartheta})] &= 0, & g(t) &= \frac{\chi_0}{(X+Z)^2} + \frac{\xi_0}{(X-Z)^2}, & \text{tetszőleges} \\ & \Rightarrow & & & \chi_0 \text{ és } \xi_0 \text{ ál-} \\ \frac{d}{dt}[(X-Z)^2(g-\dot{\vartheta})] &= 0 & \dot{\vartheta}(t) &= \frac{\chi_0}{(X+Z)^2} - \frac{\xi_0}{(X-Z)^2}, & \text{landókkal.} \end{aligned} \quad (4.49)$$

Visszahelyettesítve (4.48) maradék egyenleteibe az X , Y , és Z „mozgásegyenletei” így alakulnak:

$$X\ddot{X} = \frac{T}{m} + \frac{2\chi_0^2 X}{(X+Z)^3} + \frac{2\xi_0^2 X}{(X-Z)^3}, \quad Y\ddot{Y} = \frac{T}{m}, \quad Z\ddot{Z} = \frac{T}{m} + \frac{2\chi_0^2 X}{(X+Z)^3} + \frac{2\xi_0^2 X}{(X-Z)^3}. \quad (4.50)$$

Ezeket is tekinthetjük egy X , Y , Z koordinátájú m_0 tömegű tömegpont külső potenciálban való mozgásegyenleteinek, amelyek ilyen Lagranre-függvényből származnak:

$$L = \frac{m_0}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) - U(X, Y, Z), \quad (4.51)$$

és az U potenciál (a hőmérséklet időfüggését a fentebb írtakból véve) konstans κ esetén egyszerű:

$$\text{ha } \kappa \text{ konstans:} \quad U(X, Y, Z) = \kappa T_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^{1/\kappa} + \frac{m_0 \chi_0^2}{(X+Z)^2} + \frac{m_0 \xi_0^2}{(X-Z)^2}, \quad (4.52)$$

ahol ugye $V=XYZ$. A kellő U potenciálfüggvény a [153] cikkünkben írtakat követve tetszőleges $\kappa(T)$ -vel jellemzett állapotegyenlet esetén is megadható.⁶⁶ Látszik U alakján, hogy ha $\xi_0 \neq 0$, akkor az $X > Z$ és $X < Z$ tartományokat végtelen magas „fal” választja el. Ha például a kezdőállapotban

⁶⁵A már ismert, a [123,131] cikkekben közölt, itt fentebb a (4.26)–(4.30) képletekben felidézett megoldás levezetése közben is kitűnik, hogy ugyanilyen követelmény vezet a T és az n s -függésének kapcsolatára.

⁶⁶Ekkor (4.52)-ben az első tagot le kell cserélni a V -nek az $\int_{V_0}^V dV' \frac{T(V')}{V'}$ módon adott függvényére, ahol a $T(V)$ függés a (4.47)-ben írt egyenletből kaphatóan $T(V) = f^{-1}(V_0/V)$, ahol is $\ln f(T) = \int_{T_0}^T dx (\kappa'(x) + \frac{\kappa(x)}{x})$.

$X_0 > Z_0$, ami egy nehézion-ütközést tekintve realiztikus feltevés, akkor ez fennmaradna az egész időfejlődés során: ez viszont egyáltalán nem realiztikus; úgy gondoljuk, hogy a végállapotban szinte biztosan $Z > X$, a nagyobb nyomásgradiens okozta hevesebb tágulás miatt. Ezért is (és még más, alább látott okok miatt is) arra következtethetünk, hogy a $\xi_0 \neq 0$ esetbeli megoldások, noha érdekes sebességmezőjű táguló megoldásokat jelentnek, nem relevánsak a nehézion-fizikai alkalmazás szempontjából.⁶⁷ Innentől tehát a $\xi_0 = 0$ választást tesszük, am azt eredményezi, hogy $g(t) = \dot{\vartheta}(t)$, és kézenfekvőbb új jelöléseket vezetünk be (amelyek harmonizálnak a korábban talált, a [153, 154] cikkeinkben leírt forgásszimmetrikus megoldásokkal is):

$$R := \frac{1}{2}(X+Z), \quad R_0 := \frac{1}{2}(X_0+Z_0), \quad \chi_0 = 2\omega_0^2 R_0^2. \quad (4.53)$$

R tehát a forgási síkbeli „átlagos” sugár. Ezen új jelölésekkel azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{v}'(\mathbf{r}', t) = \begin{pmatrix} \frac{\dot{X}(t)}{X(t)} r'_x + \frac{\omega(t)}{2} \frac{X(t)}{Z(t)} r'_z \\ \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} r'_y \\ \frac{\dot{Z}(t)}{Z(t)} r'_z - \frac{\omega(t)}{2} \frac{Z(t)}{X(t)} r'_x \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \dot{\vartheta}(t) &= \frac{\omega(t)}{2}, \\ \omega(t) &= \omega_0 \left(\frac{R_0}{R(t)} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Újra felhívjuk a figyelmet, hogy a \mathbf{v}' az elforgatott K' rendszerben látható sebességet jelenti.

A megoldás természetét megvilágítandó érdemes kiszámítani a teljes $N_0(t)$ részecskeszámot és a folyadék teljes $J_y(t)$ impulzusmomentumát (aminek valóban csak az y -komponense lesz nem eltűnő). A legegyszerűbb, $\mathcal{T}(s)=1$ és $\mathcal{V}(s)=e^{-s/2}$ esetre, azaz a Gauss-alakú sűrűségprofilra koncentrálunk; ekkor az eredmények a következők:

$$N_0(t) \equiv \int d^3\mathbf{r}' n(\mathbf{r}', t) = n_0 V_0 (2\pi)^{3/2}, \quad (4.55)$$

$$J_y(t) \equiv \int d^3\mathbf{r} m_0 n(\mathbf{r}, t) [\mathbf{r} \times \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)]_y = 2N_0 m_0 \omega_0 R_0^2. \quad (4.56)$$

Ez utóbbi J_z mennyiség felírását bevilágítóbb alakban is megfogalmazhatjuk:

$$J_y(t) = \Theta_y(t) \omega(t) \frac{2R^2}{X^2 + Z^2}, \quad (4.57)$$

$$\text{ahol } \Theta_y(t) \equiv \int d^3\mathbf{r}' m_0 n(\mathbf{r}', t) \cdot (x'^2 + z'^2) = m_0 N_0 (X^2 + Z^2). \quad (4.58)$$

Valóban kijött, hogy a teljes részecskeszám és az impulzusmomentum megmaradó mennyiségek. A Θ_y tehetetlenségi nyomaték a tágulás miatt nő, az $\omega(t)$ pedig, noha a megoldásunk (például $\omega(t)$, $\Theta_y(t)$ és $J_y(t)$ kapcsolatát tekintve is) láthatóan bonyolultabb, mint egy merev test forgása, valóban a folyadékmozgás szögsebességét jelenti.⁶⁸ Az ellipszoidális szintfelületek elfordulásának

⁶⁷Arra is gondolhatunk, hogy a forgás megengedése csakis egy további tetszőleges konstans jelenthet a nem forgó esethez képest; például a teljes impulzusmomentumot. A χ_0 mellett ξ_0 megengedése ezért is „túlzásnak” tűnik.

⁶⁸Megjegyezzük, hogy a $\xi_0 \neq 0$ esetben kapott megoldás (ld. fentebb) esetén $J_y = N_0 m_0 (\chi_0 - \xi_0)$ adódik: ebből is látszik, hogy a már elhagyott ξ_0 állandó szerepe valóban kérdéses lenne, ha a forgás leírására koncentrálunk.

$\dot{\vartheta}(t)$ szögsebessége viszont nem $\omega(t)$, hanem ennek fele: valóban nem együtt forog a folyadék és a szintfelületekhez rögzített K' rendszer.

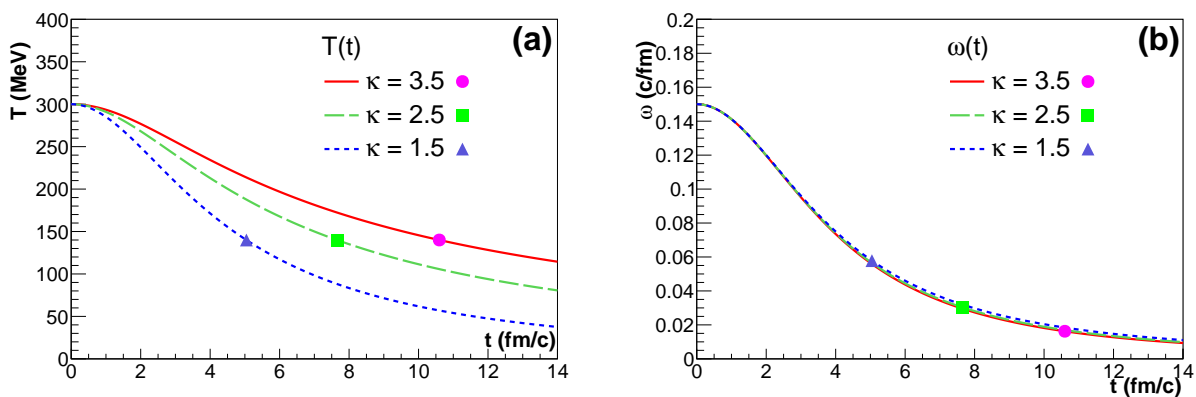
Ha $X=Z$, akkor vissza kell térnünk a (4.49) egyenletek elé. Ekkor az Euler-egyenlet megoldásával ekivalens (4.48) egyenletek (az eddigiekkel konzisztens $X=Z \equiv R$ jelöléssel) csak három független feltételt adnak a négy ($R, Y, \dot{\vartheta}, g$) mennyiségre:

$$R\ddot{R} - R^2(g+\dot{\vartheta})^2 = \frac{T}{m}, \quad Y\ddot{Y} = \frac{T}{m}, \quad \frac{d}{dt}[R^2(g+\dot{\vartheta})] = 0. \quad (4.59)$$

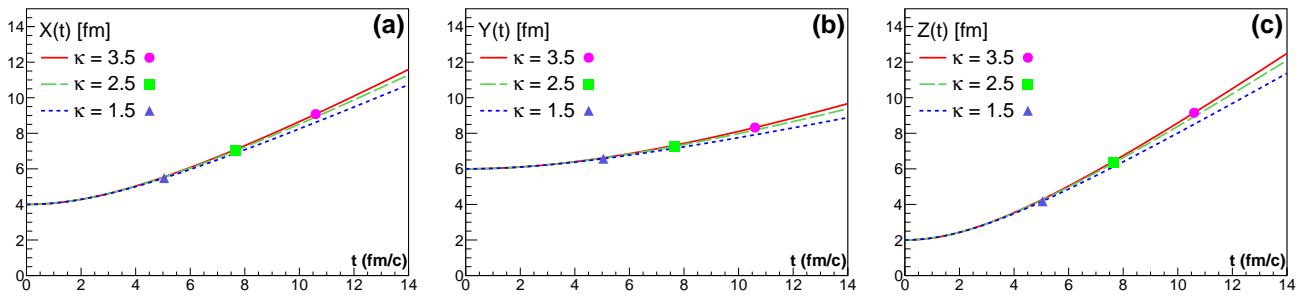
Ilyenkor tehát csakis a $\dot{\vartheta}+g$ határozódik meg, nem külön g és $\dot{\vartheta}$: nyilvánvaló, hogy forgásszimmetrikus ellipszoid esetén az összesített folyás-szögsebesség tetszőlegesen választható szét a koordináta-rendszer elforgatására és aztán ahhoz képesti forgó sebességmezőre. Ez olyan, mint valamiféle „mértékszabadság”. Kiköthetjük például, hogy itt is „igazságosan” felezzünk, azaz a $\dot{\vartheta}(t)=g(t)$ „mértékrögzítést” tesszük: így képletek szintjén is egyértelmű megoldást kapunk, amiről könnyen belátható ezután, hogy az $X \neq Z$ esetben tárgyalt (de ugye $\xi_0=0$ -t vett) megoldásnak valóban a forgásszimmetrikus speciális esetét kapjuk.

* * *

Analitikus alakban megtaláltuk tehát a nemrelativisztikus hidrodinamikai egyenletek korábban már sikerrel alkalmazott önhasonló ellipszoidális megoldásainak forgó általánosításait. Olyan releváns megoldásokat is találtunk, amelyek akármilyen állapotegyenlet (azaz akármilyen $\kappa(T)$ függvény) esetén működnek. Az alábbi 4.1. és 4.2. ábrák az állapotegyenlet hatását illusztrálják: egy tetszőlegesen (de nem valóságtól elrugaszkodottan) választott kezdőfeltétel-csomag esetén különféle (konstans) κ értékek esetén ábrázoljuk a (fentebb tárgyalt mozgásegyenletek numerikus megoldásából kapott) időfejlődést. A hadronikus mérhető mennyiségek (következő szakaszban tárgyalt) kiszámításához szükség van egy kifagyási feltételre (ld. a fentebbi 4.1.1. szakaszt): ennek most egyezményesen a $T_f = 140$ MeV hőmérséklet elérését tekintjük. Az ábrákon ezt is feltüntettük.



4.1. ábra. A hőmérséklet (balra) és a szögsebesség (jobbra) időfejlődése a háromtengelyű forgó nemrelativisztikus hidrodinamikai megoldásban különböző (fix κ -kkal vett) állapotegyenletek esetén. A színes pontok azt az időpillanatot tüntetik fel, amikor a kifagyás történik (az alapján, hogy a hőmérséklet adott $T_f = 140$ MeV értékre csökken). A kezdőfeltételek: $\dot{X}_0 = \dot{Y}_0 = \dot{Z}_0 = 0$, $m_0 = 938$ MeV, $T_0 = 300$ MeV, $X_0 = 4$ fm, $Y_0 = 6$ fm, $Z_0 = 2$ fm, és $\omega_0 = 0,15$ c/fm.



4.2. ábra. Az ellipszoid-tengelyek időfejlődése a forgó nemrelativisztikus hidrodinamikai megoldásunkban különböző (fix κ -kkal vett) állapotegyenletek esetén, ugyanazon kezdőfeltételekkel, mint az előző 4.1. ábra esetén. Mint ott is, most is a színes pontok a kifagyási feltétel elérését jelentik.

4.2.2. A mérhető mennyiségek kiszámítása

Az előző 4.2.1. szakaszban látott forgó megoldás önmagában is érdekes, és jól tükrözi azt, ahogyan egy nehézion-reakcióban keletkezett anyag időfejlődését elképzeljük. Megvizsgáljuk, hogy milyen végállapotbeli (hadronokra vonatkozó) mérhető mennyiségek és hogyan hordozzák a forgás hatását. A számításokat a [154] cikkben a tengelyszimmetrikus esetre, a [155] cikkben pedig a háromtengelyű esetre végeztük el, és mivel ez általánosabb, most ez utóbbira építkezünk.

A megfigyelhető mennyiségek kiszámítását a fentebbi 4.1.1. szakaszban mondottaknak megfelelően végezzük. A térben homogén T hőmérséklet és Gauss-alakú sűrűségprofil esetére koncentrálnunk: ezzel a legegyszerűbbek a számolások, és ez az, ami bármilyen $\kappa(T)$ állapotegyenlet esetén működik. Kifagyási feltételnek azt választjuk, hogy a T hőmérséklet érje el a $T_f = 140$ MeV értéket: a kifagyási hiperfelület tehát most $t = t_f$ konstans koordinátaidőt jelent; ekkorra minden időfüggő mennyiség egy meghatározott értéket vesz fel, jelesül az y tengely körüli elfordulás is: $\vartheta(t_f) \equiv \vartheta_f$. A számítások első lépését abban a most \bar{K}' -vel jelölt rendszerben végezhetjük, mely a K laborrendszerhez képest ϑ_f szöggel elfordult, de nem forog. Az ebből a rendszerből nézett sebesség- és impulzuskomponensek kapcsolata a már használt K - illetve a K' rendszerbeliekhez képest a fentebb (4.40)-ben definiált \mathbf{M} mátrixszal adható meg:

$$\bar{\mathbf{p}}' = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{p} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{p}'_x = p_x \cos \vartheta_f - p_z \sin \vartheta_f, \\ \bar{p}'_z = p_x \sin \vartheta_f + p_z \cos \vartheta_f, \end{cases} \quad \bar{\mathbf{v}}' = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{v} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{v}'_x = v'_x + \dot{\vartheta}_f r'_z, \\ \bar{v}'_z = v'_z - \dot{\vartheta}_f r'_x, \end{cases} \quad (4.60)$$

és az y -komponensek megint csak változatlanul ugyanazok minden rendszerben. A hadronikus megfigyelhető mennyiségek kiszámításához (4.2)-ben bevezetett forrásfüggvény nemrelativisztikus változatára így azt kapjuk (behelyettesítve a megoldás előző szakaszban megadott képleteit, és kihasználva, hogy konstans t_f időben történik a kifagyás), hogy

$$\begin{aligned} S(\mathbf{r}, \mathbf{p}) &\propto \frac{n(\mathbf{r}, t_f)}{T_f^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(\mathbf{p} - m\mathbf{v}(\mathbf{r}, t_f))^2}{2mT_f}\right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow S(\mathbf{r}', \bar{\mathbf{p}}') \propto \frac{n_0}{T_f^{3/2}} \exp\left\{-\frac{r'^2_x}{2X_f^2} - \frac{r'^2_y}{2Y_f^2} - \frac{r'^2_z}{2Z_f^2} - \frac{(\bar{\mathbf{p}}' - m\bar{\mathbf{v}}'(\mathbf{r}', t_f))^2}{2mT_f}\right\}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Itt elhagyunk olyan tagokat, amelyek az $N_1(\mathbf{p})$ egyrészecke-spektrum esetén csak az abszolút normálást befolyásolják, a $C_2(\mathbf{q}, \mathbf{K})$ Bose-Einstein-korrelációs függvényekből pedig kiesnek.⁶⁹

Az egyszerűbb jelölés kedvéért inentől hagyjuk a kifagyást jelentő f indexet az időfüggő mennyiségekről; minden ilyen a kifagyáskor értendő. A megfigyelhető mennyiségeket megadó képletek a fent felidézett (4.1) képlettel számíthatjuk ki. A választott megoldásunk esetében lényegében Gauss-integrálokat kell elvégezni ehhez. A spektrumra vonatkozó eredmény

$$N_1(\bar{\mathbf{p}}') = E \frac{dn}{d^3\bar{\mathbf{p}}'} = E \int d^3\mathbf{r}' S(\mathbf{r}', \bar{\mathbf{p}}') \propto E \exp\left(-\frac{1}{2m}\bar{p}'_k \mathbf{T}'^{-1} \bar{p}'_l\right), \quad (4.62)$$

ahol megjelenik a forrásfüggvény-integrandusban egy \mathbf{T}' szimmetrikus 3×3 -as mátrix, az eredményben pedig ennek inverze, \mathbf{T}'^{-1} kap szerepet. (A k, l indexekre összegzés értendő.) A spektrum csökkenésének ütemét tehát a \mathbf{T}'^{-1} mátrix elemei jellemzik; ez utóbbiakat ezért néha *lecsengés-paramétereknek* („slope parameter”) is nevezik. A mátrixelemek a mi esetünkben a következők:

$$\begin{aligned} T'_{xx} &= T + m(\dot{X}^2 + \omega^2 R^2), & \mathbf{T}'^{-1}_{xx} &= \frac{T'_{zz}}{T'_{xx}T'_{zz} - T'^2_{xz}}, \\ T'_{zz} &= T + m(\dot{Z}^2 + \omega^2 R^2), & \mathbf{T}'^{-1}_{zz} &= \frac{T'_{xx}}{T'_{xx}T'_{zz} - T'^2_{xz}}, \\ T'_{xz} &= T'_{zx} = m\omega R(\dot{X} - \dot{Z}), & \mathbf{T}'^{-1}_{xz} &= \frac{-T'_{xz}}{T'_{xx}T'_{zz} - T'^2_{xz}} = \mathbf{T}'^{-1}_{zx}, \\ T'_{yy} &= T + m\dot{Y}^2, & \mathbf{T}'^{-1}_{xy} &= \frac{1}{T'_{yy}}, \quad \mathbf{T}'^{-1}_{xy} = \mathbf{T}'^{-1}_{yz} = 0. \\ T'_{xy} &= T'_{yz} = 0, & & \end{aligned} \quad (4.63)$$

Az \mathbf{M} forgásmátrixszal (ld. (4.40) egyenletet) a K laborrendszerbe is átírhatjuk a spektrumra kapott kifejezésünket. Érdemes ezt megtenni, hiszen végső soron ez lesz az, amit mérni tudhatunk kísérletileg; az ebben a rendszerben adódó meredekség-paramétereket tartalmazó mátrixot értelemszerűen \mathbf{T} -vel (illetve \mathbf{T}^{-1} -gyel) jelöljük, és konkrétan komponensenként is megadjuk:

$$N_1(\mathbf{p}) \propto E \exp\left(-\frac{1}{2m}p_k \mathbf{T}^{-1} p_l\right), \quad \text{ahol} \quad \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{M}\mathbf{T}'^{-1}\mathbf{M}^{-1}, \quad (4.64)$$

ahol is tehát a forgásmátrix megfelelő elemeit összeszedve

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{-1}_{xx} &= \mathbf{T}'^{-1}_{xx} \cos^2\vartheta + \mathbf{T}'^{-1}_{zz} \sin^2\vartheta + \mathbf{T}'^{-1}_{xz} \sin(2\vartheta), & \mathbf{T}^{-1}_{yy} &= \mathbf{T}'^{-1}_{yy}, \\ \mathbf{T}^{-1}_{zz} &= \mathbf{T}'^{-1}_{xx} \sin^2\vartheta + \mathbf{T}'^{-1}_{zz} \cos^2\vartheta - \mathbf{T}'^{-1}_{xz} \sin(2\vartheta), & \mathbf{T}^{-1}_{xy} &= 0, \\ \mathbf{T}^{-1}_{xz} &= (\mathbf{T}'^{-1}_{zz} - \mathbf{T}'^{-1}_{xx}) \cos\vartheta \sin\vartheta + \mathbf{T}'^{-1}_{xz} \cos(2\vartheta), & \mathbf{T}^{-1}_{yz} &= 0. \end{aligned} \quad (4.65)$$

A \mathbf{p} komponensei szerint teljesen differenciált spektrum mérése helyett (amint a bevezető 1.1.2. szakaszban láttuk) sokszor a szögre átlagolt $\frac{1}{2\pi p_t} \frac{dn}{ddy dp_t}$ impulzuseloszlást illetve a v_n anizotrópia-paramétereket mérik (ld. az (1.5) egyenletet). A most tárgyalt hidrodinamikai modellünkben mindegyik Ψ_n reakciósík megegyezik (és egybeesnek az x - z síkkal); fontos megjegyezni, hogy ez

⁶⁹Használtuk továbbá a nemrelativisztikus ideális gázok statisztikus fizikájában előkerülő $n/(2\pi mT)^{3/2} = \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} e^{\mu/T}$ képletet, amellyel áttérhettünk $S(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ olyan felírására, amiben már az n szerepel: az így kapott felírás egyrészt jobban tükrözi az n mennyiség jelentését, másrészt közvetlenebbül alkalmazható a hidrodinamikai megoldásunkat jelentő képletek behelyettesítése szempontjából.

csak úgy realiztikus, ha nem vizsgáljuk a kezdeti állapot fluktuációinak hatását. A egyrészecskés spektrumot tehát most a következő, a gyakorlatban kézenfekvőbb alakba akarjuk átírni:

$$N_1(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi p_t} \frac{dn}{dp_t dy} \cdot \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cos[n\varphi] \right]. \quad (4.66)$$

A φ (x - z síkhoz képesti) azimutszöget használva a fentebb kapott kifejezésünk így alakul:

$$N_1(\mathbf{p}) \propto E \exp\left(-\frac{p_z^2}{2m} \mathbf{T}_{zz}^{-1} - \frac{p_t^2}{2m T_{\text{eff}}}\right) \times \exp(w \cos(2\varphi) + \mu \cos \varphi), \quad (4.67)$$

ahol a bevezetett mennyiségek jelentése⁷⁰

$$T_{\text{eff}} = \frac{2}{\mathbf{T}_{xx}^{-1} + \mathbf{T}_{yy}^{-1}}, \quad w = \frac{p_t^2}{4m} (\mathbf{T}_{yy}^{-1} - \mathbf{T}_{xx}^{-1}), \quad \mu = -\frac{p_t p_z}{m} \mathbf{T}_{xz}^{-1}. \quad (4.68)$$

A φ szög szerinti megfelelő Fourier-integrálokat elvégezhetjük a felírt (4.67) képletben μ szerint végzett sorfejtéssel, majd az egyes tagokban az $I_n(w) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\varphi \cos(n\varphi) e^{w \cos \varphi}$ integrál-előállítást ismerve (ahol is $I_n(w)$ a módosított Bessel-függvény). Ezzel a következőket kapjuk:

$$\frac{1}{2\pi p_t} \frac{dn}{dp_t dy} \propto E \exp\left(-\frac{p_z^2}{2m} \mathbf{T}_{zz}^{-1} - \frac{p_t^2}{2m T_{\text{eff}}}\right) \mathcal{I}_0(w, \mu), \quad (4.69)$$

$$\text{és } v_n = \frac{\mathcal{I}_n(w, \mu)}{\mathcal{I}_0(w, \mu)}, \quad (4.70)$$

ahol az $\mathcal{I}_n(w, \mu)$ segédmennyiségek tényleg csak ezen imént bevezetett változók függvényei. Megadhatjuk az őnekik a μ változó szerinti teljes sorukat is,⁷¹ azonban leginkább az $y \approx 0$ midrapiditás környéke érdekes, és itt a (p_z -vel arányos) μ mennyiség nem túl nagy, $y=0$ -nál pedig konkrétan 0. Így elég lehet a μ szerinti sor első tagjait megtartani, melyeket ezért explicitebben is megadunk:

$$\frac{1}{2\pi p_t} \frac{dn}{dp_t dy} \propto E \exp\left(-\frac{p_z^2}{2m} \mathbf{T}_{zz}^{-1} - \frac{p_t^2}{2m T_{\text{eff}}}\right) \times \left\{ I_0(w) + \frac{\mu^2}{4} [I_0(w) + I_1(w)] + \mathcal{O}(\mu^4) \right\}, \quad (4.71)$$

az anizotrópia-paraméterekre pedig

$$v_1 = \frac{\mu}{2} \left[1 + \frac{I_1(w)}{I_0(w)} \right] + \mathcal{O}(\mu^3), \quad (4.72)$$

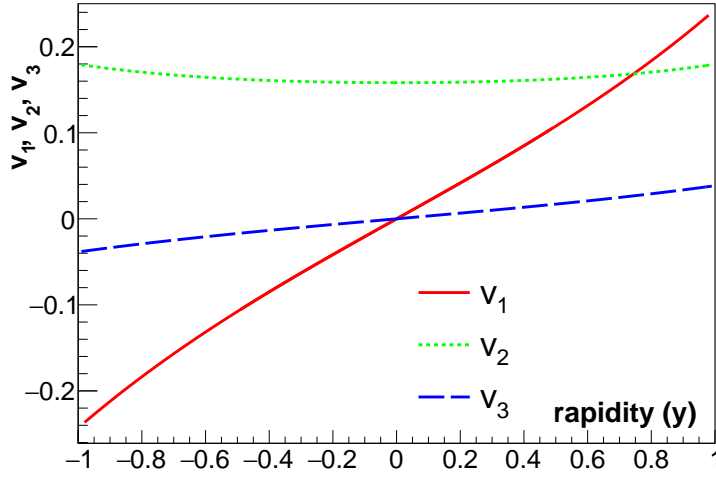
$$v_2 = \frac{I_1(w)}{I_0(w)} + \frac{\mu^2}{8} \left[1 + \frac{I_2(w)}{I_0(w)} - 2 \frac{I_1^2(w)}{I_0^2(w)} \right] + \mathcal{O}(\mu^4), \quad (4.73)$$

$$v_3 = \frac{\mu}{2} \frac{I_2(w) + I_1(w)}{I_0(w)} + \mathcal{O}(\mu^3). \quad (4.74)$$

Az alábbi 4.3. ábrán egy relatisztikusnak tekinthető kifagyáskori állapotnak megfelelő esetben megvalósuló v_1 , v_2 , v_3 mennyiségeket ábráztoltuk az y rapiditás függvényében.

⁷⁰Az itt μ -vel jelölt mennyiséget a [155] cikkben (a korábbi hasonló [123] cikkbeli jelöléssel való összhang kedvéért) v -vel jelöljük, de ez összekeverhető (volt) a sebességgel illetve a v_n anizotrópia-paraméterekkel.

⁷¹A teljes kifejezés a következő, páros illetve páratlan index esetére külön (tehát itt p nemnegatív egész): $\mathcal{I}_{2p}(w, \mu) = \sum_{k,l} \frac{I_{|k+p|}(w) + I_{|k-p|}(w)}{2^{2k+2l+1} (2k+l)! l!} \mu^{2k+2l}$, $\mathcal{I}_{2p+1}(w, \mu) = \sum_{k,l} \frac{I_{|k+p|}(w) + I_{|k-p|}(w)}{2^{2k+2l} (2k+l)! (l+1)!} \mu^{2k+2l+1}$, ahol minden $k \in \mathbb{Z}$ és $l \in \mathbb{Z}$ értékekre összegzünk, de azok a tagok, amelyek nevezőjébe nempozitív egész szám faktoriálisa kerülne, nullák.



4.3. ábra. A v_1, v_2, v_3 anizotrópia-paraméterek y rapiditástól való függésének illusztrációja a (4.74) képletek alapján. A paraméterek a következők: m -et a kaontömegnek, 494 MeV-nek választottuk (amely más szempontból nézve egy közepes m_t transzverz impulzusnak felel meg; ld. a diszkussziót), a hőmérséklet-paramétereket pedig $T'_{xx} = 300$ MeV, $T'_{xz} = -20$ MeV, $T'_{zz} = 500$ MeV, $T'_{yy} = 200$ MeV értékűeknek (ez összhangban van a geometriai várakozással valamint a kb. 140 MeV kifagyási hőmérséklettel), ezen felül az elfordulás szögét $\vartheta_f = \pi/8$, a részecskék transzverz impulzusát pedig $p_t = 600$ MeV/ c értékűnek vettük. A mutatott v_n -eket illetve a szögátlagolt spektrumot mérve rekonstruálhatók az impulzusspektrumot jellemző \mathbf{T} mátrix elemei (ld. a (4.65) egyenletet).

Kiszámíthatjuk a szabad Bose-Einstein-korrelációs függvényt is a (4.1) képlettel; rögtön a \bar{K}' (tehát az elfordult végállapotú ellipszoidhoz rögzített inerciális) rendszerben dolgozva

$$C_2^{(0)}(\bar{\mathbf{Q}}', \bar{\mathbf{K}}') = 1 + \lambda \frac{|\tilde{S}(\bar{\mathbf{Q}}', \bar{\mathbf{K}}')|^2}{|\tilde{S}(0, \bar{\mathbf{K}}')|^2}, \quad \tilde{S}(\bar{\mathbf{Q}}', \bar{\mathbf{K}}') \equiv \int d^3\mathbf{r}' e^{-i\bar{\mathbf{Q}}'\mathbf{r}'} S(\mathbf{r}', \bar{\mathbf{K}}'). \quad (4.75)$$

A forrásfüggvény (4.61) alakját használva elvégezhetjük a megfelelő (Gauss-)integrálokat; eredményül a korrelációs függvényre is Gauss-alakot kapunk. Rögtön átírjuk az eredményt a K laborrendszerre is; ehhez itt is a (4.40) egyenletbeli \mathbf{M} forgásmátrixot kell használni:

$$C_2^{(0)}(\bar{\mathbf{Q}}', \bar{\mathbf{K}}') = 1 + \lambda \exp\left(-\bar{Q}'_k \mathbf{R}'^2_{kl} \bar{Q}'_l\right) \Leftrightarrow C_2^{(0)}(\mathbf{Q}, \mathbf{K}) = 1 + \lambda \exp\left(-Q_k \mathbf{R}^2_{kl} Q_l\right), \quad (4.76)$$

ahol a k, l indexekre összegzés értendő, és a \bar{K}' illetve a K rendszerbeli megjelent (szimmetrikus) \mathbf{R}'^2 illetve \mathbf{R}^2 mátrixok, melynek elemei az úgynevezett HBT-sugárparaméterek, a következők:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}'^2_{xx} &= X^2 T \mathbf{T}'^{-1}_{xx}, & \mathbf{R}^2_{xx} &= \mathbf{R}'^2_{xx} \cos^2\vartheta + \mathbf{R}'^2_{zz} \sin^2\vartheta + \mathbf{R}'^2_{xz} \sin(2\vartheta), \\ \mathbf{R}'^2_{yy} &= Y^2 T \mathbf{T}'^{-1}_{yy}, & \mathbf{R}^2_{zz} &= \mathbf{R}'^2_{xx} \sin^2\vartheta + \mathbf{R}'^2_{zz} \cos^2\vartheta - \mathbf{R}'^2_{xz} \sin(2\vartheta), \\ \mathbf{R}'^2_{zz} &= Z^2 T \mathbf{T}'^{-1}_{zz}, & \Rightarrow \mathbf{R}^2_{xz} &= (\mathbf{R}'^2_{zz} - \mathbf{R}'^2_{xx}) \cos\vartheta \sin\vartheta + \mathbf{R}'^2_{xz} \cos(2\vartheta), \\ \mathbf{R}'^2_{xz} &= X Z T \mathbf{T}'^{-1}_{xz}, & \mathbf{R}^2_{yy} &= \mathbf{R}'^2_{yy}, \\ \mathbf{R}'^2_{xy} &= \mathbf{R}'^2_{xy} = 0 & \mathbf{R}^2_{xy} &= \mathbf{R}^2_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (4.77)$$

A felíráshoz itt a fentebbi (4.63) egyenletben bevezetett, az egyrészecsks-spektrum meredekség-paramétereit tartalmazó \mathbf{T}'^{-1} „inverz hőmérséklet-mátrix” elemeit használtuk.

A kísérleti analízisekben sokszor az úgynevezett Bertsch-Pratt-koordinátarendszert szokás használni (ld. a 2.1. szakaszt): ebben a \mathbf{Q} vektort a $q_l \equiv q_{\text{long}}$, $q_o \equiv q_{\text{out}}$ és $q_s \equiv q_{\text{side}}$ (nyalábirányú, K_t -irányú illetve ezekre merőleges) komponensekkel adjuk meg (ld. a (2.22) egyenletet). A \mathbf{K} vektor x - z síkhoz (reakciósíkhoz) képesti azimutiszögét φ -vel jelölve tehát

$$q_l = Q_z, \quad q_o = Q_x \cos \varphi + Q_y \sin \varphi, \quad q_s = -Q_x \sin \varphi + Q_y \cos \varphi, \quad (4.78)$$

amivel átírhatjuk a korrelációs függvényt ezen koordinátákba. Érdeemes azonban előtte egy fontos általánosítást, a véges ideig tartó kifagyás hatását megtárgyalni (ahogy ígértük például a 2.2.1 szakaszban, a (2.40) egyenlet után). Ha a kifagyás idő szerinti eloszlásának Δt szélessége kicsi, akkor úgy vehetjük, hogy ennyi idő alatt nem változik a dinamika, tehát minden egyéb mennyiséget a t_f -kori értékénél hagyhatunk; más szóval a forrásfüggvény alakjára feltesszük most, hogy

$$S(\mathbf{r}', t, \bar{\mathbf{P}}') = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\Delta t)^2}} \exp\left(-\frac{(t-t_f)^2}{2(\Delta t)^2}\right) \cdot S(\mathbf{r}', \bar{\mathbf{P}}') \Big|_{t=t_f}; \quad (4.79)$$

értelemszerű jelöléssel. Ez a változtatás egyáltalán nem befolyásolja a fentebb az egyrészecske-spektrumra kapott eredményeket, a Bose-Einstein-korrelációs függvényben viszont lesz hatása; ekkor ugyanis vissza kell térni a négydimenziós integrállal felírt korrelációs függvény (2.11) képletéhez: itt a $\bar{\mathbf{Q}}' \equiv (\bar{Q}'^0, \bar{\mathbf{Q}}')$ impulzuskülönbség-négyesvektort kell használni, amivel

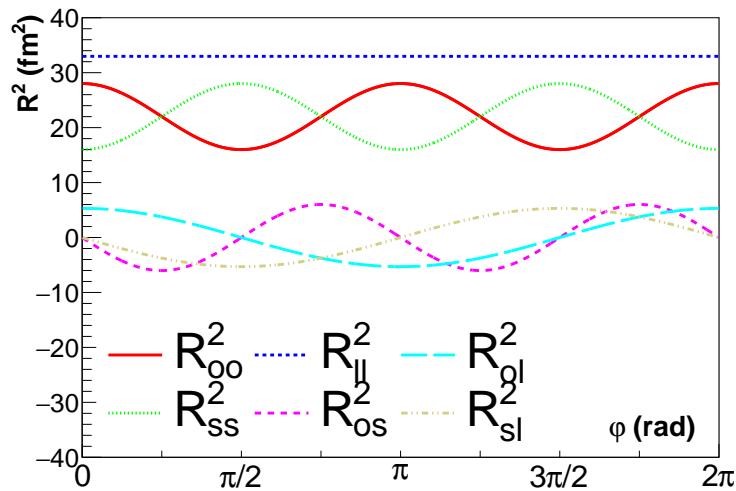
$$C_2^{(0)}(\bar{\mathbf{Q}}', \bar{\mathbf{K}}') = 1 + \lambda \frac{|\tilde{S}(\bar{\mathbf{Q}}', \bar{\mathbf{K}}')|^2}{|\tilde{S}(0, \bar{\mathbf{K}}')|^2}, \quad \tilde{S}(\bar{\mathbf{Q}}', \bar{\mathbf{K}}') \equiv \int d^3\mathbf{r}' dt e^{i\bar{Q}'^0 t - i\bar{\mathbf{Q}}' \cdot \mathbf{r}'} S(\mathbf{r}', t, \bar{\mathbf{K}}'), \quad (4.80)$$

és a $\bar{\mathbf{Q}}'$ már meghatározza a nulladik \bar{Q}'^0 komponenst a (2.5) egyenlet alapján: $\bar{Q}'^0 = \bar{\beta}' \bar{Q}'$, ahol $\bar{\beta}' = \frac{\bar{\mathbf{K}}'}{K'^0}$ az átlagos impulzushoz tartozó sebesség (a \bar{K}' rendszerből nézve). Arra jutunk ebből, hogy a Δt megjelenésének az a hatása, hogy a sugárparamétereket tartalmazó \mathbf{R}'_{kl} illetve az \mathbf{R}_{kl} mátrixokhoz egy $\bar{\beta}'_k \bar{\beta}'_l (\Delta t)^2$ illetve $\beta_k \beta_l (\Delta t)^2$ illetve járulék adódik, vagyis a korábban a 2.2.1. szakaszban mondott módon a véges Δt hatása valóban beleskálázható a geometriai méretekbe. Ezeket is figyelembe véve a Bertsch-Pratt-koordinátákban felírt korrelációs függvény alakja (értelemszerűen a β vektort is β_1 és β_o komponensekkel felírva; a β *side*-irányú komponense nulla):

$$C_2^{(0)}(\mathbf{Q}, \mathbf{K}) = 1 + \lambda \exp\left(-\sum_{k,l=o,s,1} q_k \mathbf{R}_{kl}^2 q_l\right), \quad \begin{aligned} R_{oo}^2 &= \mathbf{R}_{xx}^2 \cos^2 \varphi + \mathbf{R}_{yy}^2 \sin^2 \varphi + \beta_o^2 (\Delta t)^2, \\ R_{ss}^2 &= \mathbf{R}_{xx}^2 \sin^2 \varphi + \mathbf{R}_{yy}^2 \cos^2 \varphi, \\ R_{ll}^2 &= \mathbf{R}_{zz}^2 + \beta_1^2 (\Delta t)^2, \\ R_{os}^2 &= (\mathbf{R}_{yy}^2 - \mathbf{R}_{xx}^2) \sin \varphi \cos \varphi, \\ R_{ol}^2 &= \mathbf{R}_{xz}^2 \cos \varphi + \beta_1 \beta_o (\Delta t)^2, \\ R_{sl}^2 &= -\mathbf{R}_{xz}^2 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Az LCMS-rendszerben $\beta_1 = 0$, így ekkor a Δt hatása az azimutiszögre átlagolás után valóban az $R_{oo}^2 - R_{ss}^2 = \beta_o^2 (\Delta t)^2$ módon jelentkezik a sugárparaméterekben (ld. a korábbi (1.9) egyenletet).

Az alábbi 4.4. ábrán a pár-impulzus φ azimutiszögének függvényében ábrázoltuk az egy adott kifagyáskori állapothoz tartozó Bertsch-Pratt-sugárparamétereket.



4.4. ábra. A Bertsch-Pratt-rendszerbeli HBT-sugarak azimutszög-függése a tárgyalt hidrodinamikai modellben a (4.77)–(4.81) képletek alapján; realiztikus ($\mathbf{R}'^2_{xx} = 25 \text{ fm}^2$, $\mathbf{R}'^2_{yy} = 16 \text{ fm}^2$, $\mathbf{R}'^2_{zz} = 36 \text{ fm}^2$, $\mathbf{R}'^2_{xz} = 2 \text{ fm}^2$, $\vartheta \equiv \vartheta_f = \frac{\pi}{8}$) kifagyáskori értékekből kiindulva. Az ábra $\Delta t = 0$ értéket véve készült; a $\Delta t \neq 0$ érték konstans eltolást okozna (leginkább R^2_{oo} értékében, ld. a (4.81) egyenletet).

4.2.3. Az eredmények diszkussziója

Az előző szakaszban levezetett képletek (mint ahogyan a vizsgált megoldás is) nemrelativisztikusak; így volt lehetőség az egyszerű tárgyalásra. A korábban ismert nem forgó esetben kiderült, hogy a nemrelativisztikus megoldásokat relativisztikusan általánosító Buda-Lund-parametrizációban [35, 143] lényegében annyi a fő változás, hogy a keletkező hadron m tömegét, mely a megfigyelhető mennyiségek nemrelativisztikus kifejezéseiben szabad paraméter, az $m_t = \sqrt{m^2 + p_t^2}$ transzverz tömeggel kell helyettesíteni. Ezért (noha a Buda-Lund-parametrizáció forgó általánosítása még nem befejezett) az előző szakasz képleteit úgy nézhetjük, hogy azok tükrözik a forgás hatását, és a relativisztikus képleteket minden bizonnyal az $m \rightarrow m_t$ cserével kell majd kapni. Például a HBT-sugarak (R_{oo} , R_{ss} stb.) a pár K_t transzverz impulzusától függetlenül adódtak: ez nemrelativisztikus jellegzetesség; ha a Bertsch-Pratt-sugárparaméterek kifejezésében (meglehetősen körülményesen, a (4.63), a (4.77) és a (4.81) egyenleteken keresztül) szereplő m tömeget m_t -vel helyettesítjük, akkor közelítőleg kiadódik az $1/R^2$ mennyiségekre az m_t -ben lineáris, $A + Bm_t$ jellegű függés. Ez jól egybevág sok egyéb modellszámítással illetve univerzális kísérleti tapasztalattal is (amint az előző 3. fejezetben is előkerült; lásd például [37, 109, 156]).

A forgás hatásának megjelenését tekintve a képleteink a [123] kézenfekvő általánosításai. Ott nem forgó megoldással dolgoztak, a végső ellipszoid elfordulási szögét *ad hoc* módon vezették be. A most tárgyalt modell dinamikailag tárgyalja a forgást; így jóval realiztikusabb. Továbbra is fennáll a v_2 elliptikus folyás jellegzetes viselkedése; a fentebb levezetett (4.71)–(4.74) képletek lényegében így szerepeltek a [123] hivatkozásban is. Ami változott, az az, hogy a w és a μ „skálaváltozók” (amelyeken keresztül v_2 a paraméterektől függ) hogyan tartalmazzák a kezdeti paramétereket: a mostani realiztikusabb modellben ezekben nemcsak a ϑ_f elfordulási szög, hanem az ω_f forgási szögsebesség

is megjelenik. Hasonló vonatkozik a HBT-sugárparaméterekre: a korábbi eredményeken is látszott, hogy az R_{oo}^2 , R_{ss}^2 és R_{os}^2 φ azimutszög szerinti π periódusú oszcillációja az ellipszoidális forrásalak, az R_{ol}^2 és R_{sl}^2 sugárparaméterek 2π periódusú oszcillációja pedig az y tengely körüli elfordultság jellemzője (a [123] és a még korábbi egyszerűsített [157] modellben is). Mostani modellünkben a forgómozgás hatása is jelentkezik ez utóbbiakban.

Ahogy megjegyeztük fentebb, a páratlan rendű v_n -ekben a kezdeti állapot fluktuációja is megjelenik; a mostani hidrodinamikai számolásaink ezt leválasztva érvényesek. Az elfordulás leginkább jellemző sajátossága a v_1 anizotrópia-paraméternek az y rapiditástól (páratlan függvényként való) függése illetve az R_{ol}^2 , R_{sl}^2 sugarak mondott 2π periódusú oszcillációja (ld. a fentebbi 4.3. és 4.4. ábrákat). A v_1 ilyen rapiditásfüggését kiterjedten mérjük; mindenesetre ebből jelenleg nem lehet teljesen egyértelmű következtetést levonni az elfordulás szögére. Ennek oka utóbbi mennyiség kísérletileg nem egészen egyértelmű volta (erről ld. rögtön), illetve az, hogy az R_{ol}^2 , R_{sl}^2 oszcillációit igen nehéz mérni, mert kombinált első- és másodrendű (Ψ_1 és Ψ_2) reakciósík-információ kell hozzá. Tudtommal a RHIC-nél nem is végeztek ilyen szisztematikus vizsgálatot ezen mennyiségekre; a most tárgyalt modell (és az alább látott implikációk) nagy motivációt jelenthetnek ehhez.

Az elfordulás szögének vizsgálata arra vezet, hogy a ϑ_f mennyiség (melyet most ϑ_r módon jelölünk, minthogy ő a koordinátatérbeli elfordulás) mellett bevezethetjük a most ϑ_p illetve a ϑ_q módon jelölt szögeket: ezek az impulzusspektrum illetve a Bose-Einstein-korrelációs függvény elfordulási szögei (amilyen szögű y tengely körüli elforgatással a K -ból kapott rendszerből nézve az impulzusspektrum illetve a korrelációs függvény diagonális). A spektrumot illetve a korrelációs függvényt jellemző fentebb bevezetett \mathbf{T}'^{-1} illetve \mathbf{R}'^2 mátrixok alapján, 2×2 -es mátrixokra vonatkozó egyszerű összefüggések használatával könnyen meghatározhatjuk ezen szögeket:

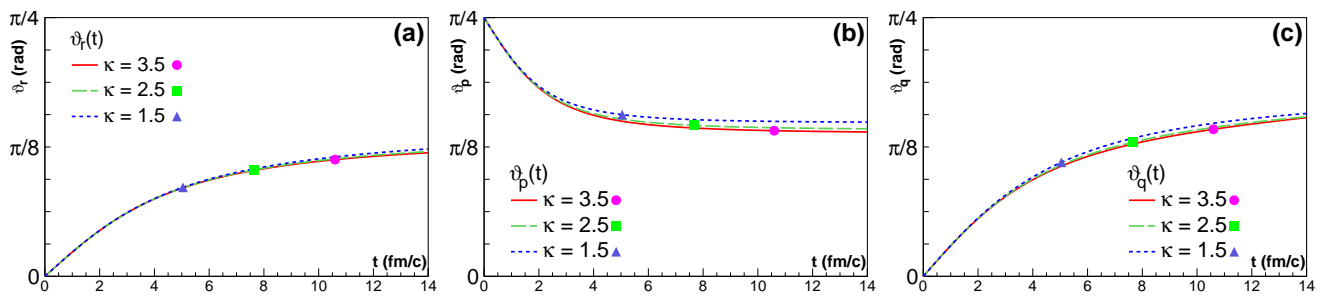
$$\begin{aligned} \vartheta_p &= \vartheta_r + \vartheta'_p, \\ \vartheta_q &= \vartheta_r + \vartheta'_q, \end{aligned} \quad \text{ahol} \quad \text{tg}(2\vartheta'_p) = \frac{2T'_{xz}}{T'_{xx} - T'_{zz}} \quad \text{és} \quad \text{tg}(2\vartheta'_q) = \frac{2R'^2_{xz}}{R'^2_{xx} - R'^2_{zz}} \quad (4.82)$$

A ϑ'_p és ϑ'_q szögek tehát a spektrum és a korrelációs függvény sajátrendszerének a már koordinátatérben elforgatott \overline{K}' rendszerhez képesti további elfordulását jelentik. A konkrét kifejezéseik

$$\text{tg}(2\vartheta'_p) = \frac{2\omega R}{\dot{X} + \dot{Z}}, \quad \text{tg}(2\vartheta'_q) = \frac{2mXZ\omega R(\dot{Z} - \dot{X})}{(T + m\omega^2 R^2)(X^2 - Z^2) + m(X^2 \dot{Z}^2 - Z^2 \dot{X}^2)}. \quad (4.83)$$

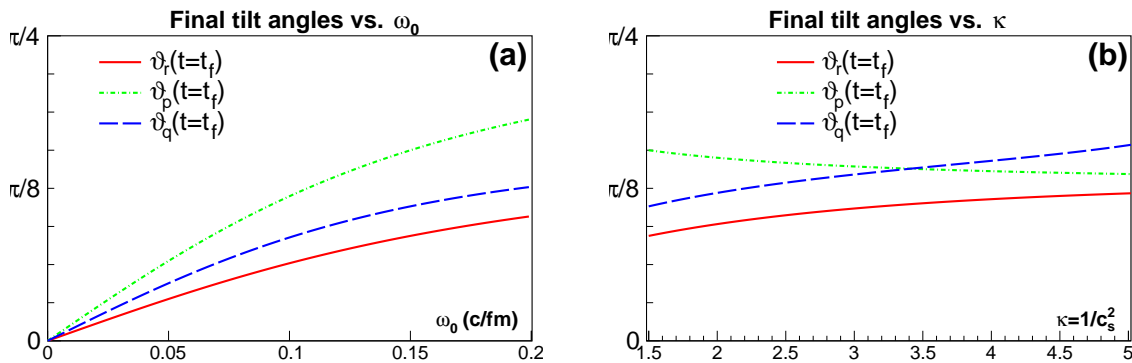
Érdekes, hogy ϑ_p nem függ a részecske m tömegétől, ϑ_q viszont igen, és nulla, ha formálisan $m=0$ -t veszünk. Ha a relativisztikus általánosítás a fentebb mondott módon valóban az $m \rightarrow m_t$ cserét jelenti, akkor láthatjuk, hogy a ϑ_q HBT-elfordulási szögnek a részecskepár m_t transzverz tömegének függvényében való mérésével az $m_t \rightarrow 0$ limeszben le lehet olvasni a végső ϑ_r geometriai elfordulást. A mondott elfordulási szögek méréséhez szükség van (a mindig is mért anizotrópia- és HBT-sugárparaméterek mellett) a fentebb külön kiemelt v_1 illetve R_{ol}^2 , R_{sl}^2 sugárparaméterek mérésére.

A 4.5. ábrán az elfordulási szögek időfejlődését illusztráljuk különféle (konstans) κ értékeket vett állapotegyenletek esetén; valójában persze a kifagyáskori (külön jelölővel jelölt) ϑ_p és ϑ_q értékek mérhetők.



4.5. ábra. Illusztráció az x - z síkbeli elfordulási szögek időfejlődéséről a hidrodinamikai megoldásunkban, különféle állapotegyenletek esetén, a kifagyáskori értékek kiemelésével. a): a koordinátatérbeli ellipszoidok (a K' rendszernek K -hoz képesti) elfordulása, b): a $\vartheta_{\mathbf{p}}$ elfordulási szög; az impulzusspektrum sajátrendszerének elfordulása, c): a $\vartheta_{\mathbf{q}}$ szög; a HBT-korrelációs függvény sajátrendszerének elfordulása. Utóbbi kettő mérhető kísérletileg. A mostani ábrákhoz használt paraméterek és kezdőfeltételek megegyeznek a 4.1., a 4.3. és a 4.4@ ábrákéival.

Látszik, hogy a kifagyáskori értékek valóban érzékenyek az állapotegyenletre; a 4.5. ábrán látott esetben a $\vartheta_{\mathbf{q}}$ inkább, mint a $\vartheta_{\mathbf{p}}$, azonban ez a trend más paraméter-értékeket véve másképp alakulhat. Az alábbi 4.6. ábra a kifagyáskori elfordulási szögeket mutatja a kezdeti ω_0 szögsebesség illetve az állapotegyenletet jellemző κ konstans függvényében.



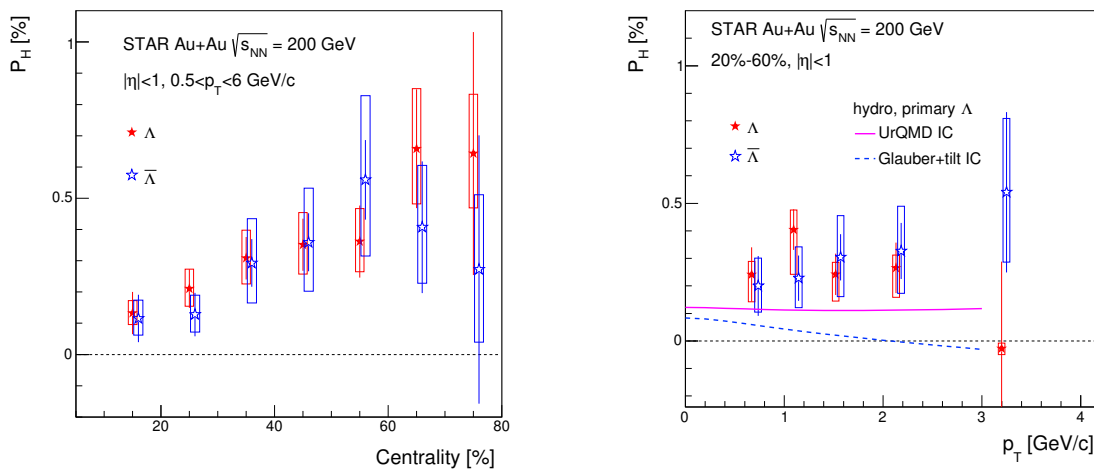
4.6. ábra. A kifagyáskori elfordulási szögek ($\vartheta_{\mathbf{r}}$, $\vartheta_{\mathbf{p}}$, $\vartheta_{\mathbf{q}}$; ld. a szövegben és az előző 4.5. ábra magyarázatában) paraméterfüggése; a): a kezdeti ω_0 szögsebesség függvényében $\kappa = 1,5$ fix értékkel, b): az $\omega_0 = 0,15$ c/fm fix értéknél a κ függvényében. Az összes tovább paramétert a 4.5. ábrán szereplőkkel megegyezőkné választottuk.

Most nem vizsgáljuk tovább szisztematikusan az összes lehetséges állapotegyenlet esetét (azaz a megoldásunkban tetszőleges $\kappa(T)$ függvényalakok implikációit). Látjuk mindenesetre, hogy érdemes a $\vartheta_{\mathbf{p}}$ és $\vartheta_{\mathbf{q}}$ szögek szimultán mérésére szisztematikus mérési programot véghezvinni. Így (a jelen 4.2. szakasz bevezetőjében mondottakkal is összhangban) valóban a állapotegyenletről nyerhetünk információt; az ütközési energia függvényében való esetleges nemmonoton viselkedés feltárása pedig a kritikus pont kísérleti kereséséhez járulhat hozzá. A jelen szakaszban kifejtett hidrodinamikai modell (matematikai érdekessége mellett) ehhez a munkához ad hasznos táptalajt.

4.3. Polarizált barionok keltése analitikus hidrodinamikai modellben

Az eddig tárgyalt megfigyelhető mennyiségek (egyrészecske-eloszlás, Bose-Einstein-korrelációk) mellett az utóbbi években egy újabb mennyiség is szerephez jut a nehézion-fizikai kísérletekben: a keletkező barionok (melyek feles spinű részecskék) polarizációja. Ennek mérése a kísérleti adatmennyiség növekedésével vált lehetővé: leginkább a Λ (és a $\bar{\Lambda}$) barion polarizációja mérhető a fő bomlási csatornában (a paritássértő $\Lambda \rightarrow p\pi^-$ illetve $\bar{\Lambda} \rightarrow \bar{p}\pi^+$ bomlásokban) keletkező részecskék irányeloszlásából.⁷² A fő motivációt az jelenti, hogy egy elméletileg nem teljesen megalapozott, de széles körben igaznak elfogadott gondolatmenet szerint a forgó közeg tágulása során a spinek mint szabadsági fokok is termalizálódnak, mintegy átveszik a forgás hatását [158]. Így tehát a végállapotban keletkezett barionok polarizációja nem eltűnő lesz, és a közeg forgó mozgásának mértékéről hordoz (az előző szakaszban tárgyalt megfigyelhető mennyiségektől független) információt.

A (leginkább a STAR együttműködés által elért) kísérleti eredmények azt mutatják, hogy a nehézion-ütközésekben a Λ -barionok noha csak százalék nagyságrendű, de jól mérhető, a centralitással monoton módon csökkenő (azaz centrálisabb ütközésben kisebb) polarizációval keletkeznek, továbbá kisebb és az ütközési energián nő a polarizáció mértéke [159–164]. A polarizáció fő iránya a nyálábtengelyre és a reakciósíkra merőleges, mint az előző szakaszban is, most is y -nal jelölt irány, mely az impulzusmomentum iránya is.



4.7. ábra. A STAR kísérlet mérése $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV-es arany-arany ütközésekben keletkezett Λ -barionok polarizációjára (bal oldalon: a centralitás függvényében, jobb oldalon: a p_t transzverz impulzus függvényében, hidrodinamikai modellekkel is összevetve); a [160] hivatkozásból átvéve.

A mondott előzmények után sok numerikus hidrodinamikai számolás látott napvilágot, amely valóban nemnulla polarizációt jósolt [165–168]. Azonban itt is (mint az egyéb megfigyelhető mennyiségek leírása esetében is) lenne tér az egzakt, analitikus hidrodinamikai megoldások használatára: ilyenek tárhatják fel képletek szintjén a kapcsolatot a kezdeti állapot, a végállapot és a polarizáció között. Ez motiválta az ebben a szakaszban kifejtett számolást: a kitűzött cél az lett, hogy

⁷²Hasonló módon például a Ξ -hiperon polarizációja is mérhető. Természetesen a legtöbb keletkező barion proton, azonban a jelen tudásunkkal elképzelhető kísérleti berendezésekkel ezek polarizáció-mérése lehetetlen.

vizsgáljuk meg a polarizációt mint megfigyelhető mennyiséget egzakt hidrodinamikai megoldások keretei között. Az alábbiakban az első ilyen vizsgálatot mutatom be a [169] publikációnk alapján.

A polarizált barionkeltés leírásának lényege az [158, 167], hogy adott p (négyes)impulzussal keletkező részecskék $\langle S(p) \rangle^\mu$ polarizációs négyesvektora egy lokális polarizációs $\langle S(x, p) \rangle^\mu$ négyesvektor várható értékeként adható meg:

$$\langle S(p) \rangle^\mu = \frac{\int d^3\Sigma_\nu p^\nu f(x, p) \langle S(x, p) \rangle^\mu}{\int d^3\Sigma_\nu p^\nu f(x, p)}, \quad (4.84)$$

ahol figyelembe vettük a Cooper-Frye-előírást (ld. a 4.1.1. szakaszt; $d^3\Sigma_\mu(x)$ a kifagyási hiperfelületi mérték). Itt $f(x, p)$ a részecskék keletkezését leíró lokális termikus Fermi-Dirac-eloszlás:

$$f(x, p) = \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{p^\mu u_\mu(x)}{T(x)} - \frac{\mu(x)}{T(x)}\right) + 1}, \quad (4.85)$$

melyet azonban a nagyenergiás ütközések ilyen fenomenológiai leírásában szokásos módon (illetve kis „betöltöttség” esetén, ami a ritkább Λ , Ξ stb. barionokra minden bizonnyal igaz) közelíthetünk úgy, hogy egyrészt Maxwell-Boltzmann-eloszlást veszünk (azaz elhagyjuk a $+1$ -et a nevezőből), másrészt $\mu=0$ -t írunk. Ha $\frac{\mu}{T} = 0$ helyett $\frac{\mu}{T} = \text{konstans}$ feltételezéssel élünk, az konstans szorzót adna a számlálóban és a nevezőben is.⁷³ Az alábbiakban tehát úgy vesszük, hogy

$$f(x, p) = C_0 \exp(-p^\mu \beta_\mu(x)), \quad \text{ahol} \quad \beta^\mu(x) = \frac{u^\mu(x)}{T(x)} \quad \text{és} \quad C_0 = \frac{g}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (4.86)$$

Itt bevezettük a $\beta^\mu(x)$ négyesvektor-mezőt, az úgynevezett inverz hőmérsékletmezőt. Érdeemes megjegyezni, hogy (tudva, hogy u^μ mindenképpen 1-re normált, $u^\mu u_\mu = 1$) ez utóbbi $\beta^\mu(x)$ vektormező egyszerre tartalmazza a $T(x)$ -re és $u^\mu(x)$ -re vonatkozó információt; mindketten rekonstruálhatók belőle: $\frac{1}{T(x)} = \sqrt{\beta^\mu(x) \beta_\mu(x)}$, majd $u^\mu(x) = T(x) \beta^\mu(x)$.

A polarizáció leírásának leglényegesebb eleme viszont az $\langle S(x, p) \rangle^\mu$ helyfüggő négyesvektor, melyre a [158] cikk alapján, feltéve, hogy a spin-szabadságifokok is lokálisan termalizálódnak, a következő alakot fogadjuk el:

$$\langle S(x, p) \rangle^\mu = \frac{1}{8m} (1 - f(x, p)) \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\sigma \partial_\nu \beta_\rho. \quad (4.87)$$

Itt $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ a négydimenziós Lévi-Civita-tenzor ($\varepsilon^{0123} = 1$, teljesen antiszimmetrikus), m pedig a keletkezett barion tömege. A numerikus hidrodinamikai modellek az itt elővezetett képleteket használják a polarizáció kiszámítására (ld. pl. [167]); az alábbiakban mi is ezeket használjuk, de a $\mu(x)$, $T(x)$, $u^\mu(x)$ stb. mezőket egzakt hidrodinamikai megoldásokból vesszük.

Választásunk a lényegében egyetlen ismert olyan relativisztikus hidrodinamikai megoldásra

⁷³A $\mu=0$ feltételt úgy is mondhatjuk úgy, hogy nem vizsgálunk megmaradó n részecskeszámot. Ami a $\mu/T = \text{konstans}$ feltételt illeti, megjegyezzük, hogy az anyag állapotegyenletét is figyelembe véve (nem eltűnő n esetén) írhatnánk olyan alakban is az $f(x, p)$ függvényt, amiből egyértelmű, hogy teljesül az $\int dp f(x, p) = n(x)$ normálás. Például ultrarelativisztikus ideális gáz esetén $p = nT$, $\varepsilon = \kappa p$, és $\kappa = 3$, amiből $\frac{g}{(2\pi\hbar)^d} e^{\mu/T} = \frac{n}{4\pi T^3}$ adódik, vagyis ekkor μ/T konstans volta azt jelenti, hogy $n \propto T^3$, ami egyrészt az adiabatikus tágulás ismert jellemzője, másrészt valóban teljesül az alább tárgyalandó esetben.

esett, amely forgást is tartalmaz: ez a fentebbi 4.1.3. szakasz végén a (4.36) egyenletben felidézett, 2011-ben általam talált, a [151] cikkben leírt megoldás. Külön kényelmes a mostani számítások szempontjából, hogy ezen megoldást a \mathbf{v} , T mezők használata helyett szinte könnyebben fel is írhatjuk a most előtérbe került β^μ négyesvektor (inverz hőmérsékletmező) segítségével:⁷⁴

$$\mathbf{v} = \frac{2t\mathbf{r} + \rho_0^2\mathbf{v}_0 + \tau^2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}}{t^2 + r^2 + \rho_0^2}, \quad T = T_0 \frac{\tau_0^2}{t^2 + r^2 + \rho_0^2} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad n = n_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow \quad \beta^\mu(x) = a^\mu + F^{\mu\nu} x_\nu + (x^\nu b_\nu) x^\mu - \frac{x^\mu x^\mu}{2} b^\mu, \quad (4.88)$$

ahol a konstan a^μ , b^μ négyesvektorok és az antiszimmetrikus $F^{\mu\nu}$ tenzor kapcsolata a megoldásban szereplő paraméterekkel (szokásos tér-idő-szeletelt kijelölésben)

$$a^\mu = \frac{\rho_0^2}{2T_0\tau_0^2} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad b^\mu = \frac{1}{T_0\tau_0^2} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad F_{\mu\nu} = \frac{1}{2T_0} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{\Omega} \times \end{pmatrix}. \quad (4.89)$$

A kifagyási hiperfelületet a $\tau \equiv \sqrt{t^2 - \mathbf{r}^2} = \tau_0$ konstans sajátidejű felületnek vesszük: ez a τ_0 azonosnak vehető a megoldás felírásában szereplő τ_0 -lal; T_0 ekkor az $\mathbf{r} = 0$ koordinátájú pontban a kifagyáskori hőmérsékletet jelenti.

Rátérve a polarizáció számítására láthatjuk, hogy a (4.84) képlet nevezőjében éppen az invariáns impulzuseloszlás (egyrészecske-spektrum) szerepel, amit ezért most szintén kiszámítunk (mellesleg ezt sem végezték még el korábban erre a most tárgyalt relativisztikus hidrodinamikai megoldásra). Beírva a fentebbi képleteket, a hiperfelületi mértéket a (4.4) egyenletből véve, és a kifagyási hiperfelületet az \mathbf{r} vektorral paraméterezve (vagyis $t = \sqrt{\tau_0^2 + \mathbf{r}^2}$ -et véve), a részecske \mathbf{p} hármassimpulzusát illetve $E = \sqrt{m^2 + p^2}$ energiáját használva azt kapjuk, hogy

$$\int d^3\Sigma_\nu p^\nu f(x, p) \equiv E \frac{dn}{d^3\mathbf{p}} = C_0 \int d^3\mathbf{r} \left(E - \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{\sqrt{\tau_0^2 + r^2}} \right) \times$$

$$\times \exp \left\{ - \frac{E(2r^2 + \tau_0^2 + \rho_0^2) - 2\sqrt{\tau_0^2 + r^2} \mathbf{p}\mathbf{r} - \tau_0^2 \mathbf{r}(\mathbf{p} \times \boldsymbol{\Omega})}{T_0\tau_0^2} \right\}. \quad (4.90)$$

Ez az integrál mint integrál mindenképpen létezik, de analitikus alakban nem igazán végezhető el. A szükséges mértékben teljesen pontos közelítő képlet kapható azonban Gauss-közelítéssel.⁷⁵

Felidézzük: N dimenzióban a Gauss-közelítés olyan $f, g: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ függvények szorzatának integráljára használható, ahol az f függvénynek éles maximum-csúcsa van egy jól definiált \mathbf{r}_0 pontban (melyet a $\partial_k f(\mathbf{r}_0) = 0$, $k = 1 \dots N$ egyenletek megoldásával lehet megkeresni), ettől távolodva gyorsan eltűnik, a g függvény pedig nem túl gyorsan változik \mathbf{r}_0 környékén. Ekkor $f(\mathbf{r})$ -et egy \mathbf{r}_0 -ra koncentrált Gauss-alakkal közelítjük, melynek nagyságát (amplitúdóját) az $f(\mathbf{r}_0)$ függvényérték adja meg, a kitevőjében szereplő kvadratikus alakot pedig az f függvény \mathbf{r}_0 -beli másodikderiváltmátrixából véve olyannak állítjuk be, hogy a második deriváltak szintjén is megegyezzen \mathbf{r}_0 -ban az eredeti f függvény és a Gauss-alak. A másik g tényezőtt pedig egyszerűen \mathbf{r}_0 -beli konstans

⁷⁴Visszatekintve ezen megoldás megtalálásában éppen a β^μ vektormező ilyen alakú felírása jelentette a fő lépést.

⁷⁵A [169] cikkben egyfajta szóhasználati hagyomány miatt ezt *nyeregponthi integrálásnak* hívtuk; utóbbi fogalom elvileg általánosabb, a Gauss-közelítésnek komplex függvények közé való kiterjesztésével kapott módszert takar.

értékével helyettesítjük. Ezen közelítő alakok szorzatát ezután az ismert Gauss-integrálképletekkel integrálva kapjuk az eredményt, melyet az eredeti integrál Gauss-közelítésének nevezünk:

$$\int d^N \mathbf{r} g(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) \approx g(\mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}_0) \sqrt{\frac{(2\pi)^N}{\det \mathbf{M}}}, \quad \text{ahol } \mathbf{M}_{kl} = \frac{\partial_k \partial_l f(\mathbf{r}_0)}{-f(\mathbf{r}_0)}, \quad \text{és } \partial_k f(\mathbf{r}_0) = 0. \quad (4.91)$$

A fentebbi (4.90) integrálhoz az ottani exponenciális tényezőt kell a csúcsos $f(\mathbf{r})$ függvénynek tekinteni. Az \mathbf{r}_0 maximumhely megkereséséhez elég ekkor a kitevő deriváltját vizsgálni:

$$\begin{aligned} \nabla \left\{ -\frac{1}{T_0 \tau_0^2} \left(E(2r^2 + \tau_0^2 + \rho_0^2) - 2\sqrt{\tau_0^2 + r^2} \mathbf{r} \mathbf{p} - \tau_0^2 \mathbf{r} (\mathbf{p} \times \boldsymbol{\Omega}) \right) \right\} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} &\stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4E\mathbf{r}_0 - 2\sqrt{\tau_0^2 + r_0^2} \mathbf{p} - \frac{2(\mathbf{p} \mathbf{r}_0)}{\sqrt{\tau_0^2 + r_0^2}} \mathbf{r}_0 - \tau_0^2 (\mathbf{p} \times \boldsymbol{\Omega}) &= 0. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Adott \mathbf{p} vektor esetén ez alapján \mathbf{r}_0 a \mathbf{p} és a rá merőleges $\mathbf{p} \times \boldsymbol{\Omega}$ vektorok lineárkombinációja lesz; így keresve a megoldást végül arra jutunk, hogy (most $\hat{\mathbf{p}}$ -pal jelölve a \mathbf{p} irányú egységvektort)

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\tau_0^2}{2p} \sqrt{\frac{E-m}{2m}} \left\{ \frac{1}{\tau_0} \sqrt{\tau_0^2 (\hat{\mathbf{p}} \times \boldsymbol{\Omega})^2 (E-m)^2 + 4p^2} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \sqrt{2m(E-m)} \cdot \hat{\mathbf{p}} \times \boldsymbol{\Omega} \right\}, \quad (4.93)$$

a másodikderivált-mátrixra pedig a következő adódik:

$$\mathbf{M}_{kl} = \frac{2}{T_0 \tau_0^2} \left\{ \left(2E - \frac{\mathbf{p} \mathbf{r}}{A} \right) \delta_{kl} - \frac{p_k r_l + p_l r_k}{A} + \frac{\mathbf{p} \mathbf{r}}{A^3} r_k r_l \right\} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0}, \quad (4.94)$$

$$\text{ahol } A \equiv \frac{\tau_0}{2} \sqrt{\frac{4p^2 + (E-m)^2 \tau_0^2 (\hat{\mathbf{p}} \times \boldsymbol{\Omega})^2}{2m(E-m)}}. \quad (4.95)$$

Ezen \mathbf{M} mátrix determinánsára van szükségünk, melyet legkézenfekvőbbben a sajátértékeinek szorzataként kaphatunk meg. A \mathbf{p} és a $\mathbf{p} \times \boldsymbol{\Omega}$ irányok látható kitüntetettsége folytán „észrevehetjük”, hogy a $\mathbf{p} \times (\mathbf{p} \times \boldsymbol{\Omega})$ vektor sajátvektora \mathbf{M} -nek; a sajátértéket is megkaphatjuk ebből. Ezután pedig (mivel szimmetrikus valós mátrixról van szó) a másik két sajátvektort az erre merőleges, azaz a \mathbf{p} és a $\mathbf{p} \times \boldsymbol{\Omega}$ vektorok által kifeszített síkban kereshetjük, közben a maradék két sajátértéket is megkapva. A részletes számításokat a [169] cikk függelékében megtalálhatjuk; az eredmény:

$$\det \mathbf{M} = \frac{32m^2}{T_0^3 \tau_0^6} (E+m)p. \quad (4.96)$$

Ezzel és \mathbf{r}_0 fentebbi kifejezésével végül azt kapjuk, hogy Gauss-közelítésben

$$E \frac{dn}{d^3 \mathbf{p}} \propto \sqrt{\frac{\pi^3 T_0^3 \tau_0^3}{32p(m+E)}} \exp \left(-\frac{1}{T_0} \left[m + \frac{\rho_0^2}{\tau_0^2} E + \frac{\tau_0^2}{4} (\hat{\mathbf{p}} \times \boldsymbol{\Omega})^2 (E-m) \right] \right), \quad (4.97)$$

vagy egy kicsit kényelmesebb alakban felírva, bevezetve egyfajta $T_{\text{eff}}(E)$ „lokális meredekségparamétert” (mely tehát még szintén az energiától függ, de nagy E -knél már alig):

$$E \frac{dn}{d^3 \mathbf{p}} \propto \sqrt{\frac{\pi^3 T_0^3 \tau_0^3}{32p(m+E)}} e^{-E/T_{\text{eff}}(E)}, \quad \text{ahol } T_{\text{eff}}(E) = \frac{T_0}{\frac{m}{E} + \frac{\rho_0^2}{\tau_0^2} + \frac{\tau_0^2}{4} (\hat{\mathbf{p}} \times \boldsymbol{\Omega})^2 \left(1 - \frac{m}{E} \right)}. \quad (4.98)$$

Rátérhetünk ezután a keletkezett barionok polarizációjának kiszámítására a (4.84) és a (4.87) képletek alapján. Először is megállapíthatjuk, hogy amennyiben jogos volt a Fermi-Dirac-eloszlást Boltzmann-eloszlással közelíteni (ahogy azt a kicsi fázistérbeli betöltöttség miatt gondoltuk), akkor a (4.87) egyenletben is szereplő f eloszlásfüggvényre $f \ll 1$, így az ott szereplő $1-f$ kifejezésből az f -et elhagyhatjuk. A (4.84) képlet számlálóját is Gauss-közelítésben tudhatjuk kiszámítani (mint ahogyan a nevezőben szereplő egyrészeske-spektrummal is tettük az imént). Ekkor viszont az $\langle S(x, p) \rangle^\mu$ négyesvektort is a „simán változó” (a Gauss-közelítést megadó fentebbi (4.91) képletben g -fel jelölt) függvényrészhez kell sorolni, amit egyszerűen ki kell értékelni a (fentebb \mathbf{r}_0 -lal jelölt) maximumhelyen. Ekkor a maradék integrálok kiesnek (4.84) számlálójából és nevezőjéből, merthogy ugyanolyan alakú (Gauss-)integrálok jelennek meg itt is, ott is.

Arra jutottunk tehát, hogy a polarizációt rendkívül egyszerű megadni Gauss-közelítésben:

$$\langle S(p) \rangle^\mu = \langle S(x, p) \rangle^\mu \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} = \frac{1}{8m} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\sigma \delta_\nu \beta_\rho \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0}. \quad (4.99)$$

Itt a használt megoldásnak a β^μ vektorral való (4.88) felírását vehetjük igénybe, amiből arra jutunk, hogy (az ottani jelölésekkel)

$$\partial_\nu \beta_\rho = F_{\rho\nu} + x^\alpha b_\alpha g_{\nu\rho} + x_\rho b_\nu - x_\nu b_\rho \quad \Rightarrow \quad \langle S(p) \rangle^\mu = \frac{1}{8m} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\sigma (F_{\rho\nu} + x_\rho b_\nu - x_\nu b_\rho) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0}. \quad (4.100)$$

Itt már ki is használtuk $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ antiszimmetriáját és $g_{\nu\rho}$ szimmetriáját, továbbá x^μ most úgy értendő, hogy a kifagyási hiperfelület azon pontja, aminek térkomponense a \mathbf{r}_0 maximumhely. Beírva ez utóbbit, valamint $F_{\mu\nu}$ és b_μ kifejezéseit (4.88)-ból végül megkapjuk a polarizációs négyesvektort az alábbi idő- és térkomponensekkel:

$$\begin{aligned} \langle S(p) \rangle^0 &= -\frac{1}{8m} \varepsilon^{0klm} p_m (F_{kl} + x_l b_k - x_k b_l) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} = -\frac{1}{16m} \varepsilon_{klm} \varepsilon_{klq} p_m \frac{\Omega_q}{T_0} = \frac{1}{8m} \frac{\mathbf{p}\boldsymbol{\Omega}}{T_0}, \quad (4.101) \\ \langle S(p) \rangle^k &= \frac{1}{8m} \left(\varepsilon^{k0lr} p_r (F_{l0} + x_l b_0 - x_0 b_l) + \varepsilon^{klor} p_r (F_{0l} + x_0 b_l - x_l b_0) + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^{klr0} p_0 (F_{rl} + x_r b_l - x_l b_r) \right) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} = -\frac{1}{8m} \left(2b_0 \varepsilon_{klm} x_l p_m + E \varepsilon_{klm} \varepsilon_{mlq} \frac{\Omega_q}{2T_0} \right) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} \\ &= \frac{1}{8mT_0} \left(E\boldsymbol{\Omega} - \frac{2}{\tau_0^2} \mathbf{r}_0 \times \mathbf{p} \right)_k = \frac{m\Omega_k + (E-m)\hat{p}_l \Omega_l \hat{p}_k}{8mT_0}. \quad (4.102) \end{aligned}$$

Szokásos tér-idő-szeletelt feírásban az eredményünk az, hogy a keletkezett barionok polarizációja a tárgyalt gyorsuló és forogva táguló egzakt relativisztikus hidrodinamikai megoldásban

$$\langle S(p) \rangle^\mu = \frac{1}{8mT_0} \begin{pmatrix} \mathbf{p}\boldsymbol{\Omega} \\ m\boldsymbol{\Omega} + \frac{E-m}{p^2} (\boldsymbol{\Omega}\mathbf{p})\mathbf{p} \end{pmatrix}. \quad (4.103)$$

A polarizációs négyesvektornak a $p^\mu \langle S(p) \rangle_\mu = 0$ feltétel miatt (mely a polarizációs négyesvektor általános jelentéséből is tudvalevő, valamint látszik a (4.87) kifejezésen is) csak három független komponense van. Ez a feltétel úgy jelenik meg, hogy ha áttérünk a részecske nyugalmi rendszerébe, akkor ott az időkomponens eltűnik; kézenfekvő tehát az ezen rendszerbeli polarizációs (hár-

mas)vektort vizsgálni. A kísérletek is ezen komponenseket mérik. A \mathbf{p} impulzusú és $E = \sqrt{m^2 + p^2}$ energiájú részecske nyugalmi rendszerébe áttérő (passzív) Lorentz-transzformáció mátrixa

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} E & -p_l \\ -p_k & m\delta_{kl} + \frac{E-m}{p^2} p_k p_l \end{pmatrix}, \quad (4.104)$$

ezt hattatva tehát az iménti (4.103) eredményünkre egyszerűen az adódik, hogy

$$\begin{array}{l} \text{a nyugalmi} \\ \text{rendszerben} \end{array} \langle S(p) \rangle^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{S}_{\text{nyug.}} \end{pmatrix}, \quad \text{ahol } \mathbf{S}_{\text{nyug.}} = \frac{\boldsymbol{\Omega}}{8T_0}. \quad (4.105)$$

Az eredmény rendkívül egyszerű: a vizsgált modellünkben a keletkezett barionok polarizációja konstans, és arányos a forgó hidrodinamikai megoldás egyfajta szögsebességét megadó $\boldsymbol{\Omega}$ vektorral. Néhány fontos megjegyzés azért tartozik ehhez is:

1. Ez az első olyan képlet, ami analitikus kapcsolatot ad egy adott hidrodinamikai modellben a megfigyelhető barion-polarizáció és a tágulás dinamikai jellemzői között. Minden olyan eset, amikor sok-sok szimulációs eredmény mellé kevés de egyszerű képlet is megadható, mindenképpen előrelépést jelent a megértésben.
2. Az, hogy valóban a forgás „okozza” a polarizációt, az eredményünkben mindenképpen tisztábban látszik, mint a bonyolult numerikus szimulációkban (amelyek egyszerre követik le az időfejlődést és számítják ki belőle a megfigyelhető mennyiségeket).
3. A vizsgált modellben a polarizáció konstans; többek között nem függ a részecske impulzusától sem. Ez (ránézve az iménti 4.7. ábrán felidézett kísérleti eredményre) nem is elrugaskodott eredmény. A megfigyelt centralitásfüggésből pedig ekkor következtetést vonhatunk le a forgás mértékére: centrális ütközésekben ez nyilván nulla, periférikusabb ütközésekben pedig nagyobb.

4.4. Összefoglalás, további kutatási irányok

Ebben a fejezetben nehézion-ütközések hidrodinamikai leírásának fejlesztése terén végzett munkákkal foglalkoztam. A 4.1. fejezetben áttekintettem az alapfogalmakat, a hidrodinamikai egyenleteket, az egzakt megoldások szerepét, illetve utóbbiak terén már ismert (részben saját magam által elért, már a doktori dolgozatomban bemutatott) korábbi eredményeket. Egy olyan egzakt megoldás (a tetszőleges állapotegyenletű Hubble-megoldás [142]), mely már frissebb, és hozzám is köthető, nem kapott külön szakaszt.

A 4.2. szakaszban azt jártam körül, hogy lehetséges-e a korábbi ismert egzakt megoldásokat olyan módon általánosítani, hogy forgást is tartalmazzanak; ez egy időszerű vizsgálati téma, ugyanis az adatok egyre inkább betekintést engednek a tágulási dinamika ilyen szintű részleteibe is. Bemutattam azokat a munkáimat, amelyeknek során megtaláltam a nemrelativisztikus hidrodinamikai egyenleteknek ilyen (igen általános, táguló forgó ellipszoid alakú sűrűségprofilokat leíró,

állapotegyenletek széles osztályára működő) megoldásait, valamint részletesen körüljártam, hogy a forgás hatása milyen megfigyelhető mennyiségekben és hogyan tükröződik. Illusztráltam is a kapott eredményeket, megvizsgálva az állapotegyenlet hatását is. Azt találtam, hogy egyrészt az elfordulási szög valóban érzékeny az állapotegyenletre (mégpedig a sokféle kompetitív folyamat közül leginkább a kifagyásig eltelt időtartam változása miatt), másrészt külön kell választani a különféle mérési módszerekkel (egyrészecske-spektrumból vagy a Bose-Einstein-korrelációkból) meghatározható elfordulási szöget. A RHIC-nél felvett adatokból kimért releváns kísérleti adatok híján egyelőre ezen elképzelések konkrét ellenőrzése a mérési program stádiumában van.

A 4.3. szakaszban a végállapotban keletkező barionok (Λ -részecskék) polarizációjával foglalkoztam. Ez egy újonnan mérhetővé vált (és mért) mennyiség, amely a numerikus számítások szerint igen érzékeny a tágulási dinamikára. Megmutattam az első analitikus hidrodinamikai számolást erre a mennyiségre; a vizsgált modell (az első ismert relativisztikus gyorsuló és forogva táguló megoldás, noha analitikusan elég bonyolult volt megtalálni) a dinamika szempontjából igen egyszerűnek mondható. Ennek ellenére az alapvető megfigyelést (nagyjából p_t -független globális, „ y ”, azaz reakciósíkra merőleges tengelyű polarizáció) jól leírja.

Egyik látott kutatási irány szempontjából sincs az i -re feltéve a pont; mindkettőhöz érdekes egy már szinte teljesen kidolgozott (de még publikáció előtt álló, diákokkal közösen végzett) munkám, mely azon alapul, hogy a látott forgó táguló megoldásoknak megfeleltethető relativisztikus végállapoti parametrizációt dolgozzak ki (mely az úgynevezett Buda-Lund-modell [35, 143] forgó általánosítása lenne). Ebből a 4.2. szakaszban ígért módon az ott látott nemrelativisztikus tárgyalásnál realiztikusabb m_t -függésű megfigyelhető mennyiségek adódnának, valamint a polarizációt is differenciáltabban lehetne leírni. Utóbbi mennyiség szempontjából meg kell jegyezni, hogy a globális polarizációnál részletesebb méréseket is végeztek; leginkább a z -tengely irányú polarizáció azimutszög-függését [170]. Ez utóbbi a transzverz síkbeli tágulási dinamikára is igen érzékeny, és jelenleg egyfajta rejtélyt jelent sokféle numerikus hidrodinamikai modell szempontjából, mert azok sok esetben ellentétes előjelű függést jósolnak [171]. A numerikus modellezés összetettsége azonban már-már „elfedi” a tiszta fizikai okot emögött; a kidolgozandó analitikus módszerünk ezen kérdéskör vizsgálatának is új löketet adhatna, illetve részben már ad is. Az analitikus formuláink tisztábban rávilágíthatnak a polarizáció eredetére (mely a β_μ vektor négyesgradienséből származik, de nem világos, hogy melyik komponensek milyen arányban szerepelnek, és hogy szükséges-e a $\partial_\mu\beta_\nu - \partial_\nu\beta_\mu$ tenzor időfejlődését külön vizsgálni).

Összefoglalva: a hidrodinamikai leírás, azon belül is az egzakt megoldásokon alapuló analitikus modellek használata fontos eszköz marad a nehézion-fizikai fenomenológiában; ilyenek egyre finomabb hangolása az egyre érdekesebb megfigyelések leírására is alkalmazhatók. Dolgozatom ezen fejezetében az ilyen irányú már elvégzett és a közeljövőben elvégzendő munkákból adtam ízelítőt.

5. Tézispontok

Az alábbiakban tézispontokba szedve felsorolom a dolgozatban bemutatott eredményeket és a megfelelő publikációkat. Utóbbiak a dolgozatban a többi hivatkozott cikkel közösen számozódtak; most kiemelem őket, de megadom az irodalomjegyzékbeli számaikat, illetve a dolgozathoz mellékelte különlenyomatok file-neveit is.

1. Kidolgoztam a nehézion-fizikai Bose-Einstein-korrelációk mérési módszertanát Lévy-eloszlások feltételezésével, különös figyelmet fordítva a Coulomb-effektus hatására (Lökös Sándor doktorandusszal illetve Máthé Gergely és Kurgyis Bálint BSc hallgatókkal, valamint Csanád Mátéval közösen). Ezt a módszertant aztán sikerrel használtuk a PHENIX és később a STAR kollaboráció keretei között az ilyen irányú mérések elvégzéséhez.

(1a) M. Csanád, S. Lökös, M. Nagy, *Universe* **5**, 133 (2019), arXiv:1905.09714
([58]; `NM_cikk01.pdf`.)

(1b) M. Csanád, S. Lökös, M. Nagy, *Phys. Part. Nucl.* **51**, 238 (2020), arXiv:1910.02231
([59]; `NM_cikk02.pdf`.)

(1c) B. Kurgyis, D. Kincses, M. Nagy, M. Csanád, *Universe* **9**, 328 (2023), arXiv:2007.10173
([60]; `NM_cikk03.pdf`.)

2. Megvizsgáltam a töltött pionok és kaonok Bose-Einstein-korrelációs függvényében a végállapoti erős kölcsönhatás szerepét Lévy-eloszlás alakú forrásfüggvények feltételezése esetén (Kincses Dániel doktorandusszal és Csanád Mátéval közösen). Az eredmények szerint kicsi, de észrevehető effektust okoz ez; a pontosabb analíziseikben már eleve ezt a módszert használjuk.

(2a) D. Kincses, M.I. Nagy, M. Csanád, *Phys. Rev. C* **102**, 064912 (2020), arXiv:1912.01381
([86]; `NM_cikk04.pdf`.)

3. Új, önmagában is igen érdekes matematikai módszert fejlesztettem ki és implementáltam (kollégáimmal, Kincses Dániellel és Csanád Mátéval, illetve Purzsa Aletta BSc hallgatóval közösen) a Coulomb-kölcsönhatás figyelembevételére Bose-Einstein-korrelációk fenomenológiai leírásában. A módszer nagymértékben megbízhatóbbá teszi a vonatkozó számolásokat, és elérhető közelségbe hozza a bonyolultabb modell-forrásfüggvények kezelését is.

(3a) M. Nagy, A. Purzsa, M. Csanád, D. Kincses, *Eur. Phys. J. C* **83**, 1015 (2023),
arXiv:2308.10745
([93]; `NM_cikk05.pdf`.)

4. A brookhaveni PHENIX kísérleti együttműködés magyar csoportjának tagjaként az első Lévy-eloszlást használó korrelációsfüggvény-mérésben betöltött szerepem az egész vertikumon végigmegy: módszertani kifejlesztés, adatfelvétel, adatredukció és -analízis, eredmények elérése és

publikálása. Megállapítást nyert, hogy a femtoszkópiailag rekonstruálható részecskekeltő forrásfüggvény valóban nem írható le Gauss-alakkal, a korreláció erőssége a pontosabb leírásban is mutatja a jellegzetes „lyukat” kis transzverz tömegnél, illetve hogy a sugárparaméter Lévy-eloszlás feltételezése esetén is hidrodinamikai jellegű viselkedést mutat.

(4a) A. Adare et al. (PHENIX), Phys. Rev. C **97**, 064911 (2018), [Erratum: Phys.Rev.C 108, 049905 (2023)], arXiv:1709.05649

([98]; NM_cikk06.pdf.)

5. A nehézion-reakciók leírására használható egzakt hidrodinamikai megoldásokat keresve több lépcsőben megtaláltam az eddigi legáltalánosabb nemrelativisztikus tűzgömb-megoldást, amely háromtengelyű ellipszoid alakú közeg forgó tágulásának leírására is alkalmas. Kiszámítottam az ezen megoldásból adódó megfigyelhető mennyiségeket, melyekben egyszerű képletek segítségével nyomon követhető a (nemcentrális ütközésekben biztosan megjelenő) forgás hatása. Részletesen megvizsgáltam az állapotegyenlet keménységének és a végállapotú forgásnak a kapcsolatát, javasolván, hogy a rekonstruálható elfordulási szögfajták ütközési energia függvényében való vizsgálata az állapotegyenleten keresztül az erős kölcsönhatás kritikus pontjának lokalizálására is hasznos lehet.

(5a) T. Csörgő, M.I. Nagy, Phys. Rev. C **89**, 044901 (2014), arXiv:1309.4390

([153]; NM_cikk07.pdf.)

(5b) T. Csörgő, M.I. Nagy, I.F. Barna, Phys. Rev. C **93**, 024916 (2016), arXiv:1511.02593

([154]; NM_cikk08.pdf.)

(5c) M.I. Nagy, T. Csörgő, Phys. Rev. C **94**, 064906 (2016), arXiv:1606.09160

([155]; NM_cikk09.pdf.)

6. Megvizsgáltam, hogy leírható-e a nehézion-ütközésekben keletkező barionok megfigyelt polarizációja analitikus hidrodinamikai modellekkel. Boldizsár Bálint BSc hallgatóval és Csanád Mátéval közösen elsőként alkalmaztam realiztikus (forgó) egzakt hidrodinamikai megoldásokat ennek a megfigyelhető mennyiségnek a kiszámítására. Megállapítottuk, hogy a levezethető egyszerű képletek meglepően jól leírják a megfigyelést, a dinamikai jellemzőkkel (a közeg impulzusmomentumával) való kapcsolatot pedig tisztán feltárják.

(6a) B. Boldizsár, M.I. Nagy, M. Csanád, Universe **5**, 101 (2019), arXiv:1812.05587

([169]; NM_cikk10.pdf.)

Itt a végén pedig nagy-nagy köszönetet mondok mindazon családtagjaimnak, kollégáimnak, barátaimnak, cimboráimnak, akik támogattak, bátorítottak, elviseltek, bárminemű kis és nagy segítséget adtak az idők során, ahogyan ez a dolgozat és a mögötte fekvő munka megvalósult. #YKWYA

Hivatkozások

- [1] N. Cabibbo, G. Parisi, Phys. Lett. B **59**, 67 (1975)
- [2] R. Hagedorn, Nuovo Cim. Suppl. **3**, 147 (1965)
- [3] E.V. Shuryak, Phys. Rept. **61**, 71 (1980)
- [4] K. Adcox et al. (PHENIX), Nucl. Phys. A **757**, 184 (2005), arXiv:nucl-ex/0410003
- [5] J. Adams et al. (STAR), Nucl. Phys. A **757**, 102 (2005), arXiv:nucl-ex/0501009
- [6] I. Arsene et al. (BRAHMS), Nucl. Phys. A **757**, 1 (2005), arXiv:nucl-ex/0410020
- [7] B.B. Back et al. (PHOBOS), Nucl. Phys. A **757**, 28 (2005), arXiv:nucl-ex/0410022
- [8] S.S. Adler et al. (PHENIX), Phys. Rev. C **69**, 034910 (2004), arXiv:nucl-ex/0308006
- [9] K. Adcox et al. (PHENIX), Phys. Rev. Lett. **88**, 022301 (2002), arXiv:nucl-ex/0109003
- [10] K. Aamodt et al. (ALICE), Phys. Lett. B **696**, 30 (2011), arXiv:1012.1004
- [11] S. Chatrchyan et al. (CMS), Eur. Phys. J. C **72**, 1945 (2012), arXiv:1202.2554
- [12] J. Adam et al. (ALICE), Phys. Lett. B **746**, 1 (2015), arXiv:1502.01689
- [13] M. Gyulassy, M. Plumer, Phys. Lett. B **243**, 432 (1990)
- [14] M. Gyulassy, P. Lévai, I. Vitev, Phys. Rev. Lett. **85**, 5535 (2000), arXiv:nucl-th/0005032
- [15] S.S. Adler et al. (PHENIX), Phys. Rev. Lett. **91**, 072303 (2003), arXiv:nucl-ex/0306021
- [16] N.J. Abdulameer et al. (PHENIX) (2023), arXiv:2303.12899
- [17] A. Adare et al. (PHENIX), Phys. Rev. Lett. **98**, 172301 (2007), arXiv:nucl-ex/0611018
- [18] A. Adare et al. (PHENIX), Phys. Rev. C **93**, 034904 (2016), arXiv:1509.04662
- [19] U.A. Acharya et al. (PHENIX) (2022), arXiv:2203.17058
- [20] Y. Aoki, Z. Fodor, S.D. Katz, K.K. Szabó, Phys. Lett. B **643**, 46 (2006), arXiv:hep-lat/0609068
- [21] K.H. Ackermann et al. (STAR), Phys. Rev. Lett. **86**, 402 (2001), arXiv:nucl-ex/0009011
- [22] K. Adcox et al. (PHENIX), Phys. Rev. Lett. **89**, 212301 (2002), arXiv:nucl-ex/0204005

- [23] A. Adare et al. (PHENIX), Phys. Rev. Lett. **98**, 162301 (2007), arXiv:nucl-ex/0608033
- [24] S. Afanasiev et al. (PHENIX), Phys. Rev. Lett. **99**, 052301 (2007), arXiv:nucl-ex/0703024
- [25] A. Adare et al. (PHENIX), Phys. Rev. Lett. **105**, 062301 (2010), arXiv:1003.5586
- [26] R.A. Lacey, Nucl. Phys. A **785**, 122 (2007), arXiv:nucl-ex/0608046
- [27] R.A. Lacey, N.N. Ajitanand, J.M. Alexander, P. Chung, W.G. Holzmann, M. Issah, A. Taranenko, P. Danielewicz, H. Stoecker, Phys. Rev. Lett. **98**, 092301 (2007), arXiv:nucl-ex/0609025
- [28] P. Kovtun, D.T. Son, A.O. Starinets, Phys. Rev. Lett. **94**, 111601 (2005), arXiv:hep-th/0405231
- [29] A. Adare et al. (PHENIX), Phys. Rev. Lett. **107**, 252301 (2011), arXiv:1105.3928
- [30] A. Adare et al. (PHENIX), Phys. Rev. Lett. **109**, 122302 (2012), arXiv:1105.4126
- [31] A. Adare et al. (PHENIX), Phys. Rev. C **94**, 064901 (2016), arXiv:1509.07758
- [32] G. David, Rept. Prog. Phys. **83**, 046301 (2020), arXiv:1907.08893
- [33] A. Adare et al. (PHENIX), Phys. Rev. Lett. **104**, 132301 (2010), arXiv:0804.4168
- [34] Y. Aoki, G. Endrődi, Z. Fodor, S.D. Katz, K.K. Szabó, Nature **443**, 675 (2006), arXiv:hep-lat/0611014
- [35] T. Csörgő, B. Lörstad, Phys. Rev. C **54**, 1390 (1996), arXiv:hep-ph/9509213
- [36] D.H. Rischke, M. Gyulassy, Nucl. Phys. A **597**, 701 (1996), arXiv:nucl-th/9509040
- [37] S.S. Adler et al. (PHENIX), Phys. Rev. Lett. **93**, 152302 (2004), arXiv:nucl-ex/0401003
- [38] K. Aamodt et al. (ALICE), Phys. Rev. Lett. **105**, 252302 (2010), arXiv:1011.3914
- [39] S. Chatrchyan et al. (CMS), Phys. Rev. C **87**, 014902 (2013), arXiv:1204.1409
- [40] J. Adam et al. (ALICE), Phys. Lett. B **754**, 235 (2016), arXiv:1509.07324
- [41] S. Acharya et al. (ALICE), Phys. Lett. B **789**, 308 (2019), arXiv:1805.04403
- [42] S. Wheaton, J. Cleymans, Comput. Phys. Commun. **180**, 84 (2009), arXiv:hep-ph/0407174
- [43] L. Adamczyk et al. (STAR), Phys. Rev. C **96**, 044904 (2017), arXiv:1701.07065
- [44] R.A. Lacey, Phys. Rev. Lett. **114**, 142301 (2015), arXiv:1411.7931
- [45] S. Han (PHENIX), Nucl. Phys. A **1005**, 122008 (2021)

- [46] R. Hanbury Brown, R.Q. Twiss, *Phil. Mag. Ser. 7* **45**, 663 (1954)
- [47] R. Hanbury Brown, R.Q. Twiss, *Nature* **178**, 1046 (1956)
- [48] R.H. Brown, R.Q. Twiss, *Nature* **177**, 27 (1956)
- [49] R.J. Glauber, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 84 (1963)
- [50] R.J. Glauber, *Phys. Rev.* **130**, 2529 (1963)
- [51] G. Goldhaber, S. Goldhaber, W.Y. Lee, A. Pais, *Phys. Rev.* **120**, 300 (1960)
- [52] G. Goldhaber, W.B. Fowler, S. Goldhaber, T.F. Hoang, *Phys. Rev. Lett.* **3**, 181 (1959)
- [53] F.B. Yano, S.E. Koonin, *Phys. Lett. B* **78**, 556 (1978)
- [54] G. Baym, *Acta Phys. Polon. B* **29**, 1839 (1998), [arXiv:nucl-th/9804026](https://arxiv.org/abs/nucl-th/9804026)
- [55] S. Pratt, *Phys. Rev. C* **56**, 1095 (1997)
- [56] G. Bertsch, M. Gong, M. Tohyama, *Phys. Rev. C* **37**, 1896 (1988)
- [57] S. Pratt, *Phys. Rev. D* **33**, 72 (1986)
- [58] M. Csanád, S. Lokos, M. Nagy, *Universe* **5**, 133 (2019), [arXiv:1905.09714](https://arxiv.org/abs/1905.09714)
- [59] M. Csanád, S. Lokos, M. Nagy, *Phys. Part. Nucl.* **51**, 238 (2020), [arXiv:1910.02231](https://arxiv.org/abs/1910.02231)
- [60] B. Kurgyis, D. Kincses, M. Nagy, M. Csanád, *Universe* **9**, 328 (2023), [arXiv:2007.10173](https://arxiv.org/abs/2007.10173)
- [61] L.D. Landau, E.M. Lifsic, *Kvantummechanika (nemrelativisztikus elmélet)*, Vol. III. kötet of *Elméleti fizika* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1978), ISBN 963-17-3259-2
- [62] H.A. Bethe, L.C. Maximon, *Phys. Rev.* **93**, 768 (1954)
- [63] D.H. Rischke, M. Gyulassy, *Nucl. Phys. A* **608**, 479 (1996), [arXiv:nucl-th/9606039](https://arxiv.org/abs/nucl-th/9606039)
- [64] E.O. Alt, T. Csörgő, B. Lörstad, J. Schmidt-Sorensen, *Phys. Lett. B* **458**, 407 (1999), [arXiv:hep-ph/9812474](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9812474)
- [65] E.O. Alt, T. Csörgő, B. Lörstad, J. Schmidt-Sorensen, *Eur. Phys. J. C* **13**, 663 (2000), [arXiv:nucl-th/9910041](https://arxiv.org/abs/nucl-th/9910041)
- [66] E.O. Alt, T. Csörgő, B. Lörstad, J. Schmidt-Sorensen, *Coulomb and core / halo corrections to Bose-Einstein N particle correlations*, in *30th International Symposium on Multiparticle Dynamics* (2001), pp. 564–571, [arXiv:hep-ph/0103019](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0103019)
- [67] J. Bolz, U. Ornik, M. Plumer, B.R. Schlei, R.M. Weiner, *Phys. Rev. D* **47**, 3860 (1993)

- [68] T. Csörgő, B. Lörstad, J. Zimányi, Z. Phys. C **71**, 491 (1996), arXiv:hep-ph/9411307
- [69] M.G. Bowler, Phys. Lett. B **270**, 69 (1991)
- [70] Y. Sinyukov, R. Lednicky, S.V. Akkelin, J. Pluta, B. Erazmus, Phys. Lett. B **432**, 248 (1998)
- [71] I.V. Andreev, M. Plumer, R.M. Weiner, Phys. Rev. Lett. **67**, 3475 (1991)
- [72] T. Csörgő, B. Lörstad, J. Schmid-Sorensen, A. Ster, Eur. Phys. J. C **9**, 275 (1999), arXiv:hep-ph/9812422
- [73] D.A. Brown, P. Danielewicz, Phys. Lett. B **398**, 252 (1997), arXiv:nucl-th/9701010
- [74] S.S. Adler et al. (PHENIX), Phys. Rev. Lett. **98**, 132301 (2007), arXiv:nucl-ex/0605032
- [75] T. Csörgő, S. Hegyi, W.A. Zajc, Eur. Phys. J. C **36**, 67 (2004), arXiv:nucl-th/0310042
- [76] T. Csörgő, S. Hegyi, T. Novak, W.A. Zajc, Acta Phys. Polon. B **36**, 329 (2005), arXiv:hep-ph/0412243
- [77] M. Csanád, T. Csörgő, M. Nagy, Braz. J. Phys. **37**, 1002 (2007), arXiv:hep-ph/0702032
- [78] T. Csörgő, S. Hegyi, T. Novak, W.A. Zajc, AIP Conf. Proc. **828**, 525 (2006), arXiv:nucl-th/0512060
- [79] J. Cimermaň, C. Plumberg, B. Tomášik, Phys. Part. Nucl. **51**, 282 (2020), arXiv:1909.07998
- [80] D. Kincses, M. Stefaniak, M. Csanád, Entropy **24**, 308 (2022), arXiv:2201.07962
- [81] F. Siklér (CMS) (2014), arXiv:1411.6609
- [82] *Coulomb correction parametrization based on a Levy source* (2019), <https://github.com/csanadm/coulcorrlevyparam>
- [83] B. Pórfy (NA61/SHINE), Universe **9**, 298 (2023), arXiv:2306.08696
- [84] A. Mukherjee, Universe **9**, 300 (2023), arXiv:2306.13668
- [85] B. Kórodi (CMS), Universe **9**, 318 (2023), arXiv:2306.16353
- [86] D. Kincses, M.I. Nagy, M. Csanád, Phys. Rev. C **102**, 064912 (2020), arXiv:1912.01381
- [87] R. Lednicky, Phys. Part. Nucl. **40**, 307 (2009), arXiv:nucl-th/0501065
- [88] J. Bijnens, G. Colangelo, G. Ecker, J. Gasser, M.E. Sainio, Nucl. Phys. B **508**, 263 (1997), [Erratum: Nucl.Phys.B 517, 639–639 (1998)], arXiv:hep-ph/9707291
- [89] A. Schenk, Nucl. Phys. B **363**, 97 (1991)

- [90] G. Colangelo, J. Gasser, H. Leutwyler, Nucl. Phys. B **603**, 125 (2001), arXiv:hep-ph/0103088
- [91] R. Garcia-Martin, R. Kaminski, J.R. Pelaez, J. Ruiz de Elvira, F.J. Yndurain, Phys. Rev. D **83**, 074004 (2011), arXiv:1102.2183
- [92] *StrongCoulombLevyBEC* (2020), <https://github.com/csanadm/StrongCoulombLevyBEC>
- [93] M. Nagy, A. Purzsa, M. Csanád, D. Kincses, Eur. Phys. J. C **83**, 1015 (2023), arXiv:2308.10745
- [94] A. Nordsieck, Phys. Rev. **93**, 785 (1954)
- [95] DLMF, *NIST Digital Library of Mathematical Functions*, <https://dlmf.nist.gov/>, Release 1.1.10 of 2023-06-15, f. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller, B. V. Saunders, H. S. Cohl, and M. A. McClain, eds., <https://dlmf.nist.gov/>
- [96] P. Davis, P. Rabinowitz, W. Rheinbolt, *Methods of Numerical Integration*, Computer Science and Applied Mathematics (Elsevier Science, 2014), ISBN 9781483264288, <https://books.google.com/books?id=mbLiBQAAQBAJ>
- [97] *Correlation function calculation with Lévy source and Coulomb FSI* (2023), <https://github.com/csanadm/CoulCorrLevyIntegral>
- [98] A. Adare et al. (PHENIX), Phys. Rev. C **97**, 064911 (2018), [Erratum: Phys.Rev.C 108, 049905 (2023)], arXiv:1709.05649
- [99] K. Adcox et al. (PHENIX), Nucl. Instrum. Meth. A **499**, 469 (2003)
- [100] A. Adare et al. (PHENIX), Phys. Rev. C **85**, 064914 (2012), arXiv:1203.2644
- [101] F. James, M. Roos, Comput. Phys. Commun. **10**, 343 (1975)
- [102] S.V. Akkelin, Y.M. Sinyukov, Z. Phys. C **72**, 501 (1996)
- [103] V. Khachatryan et al. (CMS), JHEP **05**, 029 (2011), arXiv:1101.3518
- [104] M.A. Stephanov, K. Rajagopal, E.V. Shuryak, Phys. Rev. Lett. **81**, 4816 (1998), arXiv:hep-ph/9806219
- [105] S. El-Showk, M.F. Paulos, D. Poland, S. Rychkov, D. Simmons-Duffin, A. Vichi, J. Stat. Phys. **157**, 869 (2014), arXiv:1403.4545
- [106] H. Rieger (1994), arXiv:cond-mat/9411017
- [107] H. Rieger, Phys. Rev. B **52**, 6659 (1995)

- [108] A.N. Makhlin, Y.M. Sinyukov, Z. Phys. C **39**, 69 (1988)
- [109] C. Adler et al. (STAR), Phys. Rev. Lett. **87**, 082301 (2001), arXiv:nucl-ex/0107008
- [110] J.I. Kapusta, D. Kharzeev, L.D. McLerran, Phys. Rev. D **53**, 5028 (1996), arXiv:hep-ph/9507343
- [111] S. Benić, D. Horvatić, D. Kekez, D. Klabučar, Phys. Lett. B **738**, 113 (2014), arXiv:1405.3299
- [112] S.E. Vance, T. Csörgő, D. Kharzeev, Phys. Rev. Lett. **81**, 2205 (1998), arXiv:nucl-th/9802074
- [113] T. Csörgő, R. Vértési, J. Sziklai, Phys. Rev. Lett. **105**, 182301 (2010), arXiv:0912.5526
- [114] R. Vértési, T. Csörgő, J. Sziklai, Phys. Rev. C **83**, 054903 (2011), arXiv:0912.0258
- [115] M. Kaneta, N. Xu, *Centrality dependence of chemical freeze-out in Au+Au collisions at RHIC*, in *17th International Conference on Ultra Relativistic Nucleus-Nucleus Collisions (Quark Matter 2004)* (2004), arXiv:nucl-th/0405068
- [116] J. Orear, Phys. Rev. Lett. **12**, 112 (1964)
- [117] G. Cocconi, Phys. Rev. **111**, 1699 (1958)
- [118] E. Fermi, Prog. Theor. Phys. **5**, 570 (1950)
- [119] L.D. Landau, Izv. Akad. Nauk Ser. Fiz. **17**, 51 (1953)
- [120] I.M. Halatnyikov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **27**, 529 (1954)
- [121] S.Z. Belenkij, L.D. Landau, Usp. Fiz. Nauk **56**, 309 (1955)
- [122] F. Cooper, G. Frye, Phys. Rev. D **10**, 186 (1974)
- [123] T. Csörgő, S.V. Akkelin, Y. Hama, B. Lukacs, Y.M. Sinyukov, Phys. Rev. C **67**, 034904 (2003), arXiv:hep-ph/0108067
- [124] C. Eckart, Phys. Rev. **58**, 919 (1940)
- [125] L.D. Landau, E.M. Lifsic, *Hidrodinamika*, Vol. VI. kötet of *Elméleti fizika* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1978), ISBN 963-17-3259-2
- [126] W.A. Hiscock, L. Lindblom, Phys. Rev. D **31**, 725 (1985)
- [127] W.A. Hiscock, L. Lindblom, Annals Phys. **151**, 466 (1983)
- [128] W. Israel, J.M. Stewart, Annals Phys. **118**, 341 (1979)
- [129] P. Van, T.S. Biro, Phys. Lett. B **709**, 106 (2012), arXiv:1109.0985

- [130] J.P. Bondorf, S.I.A. Garpman, J. Zimányi, Nucl. Phys. A **296**, 320 (1978)
- [131] T. Csörgő, Acta Phys. Polon. B **37**, 483 (2006), arXiv:hep-ph/0111139
- [132] T. Csörgő, Central Eur. J. Phys. **2**, 556 (2004), arXiv:nucl-th/9809011
- [133] P. Csizmadia, T. Csörgő, B. Lukacs, Phys. Lett. B **443**, 21 (1998), arXiv:nucl-th/9805006
- [134] S.V. Akkelin, T. Csörgő, B. Lukács, Y.M. Sinyukov, M. Weiner, Phys. Lett. B **505**, 64 (2001), arXiv:hep-ph/0012127
- [135] R.C. Hwa, Phys. Rev. D **10**, 2260 (1974)
- [136] J.D. Bjorken, Phys. Rev. D **27**, 140 (1983)
- [137] A. Bialas, R.A. Janik, R.B. Peschanski, Phys. Rev. C **76**, 054901 (2007), arXiv:0706.2108
- [138] G. Beuf, R. Peschanski, E.N. Saridakis, Phys. Rev. C **78**, 064909 (2008), arXiv:0808.1073
- [139] S.S. Gubser, Phys. Rev. D **82**, 085027 (2010), arXiv:1006.0006
- [140] T. Csörgő, F. Grassi, Y. Hama, T. Kodama, Phys. Lett. B **565**, 107 (2003), arXiv:nucl-th/0305059
- [141] T. Csörgő, L.P. Csernai, Y. Hama, T. Kodama, Acta Phys. Hung. A **21**, 73 (2004), arXiv:nucl-th/0306004
- [142] M. Csanád, M.I. Nagy, S. Lökös, Eur. Phys. J. A **48**, 173 (2012), arXiv:1205.5965
- [143] M. Csanád, T. Csörgő, B. Lörstad, Nucl. Phys. A **742**, 80 (2004), arXiv:nucl-th/0310040
- [144] S. Lökös, M. Csanád, B. Tomášik, T. Csörgő, Eur. Phys. J. A **52**, 311 (2016), arXiv:1604.07470
- [145] M. Csanád, T. Csörgő, B. Lörstad, A. Ster, AIP Conf. Proc. **828**, 479 (2006), arXiv:nucl-th/0510027
- [146] A. Ster, M. Csanád, T. Csörgő, B. Lörstad, B. Tomasik, Eur. Phys. J. A **47**, 58 (2011), arXiv:1012.5084
- [147] M.I. Nagy, T. Csörgő, M. Csanád, Phys. Rev. C **77**, 024908 (2008), arXiv:0709.3677
- [148] T. Csörgő, M.I. Nagy, M. Csanád, Phys. Lett. B **663**, 306 (2008), arXiv:nucl-th/0605070
- [149] T. Csörgő, M.I. Nagy, M. Csanad, Braz. J. Phys. **37**, 723 (2007), arXiv:nucl-th/0702043
- [150] T. Csörgő, G. Kasza, M. Csanád, Z. Jiang, Universe **4**, 69 (2018), arXiv:1805.01427
- [151] M.I. Nagy, Phys. Rev. C **83**, 054901 (2011), arXiv:0909.4285

- [152] H. Bantilan, T. Ishii, P. Romatschke, *Phys. Lett. B* **785**, 201 (2018), arXiv:1803.10774
- [153] T. Csörgő, M.I. Nagy, *Phys. Rev. C* **89**, 044901 (2014), arXiv:1309.4390
- [154] T. Csörgő, M.I. Nagy, I.F. Barna, *Phys. Rev. C* **93**, 024916 (2016), arXiv:1511.02593
- [155] M.I. Nagy, T. Csörgő, *Phys. Rev. C* **94**, 064906 (2016), arXiv:1606.09160
- [156] A. Adare et al. (PHENIX), *Phys. Rev. Lett.* **112**, 222301 (2014), arXiv:1401.7680
- [157] M.A. Lisa, U.W. Heinz, U.A. Wiedemann, *Phys. Lett. B* **489**, 287 (2000), arXiv:nucl-th/0003022
- [158] F. Becattini, V. Chandra, L. Del Zanna, E. Grossi, *Annals Phys.* **338**, 32 (2013), arXiv:1303.3431
- [159] L. Adamczyk et al. (STAR), *Nature* **548**, 62 (2017), arXiv:1701.06657
- [160] J. Adam et al. (STAR), *Phys. Rev. C* **98**, 014910 (2018), arXiv:1805.04400
- [161] E. Alpatov (STAR), *J. Phys. Conf. Ser.* **1690**, 012120 (2020)
- [162] J. Adam et al. (STAR), *Phys. Rev. Lett.* **126**, 162301 (2021), [Erratum: *Phys.Rev.Lett.* 131, 089901 (2023)], arXiv:2012.13601
- [163] M.S. Abdallah et al. (STAR), *Phys. Rev. C* **104**, L061901 (2021), arXiv:2108.00044
- [164] M.I. Abdulhamid et al. (STAR), *Phys. Rev. C* **108**, 014910 (2023), arXiv:2305.08705
- [165] L.P. Csernai, F. Becattini, D.J. Wang, *J. Phys. Conf. Ser.* **509**, 012054 (2014)
- [166] Y.L. Xie, M. Bleicher, H. Stöcker, D.J. Wang, L.P. Csernai, *Phys. Rev. C* **94**, 054907 (2016), arXiv:1610.08678
- [167] I. Karpenko, F. Becattini, *Eur. Phys. J. C* **77**, 213 (2017), arXiv:1610.04717
- [168] Y. Xie, D. Wang, L.P. Csernai, *Phys. Rev. C* **95**, 031901 (2017), arXiv:1703.03770
- [169] B. Boldizsár, M.I. Nagy, M. Csanád, *Universe* **5**, 101 (2019), arXiv:1812.05587
- [170] J. Adam et al. (STAR), *Phys. Rev. Lett.* **123**, 132301 (2019), arXiv:1905.11917
- [171] F. Becattini, I. Karpenko, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 012302 (2018), arXiv:1707.07984