

# Komplex függvénytan (bevezetés)

## — vázlatok —

Nagy Márton

2021.

- Ez a leirat a „Matematikai módszerek a fizikában” c. tantárgy komplex függvénytanról foglalkozó részéhez készült; ott kb. a félév negyedében kell elmondanom, amennyit lehet, ide jóval többet leírtam. Az ábrák most is a Gnuplot ill. az Inkscape programokkal készültek. Komplex függvénytanból amúgy sok jó jegyzet/könyv van; nem pontosan tudom, miért kezdtem el ezt.

Sokszor hivatkozom a „Vektorszámítás” jegyzetre; a jelöléseim is leginkább ugyanazok, mint ott, és nagyban építünk az ott tanultakra. Már bevezettük egyszer a komplex számokat, megtanultunk deriválni-integrálni, sőt: vonalmenti integrálokkal is találkoztunk. Ezek nagy szerepet kapnak itt.

- *Ez sem könnyed olvasmány!* Ne siessünk, alaposan gondoljuk végig, sőt lehetőleg papíron ceruzával kövessük (azaz: próbáljuk valós időben, „előre” megcsinálni) a számolásokat olvasás közben!

Próbáltam „lélekkel megtölteni” a szöveget, de nem tudtam elkerülni a matematikai irományokban szokásos, olvasást nehezítő „aljasságokat”. Pl. azért használok, használunk képleteket (szövegközben is), mert azok tömörebbek, de ennek ára van. Tipikus eset, hogy így, egy levegővel le van írva, hogy  $A \leq B = C \leq D = E \leq F$ : ekkor arról van szó, hogy egyenként teljesülnek a „lépések” (hogy  $A \leq B$ ,  $B = C$ ,  $C \leq D$ , stb.), amiket egyenként végig kellhet gondolni, és végül levonni a következtetést, hogy  $A \leq F$ . Az ember agya (főleg ha a jelölt betűk bonyolult kifejezések) ezt lassabban dekódolja, mint a folyószöveget; nehéz rutinosan „olvasási tempót váltani”, amikor kell.

- A komplex függvénytan a fizikában időnként külön magyarázat nélkül a tarsolyból elővett „matematikai módszer”. Először ritkábban, később egyre többször lesz szükség rá: érdekes speciális függvények, integrálási módszerek, differenciálegyenlet-megoldások jobb kezelhetőségét nyújtja. Kispórolom annak ismételtetését, hogy mennyire fontos, amit tanulunk. A komplex függvénytan a matematika egyik gyöngyszeme is; ma is kutatott terület, de az alapokat jó 200 éve kidolgozták (nagyraoszt *Augustin-Louis Cauchy*, valamint *Bernhard Riemann*; sokszor fognak ők szerepelni).

- Írtam hosszú függelékkel is: sehonnai plusz témakörök, bizonyítások befejezései, matematikai bevezetők/tisztázások kaptak itt helyet. Némelyik függelékbeli anyag talán jobban érezné magát egy matematikus kurzuson, de talán veszteség éri azt a fizika BSc szakos hallgatót, aki elől „eltitkolják” ezeket, így azt gondoltam, hogy elfér ennyi „matematikuskodás”. A főszövegben legalábbis mindig megemlítem, hogy mikor milyen tételt vagy fogalmat használunk.

- Sokat támaszkodtam Matolcsi Tamás egykori analízisóráira (és a kapcsolódó „Analízis” jegyzet-sorozatra.<sup>1</sup>) Visszamenőleg köszönetet mondok neki (és szerzőtársainak); most azért lespóroltam a szigorúságból. Hasznos volt számomra Halász Gábor „Komplex függvénytan füzetei” jegyzet-sorozata is; ez sokkal több mindent tárgyal, és a matematikus szakon tankönyv.

- Néhány apróság már most előre:

- 1.) Ugye  $A \subset B$  azt jelenti, hogy  $A$  részhalmaza  $B$ -nek. Vigyázat: nem lehet elégszer mondani, hogy ez megengedi azt is, hogy  $A$  megegyezzen  $B$ -vel; nem fogom ezt mindig külön hangsúlyozni!
- 2.) Ha  $x$  és  $y$  különböző valós számok, akkor vagy  $x < y$ , vagy  $y < x$ ; akármennyire kicsit térnek is csak el, mindkét esetben még mindig van közöttük végtelen sok további valós szám.
- 3.) Ha  $U$  halmaz, és  $H \subset U$ , akkor a  $H$  részhalmaz *karakterisztikus függvénye* (jelben:  $\chi_H$ ) az az  $U$ -n értelmezett valós értékű (tehát:  $U \rightarrow \mathbb{R}$ ) függvény, aminek értéke az  $x \in U$  helyen 1, ha  $x \in H$ , és nulla, ha  $x \notin H$ . Sokszor használjuk pl. valós intervallumok karakterisztikus függvényeit.

---

<sup>1</sup>Ezt kevés fenntartással jó szívvel ajánlom annak, aki kicsit el akar mélyedni a matematikában; letölthetők innen (2020): <http://szofi.elte.hu/~szaboa/MatolcsiKonyvek/pdf/jegyzet/>, analizis1-től 9-ig.

# Tartalomjegyzék

<b>Fülszöveg</b>	<b>2</b>
<b>Tartalomjegyzék</b>	<b>3</b>
<b>1. Ismétlések, komplex számok, komplex változós függvények</b>	<b>1</b>
1.1. Komplex számok és műveleteik . . . . .	1
1.2. Polinomok, racionális törtfüggvények (alaptudnivalók) . . . . .	6
1.3. Hatványsorok . . . . .	10
1.4. Elemi függvények, egyszerű hatványsorok . . . . .	14
<b>2. Komplex differenciálhatóság és egyszerű következményei</b>	<b>19</b>
2.1. Komplex differenciálhatóság . . . . .	19
2.2. A Cauchy-Riemann-egyenletek . . . . .	20
2.3. Differenciálható függvények mint konform leképezések szemléltetése . . . . .	24
2.4. Laplace-egyenlet, $U$ és $V$ harmonikus pár, „varázssformula” . . . . .	32
2.5. Jellemző függvénytípusok és elnevezések . . . . .	39
<b>3. Vonalintegrálok</b>	<b>47</b>
3.1. Közjáték: görbefogalmak . . . . .	47
3.2. Közjáték: az integrálfogalom finomságai, becslések, Lebesgue-tétel . . . . .	48
3.3. Vonalintegrálás a komplex síkon . . . . .	52
3.4. Komplex Newton-Leibniz-formula . . . . .	55
3.5. Komplex integrál útfüggetlensége, Cauchy-tétel . . . . .	57
3.6. Integrálok útfüggetlensége: közvetlen alkalmazások . . . . .	60
<b>4. Analitikusság, Cauchy-formulák, Laurent-sor</b>	<b>65</b>
4.1. Függvények analitikussága, analitikus elfolytatás . . . . .	65
4.2. Cauchy formulái . . . . .	68
4.3. A Cauchy-formulák néhány további következménye . . . . .	72
4.4. Izolált szingularitások, Laurent-tétel, reziduúmtétel . . . . .	74
4.5. Pólusok és reziduumaik . . . . .	79
<b>5. Alkalmazások, további ismeretek</b>	<b>84</b>
5.1. Az analitikusság hasznosításai . . . . .	84
5.2. Integrálok kiszámítása reziduúmtétellel . . . . .	87
5.3. Egyszerű típusú vágások . . . . .	96
5.4. Síkbeli elektrosztatika (azaz: Laplace-egyenlet, második felvonás) . . . . .	103
5.5. Kiegészítés: az argumentum-elv . . . . .	109
<b>6. A gamma-függvény</b>	<b>112</b>
6.1. Definíció, speciális értékek, kapcsolódó integrálok . . . . .	112
6.2. Analitikus elfolytatás, reflexiós összefüggés . . . . .	116
6.3. Stirling-formula, következmények . . . . .	119
6.4. További érdekességek . . . . .	123

<b>A. függelék: Valós harmadfokú egyenlet megoldóképlete</b>	<b>131</b>
<b>B. függelék: Sorok, sorozatok, konvergencia</b>	<b>135</b>
B.1. Konvergens sorozatok, Cauchy-féle sorozatok . . . . .	135
B.2. Sorok, sorösszegek, abszolút összegezhetőség . . . . .	138
B.3. Függvénytörzsek, függvény-sorok, folytonosság . . . . .	143
B.4. Kiegészítések hatványsorokhoz . . . . .	147
<b>C. függelék: Bizonyítások, kiegészítések</b>	<b>150</b>
C.1. A Cauchy-tétel Goursat-féle bizonyítása . . . . .	150
C.2. Kiegészítések a Cauchy-formulák és a Laurent-tétel bizonyításához . . . . .	152
C.3. A „varázsszám” bizonyítása és további részletei . . . . .	153
C.4. Paraméteres integrál differenciálhatósága . . . . .	155
C.5. Hatványsorok viselkedése a konvergenciakör határán . . . . .	157
C.6. Kiegészítések a gamma-függvény tárgyalásához . . . . .	160
<b>D. függelék: a Riemann-féle zéta-függvény</b>	<b>165</b>
D.1. Definiáló sorok, integrálok . . . . .	165
D.2. Analitikus elfolytatás, reflexiók összefüggés . . . . .	167
D.3. Speciális értékek, zérushelyek . . . . .	170

# 1. Ismétlések, komplex számok, komplex változós függvények

## 1.1. Komplex számok és műveleteik

• Az első két oldal „plusz érdekesség”: komplex számok bevezetése *másképp*. A valós számok halmaza ( $\mathbb{R}$ ) ugyebár olyan halmaz, amelyben értelmezett egy *összeadás* és egy *szorzás* nevű művelet, amely bármely két halmazelemhez (*számhoz*) egy halmazelemet (azaz számot) rendel, és

→ *A1*: Az *összeadás asszociatív*: bármely három  $x, y, z$  számra  $(x+y)+z = x+(y+z)$ .

→ *A2*: Az *összeadás kommutatív*: bármely két  $x, y$  számra  $x+y = y+x$ .

→ *A3*: Van egy *nulla* nevű szám,  $0$ , amire igaz, hogy minden  $x$  számra  $x+0 = x$ .

→ *A4*: Minden  $x$  számnak van *ellentettje*,  $-x$ , amire  $x + (-x) = 0$ .

→ *M1*: A *szorzás asszociatív*:  $(xy)z = x(yz)$  bármely három  $x, y, z$  számra.

→ *M2*: A *szorzás kommutatív*: bármely két  $x, y$  számra  $xy = yx$ .

→ *M3*: Van egy „egy” névre hallgató szám,  $1 \neq 0$ , amivel minden  $x$  számra  $x \cdot 1 = x$ .

→ *M4*: Minden *nemnulla*  $x \neq 0$  számnak van *reciproka*,  $\frac{1}{x}$ , amire  $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ .

→ *AM*: Az összeadásra nézve a szorzás *disztributív*: minden  $z, x, y$  számokra  $z(x+y) = zx + zy$ .

A reciprokkal szorzás neve ugye *osztás*, az ellentett hozzáadásának neve ugye *kivonás*.<sup>2</sup>

A valós számok az eddigieken felül még azt is tudják, hogy *teljesen kitöltik* a számegyenesest.

• Az *A1–AM* tulajdonságokat annyira szeretjük, hogy nevet kaptak: egy olyan halmazt, amit el-láttunk ezeket teljesítő összeadás- és szorzásművelettel, (szám)testnek hívunk (angolul: *field*). Az *A1–AM* tulajdonságok a *testaxiómák*. (Az „axióma” jelentése alapigazság; itt *alapkövetelménynek* fordíthatjuk). Pl. a racionális és a valós számok halmazai ( $\mathbb{Q}$  és  $\mathbb{R}$ ) is egy-egy számtest.<sup>3</sup>

Az előző pont utolsó kitétele (a számegyenes kitöltése) viszont csak a rendezett valós számok sajátja, a testaxiómáktól független tulajdonság (pl.  $\mathbb{Q}$ -ra ugye nem is igaz). Jó lenne viszont  $\mathbb{R}$ -nél tovább bővíteni a számfogalmat. A számegyenes már tele van, következő ötlet a sík. A kérdés: be tudunk-e vezetni a sík pontjain mint „szám”halmazon olyan (majd összeadásnak és *egymással* szorzásnak nevezett) műveleteket, amelyekre teljesülnek a fentebbi testaxiómák.

• A síkot tekinthetjük kétdimenziós valós vektortérnek. Új számhalmazunkban meg szeretnénk találni a valós számokat is: adódik, hogy „síkbeli”,  $z$ -vel jelölt számaink alakja legyen:

$$z := a \cdot 1 + b \cdot \mathcal{U}, \quad \text{Itt } 1 \text{ a valós } 1 \in \mathbb{R}, \mathcal{U} \text{ pedig egy „új számegység”. A „síkbeli-számok” tehát}$$

$$\text{ahol } a, b \in \mathbb{R}. \quad 1 \text{ és } \mathcal{U} \text{ valós lineárkombinációi, és } 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot \mathcal{U} \text{ és } \mathcal{U} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot \mathcal{U}.$$

Az  $a \cdot 1 + 0 \cdot \mathcal{U}$  számok halmaza (ahol  $a \in \mathbb{R}$ ) lesz a *valós tengely*, az  $\mathbb{R}$  beágyazása a sík-számok közé. A  $z \equiv a \cdot 1 + b \cdot \mathcal{U}$  „számaink” *összeadását* szinte egyértelmű, hogy szokásosan, vektorkomponensek módjára kell értelmeznünk, ha szeretnénk, hogy teljesüljenek az *A1–A4* tulajdonságok:

$$\text{Ha } z_1 = a_1 \cdot 1 + b_1 \cdot \mathcal{U}, \quad z_2 = a_2 \cdot 1 + b_2 \cdot \mathcal{U}, \quad \text{akkor } \underline{\underline{z_1 + z_2 := (a_1 + a_2) \cdot 1 + (b_1 + b_2) \cdot \mathcal{U}}}}$$

$$\underline{\underline{\text{Nulla: } 0 \cdot 1 + 0 \cdot \mathcal{U}}}. \quad \text{Ellentett: } z = a \cdot 1 + b \cdot \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{-z := (-a) \cdot 1 + (-b) \cdot \mathcal{U}}}}$$

<sup>2</sup>Az *A1–AM* kitételekből logikailag egyszerűen következik (próbáljuk meg!), hogy tényleg igaz, hogy a  $0$ , az  $1$ , és egy szám ellentettje ill. reciproka egyértelműek. Ez *kell is*, ha így akarjuk a kivonást és az osztást értelmezni.

<sup>3</sup>Érdekesség: a (körzővel-vonalzóval egységszakaszból) *szerkeszthető számok* halmaza is test; ez az elemeinek összegei, szorzatai, különbségei, hányadosai mellett pozitív elemei négyzetgyökeit is mind tartalmazza, így tehát bővebb  $\mathbb{Q}$ -nál. Az algebrai számok halmazánál viszont szűkebb: pl. a  $\sqrt[3]{2}$  nem szerkeszthető (ld. „kockakettőzés”).

• A szorzás érdekesebb lesz. Szeretnénk, hogy asszociatív, kommutatív és összeadásra disztributív legyen; ehhez az *kell*, hogy az 1 és  $\mathcal{U}$  kombinációjaként felírt számokat „tagonként” lehessen szorozni:

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 \cdot 1 + b_1 \cdot \mathcal{U}, & \Rightarrow & & z_1 \cdot z_2 &= a_1 a_2 \cdot (1 \cdot 1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot (1 \cdot \mathcal{U}) + b_1 b_2 \cdot (\mathcal{U} \cdot \mathcal{U}) \\ z_2 &= a_2 \cdot 1 + b_2 \cdot \mathcal{U} & & & & \text{kell, hogy legyen. (Máris kihasználtuk, hogy } 1 \cdot \mathcal{U} = \mathcal{U} \cdot 1.) \end{aligned}$$

Ha megmondjuk, „mennyi”  $1 \cdot 1$ ,  $1 \cdot \mathcal{U}$  és  $\mathcal{U} \cdot \mathcal{U}$ , kész a „szorzótábla”. Szeretnénk, ha továbbra is a valós 1 (azaz az  $1 \cdot 1 + 0 \cdot \mathcal{U}$ ) lenne a szorzás *egységeleme*; emiatt  $1 \cdot 1 = 1$  és  $1 \cdot \mathcal{U} = \mathcal{U}$  kell, hogy legyen (a  $z_1 z_2$ -re felírt iménti képletből láthatóan, ha  $a_1=1$  és  $b_1=0$ , de  $a_2, b_2$  akármilyen; vagy fordítva).  $\mathcal{U} \cdot \mathcal{U}$  értéke kérdéses: mindenesetre ez is *valamilyen* sík-szám kell legyen:

$$\mathcal{U} \cdot \mathcal{U} = \alpha 1 + \beta \mathcal{U}, \quad \text{ahol } \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R} \text{ egyszer s mindenkorra lefixált valós számok.}$$

Úgy tűnik, hogy ahányféle  $\alpha, \beta$  valós számokat választunk, annyi féleképpen vezethetünk be értelmes szorzásműveletet a sík-számainkon. De nem mindegyik lehetőség *lényegesen* különböző.

• Az  $\mathcal{U}$  helyett ugyanolyan joggal egy másik  $\mathcal{U}' := A \cdot 1 + B \cdot \mathcal{U}$  számot is használhatunk arra, hogy  $\mathcal{U}'$  és az 1 lineárkombinációjaként felírjuk a sík-számokat (itt  $A, B \in \mathbb{R}$ , és  $B \neq 0$ ). Adott  $\alpha$  és  $\beta$  esetén viszont megfelelő  $A$ -t és  $B$ -t választva  $\mathcal{U}'$  szorzása esetleg egyszerűbb. Ellenőrizzük, hogy

$$\mathcal{U}' = A \cdot 1 + B \cdot \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{U}' \cdot \mathcal{U}' = (\alpha B^2 - \beta AB - A^2)1 + (\beta B + 2A)\mathcal{U}'.$$

Mindenképp megválaszthatjuk úgy  $A$ -t, hogy  $\mathcal{U}' \cdot \mathcal{U}'$ -ből kiessen a  $\mathcal{U}'$ -s tag, azaz  $\mathcal{U}' \cdot \mathcal{U}'$  valós legyen:

$$\text{Legyen } A = -\frac{1}{2}\beta B, \quad \text{ezt visszaírva: } \mathcal{U}' \cdot \mathcal{U}' = \frac{B^2}{4}(\beta^2 + 4\alpha) \cdot 1.$$

Három lehetőség kínálkozik attól függően, hogy az eredetileg megadott  $\alpha$  és  $\beta$  számok milyenek.

1. Ha  $4\alpha + \beta^2 = 0$ , akkor az iménti  $\mathcal{U}'$ -t nevezzük el  $\mathcal{N}$ -nek. „Sík-számaink” szorzása az lenne, hogy

$$z = a \cdot 1 + b \cdot \mathcal{N}, \quad \mathcal{N} \cdot \mathcal{N} = 0, \quad \text{ebből} \quad \begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 1 + b_1 \mathcal{N})(a_2 1 + b_2 \mathcal{N}) = \\ &= a_1 a_2 \cdot 1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot \mathcal{N}. \end{aligned}$$

Ez a szorzás kommutatív, asszociatív, az 1, azaz  $1 \cdot 1 + 0 \cdot \mathcal{N}$  az egységeleme, és az összeadásra disztributív: *majdnem* minden testaxióma teljesül.  $M_4$  viszont nem. Nemcsak a  $0 \cdot 1 + 0 \cdot \mathcal{N}$  nullának, hanem az összes  $0 \cdot 0 + b \cdot \mathcal{N}$  alakú számnak sincsen reciproka (itt  $b \in \mathbb{R}$  akármilyen lehet): próbáljuk ki, hiába szorozzuk itt az ilyen számokat bármivel is, nem jöhet ki 1, azaz  $1 \cdot 1 + 0 \cdot \mathcal{N}$ .

2. Ha  $4\alpha + \beta^2 > 0$ , akkor  $B$ -t megválaszthatjuk  $2/\sqrt{4\alpha + \beta^2}$ -nek, és az új  $\mathcal{U}'$ -t most  $\mathcal{E}$ -nek nevezhetjük, amivel az ilyen típusú szorzási szabályú „sík-számainkra” az vonatkozna, hogy

$$z = a \cdot 1 + b \cdot \mathcal{E}, \quad \mathcal{E} \cdot \mathcal{E} = 1, \quad \text{ebből} \quad \begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 1 + b_1 \mathcal{E})(a_2 1 + b_2 \mathcal{E}) = \\ &= (a_1 a_2 + b_1 b_2) \cdot 1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Itt is  $M_4$ -gyel lesz hiba: nemcsak a  $0 \cdot 1 + 0 \cdot \mathcal{E}$  nullát, hanem az összes  $a \cdot 1 + a \cdot \mathcal{E}$  és  $a \cdot 1 - a \cdot \mathcal{E}$  számokat ( $a \in \mathbb{R}$  akármilyen) is hiába szorzom bármivel, nem kaphatok 1-et, azaz  $1 \cdot 1 + 0 \cdot \mathcal{E}$ -t.

3. Végül (alig várjuk), ha  $4\alpha + \beta^2 < 0$ , akkor  $B$ -t  $2/\sqrt{|4\alpha + \beta^2|}$ -nek választhatjuk, és az így kapott  $\mathcal{U}'$ -t nevezzük  $\mathcal{I}$ -nek, ezzel ebben az esetben a szorzási szabály az lesz, hogy

$$z = a \cdot 1 + b \cdot \mathcal{I}, \quad \mathcal{I} \cdot \mathcal{I} = -1, \quad \text{ebből} \quad \begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 1 + b_1 \mathcal{I})(a_2 1 + b_2 \mathcal{I}) = \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) \cdot 1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot \mathcal{I}. \end{aligned}$$

Ugyebár kiderül, hogy így tényleg csak a nullának nincs reciproka: (szám)testet kapunk. Ez a komplex számok  $\mathbb{C}$  halmaza; az átmenetileg  $\mathcal{I}$ -vel jelölt „dolg” jelölhetjük  $i$ -vel, ahogy szoktuk.

• A fentebbi fejtegetés **összefoglalva**: ha „a síkot betöltő” számok összeadását és szorzását szeretnénk az  $A1-AM$  testaxiómákat megtartva bevezetni, akkor vagy nem sikerül, vagy pedig (az új számegegységet alkalmasan választva) lényegében a  $z = a + bi$  alakú komplex számokra jutunk.

Komplex számokkal mint kéttagú kifejezésekkel lehet számolni,  $i$ -t önálló szimbólumként kezelve, melyre  $i^2 = -1$ . (Tényleg „megtaláltuk” tehát a negatív valós számok négyzetgyökeit is.)

$$\begin{aligned} z_1 = a_1 + ib_1, \\ z_2 = a_2 + ib_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i, \\ z_1 - z_2 &= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i, \\ z_1 z_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i, \end{aligned} \quad \frac{1}{z_1} = \frac{a_1 - b_1 i}{a_1^2 + b_1^2}. \quad (1.1)$$

A komplex számok  $\mathbb{C}$  halmaza tehát **test**: az összeadásukra és szorzásukra igazak az  $A1-AM$  tulajdonságok (ld. fentebb; valós számokra mondtuk ki őket, de épp ez a lényeg, hogy komplexekre is igazak). A komplex számok továbbá *kitöltik* a komplex síkot, épp mint a valósak a számegegyenest.

•  $\mathbb{R}$ -ből  $\mathbb{C}$ -be kilépve feladtuk a *rendezést*; ezt nem nagyon sajnáljuk. Vajon léteznek-e még a „síknál is bonyolultabb” számok? Válasz: további általánosításokat is tehetünk, de egyre több megszokott dolgot kell feladni. Pl. az ún. *kvaterniók* halmaza négydimenziós valós teret tölt ki (úgy, ahogyan valós számokkal való lineárkombinálásra nézve  $\mathbb{R}$  egy-,  $\mathbb{C}$  pedig kétdimenziós); a kvaterniók szorzásművelete azonban nem kommutatív. Eleresztve a gyeplőt: adott  $N$  esetén az  $N \times N$ -es mátrixok (mátrix-)szorzásánál 1) nincs kommutativitás, 2) nincs mindennek inverze („reciproka”), továbbá 3) nemnulla tényezők szorzata is lehet nulla. A mátrixszorzás és -összeadás (a többi jó tulajdonsága miatt) emlékeztet számok szorzására és összeadására, de már annyira másminlyen, hogy eszünk ágában sincs általános mátrixokat önálló *számként* értelmezett objektumoknak tekinteni. A komplex számok viszont *még elég jók* ahhoz, hogy számokként kezelhessük őket.

Még másképp: a  $\mathbb{C}$  az a halmaz, ami **még** kényelmesen *számhalmaznak* tekinthető **algebrai** értelemben (tehát: testet alkot), de **már** elég érdekes **geometriailag**: sík, amin vannak görbék, érdekes alakú tartományok, stb. Végülis ezen kettősség az oka annak, hogy a komplex (differenciálható) függvényekre meglepetésszerűen erős állításokat tehetünk majd.

• Újra **összefoglalunk** néhány alapfogalmat. A komplex számsíkot kifeszíti a valós tengely (ezen „lakik”  $\mathbb{R}$  mint  $\mathbb{C}$  részhalmaza), és a képzetes tengely, amelyet merőlegesen rajzolunk. Elnevezések:

Komplex szám:	$z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}$
$z$ komplex konjugáltja:	$z^* \equiv a - bi,$
$z$ valós és képzetes részei:	$\operatorname{Re} z = \Re(z) \equiv a, \quad \operatorname{Im} z = \Im(z) \equiv b,$
$z$ abszolútérték-négyzete:	$ z ^2 \equiv a^2 + b^2 = z z^* \in \mathbb{R}_0^+,$
$z$ argumentuma (fázisa):	$\varphi = \arg z \in ]-\pi, \pi].$
$z$ trigonometrikus ill. exponenciális alakja:	$z =  z (\cos \varphi + i \sin \varphi) =  z e^{i\varphi}.$

A  $\operatorname{Re}$  és az  $\operatorname{Im}$  helyett használnak ilyen furcsa  $\operatorname{R}$  és  $\operatorname{I}$  betűket is nyomtatásban.<sup>4</sup>

• Az előbbi összefoglalóban is már kihasznált **Euler-formula** alapvető fontosságú:

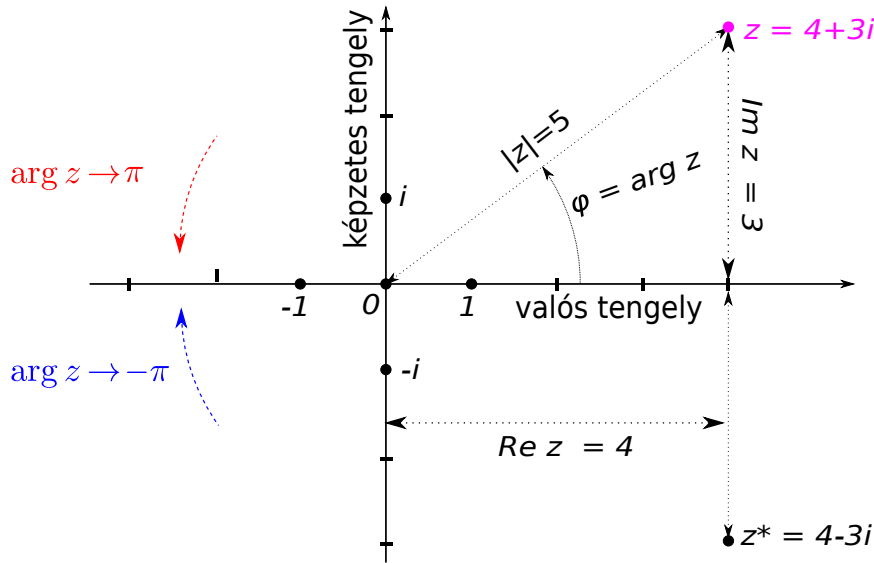
$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad \text{de akármilyen } z\text{-re is} \quad \exp(iz) = \cos z + i \sin z. \quad (1.2)$$

Ezt vagy „kidumáljuk” (azaz:  $\sin$ -t és  $\cos$ -t geometriailag ismerve így értelmezzük a komplex exponenciális, ld. pl. a Vektorszámítás jegyzet 2.4. szakaszában), vagy „levezetjük” (azaz: az  $\exp$

<sup>4</sup> $\text{\LaTeX}$ -ben ezt a karaktertípust a  $\mathfrak{R}$  és a  $\mathfrak{I}$  módon érhetjük el; a beépített  $\operatorname{Re}$  és  $\operatorname{Im}$  parancsok flancosabb: ilyen  $\Re$  és  $\Im$  betűket produkálnak; utóbbiakat én nem szeretem.

függvényt máshogy, pl. hatványsorával bevezetjük, és ezen (1.2) Euler-formulának megfelelően értelmezzük a sin és cos függvényeket; ennek ismétlését ld. lentebb az 1.4. szakaszban). Az Euler-formulát és az elemi függvények „komplexesített” jellemzőit hasznos tudni; lesznek példák bőven.

- A most  $\varphi$ -vel is jelölt **argumentum** (fázis), ami a  $z$  irányú „vektor” valós tengellyel bezárt szöge,  $\arg z$ , nem lenne egyértelmű. Szokásosan **megszorítjuk** a  $]-\pi, \pi]$  tartományba, azaz a **vágást** a negatív valós féltengelyre (pontosabban: alá) tesszük: pozitív (óramutatóval ellentétes) körbejárással  $\arg z$  nő  $\pi$ -ig, majd az  $\mathbb{R}^-$  féltengelyen áthaladva visszaugrik  $-\pi$  „fölé”.



1. ábra. A komplex számsík egyszerű fogalmainak illusztrációja (kb. tavalyról átemelve).

- A komplex hatványozást így érdemes ugye definiálni:  $a, b \in \mathbb{C}$  akármilyen számokra (ha  $a \neq 0$ )

$$a^b \equiv \exp(b \operatorname{Ln} a) = e^{b \operatorname{Ln} a}, \quad \text{ahol} \quad \operatorname{Ln} z := \ln(|z|) + i \arg z, \quad (1.3)$$

és ugye  $-\pi < \arg z \leq \pi$ .

Felidéztük a komplex logaritmust is. Az  $\arg z$  a fázismegállapodás miatt az egyes  $x, y$  tartományokban különféleképpen írható fel az ismert  $\operatorname{arctg}$  függvénnyel. Néhány részben átfedő lehetőség:<sup>5</sup>

Tartomány:	$\Re(z) > 0$	$\Im(z) > 0$	$\Im(z) < 0$	$\mathbb{R}_0^-$ -t kivéve akárhol:
$\arg(x+iy) =$	$\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$	$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$	$\operatorname{arctg} \frac{x}{y} - \frac{\pi}{2}$	$2 \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$

- Emlékeztető a komplex számok műveleteinek **geometriai jelentéséről**: az összeadás a (két-dimenziós sík mintájára) vektor-összeadásként értelmeződött, vagyis egy komplex számhalmaz minden eleméhez egy konstans  $z_0$  számot **hozzáadva** azt mintegy a  $z_0$  „vektorral” **eltoljuk**.

Szorzásnál a fázisok összeadódnak (de a fázist ugye úgy kell érteni, hogy végül mindig  $-\pi$  és  $\pi$  közé essen), az abszolútértékek pedig szorozódnak. Egy  $z$ -vel való **szorzás** tehát origó középpontú  $|z|$ -szeres **nagyítást** és  $\arg z$  szögű **elforgatást** jelent. Speciálisan:  $\pm i$ -vel való szorzás egyszerűen  $\pm 90^\circ$ -os elforgatást jelent. Ebből (is) nyilvánvalók az alábbi összefüggések; azért felírjuk őket:

$$\Re(iz) = -\Im(z), \quad \Re(-iz) = \Im(z), \quad \Im(iz) = \Re(z), \quad \Im(-iz) = -\Re(z). \quad (1.4)$$

<sup>5</sup>Az utolsó bonyolultabb: úgy kapjuk, hogy  $\sqrt{z}$ -t a lentebbi (1.9) képlettel kifejezzük, egyszerűsítünk, és  $\sqrt{z}$ -re (mivel a fázismegállapodás szerint  $\Re(\sqrt{z}) \geq 0$  mindig igaz) az első képletet alkalmazzuk: az így kapott eredmény kétszerese lesz  $z$  argumentuma. A trigonometrikus  $\operatorname{tg}(2\varphi) = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$  képletből indulva is ugyanerre juthatunk.



•  $\mathbb{R}$ -ből  $\mathbb{C}$ -be kilépve újra kell gondolnunk a **hatványozást**, amit valós kitevőknél is ( $a \in \mathbb{R}^+$  és  $c \in \mathbb{R}$  esetén) az  $a^c \equiv \exp(c \ln a) \equiv e^{c \ln a}$  módon értelmezzük. A logaritmus azonosságaiából kell kiindulni:

$$\text{Valós számok között: ha } a, b \in \mathbb{R}^+, c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \ln(ab) &= \ln a + \ln b, & \text{és} \\ \ln(a^c) &= c \cdot \ln a, \end{aligned} \quad (1.5)$$

mivel minden  $x \in \mathbb{R}$ -re  $\ln(\exp x) = x$ . Ezekből következőleg igazak a szokásos összefüggések:

$$\text{Valós számok között} \quad (ab)^c = a^c \cdot b^c, \quad \text{és} \quad (a^c)^d = a^{cd}. \quad (1.6)$$

Tudva, hogy  $e^{X+Y} = e^X e^Y$  tényleg mindig igaz, valamint tudva a logaritmus iménti azonosságait az elsőt így igazolhatjuk:  $(ab)^c = e^{c \ln(ab)} = e^{c(\ln a + \ln b)} = e^{c \ln a + c \ln b} = e^{c \ln a} e^{c \ln b} = a^c \cdot b^c$ . A másodikat pedig így:  $(a^c)^d = e^{d \ln(a^c)} = e^{dc \ln a} = a^{cd}$ . A szomorú hír ezek után viszont az, hogy

$$\begin{aligned} \text{Komplex számok között, azaz} & \quad \text{Ln}(ab) \text{ nem mindig egyenlő } \text{Ln } a + \text{Ln } b\text{-vel,} \\ \text{ha csak azt tudjuk, hogy } a, b \in \mathbb{C}, & \quad \text{és } \text{Ln}(a^b) \text{ nem mindig egyenlő } b \cdot \text{Ln } a\text{-val.} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Konkrétan:  $\text{Ln } z = \ln |z| + i \arg z$ , emiatt az első azonosság úgy romolhat el, hogy két *komplex* szám,  $a$  és  $b$  argumentumai összeadódnak, amikor az  $ab$  szorzatot képezzük, de ha  $a$  kapott „argumentum”  $\pi$ -nél nagyobb vagy  $-\pi$ -nél kisebb lenne, akkor  $2\pi$ -t levonunk, vagy hozzáadunk, hiszen keményen megköveteltük, hogy az argumentum mindig  $]-\pi, \pi]$ -be essen.<sup>6</sup> Az pedig hasonlóan végiggondolva még nyilvánvalóbb, hogy  $\text{Ln}(a^b)$  és  $b \cdot \text{Ln } a$  teljesen mások is lehetnek, főleg ha  $b \notin \mathbb{R}$ . Így tehát

$$\begin{aligned} \text{komplex számok} & \quad (ab)^c \text{ nem feltétlenül egyenlő } a^c \cdot b^c\text{-vel,} \\ \text{között mozogva:} & \quad \text{és } (a^b)^c \text{ totál más is lehet, mint } a^{bc}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

• Itt a fázisátbukás már „durvább” eltéréseket is okozhat.<sup>7</sup> Sokszor körülményes lenne minden  $(ab)^c \stackrel{?}{=} a^c b^c$  átalakításnál leellenőrizni, hogy az  $ab$  szorzásnál „nem bukik-e át” a fázis, azaz tényleg igaz-e az egyenlőség; később, az 5.1. szakaszban majd látunk egyszerűbb módszereket.

Már most kiemeljük, hogy ha  $r \in \mathbb{R}^+$ , akkor  $\arg r = 0$ : emiatt ha  $r \in \mathbb{R}^+$ , akkor  $(ar)^c = a^c r^c$  mindig igaz. Másrészt ha  $m \in \mathbb{Z}$  valós egész szám, akkor is  $(ab)^m = a^m b^m$  mindig igaz. Szorozgatásként gondolva a hatványozásra ez nyilvánvaló, az előző ponttal pedig úgy harmonizál, hogy amikor a szorzásból jövő esetleges  $2\pi i$  ugrást visszatesszük a kitevőbe, akkor  $e^{2\pi i \cdot c}$ -ről akkor és csak akkor tudhatjuk biztosan, hogy 1-gyel egyenlő, ha  $c=m$  egész. De már pl. törtkitevőkkel (négyzetgyökkel is, ami 1/2-dik hatványozás) is vigyázzunk: komplexben  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$  nem mindig egyenlő  $\sqrt{ab}$ -vel.

• Ha  $c \notin \mathbb{Z}$ , az  $f(z) = z^c$  függvénynek vágása van az  $z \in \mathbb{R}^-$  féltengelyen: ehhez kétfelől közelítve mások a határértékek (mivel  $z^c \equiv e^{c \text{Ln } z}$ , és  $\mathcal{J}(\text{Ln } z)$  felülről  $+i\pi$ -hez, alulról  $-i\pi$ -hez tart ott).

Valós pozitív  $\alpha$  kitevőre az  $f(z) = z^\alpha$  **hatványozásfüggvény** geometriai jelentést hordoz. Ugye  $z^\alpha = e^{\alpha(\ln |z| + i \arg z)} = e^{\alpha \ln |z|} e^{i\alpha \arg z} = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg z}$ : ha itt  $\alpha \in \mathbb{R}$ , akkor az utóbbi alak egy exponenciális alakban jól felírt komplex szám, melynek abszolútértéke az eredetiének  $\alpha$ -adik hatványa:  $|z^\alpha| = |z|^\alpha$ . Érdekesebb, hogy az **argumentum  $\alpha$ -szorosára** változik. Ha  $\alpha < 1$ , akkor tehát a függvényünk az  $\mathbb{R}^-$  vágástól kétfelé visszahajtogatva a komplex síkot legyezőszerűen „összébcsukja”, ha pedig  $\alpha > 1$ , akkor pedig „kihajtogat”: utóbbi esetben egy  $\frac{\pi}{\alpha}$  középponti szögű „ékből” (a  $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{\alpha}$  tartományból) indulva a felső félsíkon lévő összes komplex szám kiadódik  $\alpha$ -adik hatványként.

<sup>6</sup>Példa:  $a = 2e^{i\frac{3}{4}\pi}$ ,  $b = 3e^{i\frac{3}{4}\pi}$ ; mindkettőre  $\arg = \frac{3}{4}\pi = 135^\circ$ . Ekkor  $ab$ -ra írhatjuk, hogy ő  $6e^{i\frac{3}{2}\pi}$ -nel egyenlő, az argumentumára viszont azt kell mondanunk, hogy az  $2\pi$ -vel kevesebb,  $-\frac{\pi}{2}$ . Most tehát  $\text{Ln}(ab) = \ln 6 - i\frac{\pi}{2}$ , de  $\text{Ln } a + \text{Ln } b = (\ln 2 + i\frac{3}{4}\pi) + (\ln 3 + i\frac{3}{4}\pi) = \ln 6 + i\frac{3}{2}\pi$ , azaz itt emiatt tényleg  $\text{Ln}(ab) \neq \text{Ln } a + \text{Ln } b$ .

<sup>7</sup>Az előzőhöz hasonló példa: ellenőrizzük, hogy ha  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(i-1)$ ,  $b=i$  és  $c=4i$ , akkor  $(ab)^c = e^{3\pi}$ , de  $a^c \cdot b^c = e^{-5\pi}$ .

• Az  $1/2$ -edik hatványozás, azaz **négyzetgyökvonás** komplex számok között mozogva is „valós műveletekkel elvégezhető”: adott  $z=a+ib$  számra kijön az a  $w = A+iB$ , amire  $w^2 = z$ :

$$\begin{aligned}
 z = a+ib. \\
 \sqrt{z} := A+iB.
 \end{aligned}
 \Rightarrow
 \begin{cases}
 (A+iB)^2 = a+ib \\
 \Rightarrow \begin{cases}
 A^2-B^2=a, \\
 2AB = b
 \end{cases}
 \end{cases}
 \Rightarrow
 \begin{aligned}
 A &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{a^2+b^2} + a}, \\
 B &= \frac{\text{sgn}(b)}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{a^2+b^2} - a}.
 \end{aligned}
 \tag{1.9}$$

Ugye  $\arg z \in ]-\pi, \pi]$ , és a hatványozásra fentebb látottak szerint a képhalmaz ilyenkor egy „legyező-összébhhajtással” adódik: így látjuk, hogy a négyzetgyök eredményének a fázisa mindig  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ -be esik. A gyökvonás *képhalmaza* tehát a  $\Re(z) \geq 0$  félsík (kivéve az  $\Im(z) < 0$  képzetes féltengelyt).

Az  $A, B$  párra az  $A^2-B^2=a, 2AB=b$  egyenletrendszerből kétféle megoldás adódna. A felírt képletünk ezek közül azt választja, aminek a valós része nemnegatív, ahogy kell. Továbbá negatív valós számra (azaz ha  $a \leq 0$  és  $b=0$ ) a négyzetgyök tényleg  $+i\sqrt{|a|}$ . (Emlékezzünk: a  $\text{sgn}$  szignum-függvény negatív valós számra  $-1$ , pozitívrá  $+1$ ; továbbá úgy vesszük, hogy  $\text{sgn}(0) = 1$ ).

• A komplex konjugálást nemcsak összege, szorzaton, hányadoson, elemi függvényeken „emelhetjük át”, hanem legtöbbször a logaritmuson is, és emiatt a hatványozáson is: gondoljuk még egyszer végig, hogy mivel  $\text{Ln } z = \ln |z| + i \arg z$ , és  $\arg z$  vágása a negatív valós féltengelyen van (azaz  $\arg z$  „szimmetrikus” a valós tengelyre), emiatt ha csak  $z \notin \mathbb{R}^-$ , akkor  $\text{Ln}(z^*) = (\text{Ln } z)^*$ . Az  $\text{Ln}(z), z \in \mathbb{R}^-$  esettől eltekintve tehát egy „bonyolult kifejezés” konjugáltja úgy adódik, hogy az „összetevőknek” egyenként a konjugáltját vesszük (speciálisan:  $i$ -t mindenhol  $-i$ -re cseréljük).

## 1.2. Polinomok, racionális törtfüggvények (alaptudnivalók)

Néhány fontos függvényt kicsit összefoglalunk ebben és a következő szakaszokban. A legtöbbjük már ismerős, és később még bővebben, más szempontokból is ismerkedünk még velük.

**Polinomok:** igen fontosak a polinomok; ők talán „a legegyszerűbb” függvények. Például:

elsőfokú	másodfokú	harmadfokú	...	$N$ -edfokú
$a_0+a_1z,$	$a_0+a_1z+a_2z^2,$	$a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3,$		$\sum_{k=1}^N a_k z^k.$

Itt az  $a_0, a_1, a_2, \dots$  számok a polinom szempontjából rögzített (komplex) számok, a polinom *együtthatói* (amiket sokszor más, pl.  $a, b, c$  betűkkel jelölünk; lényeg, hogy ne a változóéval). A polinomoknak számos jó tulajdonsága van, ezeket legtöbbször rutinszerűen használjuk.

• Az első egy egyszerű dolog, amiről a későbbiekben derül majd ki igazán, hogy mennyire fontos:

$$\text{Állítás:} \quad \begin{aligned}
 &\text{ha } P(z) \text{ egy } \textit{nem nulladfokú} \text{ polinom,} \\
 &\text{akkor ha } |z| \rightarrow \infty, \text{ akkor } |P(z)| \rightarrow \infty.
 \end{aligned}
 \tag{1.10}$$

Vagyis ha  $z$ -vel *akármilyen irányban* végtelenhez tartunk, azaz  $|z| \rightarrow \infty$ , akkor  $P(z)$  is a végtelenhez tart. (Hogy egy komplex szám végtelenhez tart, azt mindig úgy értjük, hogy az abszolútértéke  $\infty$ -hez tart.) Az állítás indoklása:  $P(z) = \sum_{k=1}^N a_k z^k = z^N \cdot (a_N + \frac{a_{N-1}}{z} + \frac{a_{N-2}}{z^2} + \dots + \frac{a_0}{z^N})$ , és a zárójel  $a_N$ -hez tart,  $z^N$  pedig végtelenhez, ha  $N > 0$ . (A polinomunk akkor  $N$ -edfokú, ha  $a_N \neq 0$ .)

• Egy nulladfokú polinom éppen az  $a_0$  együttható értékű konstans függvény. Nem nulladfokú polinom viszont (mivel  $|z| \rightarrow \infty$ -re végtelenhez tart) semmiképpen nem konstans függvény. Ebből következik, hogy egy polinom fokszáma (a legmagasabb fokú tag kitevője) és együtthatói *egyér-*

*telműek.* Azaz: ha tudjuk valahonnan, hogy  $P$  és  $Q$  polinomok, és  $P(z)=Q(z)$  mindenütt, akkor biztos, hogy  $P$  és  $Q$  ugyanolyan együtthatójú ugyanannyiadfokú polinomok. Ugyanis  $P-Q$  ekkor azonosan nulla függvény és polinom:  $P$  és  $Q$  együtthatóinak különbsége csak csupa 0 lehet.

• Valós számok között ugye pl. az  $x^2+4$  polinomnak nincsenek valós zérushelyei. Komplexek viszont vannak:  $2i$  és  $-2i$ . Ha  $\mathbb{C}$ -t vesszük értelmezési tartománynak, akkor igaz az ún.

**Algebra alaptétele:**  $\mathbb{C}$ -n értelmezett nem nulladfokú (akár komplex együtthatós) polinomnak biztosan van zérushelye. (1.11)

Ez nem annyira *alaptétel*; be kell bizonyítani, ld. később.<sup>8</sup> *Megjegyzés:* polinomokra a *zérushely* és a *gyök* szavakat felváltva, azonos értelemben használja mindenki, innentől mi is néha.

Első- és másodfokú polinomokra gondolva nem nagy újdonság az algebra alaptétele, hiszen:

$$\begin{array}{l} L(z):=az+b, \\ L(z)=0 \end{array} \Rightarrow z = -\frac{b}{a}. \quad \begin{array}{l} Q(z):=az^2+2bz+c, \\ Q(z)=0 \end{array} \Rightarrow z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-ac}}{a}.$$

(Emlékezzünk: a négyzetgyök  $\mathbb{C}$ -ben is egyértelműen „elvégezhető”, ld. fentebb az (1.9) egyenletet!)

Harmadfokú egyenlet megoldóképlete (ld. az A függelék is) nem véletlenül kevésbé ismert, nem túl kényelmes. Magasabb (pl. ötöd-)fokú polinomokra pedig nincs megoldóképlet. Nem lenne tehát egyértelmű, hogy minden hülye komplex együtthatós sokadfokú polinom is tényleg valahol biztos „átmegy a nullán”; azaz felvett értékének *valós és képzetes része egyszerre* nulla lesz valamilyen  $z$ -nél. A tétel lényege, hogy *van* ilyen  $z$  zérushely (csak esetleg nem tudjuk *kifejezni*).

• Ha viszont egy  $N$ -edfokú  $P(z)$  polinomnak van egy zérushelye,  $z_1$ , akkor felírható  $(z-z_1) \cdot \tilde{P}(z)$  alakban, ahol  $\tilde{P}(z)$  is polinom:  $N-1$ -edfokú. Ennek is van zérushelye, pl.  $z_2$ , így ebből  $(z-z_2)$ -t emelhetünk ki. Ezt folytatva  $P(z)$ -t egyértelműen felírhatjuk így (ún. **gyöktényezős alakban**):

$$P(z) = a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad \Rightarrow \quad P(z) = a_N (z-z_1)(z-z_2) \dots (z-z_N).$$

Persze ez oda-vissza egyértelmű: ha adottak a  $z_1, z_2, \dots, z_N$  zérushelyek és az  $a_N$  együttható, akkor szorozgatással a  $P(z)$  polinomot kifejezhetjük a  $z$ -hatványok szerint rendezett alakjában.

• **Lehetséges**, hogy a gyöktényezős alakban kijelölt  $z_0 \dots z_N$  számok közül némelyek ugyanazok („egybeesnek”): az ilyen érték neve **többszörös** zérushely. Ezt a lehetőséget tudva úgy célszerű fogalmazni, hogy  $N$ -edfokú  $P(z)$ -re egyértelműen létezik

—  $n$  darab **zérushely** (ahol  $n \leq N$  egész szám), jelben:  $z_1, z_2, \dots, z_n$ ,

— minden  $z_k$ -hoz (itt  $k = 1 \dots n$  lehet) egy  $m_k \geq 1$  egész szám (a  $z_k$  zérushely **multiplicitása**),

— úgy, hogy a polinom  $N$  fokszáma kiadódik, mint  $N = m_1 + m_2 + \dots + m_k$ , és

— ezekkel a polinom felírható  $N$  darab gyöktényező szorzataként, azaz ilyen alakban:

$$\begin{aligned} P_N(z) &= a_N \underbrace{(z-z_1) \dots (z-z_1)}_{m_1 \text{ db}} \cdot \underbrace{(z-z_2) \dots (z-z_2)}_{m_2 \text{ db}} \cdot \dots \cdot \underbrace{(z-z_n) \dots (z-z_n)}_{m_n \text{ db}} = \\ &= a_N (z-z_1)^{m_1} \cdot (z-z_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (z-z_n)^{m_n}. \end{aligned}$$

Ha  $z_k$  multiplicitása  $m_k$ , akkor  $z_k$ -t  $m_k$ -szoros gyöknek is mondjuk. Ha egyik gyök sem esik egybe semelyik másikkal (azaz minden gyök egyszeres), akkor persze  $N$  darab van belőlük, azaz  $n=N$ .

<sup>8</sup>Nem is *algebrai* tétel igazából: nem elég a műveleti tulajdonságokat vizsgálni (hiszen bármilyen ilyen gondolatmenet  $\mathbb{R}$ -re ugyanúgy igaz lenne, mint  $\mathbb{C}$ -re, és  $\mathbb{R}$ -ben ugye nem is igaz a tétel). „Analízisbeli”, azaz a  $\mathbb{C}$  halmaz „folytonossági”, alakbeli tulajdonságaira épülő módszereket felhasználó bizonyítás kell majd.

• **Példák:** ezeket ellenőrizzük, és gondoljuk végig, ahogy csak tudjuk:

- 1.)  $3z^3 - 6(1-i)z^2 + 3(1-4i)z + 6i = 3(z-1)^2(z+2i),$
- 2.)  $iz^2 - (1+i)z + 1 = i(z-1)(z+i),$
- 3.)  $z^3 - (4-i)z^2 + (3-4i)z + 3i = (z-3)(z+i)(z-1),$
- 4.)  $2z^4 - 8iz^3 - 12z^2 + 8iz + 2 = 2(z-i)^4,$
- 5.)  $z^4 - 2iz^3 + 3z^2 - 4iz + 4 = (z-2i)^2(z+i)^2,$
- 6.)  $z^4 - 3z^3 + 6z^2 - 12z + 8 = (z-2i)(z+2i)(z-1)(z-2),$
- 7.)  $z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 6z + 9 = (z-i\sqrt{3})(z+i\sqrt{3}) \cdot [z-(1+\sqrt{2}i)] \cdot [z-(1-\sqrt{2}i)],$

- tehát:
- 1.) harmadfokú,  $z_1=1$  kétszeres,  $z_2=-2i$  egyszeres gyök,
  - 2.) másodfokú,  $z_1=1$  és  $z_2=-i$  egyszeres gyökök,
  - 3.) harmadfokú,  $z_1=3$ ,  $z_2=-i$ ,  $z_3=1$  egyszeres gyökök,
  - 4.) negyedfokú,  $z_1=i$  négyszeres gyök,
  - 5.) negyedfokú,  $z_1=2i$  és  $z_2=-i$  mindkettő kétszeres gyök,
  - 6.) negyedfokú,  $z_1=2i$ ,  $z_2=-2i$ ,  $z_3=1$ ,  $z_4=2$  egyszeres gyökök,
  - 7.) negyedfokú,  $z_1=i\sqrt{3}$ ,  $z_2=-i\sqrt{3}$ ,  $z_3=1+\sqrt{2}i$ ,  $z_4=1-\sqrt{2}i$  egyszeres gyökök.

• Fontos speciális eset, ha az együtthatók mind valósak (nézzük át az előző két utolsó példát is):

Ha a  $P$  polinom együtthatói mind valós számok, akkor:

$\rightarrow x \in \mathbb{R}$ -re nyilván  $P(x) \in \mathbb{R}$  is igaz,  
 $\rightarrow$  Általánosabban:  $P(z^*) = [P(z)]^*$  is igaz,  
 $\rightarrow$  emiatt ha  $P(z_1)=0$ , akkor  $P(z_1^*)=0$  is,  
 $\rightarrow$  vagyis ha  $z_1$  zérushely, akkor  $z_1^*$  is az,  
 $\rightarrow$  emiatt az összes zérushely vagy valós, vagy van egy komplex konjugált párja.

Ha egy ilyen polinomnak van egy nem valós  $z_1$  zérushelye, akkor tehát  $z_1^*$  is az; ez a kettő gyöktényező egy valós együtthatós másodfokú kifejezéssé áll össze:

$$(z-z_1)(z-z_1^*) = z^2 - (z_1+z_1^*)z + z_1z_1^* = z^2 - (2 \operatorname{Re} z_1) \cdot z + |z_1|^2.$$

Ha itt  $z_1$  nem valós, akkor ha az eredeti polinomunkat  $\mathbb{R}$ -ben maradván akarnánk szorzattá alakítani, akkor ez a másodfokú kifejezés lenne itt a „végállomás”; ez csak komplexben bontható ketté.

**Racionális törtfüggvények:** két polinom hányadosát szokták ezzel a névvel illetni; ilyeneket:

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad \text{ahol } P(z) \text{ és } Q(z) \text{ polinomok.} \quad \text{Pl.: } R(z) = \frac{3z^3 + 4z^2 + 4}{z^2 - 2z + 2}.$$

*Valódi* racionális törtfüggvénynek hívhatjuk az olyat, ahol a számláló kisebb fokú, mint a nevező. Ha a számláló polinom fokszáma nem kisebb, mint a nevezőé, akkor sorozatos egyszerűsítésekkel („polinom-osztással”) olyan alakra juthatunk, ahol a maradék már valódi racionális törtfüggvény:

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = P_1(z) + \frac{P_2(z)}{Q(z)}, \quad \text{azaz } R(z) \text{ ilyen alakba írható; itt } P_1 \text{ és } P_2 \text{ is polinomok, és } P_2 \text{ kisebb fokú, mint } Q.$$

Az előbbi példában (ellenőrizzük le!):

$$R(z) = \frac{3z^3 + 4z^2 + 4}{z^2 - 2z + 2} = 3z + 10 + \frac{14z - 16}{z^2 - 2z + 2}.$$

• Valódi racionális törtet **parciális törtre bonthatunk**. Tudva a nevező polinom  $z_1, z_2, \dots$  zérushelyeit olyan valódi tört összegeként írhatjuk a függvényünket, amelyek nevezőiben  $z-z_k$ -k vagy ilyenek hatványai vannak.  $N$ -edfokú nevező esetén  $N$  darab tag lesz.

1. Ha a(z  $N$ -edfokú) nevezőnek **csupa egyszeres zérushelyei** vannak (jelben itt:  $z_1, z_2, \dots, z_N$ ):

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{N-1} z^{N-1}}{\alpha(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\dots(z-z_N)} \Rightarrow R(z) = \frac{A_1}{z-z_1} + \frac{A_2}{z-z_2} + \dots + \frac{A_N}{z-z_N}.$$

A számlálóban itt legfeljebb  $N-1$ -edfokú polinom lehet, ezért írtuk így. A kérdés itt: mik ezek az  $A_1, A_2, \dots, A_N$  számok; egyáltalán található-e ilyeneket. Kétféleképpen haladhatunk.

Egyrészt ha elhittük, hogy tényleg léteznek megfelelő  $A_1, A_2, \dots, A_N$  számok, akkor a kapni vélt tört-összeget hozzuk közös nevezőre: a nevező  $(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_N)$  lesz, ami tényleg a  $Q(z)$ -vel arányos. Ha az így kapott számlálóról megköveteljük, hogy azonosan egyezzen meg az elvárt  $P(z)$ -vel,  $N$  darab lineáris egyenletet kapunk az  $A_k$ -kra. Az állítás az (mindjárt látjuk), hogy biztosan mindig van egyértelmű megoldása (ami ugye nem lenne teljesen magától értetődő).

**Példa:**  $R(z) = \frac{3z^2 - 8}{z^3 - 5z^2 + 4z}.$

A nevező zérushelyei  $z_1=0, z_2=1, z_3=4$ , egyszeresek, és valósak. A keresett alak:

$$R(z) = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-1} + \frac{c}{z-4} \stackrel{\text{köz.nev.}}{=} \frac{(a+b+c)z^2 - (4b+5a+c)z + 4a}{z(z-1)(z-4)}.$$

Összehasonlítva az eredeti nevezővel:

$$\begin{aligned} a+b+c &= 3, & a &= -2, \\ 4b+5a+c &= 0, & \Rightarrow & b = \frac{5}{3}, \\ 4a &= -8 & c &= \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{R(z) = -\frac{2}{z} + \frac{5}{3} \frac{1}{z-1} + \frac{10}{3} \frac{1}{z-4}}.}$$

**Másik példa:**  $T(x) = \frac{x^2+5}{x^3+x^2}.$

A nevező gyökei  $x_1=0, x_2=i, x_3=-i$ : egyszeresek, nem mind valósak. Az elvárt alak:

$$T(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-i} + \frac{C}{x+i} \stackrel{\text{köz.nev.}}{=} \frac{(A+B+C)x^2 + i(B-C)x + A}{x(x-i)(x+i)},$$

amiből az eredeti nevezővel összevetve:

$$\begin{aligned} A+B+C &= 1, & A &= 5, \\ i(B-C) &= 0, & \Rightarrow & B = -2, \\ A &= 5, & C &= -2, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T(x) = \frac{5}{x} - \frac{2}{x-i} - \frac{2}{x+i}}.}$$

2. **Továbbra is az egyszeres zérushelyű** nevező esetét vizsgáljuk. A parciális törtet megadó **másik módszer** egyszerűbb és általánosabb is. Legyen  $Q(z) = (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\dots(z-z_N)$ ; vegyük úgy, hogy a legmagasabb fokú tag együttthatójával már egyszerűsítettünk, így az 1-gyel egyenlő. Legyen most is  $P(z)$  legfeljebb  $N-1$ -edfokú. Az, hogy létezik a parciális törtre bontott alak, a nevezőbeli  $Q(z)$  polinommal való átszorzással is egyenértékűleg felírható:

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{A_1}{z-z_1} + \frac{A_2}{z-z_2} + \dots + \frac{A_N}{z-z_N} \Leftrightarrow \begin{aligned} P(z) &= A_1(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)\dots(z-z_N) + \\ &+ A_2(z-z_1)(z-z_3)(z-z_4)\dots(z-z_N) + \\ &+ A_3(z-z_1)(z-z_2)(z-z_4)\dots(z-z_N) + \\ &+ \dots + \\ &+ A_N(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\dots(z-z_{N-1}). \end{aligned}$$

Látszik a lényeg: minden  $A_k$ -hoz tartozó tagban a megfelelő  $z-z_k$  tényező lehangyódot. Ha most az utóbbi alakot kiértékeljük valamelyik  $z_k$  zérushelyen, akkor a bal oldalon a  $P(z_k)$  érték szerepel, a jobb oldalon pedig minden tag kiesik, kivéve éppen az  $A_k$ -s, mert egyedül ebben

nincs  $z - z_k$  szorzó. Ezt az egy tagot kiértékelve majd visszaosztva azt kapjuk tehát, hogy

$$\forall k\text{-ra: } A_k = \frac{P(z_k)}{(z_k - z_1) \dots (z_k - z_{k-1})(z_k - z_{k+1}) \dots (z_k - z_N)} = \left[ \frac{P(z)}{Q(z)} \cdot (z - z_k) \right] \Big|_{z=z_k}, \quad (1.12)$$

ahol az utóbbi alakban tehát a nevezőbeli  $Q(z)$ -ből lehangyódik a  $z - z_k$  tényező, és a maradék értelmes véges (határ)értéket ad  $z = z_k$ -ban. Ekvivalens következtetésekkel haladtunk: *tényleg léteznek* a megfelelő  $A_k$  számok, sőt, meg is kaptuk őket. Az előző első példa így megoldva:

$$\frac{3z^2 - 8}{z(z-1)(z-4)} = \frac{1}{z} \cdot \underbrace{\frac{3z^2 - 8}{(z-1)(z-4)} \Big|_{z=0}}_{=-2} + \frac{1}{z-1} \cdot \underbrace{\frac{3z^2 - 8}{z(z-4)} \Big|_{z=1}}_{=5/3} + \frac{1}{z-4} \cdot \underbrace{\frac{3z^2 - 8}{z(z-1)} \Big|_{z=4}}_{=10/3}, \quad \text{kész.}$$

3. Ha az  $N$ -edfokú nevezőnek **többszörös zérushelyei is** vannak, akkor is  $N$  darab parciális tört lesz, és a többszörös gyökök minden a multiplicitásuknál nem nagyobb fokszámmal előkerülnek:

Ha a  $Q(z)$  polinomnak a  $z_k$  gyöke  $m_k$ -szoros, azaz  $Q(z) = \dots \cdot (z - z_k)^{m_k} \cdot \dots$ ,

akkor a parciális törtes alak ilyen:  $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \dots + \frac{A_k^{(1)}}{z - z_k} + \frac{A_k^{(2)}}{(z - z_k)^2} + \dots + \frac{A_k^{(m_k)}}{(z - z_k)^{m_k}} + \dots$

azaz  $m_k$  darab különböző tagban szerepel  $z_k$ . Itt is közös nevezőre hozunk, és tagonként megköveteljük, hogy visszakapjuk a számlálót: lineáris egyenletrendszer adódik az  $A$ -kra. **Példa:**

$$R(z) = \frac{4x^3 - 4x}{x^4 + 8x^2 + 16}. \quad \text{A nevező: } x^4 + 8x^2 + 16 = (x^2 + 4)^2 = (x - 2i)^2(x + 2i)^2, \text{ ennek tehát két darab kétszeres zérushelye van.}$$

Az elvárt alakot közös nevezőre hozzuk, és összehasonlítjuk a megkövetelt számlálóval:

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{a}{x-2i} + \frac{b}{(x-2i)^2} + \frac{c}{x+2i} + \frac{d}{(x+2i)^2} \stackrel{\text{köz.név.}}{=} \\ &= \frac{(a+c)x^3 + [2i(a-c) + b+d]x^2 + (4ib - 4id + 4a + 4c)x + 4[2ia - 2ic - b - d]}{(x-2i)^2(x+2i)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad &\begin{aligned} a+c &= 4, & a &= 2, \\ 2ia-2ic+b+d &= 0, & b &= i, \\ 4ib-4id+a+c &= -4, & c &= 2, \\ 2ia-2ic-b-d &= 0 & d &= -i, \end{aligned} \Rightarrow R(z) = \frac{2}{x-2i} + \frac{i}{(x-2i)^2} + \frac{2}{x+2i} - \frac{i}{(x+2i)^2}. \end{aligned}$$

Többszörös zérushelyű nevező esetén is felírható egyfajta „általános” megoldás: ez belesimul a később előkerülő ún. *Laurent-sor* nevű fogalomba, addig pihentetjük.

### 1.3. Hatványsorok

- A „végtelenedfokú polinomokat” hatványsoroknak hívjuk; közelebbről, az ilyen függvénysorokat:

$$f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (1.13)$$

vagy a 0 helyett egy adott  $z_0$  középpontot rögzítve hatványsornak hívjuk az ilyen függvénysort is:

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (1.14)$$

ahol minden  $n \in \mathbb{N}_0^+$  indexre az  $a_n$ -ek adott (komplex) számok: a hatványsor **együtthatói**.

• Ez a hatványsorokkal foglalkozó szakasz remélhetőleg önmagában is megáll, de a B függelék sok alapismeretet részletesebben tárgyal: sorokról, sorozatokról, *konvergenciáról*, függvénysorokról.<sup>9</sup>

Végtelen összegnél kérdés, hogy létezik-e (a *sorösszeg konvergencia-e*). Ilyen *függvénysoroknál* ez a  $z$  változó értékétől függ. Biztos létezik az összeg  $z=z_0$ -ban, ahol  $a_0$ -n kívül minden tag nulla, így  $f(z=z_0) = a_0$ . **Kérdés:** mi egy hatványsor mint függvénysor **konvergenciahalmaza**, azaz milyen  $z$ -kre létezik a kijelölt végtelen összeg. Ez az együtthatóktól függ.

• Az adhat ötletet, hogy egy egyszerű hatványsorról mindig is tudtuk, hogy mikor konvergens:

$$\begin{array}{ll} \text{Geometriai} & 1+z+z^2+z^3+\dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n. \\ \text{sor } z \in \mathbb{C}\text{-re:} & \begin{array}{l} \text{Ha } |z| < 1, \text{ konvergens (és értéke } \frac{1}{1-z}), \\ \text{Ha } |z| \geq 1, \text{ akkor nem konvergens.} \end{array} \end{array}$$

Ezt a geometriai sorösszeget tudva<sup>10</sup> esetleg általános hatványsort is eszünkbe jut így felírni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sqrt[n]{a_n} \cdot (z-z_0) \right]^n; \quad \text{ez „szinte olyan”, mint a geometriai sor.}$$

Azon fog múlni a dolog, hogy „az  $\sqrt[n]{a_n} \cdot (z-z_0)$  abszolútértéke kisebb-e 1-nél”. Ennek persze így nincs értelme: alpból az  $\sqrt[n]{a_n}$  számok minden  $n$ -re mások. A sorösszeg *létezésébe* akárhány *véges sok* tag nem szól bele: érezzük, hogy az  $\sqrt[n]{a_n}$  számoknak, sőt csak a nagyságuknak az  $n \rightarrow \infty$  esetben való viselkedése a perdöntő. Ha az  $|\sqrt[n]{a_n}|$ -ek ilyen homályos értelmű „végtelen  $n$ -beli értékét”  $1/R$ -rel jelöljük, akkor olyan  $z$ -re, amire  $|z-z_0| > R$ , a  $|\sqrt[n]{a_n}(z-z_0)|$  abszolútérték „ $n \rightarrow \infty$ -beli értéke 1-nél nagyobb”: a sorösszegünk bizonyára nem létezik, de ha  $|z-z_0| < R$ , talán igen.

• Ennyi mellébeszélés után jöjjön az  $R$  rendes definíciója:

$$\begin{array}{ll} \text{A } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ hatvány-} & R := \frac{1}{\limsup \left( \sqrt[n]{|a_n|} \right)}. \\ \text{sor konvergenciasugara:} & \begin{array}{l} \text{(Ha a nevező 0 ill.} \\ \infty, \text{ értelemszerűen} \\ R = \infty \text{ ill. } R = 0.) \end{array} \end{array} \quad (1.15)$$

Természetesen  $\sqrt[n]{|a_n|} = |\sqrt[n]{a_n}|$ , hiszen  $|a_n|$  valós. A  $\limsup$  még nem ismerős esetleg: *valós számok*  $b_n$  sorozatára ha az konvergens, akkor  $\limsup b_n = \lim b_n$ ,  $\limsup b_n$  viszont akkor is létezik, ha  $\lim b_n$  nem. A  $\limsup b_n$  a sorozat ún. *felső határértéke*: ez „a legkisebb” szám (de még mindig lehet  $+\infty$  is), aminél a sorozatnak csak véges sok tagja nagyobb. (Részletesebben és példákkal megsegítve ld. a B.1. függelékben.) Azaz bármilyen  $x$ -re ha  $x > \limsup b_n$ , akkor  $x$ -nél a  $b_n$  sorozatnak csak véges sok tagja nagyobb, ha viszont  $x < \limsup b_n$ , akkor végtelen sok. Kigondolható ebből, hogy valós konvergens sorozat felső határértéke tényleg ugyanaz, mint a határértéke.

A hatványsorok konvergenciatulajdonságaira vonatkozó alaptétel pedig a következő:

$$\begin{array}{ll} \text{Cauchy-Hadamard-tétel:} & \begin{array}{l} \bullet \text{ divergens (nem összegezhető), ha } |z-z_0| > R, \\ \bullet \text{ pontonként abszolút konvergens, ha } |z-z_0| < R, \\ \bullet \text{ a } z_0 \text{ körüli } r \text{ sugarú körlapon egyenletesen} \\ \text{konvergens bármilyen } r < R \text{ érték esetén.} \end{array} \\ \text{a } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ hatványsor} & \end{array} \quad (1.16)$$

A **bizonyítás** a fentebbi rávezetést követi; érdeklődőknek leírtam a B.4. függelék elején.

A fogalmakat is rendesen bevezetjük a B.2. és a B.3. függelékben. Egy sor abszolút konver-

<sup>9</sup>Kiegészítésképpen (vagy ha valami nem érthető) elolvashatjuk a függelék persze most is. Vannak ott még esetleg ott is túlkapásnak számító bizonyítások is; mindenesetre az alapfogalmakat is részletesebben bevezetjük ott.

<sup>10</sup>A geometriai sort régen csak valós számokra ismertük, de a véges  $\sum_{k=0}^{N-1} z^k$  összeg komplex számokra is  $\frac{1-z^N}{1-z}$ , és itt is a számlálóban  $z^N$ -nek éppen akkor van  $N \rightarrow \infty$  esetén határértéke (ami nulla), ha  $|z| < 1$ .

gens, ha a tagok *abszolútértékeinek* létezik a végtelen összege: ebből már következik, hogy maguknak a tagoknak is létezik az összege (ami persze sem magában, sem abszolútértékezve nem ugyanaz alapvetően, mint az abszolútértékek összege). Az ilyen  $z$ -k esetén tehát a hatványsor összege egy jól definiált szám: értelmes a  $z$ -hez ezt rendelő függvény, a hatványsor *összeg(függvény)e*. Hogy a hatványsor mint függvénysor egy halmazon egyenletesen is konvergál (tart) ehhez a függvényhez, az azt jelenti, hogy a halmazon nézve a tőle való „legnagyobb eltérés” is nullához tart.

- Minden hatványsor **konvergenciahalmaza** tehát egy **kör** a  $\mathbb{C}$  síkon, aminek a kifejező nevű *konvergenciasugár*,  $R$  a sugara. Előfordulhat, hogy  $R=0$ : egy ilyen hatványsor semmilyen  $z \neq z_0$ -ra nem konvergens. Az is lehet, hogy  $R=\infty$ : ilyen hatványsor minden  $z \in \mathbb{C}$ -re konvergens. Ilyen hatványsor bármilyen „ $\infty$ -nél kisebb  $r$ ”, azaz bármilyen véges sugarú körlapon (és emiatt minden korlátos halmazon is) egyenletesen is konvergens, de *az egész  $\mathbb{C}$ -n* nem.<sup>11</sup>

*Megjegyzés:* ha a hatványsor értelmezési tartományát leszűkítjük a valós számokra (és  $z_0 \equiv x_0$  is valós), akkor a konvergenciakör az  $[x_0 - R, x_0 + R]$  szakaszt jelenti (ill. az egész  $\mathbb{R}$ -et, ha  $R = \infty$ ).

- A Cauchy-Hadamard-tétel nem mond semmit a konvergenciakör határáról ( $0 < R < \infty$  esetén): különféle hatványsorok esetén lehet, hogy a határon a sorösszeg mindenhol abszolút konvergens, lehet, hogy néhol csak konvergens (de nem abszolút, azaz: „feltételesen”, ld. a B.2. függelékben), lehet, hogy néhol divergens is (és az is, hogy mindenhol az).

Másrészt véges  $R$  esetén sokszor találhatunk egy bővebben értelmezett differenciálható függvényt, ami a konvergenciakörön belül megegyezik a hatványsor összegével (ld. később, **analitikus elfolytatás** címen). A hatványsor körvonalon való viselkedésének alapvetően **semmi köze** ahhoz, hogy a „kiterjesztett” függvény hol értelmes és hol nem. A C.5. függelékben visszatérünk ide.

- Látszik az  $R$  konvergenciasugár definíciójából, hogy ha nagyon gyorsan nőnek az  $a_n$  együtthatók (abszolútértékei), akkor  $R$  bizonyára kisebb. Fontos, hogy az  $n$ -edik gyökvonás jó „simító”: nem túl lassan növekvő  $a_n$ -ekre is lehet, hogy  $\sqrt[n]{|a_n|}$  nem nő. Eleinte érdemes konkrétan mindig megvizsgálni, hogy mennyi az  $R$ ; mindjárt látunk fontos példákat.

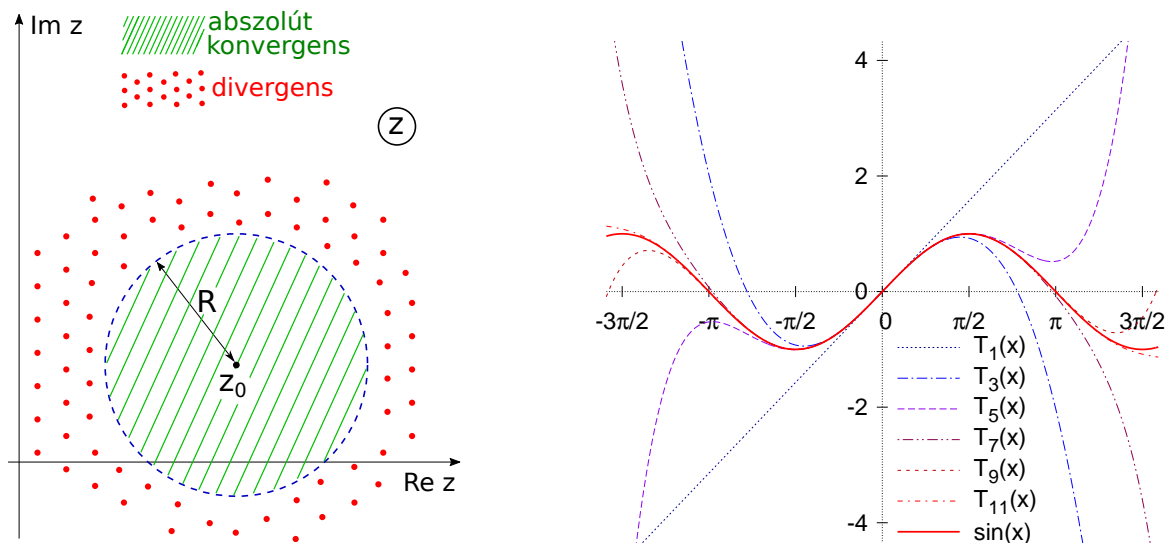
*Megjegyzés:* az  $R$  fentebbi definícióját a megalapozásoknál használjuk; később a 4.3. szakaszban kiderül, hogy néha egyszerűbben kitalálható egy függvény hatványsorának konvergenciasugara.

- Véges sok tag összeadása kommutatív, több indexre való összegzés esetén is mindegy, milyen sorrendben összegzünk; a szorzás disztributív az összeadásra. Végtelen összegek tudhatnának furcsaságokat. A hatványsor viszont (ahol konvergens, ott) *abszolút konvergens*: ebből következik (ld. a B.2. függelékben), hogy ilyenkor a végtelen összegre is igazak a véges összegre vonatkozó jó tulajdonságok: a tagokat cserélgethetjük, két sort összeszorozva mindegy, milyen sorrendben adjuk össze a tagok szorzatait; a tagokat két csoportba rendezve is összeadhatjuk. Ezeket a gyakorlatban rutinszerűen használjuk; jó tudni, hogy hatványsoroknál *tényleg* minden rendben.

Az  $r < R$  sugarú körlapon való egyenletes konvergencia, és hogy mindegyik részletösszeg (polinom) folytonos, eredményezi, hogy a hatványsor **összegfüggvénye is folytonos** itt. A bizonyítást a B.3. függelékben leírtam. Ha a nem folytonos függvényeket „amúgy is utáljuk”, akkor elég tudni, hogy egy hatványsornál nem lehet gond: konvergenciakörén *belül* folytonos függvényt állít elő.

<sup>11</sup>Ennek (és a konvergencia „gyorsaságának” további részleteinek) gyakorlati jelentősége is van bőven, amikor egy hatványsorral értelmezett függvényt szeretnénk numerikusan kiszámítani. Általában szinte sosem elég azt mondani egy számítógépes programnak, hogy adja össze a tagokat és kész; a hatványsor összegfüggvényéről szinte mindig ki kell deríteni valami további tulajdonságot, ami a kiszámítást bizonyos  $z$ -kre egyszerűbbé teszi. Olyasmire gondolhatunk, hogy pl. a  $\sin$  függvényről kiderül, hogy periodikus  $2\pi$  szerint: ez ilyen „plusz” tulajdonság.





2. ábra. Balra: hatványsor konvergenciaköre a  $\mathbb{C}$  síkon (véges  $R$  esetén). Jobbra: példa  $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  hatványsor konvergenciájára:  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots$ , egyre magasabb fokú közelítő polinomokkal. Itt  $R=\infty$ : a sor mindenhol pontonként konvergens, de az egész  $\mathbb{R}$ -en nem egyenletesen, mert bármely részletösszegetől a legnagyobb eltérés  $\infty$ . Minden véges szakaszon viszont a legnagyobb eltérés elég kicsivé válik elég magas fokú közelítő polinom esetén.

• Véges összeget deriválhatunk tagonként, végtelen összeget nem mindig. Azonban **hatványsor** összegfüggvénye **differenciálható is**, ahol értelmes, és lehet tagonként deriválni. Konkrétan:

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + a_4(z-z_0)^4 + \dots$$

$$\Rightarrow f'(z) = a_1 + 2a_2(z-z_0) + 3a_3(z-z_0)^2 + 4a_4(z-z_0)^3 + \dots$$

$$\text{tömören: } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \Rightarrow f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}.$$

A deriváltakból összerakott függvényesor **is hatványsor**. A lehetséges nyugtalanító kérdések:

- 1.) Az eredeti konvergenciakörön belül a tagok deriváltjaiból álló hatványsor konvergens-e?
- 2.) Ha igen, összege egyenlő-e az eredeti hatványsorösszeg deriváltjával (ami tényleg létezik-e)?

• Mindkét válasz *igen*. Az elsőhöz: legyen  $R$  az eredeti sor,  $R_1$  a derivált sor konvergenciasugara:

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}, \quad \text{Állítás: hatványsornak és deriváltjának}$$

$$\frac{1}{R_1} := \limsup \sqrt[n]{n|a_n|}. \quad \text{ugyanaz a konvergenciaköre: } \underline{\underline{R = R_1}}. \quad (1.17)$$

A lényeg: a kettő közötti különbség „felszívódik”; **állítás:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$** . Ezt „ki is próbálhatjuk”, de be is látható, hogy tényleg igaz.<sup>12</sup>

Ha még azt is tudjuk (ld. a B.1. függelék végét is), hogy  $\mathbb{R}$  értékű  $c_n$  és  $d_n$  sorozatokra ha  $c_n$  konvergens, és  $0 < \lim c_n < \infty$ , akkor  $\limsup(c_n d_n) = (\lim c_n)(\limsup d_n)$ , tényleg ugyanannyinak adódik  $R$  és  $R_1$ , ahogy állítottuk.

A második „igen” választ (hogy a deriváltak hatványsor-összege *tényleg* az eredeti hatványsor-összeg deriváltját állítja elő) a B.4. függelékben bizonyítjuk. Szőrözösebb; csak érdeklődőknek!

<sup>12</sup>Adott  $\varepsilon > 0$ -ra a binomiális tételből  $(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}n(n-1) + \dots + \varepsilon^n \geq 1 + \frac{\varepsilon^2}{2}n(n-1)$ , ahol nagyvonalúak voltunk. Ha  $n$  elég nagy (hogy  $n\varepsilon^2 > 2$  legyen), akkor  $1 + \frac{\varepsilon^2}{2}n(n-1) > n$ , emiatt ekkor  $(1+\varepsilon)^n > n$ , azaz  $1+\varepsilon > \sqrt[n]{n}$ . Bármilyen  $\varepsilon > 0$ -ra tehát elég nagy  $n$ -től kezdve  $\sqrt[n]{n}$  kisebb  $1+\varepsilon$ -nál, de 1-nél még nagyobb: a határértéke tényleg 1.

• **A lényeg:** hatványsor összefüggvénye **differenciálható**, és lehet **tagonként** deriválni. Viszont az így kapott derivált maga is egy hatványsor ugyanazzal a konvergenciakörrel, így *rá is elmondhatjuk ugyanazt*. Sőt, akkor már akárhányszor, azaz akárhanyadik deriváltra is. Hatványsor tehát a konvergenciakörén belül **végtelenszer is differenciálható** („sima”) függvényt állít elő.

A derivált sorokat is tömören felírhatjuk, és ki is értékelhetjük őket a  $z_0$  középpontban:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \Rightarrow f(z_0) = a_0, & \text{mivel az } n=0\text{-s tag ennyit ad,} \\ & & z_0\text{-ban pedig a többi tag nulla.} \\ f'(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1} \Rightarrow f'(z_0) = a_1. & \text{Az } a_0\text{-s tag itt nullával szorzódik, az} \\ & & a_1\text{-es adja ezt, a többi nulla } z_0\text{-ban.} \\ f''(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(z-z_0)^{n-2} \Rightarrow f''(z_0) = 2a_2. & a_0 \text{ és } a_1 \text{ 0-val szorzódnak, } a_2\text{-ből} \\ & & \text{ez jön, a többi nulla } z_0\text{-ban.} \\ f'''(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)a_n(z-z_0)^{n-3} \Rightarrow f'''(z_0) = 3 \cdot 2 \cdot a_3. & \text{Itt csak az } a_3\text{-as tag} \\ & & \text{lesz nem nulla } z_0\text{-ban.} \end{aligned}$$

Fix  $m \geq 0$ -ra az  $m$ -edik derivált sora kényelmesen faktoriálissal írható;  $z_0$ -ban kiértékelve pedig

$$\text{gondoljuk ki, hogy } f^{(m)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} a_n(z-z_0)^{n-m} \Rightarrow \underline{\underline{f^{(m)}(z_0) = m! \cdot a_m.}}$$

• Ezek alapján egy hatványsort tehát így, a deriváltakkal kifejezve is írhatunk:

$$\text{Hatványsor más alakja: } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n. \quad (1.18)$$

Ez **majdnem** az, ami **Taylor-formula** névre hallgat. Itt azt láttuk be, hogy *ha*  $f(z)$ -t hatványsor állítja elő (a konvergenciakörön belül), *akkor* az együtthatókat beazonosíthatjuk így, a deriváltakkal. Az igazi kérdés: egy *másképp* megadott  $f$  függvény *felírható-e* ilyen hatványsorként adott  $z_0$  pont körül. Később kiderül, hogy sok fontos esetben igen, de érdemes óvatosan bánni ezzel.

• Két hatványsor esetén *ha* minden együttható ugyanaz, *akkor* a sorösszegek is nyilván azonosan egyenlők. Lehet-e, hogy két különböző hatványsor mégis ugyanazt a függvényt állítja elő; hátha a végtelen összegzés tud ilyen trükköket... Nem: *ha* egy hatványsorra  $R > 0$ , akkor  $z_0$ -ban *értelmesek* a deriváltjai, és az előállított  $f$  függvényből az együtthatók egyértelműen kiadódnak (azaz: nem lehetnek mások), mint az imént is látott módon az  $f$  megfelelő deriváltjaiból adódóak.

## 1.4. Elemi függvények, egyszerű hatványsorok

• Keressünk olyan hatványsort, aminek a deriváltja önmaga (ugye ez lesz az  $\exp(z)$  függvény):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad f = f' \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n.$$

Az utolsó lépésben **átjelöltük** a jobb oldali  $n$  összegzőindexet  $n-1$ -re: az előző jobb oldalon az  $n=0$ -s tag kiesik, vagyis ott  $n$  1-től fut  $\infty$ -ig, így  $n-1$  fut 0-tól  $\infty$ -ig. A lényeg: az átjelölés után a két oldali hatványsor a  $z$ -hatványok szerint ugyanúgy rendezett alakban áll előttünk.

Láttuk, hogy két hatványsor pont akkor azonosan egyenlő, ha a megfelelő együtthatók egyenként megegyeznek. Ezt mostani esetünkben az utolsó alak két oldalára alkalmazva

$$(n+1)a_{n+1} = a_n \text{ minden } n \in \mathbb{N}_0^+\text{-ra,} \quad a_1 = \frac{1}{1}a_0, \quad a_2 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{a_0}{2!}, \quad a_3 = \frac{1}{3}a_2 = \frac{a_0}{3!}, \quad \dots \quad \underline{\underline{a_n = \frac{a_0}{n!}}}.$$

- Az **exponenciális függvény** egyértelműen adódik az előzőekből  $a_0=1$ -et választva:

$$\exp(z) := 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad \text{Eddig azt tudhatjuk tehát, hogy}$$

$$\exp(0) = 1, \text{ és } \frac{d}{dz} \exp(z) = \exp(z).$$

A **konvergenciasugár** itt  $\infty$ . Emlékezve a fenti (1.15) definícióra, ehhez azt kell belátni, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0. \quad (1.19)$$

Rögzített  $A > 0$  számra  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A^n}{n!} = 0$ .<sup>13</sup> Szavakban: *a faktoriális gyorsabban nő minden exponenciálisnál*. Emiatt bármilyen kicsi  $\varepsilon > 0$  esetén ha  $n$  elég nagy, akkor  $(\frac{1}{\varepsilon})^n \frac{1}{n!} < 1$ , vagy átrendezve:  $\varepsilon \cdot \sqrt[n]{n!} > 1$ , azaz  $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \varepsilon$ . Emiatt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = 0$ , azaz  $\limsup \sqrt[n]{n!} = 0$ ; kész.

- A (sorával definiált) exponenciális függvény tehát az egész  $\mathbb{C}$ -n értelmes. **Alaptulajdonsága:**

$$\exp(z) \exp(w) = \exp(z+w), \quad \text{minden } z, w \in \mathbb{C} \text{ esetén.} \quad (1.20)$$

Ezt most kétféleképpen is beláthatjuk; mindkettő „jobban csúszik” már az előző szakaszban (és a B függelékben) előkerült megalapozásokkal. Első: rögzített  $z_0$  és „változó”  $z$  esetén

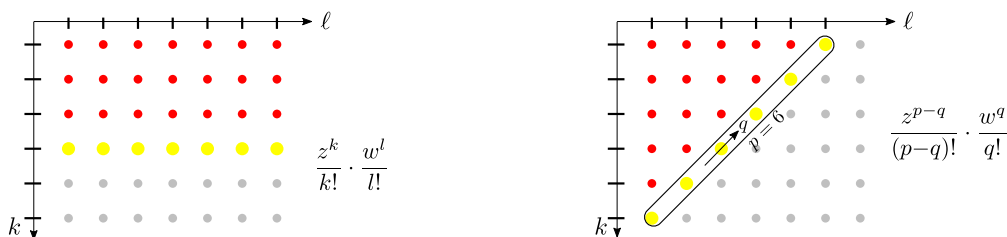
Csak abból, hogy  $\exp' = \exp$ , és a szorzat deriválási szabályából ellenőrizzük, hogy  $\frac{d}{dz} (\exp(z) \cdot \exp(z_0 - z)) = 0$ .

Emiatt az  $\exp(z) \cdot \exp(z_0 - z)$  mint  $z$  függvénye konstans, ez a konstans pedig  $z=0$ -ban való kiértékeléssel (mivel  $\exp(0) = 1$ ) nyilván  $\exp(z_0)$ . Vagyis  $\exp(z) \exp(z_0 - z) = \exp(z_0)$  minden  $z_0$  és  $z$  esetén; ha  $z_0$ -t átnevezzük  $w+z$ -nek, pont a fenti alakban kapjuk az alaptulajdonságot.

A másik módszer az  $\exp(z)$  és  $\exp(w)$  sorai szorzatának manipulálása. *Abszolút konvergencia esetén* (azaz most is) a végtelen összegeket is cserélgethetjük. Most az a (külön ezért a B.2. függelékben megvizsgált) eset kell, amikor a tagok szorzatait más sorrendben adjuk össze.

$$\begin{aligned} \text{Egyrészt: } \exp(z) \cdot \exp(w) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{w^l}{l!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^k w^l}{k! l!}, \\ \text{Másképp: } \exp(z+w) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(z+w)^p}{p!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{q=0}^p \frac{p! z^{p-q} w^q}{(p-q)! q!} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^p \frac{z^{p-q} w^q}{(p-q)! q!}. \end{aligned}$$

A két színes kifejezés egyenlő,<sup>14</sup> mert ugyanazon „kétindexes végtelen összeg” felírásai: az első soronként majd oszloponként megy, a második pedig az átlókon. A binomiális tétel is kellett.



- Az (1.20) tulajdonság miatt lehet ugye bevezetni az  $e^z := \exp(z)$  definícióval az  $e$  szám (ami tehát  $\exp(1)$ -gyel egyenlő) akármilyen hatványát, majd bármilyen komplex számét, ahogy fentebb

<sup>13</sup>Ez érezhető, hiszen ahogy  $n$ -et növeljük, a nevezőbe egyre nagyobb plusz tényezők kerülnek, a számlálóba pedig csak újabb  $A$ -k. Rendszeren: ha  $m \in \mathbb{N}$  olyan rögzített szám, amire  $m > A + 1$ , akkor ha  $n > m$ , akkor  $\frac{A^n}{n!} = \frac{A^m}{m!} \cdot \frac{A}{m+1} \cdot \frac{A}{m+2} \cdot \dots \cdot \frac{A}{n}$ , ebből pedig (nagyvonalúan csak az utolsó tényezőt megtartva) ilyenkor  $\frac{A^n}{n!} \leq \frac{A^m}{m!} \cdot \frac{A}{n}$ , de még így is látszik, hogy  $n \rightarrow \infty$ -re ez a jobb oldal nullához tart, így a (biztos pozitív, és ennél kisebb) bal oldal is.

<sup>14</sup>Ez a Vektorszámítás jegyzet 8. fejezetében is szerepel. Újdonság, hogy most már (az itteni függelékeket is átrághva) tudhatjuk, hogy *tényleg* nem csinálunk disznóságot, amikor itt végtelen sorösszegek tagjait cserélgetjük.

(is) felidézttük az (1.3) egyenletben. Továbbá tudva, hogy abszolút konvergencia sorokat tényleg ket-  
tébonthatunk, a többi elemi függvényt bevezethetjük az  $\exp$  sorának páros ill. páratlan részeként:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} z &:= \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} + \frac{z^{10}}{10!} + \frac{z^{12}}{12!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \\ \operatorname{sh} z &:= \frac{e^z - e^{-z}}{2} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} + \frac{z^{11}}{11!} + \frac{z^{13}}{13!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ \cos z &:= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \frac{z^{10}}{10!} + \frac{z^{12}}{12!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \\ \sin z &:= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} - \frac{z^{11}}{11!} + \frac{z^{13}}{13!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}. \end{aligned}$$

Ha még szokatlan, ellenőrizzük, hogy helyesen írtuk fel szummával a kijelölt sorösszegeket! Ezen  
hatványsorok konvergenciasugara is  $\infty$ : egyrészt mert az  $\exp(z)$ -ből származnak, de közvetlenül is  
kijön: az, hogy minden második együttható nulla, nem rontja el a  $\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ -re kapottat.

• Ezen definíciókból és az exponenciális alaptulajdonságából a  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{sh}$ ,  $\operatorname{ch}$  függvények *min-  
den* tulajdonsága kijön; ellenőrizzük újra ezeket! Pl. hogy teljesül az  $\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z)$   
Euler-formula, az addíciós és pitagoraszai összefüggések ( $\sin / \cos$ -ra és  $\operatorname{sh} / \operatorname{ch}$ -ra is); ld. pl. a Vek-  
torszámítás jegyzet 2.4. szakaszában, de remélhetőleg ezek egyre inkább vérükké válnak.

Mivel hatványsorösszegek, és mindenhol értelmesek, a bevezetett függvények *tényleg* folytono-  
sak és akárhányszor differenciálhatók (ez most már *bizonyított tény* lett!). Azt is ellenőrizzük újra,  
szummás jelöléssel és anélkül is, hogy (megtámogatva elméletileg azzal, hogy szabad) tagonkénti  
deriválással valóban az ismert  $\sin' = \cos$ ,  $\cos' = -\sin$ ,  $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$ ,  $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$  összefüggéseket kapjuk!

Ha  $z \equiv x \in \mathbb{R}$  valós szám, akkor (mivel a sor együtthatói valósak) nyilván valósak  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  
 $\operatorname{sh} x$ ,  $\operatorname{ch} x$  értékei is. A hatványsor alapján  $\cos(0) = 1$ , és azt is megállapíthatjuk (pl. az  $x=2$ -t  
kiszemelve), hogy  $\cos(2) < 0$ , és hogy a  $\cos$  függvény monoton csökken  $x=0$  és  $x=2$  között.<sup>15</sup>

Ezek miatt tehát 0 és 2 között pontosan egyetlen jól meghatározott valós szám van, ahol a  $\cos$   
függvény nullát vesz fel. *Nevezzük el ezt a számot  $\pi/2$ -nek!* Így **vezethetjük be a  $\pi$  számot**  
rendesen. A  $\pi$ -re tehát  $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ , és a  $\sin^2 + \cos^2 = 1$  pitagoraszai összefüggés miatt  $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$   
(és nem  $-1$ , mert  $\sin$  itt ugye pozitív). Ezek után a trigonometrikus függvényeknek a  $\pi$ -t használó  
azonosságai (periodikusság, speciális értékek, zérushelyek) már kijönnek az addíciós képletekből.

• A  $\sin(z)$  függvény **zérushelyei** tehát tényleg  $\dots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ , a  $\cos(z)$ -é pedig  
 $\dots -\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \dots$ . Ezeket persze régóta tudjuk; most rendszeren bevezettük a  $\pi$ -t is. Érdekes  
külön hangsúlyozni, hogy a  $\sin(z)$  és  $\cos(z)$  függvényeknek komplex  $z$ -kre **sincsenek további**  
zérushelyei: a  $\sin$  zérushelyei **komplex számok között is** pontosan csak az  $n \cdot \pi$  alakú valós  
számok, a  $\cos$ -é pedig az  $(n + \frac{1}{2})\pi$  alakú valós számok, ahol  $n \in \mathbb{Z}$  lehet. Ellenőrzés:

$$z = x + iy \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} |\sin(x+iy)|^2 &= \dots = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y, \\ |\cos(x+iy)|^2 &= \dots = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &\text{ha } y \neq 0, \text{ akkor ezek po-} \\ &\text{zítívak, így nem nullák.} \end{aligned}$$

<sup>15</sup>Az, hogy „a  $\cos$  grafikonjából látszanak ezek”, nem megnyugtató: egyelőre *csak* a hatványsort használhatjuk  
grafikonrajzoláshoz is, és a sor sokadik tagjai esetleg elronthatnák a látványosan teljesülő következtetést. A hatvány-  
sorból viszont minden kijön. Pl. így:  $\cos(2) = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!} - \dots = 1 - \frac{2^2}{4} (1 - \frac{2-2}{3 \cdot 4}) - \frac{2^6}{6!} (1 - \frac{2-2}{7 \cdot 8}) - \frac{2^6}{6!} (1 - \frac{2-2}{7 \cdot 8}) - \dots$   
Utóbbi felírásban az első két tag összege  $-\frac{1}{3}$ , aztán pozitívakat vonunk ki: garantáltan  $\cos(2) < 0$ . Hasonlóan  
 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots = x(1 - \frac{x \cdot x}{2 \cdot 3}) + \frac{x^5}{5!} (1 - \frac{x \cdot x}{6 \cdot 7}) + \dots$ : ha  $x \in ]0, 2[$ , akkor csupa pozitív számot összegzünk,  
így itt  $\sin(x) > 0$ . Emiatt mivel  $\cos' = -\sin$ , a  $\cos(x)$  tényleg monoton csökken legalábbis  $x=0$  és  $x=2$  között.

• Foglalkozunk más hatványsorokkal is! A geometriai sort deriválással és integrálással is továbbfejleszthetjük. Hatványsorösszeg deriváltja a tagok deriváltjainak összege, így az összegfüggvényeket is felírhatjuk. A kapott sorokról már tudhatjuk, hogy mind ugyanott konvergensek. Néhány lehetőség (a  $z_0$  középpontot 0-ból máshova is tehetnénk  $z$  helyébe  $z-z_0$ -t írógatva):

Példák:	Tagonként:	Tömören:	A konvergenciakörön belül:
$f_1(x) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + \dots$		$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n$	$R=1, \quad f_1(x) = \frac{1}{1-z}.$
$f_2(x) = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + z^6 - \dots$		$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$	$R=1, \quad f_2(x) = \frac{1}{1+z}.$
$f_3(x) = 1 + 2z + 4z^2 + 8z^3 + 16z^4 + 32z^5 + \dots$		$= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$	$R=\frac{1}{2}, \quad f_3(x) = \frac{1}{1-2z}.$
$f_4(x) = z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + 5z^5 + 6z^6 + \dots$		$= \sum_{n=0}^{\infty} n z^n$	$R=1, \quad f_4(x) = \frac{z}{(1-z)^2}.$
$f_5(x) = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{6}z^6 + \dots$		$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$	$R=1, \quad f_5(x) = -\text{Ln}(1-z).$

Az első a geometriai sor: triviálisan  $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ , azaz  $R=1$ ; ebből indultunk ki a Cauchy-Hadamard-tétel bevezetésekor. Ha  $z$ -t  $-z$ -re cseréljük,  $f_2$ -t kapjuk: az  $|a_n|$ -ek ugyanazok, így is világos, hogy ott is  $R=1$ . Az  $f_3$  ugyanaz, mint  $f_1$ , ha  $2z$ -t tekintjük változónak. Így nyilván  $z$ -re nézve itt  $R=\frac{1}{2}$ , ami az első  $R$  fele. És valóban:  $\sqrt[n]{2^n} = 2$ , így  $\frac{1}{2}$  jön ki az  $R$  limsup-os kifejezéséből is. A konvergenciasugár definíciója tehát konzisztens a változó ilyen fajta átjelölésével.

Az  $f_5$  deriváltja  $f_1$ , így az  $f_5$  sorösszege az  $\frac{1}{1-z}$  első összegfüggvény ( $z=0$ -ban  $f_5(0)=0$ -t felvevő) primitív függvénye: tudva, hogy a vágáson kívül  $\frac{d}{dz} \text{Ln } z = \frac{1}{z}$ , tényleg a mondott sorösszeget kapjuk. *Figyelem!* Az  $\text{Ln}(1-z)$  függvénynek vágása van (nem differenciálható) az  $[1, \infty] \subset \mathbb{R}$  félegyenesen: visszatérünk erre, mindenesetre  $\text{Ln}(1-z)$  az egységkörön (azaz a  $|z|<1$  körön) belül értelmes, differenciálható, és deriváltja tényleg  $\frac{1}{1-z}$ : igaz a felírt következtetésünk.

Az  $f_4$  sor az  $f_1$  elsőnek a deriváltja ( $z$ -vel szorozva): így adódik  $f_4$  sorösszege. A derivált sorokról tanultak miatt világos, hogy  $f_4$  és  $f_5$  ugyanott konvergensek, mint  $f_1$ , azaz  $R=1$  rájuk.

• Nézzük meg az  $f(z) = (1-z)^{-\alpha}$  általános **hatványfüggvény** hatványsorát is! Itt a rögzített  $\alpha \in \mathbb{C}$  bármilyen szám lehet (még komplex is);  $\alpha=1$  a geometriai sort adja vissza. **Állítás:**

$$\frac{1}{(1-z)^\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}z + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1 \cdot 2}z^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}z^3 + \dots, \quad \text{ha } |z|<1. \quad (1.21)$$

A  $z^n$ -es tag számlálójában tehát  $n$  darab 1-gyel arrébbi szám szorzata van (és a nulladfokú tag 1; ezt beleértik ebbe a jelölésbe). A formula lényegében a függvényünk Taylor-sora: mivel

$$f(z) = (1-z)^{-\alpha}, \quad f'(z) = \alpha \cdot (1-z)^{-(\alpha+1)}, \quad f''(z) = \alpha(\alpha+1) \cdot (1-z)^{-(\alpha+2)}, \quad \dots$$

ezek  $z=0$ -beli értékeiből a szisztémát felismerve az (1.18) Taylor-képlet a felírt sort adja. Később látjuk be, hogy ez *tényleg előállítja* a megadott  $f(z)$  függvényünket a konvergenciakörön belül.

Külön kiemeljük az  $\frac{1}{2}$ -edik hatvány fontos és gyakori esetét: a páros szorzatokkal ( $2 \cdot 4 \cdot 6 \dots$ -tal) bővítve ellenőrizhetjük, hogy az együtthatók az alábbi alakban írhatók fel itt:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \dots \cdot \left(n - \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^n n!} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} z^n. \quad (1.22)$$

• Ha  $\alpha = -m$  nulla vagy negatív egész ( $m \in \mathbb{N}_0^+$ ), akkor nem végtelen az iménti (1.21) sor (mert ekkor az összes  $n > m$ -es együttható nulla). Ilyenkor (1.21) a binomiális tétellel is megkapható

$m$ -edfokú polinomot adja. Ha viszont  $\alpha \notin \mathbb{Z}_0^-$ , akkor a **konvergenciasugár**  $R=1$ . Beláthatjuk ezt az  $R$  limsup-pal megadott képlete alapján. (Érezhető az eredmény, mert az  $a_n$  számlálójában is és nevezőjében is hasonló ütemben növekvő szorzatok vannak.) Ha  $\alpha=m$  pozitív egész, akkor a geometriai sor  $m-1$ -edik deriváltjáról van szó, amiről tudjuk, hogy rá  $R=1$ . Ha  $\Re(\alpha)>0$ , akkor van olyan  $m \in \mathbb{N}_0^+$ , amire  $\Re(\alpha)<m$ , és ekkor tetszőleges  $n$ -re lássuk be, hogy  $n < |n+\alpha| < n+m$ . Emiatt az ilyen  $\alpha$ -hoz tartozó  $\sqrt[n]{|a_n|}$ -eket beszoríthatjuk a geometriai sorhoz és annak  $m$ -edik deriváltjához tartozó  $\sqrt[n]{|a_n|}$ -ek közé, és utóbbiak sorozata mindkét esetben 1-hez tart; kész. Az  $\alpha$ -hoz tartozó ilyen sor deriváltja az  $\alpha+1$ -hez tartozóval arányos: ha  $\Re(\alpha)<0$ , a sort elégszer deriválva visszavezetődünk a már kipipált  $\Re(\alpha)>0$  esetre (ugye a derivált sor konvergenciasugara ugyanannyi marad). Ha pont  $\alpha=-m$ , azaz polinomunk volt, akkor ez azonosan eltűnne ennyi deriválástól, így ez a ( $z$  előbb is kiemelt) speciális eset is belesimul ebbe a gondolatmenetbe.

- Az arctg és az Arth függvények sorai a logaritmussal kifejezett alakjaikból kaphatók:<sup>16</sup>

$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}, \quad \operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz} \quad \Rightarrow \quad (\operatorname{Arth} z)' = \frac{1}{1-z^2}, \quad (\operatorname{arctg} z)' = \frac{1}{1+z^2}.$$

Akár az  $\frac{1}{1 \pm z^2}$  fentebbről kapható sorainak tagonkénti primitív függvényét keresve, akár a logaritmusokat szétbontva,<sup>17</sup> majd  $\operatorname{Ln}(1 \pm z)$  fentebbi sorait használva az adódik, hogy

$$\operatorname{Arth} z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad \text{ha } |z| < 1, \quad (1.23)$$

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad \text{ha } |z| < 1; \quad (1.24)$$

és valóban mindkettő sorra  $R=1$ . Tagonkénti primitívfüggvény-kereséssel az  $\operatorname{Ar} \operatorname{sh}$  és az  $\operatorname{arcsin}$  ilyen sorait is megkaphatjuk (valós  $x$ -re; a sort aztán kiterjeszthetjük komplex  $z$ -kre is):

$$\begin{aligned} (\operatorname{arcsin} x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arcsin} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \\ (\operatorname{Ar} \operatorname{sh} x)' &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! \cdot (-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Ar} \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! \cdot (-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \end{aligned}$$

Megjegyzés:  $\operatorname{Ar} \operatorname{sh}$ -t (és abból kiindulva  $\operatorname{arcsin}$ -t is) kifejezhetjük logaritmussal is:

$$\operatorname{Ar} \operatorname{sh} z = \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2+1}), \quad \operatorname{arcsin} z = -i \operatorname{Ln} (iz + \sqrt{1-z^2}). \quad (1.25)$$

Tovább:  $\operatorname{arccos} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsin} x$ , az  $\operatorname{Ar} \operatorname{ch}$  viszont  $\mathbb{R}$ -ben nem értelmes  $x=0$  környékén.

\* \* \*

Ebben a fejezetben elmélyítve átismételtünk komplex változós függvényeket. A következő fejezetekben következnek azok a témakörök, amelyeket ténylegesen komplex függvénytanak hívnak: a lényeg, hogy össze kell kapcsolni a komplex differenciálhatóságot  $\mathbb{C}$  sík-voltával, „geometriájával”. Az így szerzett ismeretek az eddig tárgyalt függvények jobb megértését is elősegítik.

<sup>16</sup>Ha még nem rutin, ellenőrizzük, hogy a megadott képletek valóban helyesen adják meg a th és a tg inverzeit, ill. alább is a sh, ch hasonló inverzeit is helyesen adtuk meg!

<sup>17</sup>Valós  $|x|<1$ -re biztos igaz, hogy  $\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ . Komplex számokra a fázisugrás miatt nem mindig igaz, hogy  $\operatorname{Ln} \frac{a}{b} = \operatorname{Ln} a - \operatorname{Ln} b$ , mindazonáltal most beláthatjuk, hogy  $|z|<1$ -re mégiscsak  $\operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z} = \operatorname{Ln}(1+z) - \operatorname{Ln}(1-z)$ . Később majd látunk a fázisok végiggondolásánál egyszerűbb módszereket is ez utóbbi állítás belátására.

## 2. Komplex differenciálhatóság és egyszerű következményei

Ideje rátérni az „igazi” komplex függvénytanra. Az *értelmezési tartomány* tehát  $\mathbb{C}$  (vagy részhalmaza); az *érkezési halmaz* sokféle  $\mathbb{V}$  vektortér is lehetne, de a legalapvetőbb eset az, amikor ez is a komplex számok  $\mathbb{C}$  halmaza: innentől  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvényekkel foglalkozunk.

### 2.1. Komplex differenciálhatóság

- Tudjuk, hogy mit jelent, hogy egy  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvény differenciálható:

$$f \text{ differenciálható } z\text{-ben, ha létezik ez a határérték: } \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} := f'(z). \quad (2.1)$$

Akkor áll szilárdan az építmény, ha azt is megköveteljük, hogy ez a  $z$  az értelmezési tartomány **belső pontja** legyen, azaz  $\text{Dom } f$  a  $z$  mellett még annak (legalább egy kis) körlap-környezetét is tartalmazza. Továbbá azt mondjuk, hogy  $f$  *differenciálható*, ha  $\text{Dom } f$  minden pontjában az.

- **Egyfelől** ha  $\mathbb{C}$ -re mint számhalmazra gondolunk, a valós függvényekre megszokott (és a számműveleteket használó átalakításokkal belátható) differenciálási szabályok **érvényben maradnak**:

1. Ha  $f$  és  $g$  differenciálhatóak  $z$ -ben, akkor

- (a) minden  $\lambda \in \mathbb{C}$  számra  $\lambda f$  is differenciálható  $z$ -ben, és  $(\lambda f)'(z) = \lambda \cdot f'(z)$ ,
- (b)  $f + g$  is differenciálható  $z$ -ben, és  $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$ ,
- (c)  $fg$  is differenciálható  $z$ -ben, és  $(fg)'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$ ,
- (d) Az előző kettő értelemszerűen véges sok tag ill. tényező esetére is szokásosan igaz,
- (e) Ha  $f(z) \neq 0$ , akkor  $\frac{1}{f}$  is differenciálható  $z$ -ben, és  $(\frac{1}{f})'(z) = -\frac{f'(z)}{(f(z))^2}$ .
- (f) Ha  $g(z) \neq 0$ , akkor (c)-ből és (e)-ből  $\frac{f}{g}$  is differenciálható  $z$ -ben, és  $(\frac{f}{g})'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2}$ .

2. Ha  $f$  differenciálható  $z$ -ben,  $g$  pedig  $f(z)$ -ben, akkor a kompozíció,  $g \circ f$  is differenciálható  $z$ -ben, és  $(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z)$ . Szokásos tömörséggel:  $\frac{df}{dz} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dz}$ .

3. Ha  $f$  folytonosan differenciálható  $z$  egy környezetében, és  $f'(z) \neq 0$ , akkor  $f$  injektív a  $z$  egy (esetleg szűkebb) környezetében,  $f^{-1}$  differenciálható  $f(z)$ -ben, és  $(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$  igaz.<sup>18</sup>

4. Az identitás-függvény,  $f(z) = z$  differenciálható, és  $f' = 1$  (konstans 1). Minden konstans  $f(z) = c$  függvény differenciálható, és  $f'(z) = 0$ . Az  $\exp$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\text{sh}$ ,  $\text{ch}$  elemi függvények deriváltjai a fenti 1.3. szakaszban átismételt hatványsoraikat tudva tényleg azok, amiket ismerünk.

Ezekből építkezve kijön a deriválási szabály-gyűjtemény. Kis pongyolással: ha egy elemi függvényekkel, műveletekkel, törtekkel-szorozattal, stb. felírt valós  $f(x)$  függvény differenciálható, akkor ha „az  $x$ -et  $z$ -re cseréljük”, így kiterjesztve  $\mathbb{C}$ -re, differenciálható  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvényt kapunk.

- **Másfelől**  $\mathbb{C}$ -re mint *síkra* gondolva: a (differenciálhatóság definíciójában, (2.1)-ben kijelölt) határérték fogalmában benne van, hogy akkor létezik, ha **akárhogyan** tartunk is  $w$ -vel  $z$ -hez, a hányados **ugyanahhoz** az  $f'(z)$  komplex számhoz tart. A valós differenciálásnál legfeljebb balról és jobbról, a komplex síkon azonban már igen sokféleképpen közelíthetünk  $w$ -vel  $z$ -hez. A differenciálhatóság feltétele így nézve igen erős.<sup>19</sup> Nem is teljesül minden „egyszerű” függvényre.

<sup>18</sup>Az inverz deriváltjának *képlete* ugye kijön abból, hogy  $f^{-1}(f(z)) = z$ , és ekkor  $w \rightarrow z$  esetben  $f^{-1}$  deriváltja  $\frac{w-z}{f(w)-f(z)}$ -ből jön. Az viszont, hogy a mondott feltétel elég, komolyabb tétel. Esetleg visszatérünk rá.

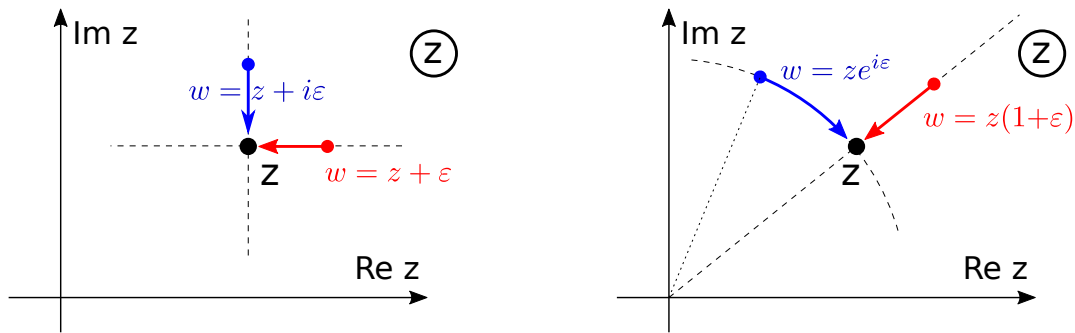
<sup>19</sup>Olyannyira, hogy (a következményeket látva) majd felmerülhet, hogy nem lőttünk-e vele túl a célon. Megnyugtató: a továbbiakban meglátjuk, hogy hasznos elmélet virágzik ki a komplex differenciálhatóság definíciójából.

• **Intő példák:** egyszerű  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvények, amelyek mindenhol folytonosak, de sehol sem differenciálhatók. Utóbbihoz elég belátni, hogy *minden*  $z$  esetén *létezik kettő* irány, amelyek mentén  $w$ -vel  $z$ -hez tartva *nem egyforma* a megkövetelt (2.1) határérték (ha létezik is).

A vizsgált $f$ függvény	A deriválthoz kellő különbségi hányados határértéke, $\lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$
Komplex konjugálás, $f(z) = z^*$	Valós irányban, $w = z + \varepsilon$ : $\frac{(z + \varepsilon)^* - z^*}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \rightarrow 1$ . Képzetes irányban, $w = z + i\varepsilon$ : $\frac{(z + i\varepsilon)^* - z^*}{i\varepsilon} = \frac{-i\varepsilon}{i\varepsilon} \rightarrow -1$ .
Valós rész képzése, $f(z) = \Re(z)$	Valós irányban, $w = z + \varepsilon$ : $\frac{\Re(z + \varepsilon) - \Re(z)}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \rightarrow 1$ . Képzetes irányban, $w = z + i\varepsilon$ : $\frac{\Re(z + i\varepsilon) - \Re(z)}{i\varepsilon} = \frac{0}{i\varepsilon} \rightarrow 0$ .
Képzetes rész képzése, $f(z) = \Im(z)$	Valós irányban, $w = z + \varepsilon$ : $\frac{\Im(z + \varepsilon) - \Im(z)}{\varepsilon} = \frac{0}{\varepsilon} \rightarrow 0$ . Képzetes irányban, $w = z + i\varepsilon$ : $\frac{\Im(z + i\varepsilon) - \Im(z)}{i\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{i\varepsilon} \rightarrow -i$ .
Abszolútérték képzése, $f(z) =  z $	$z \neq 0$ , sugárirányban: $w = z(1 + \varepsilon)$ $\frac{ z(1 + \varepsilon)  -  z }{z\varepsilon} = \frac{ z }{z} \rightarrow e^{-i \arg z}$ . $z \neq 0$ , körirányban: $w = ze^{i\varepsilon}$ $\frac{ ze^{i\varepsilon}  -  z }{z(e^{i\varepsilon} - 1)} = \frac{0}{z(e^{i\varepsilon} - 1)} \rightarrow 0$ .

Itt  $\varepsilon$  pozitív valós nullához tartó szám, a határértékek  $\varepsilon \rightarrow 0$ -t jelentenek. Gondoljuk végig mindet! (Pl. hogy tényleg  $\frac{0}{\varepsilon}$ , noha  $\varepsilon = 0$ -ban nem értelmes,  $\varepsilon \rightarrow 0$ -ra *nullához tart*). Az abszolútértékre írtak  $z \neq 0$ -ra értelmesek;  $z = 0$ -ban ő már  $\mathbb{R}$ -re leszűkítve sem differenciálható.

A felsorolt függvényekhez tehát semmilyen  $z$ -re nem létezik a különbségi hányados határértéke, mert minden  $z$ -re találtunk két irányt, amelyek mentén nem ugyanannyi.<sup>20</sup>



3. ábra. Bal oldal: az  $f(z) = z^*$ ,  $f(z) = \Re(z)$ ,  $f(z) = \Im(z)$  függvények nem differenciálhatóságának belátásához használt irányok. Jobb oldal: az  $f(z) = |z|$ -hez a sugárirányú és a szögirányú irány.

• Az imént vizsgált  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvények tehát **sehol sem differenciálhatók**. Elég megjegyezni, hogy a **komplex konjugálás nem differenciálható**: ebből következik, hogy a többi felsorolt sem az, mivel  $f(z) = z$  differenciálható, de  $\Re(z) = \frac{1}{2}(z + z^*)$ ,  $\Im(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*)$ ,  $|z|^2 = zz^*$ .

## 2.2. A Cauchy-Riemann-egyenletek

• **Bevezetés:** hasznos lesz, ha **minden**  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  (azaz: komplex számokon értelmezett és komplex értékeket felvevő) **függvényhez** két darab két valós változós, valós értékeket felvevő,

<sup>20</sup>Ha ez nem elég meggyőző, kipróbálhatunk más irányú ráközelítéseket is: világos lesz, hogy valóban nincs értelmes határérték egyik esetben sem semmilyen  $z$ -re, mert változatos értékeket kaphatunk különböző irányokból.



tipikusan  $U(x, y)$ -nal és  $V(x, y)$ -nal jelölt függvényt társítunk. Ezek  $f$  **valós és képzetes részeit** fogják jelenteni: ha a  $z$  komplex változót  $x+iy$  módon ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) adjuk meg, akkor az eredmény  $f(z)$ -értéknek vehetjük a valós és képzetes részeit, amelyek  $z$ -n keresztül  $x$ -től és  $y$ -től függenek.

$$\text{Tömören: ha } z \equiv x+iy, \text{ akkor } f(z) \equiv f(x+iy) = U(x, y) + iV(x, y). \quad (2.2)$$

• Ha adott  $f(z)$ -hez  $U$  és  $V$  a kérdés, akkor legtöbbször konkrétan be kell írni  $z = x+iy$ -t, és addig alakítani (tudva komplex számokat összeadni, szorozni, hatványozni, az elemi függvények addíciós tételeit használni, stb.), amíg ki nem derül az eredmény valós és képzetes része. Jó „állóképesség-növelő edzés” az is, ha próbáljuk az eredményt egyszerű szép alakra hozni.

**Példák** jönnék; ellenőrizzük őket! Itt  $c \equiv a+ib$  adott konstans komplex számot jelent.

$f(z) = z^*$ ,	$U(x, y) = x,$ $V(x, y) = -y.$	$f(z) = cz,$	$U(x, y) = ax-by,$ $V(x, y) = bx+ay.$
$f(z) = \Re(z),$	$U(x, y) = x,$ $V(x, y) = 0.$	$f(z) = z^2,$	$U(x, y) = x^2-y^2,$ $V(x, y) = 2xy.$
$f(z) = \Im(z),$	$U(x, y) = y,$ $V(x, y) = 0.$	$f(z) = z^3,$	$U(x, y) = x^3-3xy^2,$ $V(x, y) = 3x^2y-y^3.$
$f(z) =  z ^2,$	$U(x, y) = x^2+y^2,$ $V(x, y) = 0.$	$f(z) = \text{Ln } z,$	$U(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2),$ $V(x, y) = \arg(x+iy).$
$f(z) = c,$	$U(x, y) = a,$ $V(x, y) = b.$	$f(z) = e^z,$	$U(x, y) = e^x \cos y,$ $V(x, y) = e^x \sin y.$
$f(z) = z,$	$U(x, y) = x,$ $V(x, y) = y.$	$f(z) = \sin z,$	$U(x, y) = \sin x \text{ ch } y,$ $V(x, y) = \cos x \text{ sh } y.$
$f(z) = iz,$	$U(x, y) = -y,$ $V(x, y) = x.$	$f(z) = \cos z,$	$U(x, y) = \cos x \text{ ch } y,$ $V(x, y) = -\sin x \text{ sh } y.$
$f(z) = \text{sh } z,$	$U(x, y) = \text{sh } x \cos y,$ $V(x, y) = \text{ch } x \sin y.$	$f(z) = \frac{1}{\sin z},$	$U(x, y) = \frac{\sin x \text{ ch } y}{\sin^2 x + \text{sh}^2 y},$ $V(x, y) = \frac{-\cos x \text{ sh } y}{\sin^2 x + \text{sh}^2 y}.$
$f(z) = \frac{1}{z},$	$U(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2},$ $V(x, y) = \frac{-x}{x^2+y^2}.$	$f(z) = \text{tg } z,$	$U(x, y) = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \text{sh}^2 y},$ $V(x, y) = \frac{\text{sh } y \text{ ch } y}{\cos^2 x + \text{sh}^2 y}.$
$f(z) = \frac{1}{z+c},$	$U(x, y) = \frac{x+a}{(x+a)^2+(y+b)^2},$ $V(x, y) = \frac{-(y+b)}{(x+a)^2+(y+b)^2}.$	$f(z) = \text{th } z,$	$U(x, y) = \frac{\text{sh } x \text{ ch } x}{\text{sh}^2 x + \cos^2 y},$ $V(x, y) = \frac{\sin y \cos y}{\text{sh}^2 x + \cos^2 y}.$

A látott nem differenciálható függvényeket pirossal kiemeltük. Az  $\text{Ln}$  képzetes része,  $\arg(x+iy)$  így maradt (ld. az előző fejezetben, az (1.3) egyenlet környékén). Utolsó példaként jöjjön  $\sqrt{z}$ :

$$f(z) = \sqrt{z} \quad \Rightarrow \quad U(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{x^2+y^2} + x}, \quad V(x, y) = \frac{\text{sgn}(y)}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{x^2+y^2} - x}, \quad (2.3)$$

ehhez nem  $z = x+iy$ -t behelyettesítve alakítunk, hanem ki kell fejezni valós és képzetes részekkel a négyzetgyökvonás eredményét (ld. a korábbi (1.9) egyenletet és környékét).



Ezeket mind be kell írni az  $f$  differenciálhatóságát megadó feltételbe:

$$f(z+\Delta z) \approx f(z) + \Delta z \cdot f'(z) \quad \Rightarrow \quad U(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})+iV(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}) \approx U(\mathbf{r})+iV(\mathbf{r}) + (\Delta x+i\Delta y) \cdot (A+iB).$$

Ez viszont pontosan akkor teljesül, ha **a valós és a képzetes részre külön-külön is**. Elvégezve az egy darab szorzást arra jutunk, hogy követelményünk az alábbi *két* feltétellel ekvivalens:

$$\begin{aligned} \text{A valós részből:} \quad & U(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx U(x, y) + A \cdot \Delta x - B \cdot \Delta y, \\ \text{A képzetes részből:} \quad & V(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx V(x, y) + B \cdot \Delta x + A \cdot \Delta y. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ezek viszont éppen azt jelentik, hogy az  $U$  és  $V$  mint kétváltozós függvények az  $x, y$  helyen differenciálhatók, hiszen kicsit odébbmenve a megváltozásuk tényleg a differenciálható függvényektől elvárható fenti (2.6) alakú. Sőt: konkrétan leolvashatjuk, hogy mik a parciális deriváltak:

$$\partial_x U(x, y) = A, \quad \partial_y U(x, y) = -B, \quad \partial_x V(x, y) = B, \quad \partial_y V(x, y) = A. \quad (2.8)$$

Az  $U, V$  függvények felől nézve nem tudjuk, hogy mennyi az  $A$  és a  $B$  (az  $f'(z)$  komplex szám valós és képzetes részei), de megállapíthatjuk a felírt összefüggésekből, hogy az  $U$  és  $V$  parciális deriváltjai tényleg *egymással* egyenlők a megfelelő kiosztásban, azaz **tényleg teljesül**, hogy

$$\partial_x U(x, y) = \partial_y V(x, y), \quad \text{és} \quad \partial_y U(x, y) = -\partial_x V(x, y). \quad \mathbf{Kész.}$$

• A precízebb, határértékes fogalmazásban is befejezhetjük a levezetést; a lényeg ugyanez a valós-képzetesrészes átírás. Arra kell csak ráébredni, hogy  $\Delta z$  pontosan akkor tart nullához, ha  $\Delta x$  is és  $\Delta y$  is. Így tényleg arra jutunk az  $f(z)$  differenciálhatóságára vonatkozó feltételből, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|f(z+\Delta z) - f(z) - \Delta z \cdot f'(z)|}{|\Delta z|} = 0 & \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} |U(x+\Delta x, y+\Delta y) - U(x, y) - A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y| = 0, \\ \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} |V(x+\Delta x, y+\Delta y) - V(x, y) - B \cdot \Delta x - A \cdot \Delta y| = 0, \end{cases} & (2.9) \end{aligned}$$

hiszen a valós és képzetes részek behelyettesítése ugyanúgy történik, mint fentebb. Azt is ki kellett persze használni, hogy egy komplex szám (most az  $f(z+\Delta z) - f(z) - f'(z) \cdot \Delta z$  szám *elosztva a valós  $|\Delta z|$ -vel*) pontosan akkor tart nullához, ha az abszolútértéke is, ill. ha a valós része is és a képzetes része is nullához tart. Ebből is ugyanarra az iménti (2.8) feltétel-csomagra jutunk, amiből most már tényleg a Cauchy-Riemann-egyenletek következnek, precízebben is.

• **Bebizonyítottuk** a Cauchy-Riemann-egyenletes (2.4) állítást. Ekvivalens következtetésekkel haladtunk: **visszafelé is** igaz, hogy ha  $U$  és  $V$  differenciálhatóak  $x, y$ -ban, és  $\partial_x U = \partial_y V$  és  $\partial_y U = -\partial_x V$ , akkor az  $f(x+iy) \equiv U(x, y) + iV(x, y)$  függvény differenciálható  $z = x+iy$ -ban.

Melléktermékként az is kiderült, hogy hogyan kapcsolódnak az  $U$  és  $V$  függvények (valós) parciális deriváltjai az  $f(z)$  deriváltjához,  $f'(z)$ -hez: a fenti (2.8) megfeleltetésből beláthatóan

$$f'(z) = \partial_x U(x, y) + i \cdot \partial_x V(x, y), \quad \text{másképp:} \quad f'(z) = -i(\partial_y U(x, y) + \partial_y V(x, y)).$$

Ez a két alak a Cauchy-Riemann-egyenleteket tudva tényleg egyenértékű (sőt más kiosztással is felírhatjuk  $f'$ -t). Az első annak felel meg, amikor az  $f'$ -t valós ( $x$  irányú) elmozdulás szempontjából nézzük:  $\Delta z \equiv \Delta x$ , és az  $x$ -ben való változási gyorsaság jön elő. A második pedig amikor  $\Delta z \equiv i\Delta y$ , azaz tiszta képzetes: így az  $y$  irányú valós deriváltak kerülnek elő ( $\frac{1}{i} = -i$ -vel szorozva).

### 2.3. Differenciálható függvények mint konform leképezések szemléltetése

• Most is  $f$  jelöl egy  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvényt, és  $U(x, y)$  ill.  $V(x, y)$  a valós és képzetes részeit mint a  $z=x+iy$  módon beazonosított valós  $x$  és  $y$  függvényeit. Láttuk, hogy adott helyen  $f(z)$  éppen akkor differenciálható, ha  $U$  és  $V$  is, és ők kielégítik a Cauchy-Riemann-egyenleteket:

$$z \equiv x + iy, \quad f(z) \equiv U(x, y) + iV(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Tegyük fel, hogy a függvényeink legalább egy „kövérkés” (=nyílt) halmazon differenciálhatók.

• Az első észrevétel a Cauchy-Riemann-egyenletekből közvetlenül következik; *belátni* egyszerű.

**Állítás:** ahol  $f$  differenciálható, ott  $\underline{\text{grad } U \cdot \text{grad } V = 0}$ , hiszen 
$$\begin{pmatrix} \partial_x U \\ \partial_y U \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_x V \\ \partial_y V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x U \\ \partial_y U \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\partial_y U \\ \partial_x U \end{pmatrix} = 0. \quad (2.10)$$

Vagyis differenciálható  $f$  esetén  $U$  és  $V$  kétdimenziós gradiensvektorainak mindenhol nulla a skalárszorzata, azaz merőlegesek. Emiatt az ilyen  $U$  és  $V$  függvények **szintvonalai** is **merőlegesek** egymásra mindenhol. Az  $U$  és a  $V$  függvényeket szemléltethetjük is a szintvonalakkal: differenciálható  $f$  esetén ezek **ortogonális koordinátarendszert** adnak a síkon. (Sőt, néhány egyszerű  $f$  függvény épp néhány korábban megismert ilyen koordinátarendszert ad meg így; ld. alább.)

Az  $U$  és a  $V$  szintvonalakkal ábrázolásával esetleg *magát az  $f$  függvényt is* szemléltethetjük. Valós-valós („ $y = f(x)$ ”) függvényeket grafikonjukkal ábrázolhatunk;  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvényekre nincs ilyen lehetőség. Egyszerűbb komplex függvények  $U, V$  szintvonal-rendszerei egy idő után esetleg ismerősek lesznek, de nehezebben válnak olyan beidegződéssé, mint a valós függvénygrafikonok.

• Egy  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvényre úgy is gondolhatunk, hogy ő a  $\mathbb{C}$  sík pontjait (számokat) átvisz más pontokba (számokba): **eltranszformálja** a síkot. Ennek vizualizálásához jelöljük  $z$ -vel az  $f$  változóját,  $z'$ -vel az eredményül kapható számokat, és vizsgálhatjuk pl., hogy az  $f$  a valós ill. a képzetes tengellyel párhuzamos egyeneseket milyen görbékbe viszi. Kigondolhatjuk, hogy így ugyanazt a görbesereget kapjuk, mintha a  $z'$  síkon az  $f$  *inverzét*,  $f^{-1}$ -et szemléltetnénk az előző pontban mondott módon.<sup>21</sup> Így az is nyilvánvaló, hogy differenciálható  $f$  esetén egy  $\Re(z)=\text{const}$  és egy  $\Im(z)=\text{const}$  egyenes képgörbéi a  $z'$  síkon is derékszögben metszik egymást. *Figyelem!* Ha mutatnak két (ortogonális) görbesereget, és azt mondják, hogy ez egy  $f$  komplex függvény „ábrázolása”, akkor jó tisztázni, hogy mit értenek alatta: az  $f$  valós és képzetes részeinek szintvonalait, vagy a koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenesek  $f$  általi képeit. (Másképp fogalmazva: nézhetjük azt, hogy az  $f$  *milyen görbékbe visz át* a valós ill. képzetes tengelyekkel párhuzamos egyenesekbe, de azt is, hogy a tengelyekkel párhuzamos egyeneseket *milyen görbékbe viszi át*.)

• Ha azt keressük, hogy egy  $f$  függvény milyen görbékbe viszi a tengelyirányú egyeneseket, írjuk fel utóbbiak egyenleteit az indulási  $z$ -síkon „paraméterezve”:

$$\begin{aligned} \text{Egy vízszintes egyenes: } & z = x + ib, \quad \text{ahol } b \text{ rögzített, } x \text{ végigfut } [-\infty, \infty]\text{-en,} \\ \text{Egy függőleges egyenes: } & z = a + iy, \quad \text{ahol } a \text{ rögzített, } y \text{ végigfut } [-\infty, \infty]\text{-en.} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ezeket beírva  $f(z)$ -be megkapjuk azon görbék ( $x$ -szel ill.  $y$ -nal mint paraméterrel) paraméterezett alakjait, amelyekbe  $f$  az egyeneseket viszi; a  $b$  ill. az  $a$  értékei (az eredeti egyeneseknek a képzetes

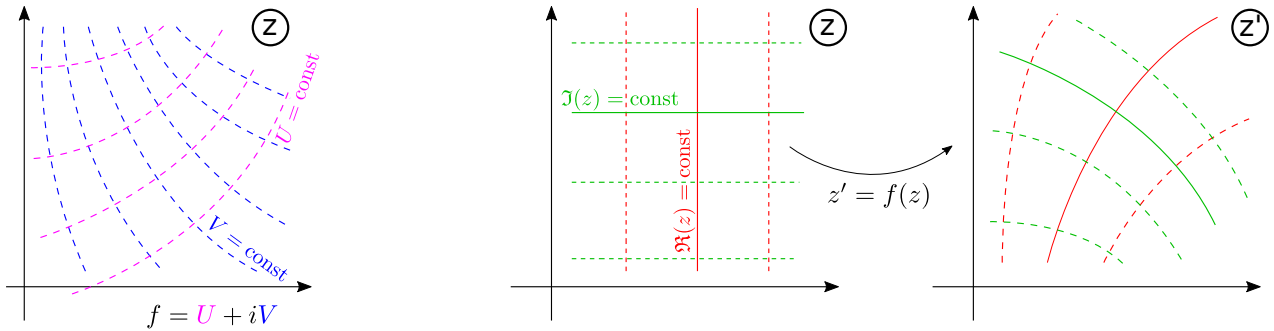
<sup>21</sup>Ugyanis pl. a valós részre megfogalmazva: a  $z'$ -ket, amik olyan  $z$ -kből kaphatók  $z'=f(z)$ -ként, amikre  $\Re(z)$  egy adott érték,  $f^{-1}$  éppen visszaviszi azokba a  $z$ -kbe, amelyekre  $\Re(z)$  éppen az adott érték: ezen  $z'$ -k halmaza az  $f^{-1}$ -nek mint függvénynek a valós részének az egyik szintvonala. Ugyanezt a képzetes részre is megfogalmazhatjuk.

ill. valós tengellyel való metszéspont-helyei) a kép-görbéket különbözteti meg egymástól.

$$\text{a kép-görbék egyenletei: } x \rightarrow f(x+ib), \quad \text{ill. } y \rightarrow f(a+iy). \quad (2.12)$$

A kapott utóbbi kifejezések valós és képzetes részeit alakítgatva sokszor kézzelfoghatóbb alakban megadhatjuk az eredménygörbék egyenletét, azaz felismerhetjük, hogy ők „micsodák”.

Ha pedig az a kérdés, hogy  $f$  milyen görbéket visz tengelyirányú egyenesekbe, akkor  $f$  valós és képzetes részeinek,  $U$ -nak és  $V$ -nek a szintvonalait kell keresni, hiszen egy ilyen pont az jellemez, hogy a rajta lévő számokból kapott eredmény valós (vagy képzetes) része egy adott érték.

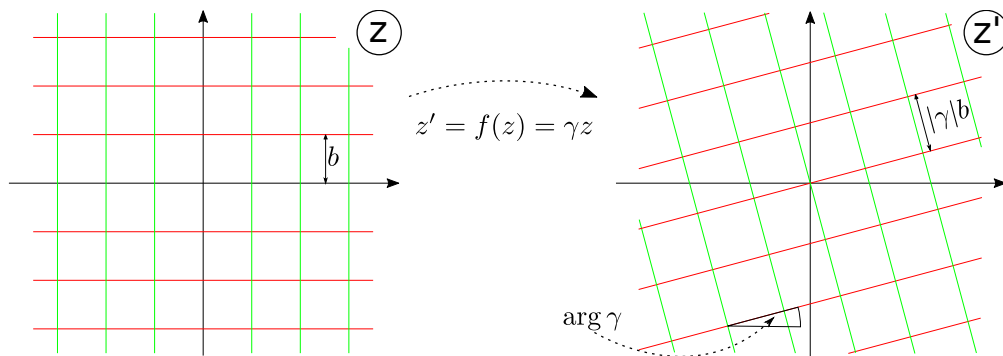


4. ábra. Differenciálható  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvény ábrázolása. Balra: az  $U$ - és  $V$ -szintvonalak merőlegesek. Jobbra: a tengelyirányú egyenesek képei is merőlegesek. A két görbesereg általában nem is hasonlít egymáshoz; egyikek az  $f$ -hez, másikkak az  $f^{-1}$ -hez tartozó valós és képzetes részek szintvonal-seregei.

• Első példa: legyen  $\gamma \equiv \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$  adott komplex szám ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ), és tekintsük a  $\gamma$ -val való szorzás műveletét, azaz legyen  $f(z) = \gamma z$ . Hova viszi ez a tengelyekkel párhuzamos egyeneseket? Adott  $b$  tengelymetszetű vízszintes ill. a tengelymetszetű függőleges egyenesekből indulva

$$\begin{aligned} \text{Vízszintes egyenes: } z = t + ib &\Rightarrow \begin{pmatrix} \text{Re}(f(t+ib)) \\ \text{Im}(f(t+ib)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha t - \beta b \\ \beta t + \alpha b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} -\beta b \\ \alpha b \end{pmatrix}, \\ \Rightarrow f(z) = \gamma \cdot (t + ib), & \\ \text{Függőleges egyenes: } z = a + iu &\Rightarrow \begin{pmatrix} \text{Re}(f(a+iu)) \\ \text{Im}(f(a+iu)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a - \beta u \\ \beta a + \alpha u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix} \cdot u + \begin{pmatrix} \alpha a \\ \beta a \end{pmatrix}. \\ \Rightarrow f(z) = \gamma \cdot (a + iu), & \end{aligned}$$

Ezek is egyenesek egyenletei. A vízszintes egyenesek irányvektora  $(\alpha, \beta)$  lett, a függőlegeseké  $(-\beta, \alpha)$ . Mindkettő azt jelenti, hogy az eredeti egyenesek elfordultak az  $(\alpha, \beta)$  vektor irányszögével, ami pont  $\arg \gamma$ . Ellenőrizzük azt is, hogy kapott egyenesek origótól vett távolsága  $|\gamma| \cdot b$  és  $|\gamma| \cdot a$  lett: a „nagyítás”  $|\gamma| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ . Persze nincs meglepetés: a  $\gamma$ -val való szorzás pont ezeket jelenti.

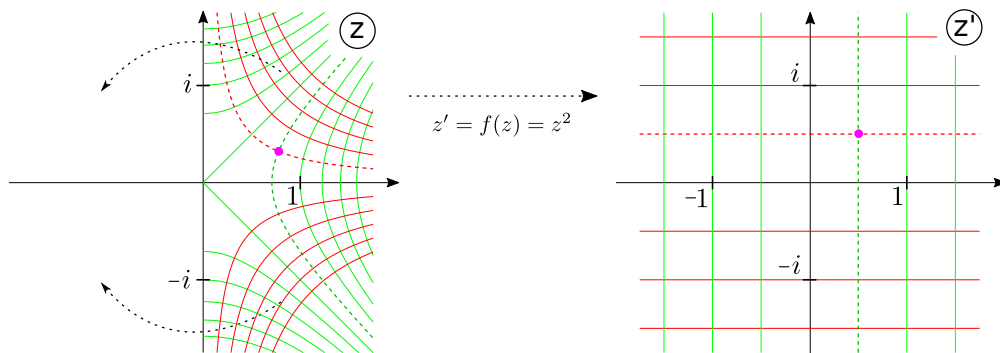


5. ábra. Az  $f(z) = \gamma z$  függvény ábrázolása (a tengelyirányú egyenesek képei).

• Következő példa:  $f(z)=z^2$ . Nézzük először azt, hogy ez milyen görbéket visz át a tengelyekkel párhuzamos egyenesekbe. Ezek ugye a valós ill. a képzetes rész szintvonalai lesznek; felidézve:

$$\text{Négyzetre emelés:} \quad \begin{array}{l} z = x+iy, \\ f(z) = z^2 \end{array} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} f(x+iy) = \underbrace{x^2-y^2}_{\equiv U(x,y)} + i \cdot \underbrace{2xy}_{\equiv V(x,y)}. \end{array} \quad (2.13)$$

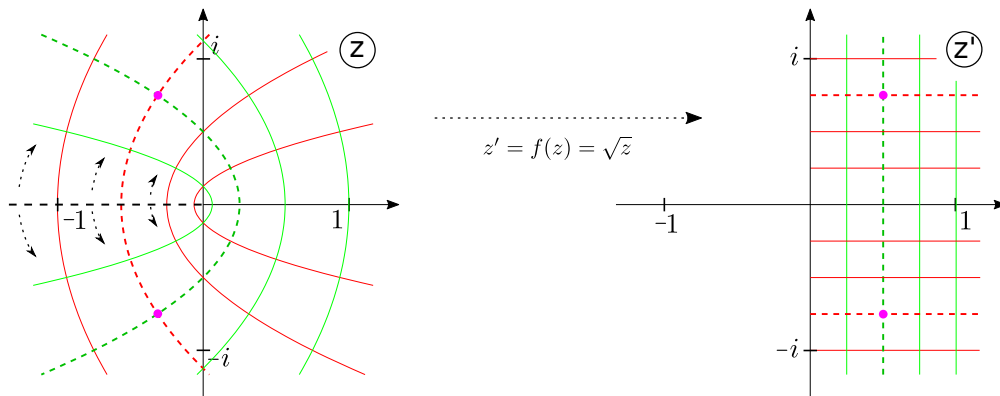
Az  $U = x^2 - y^2$  szintvonalai  $45^\circ$ -os aszimptotájú **egyenlőszárú hiperbolák**, a  $V(x, y) = 2xy$  szintvonalai pedig  $x$  ill.  $y$  tengely aszimptotájú egyenlőszárú hiperbolák. Az, hogy ezek mindenhol merőlegesek, abból is következik tehát, hogy ők a differenciálható  $f(z) = z^2$  valós ill. képzetes részének szintvonalai. A  $z' = f(z) = z^2$  leképezés tehát ilyen hiperbolákat visz tengelyirányú egyenesekbe (mindet abba, amelyikhez tartozó valós vagy képzetes rész  $x^2 - y^2$  vagy  $2xy$  adott értéke). Ha a  $\Re(z) > 0$  félsíkból indulunk, a  $z^2$ -tel az egész  $z'$  síkot megkapjuk, kétszeres szöggel kihajtogatva.



6. ábra. Az  $f(z) = z^2$  függvény ábrázolása: a jobb oldali félsíkon rajzolt két sereg egyenlőszárú hiperbolát kihajtogatja tengelyirányú egyenesekbe. (A bal oldali félsíkra rajzolt tükörképekkel is ugyanezt csinálná:  $z$ -ből és  $-z$ -ből  $z' = z^2$  ugyanarra az eredményre vezet ugyebár.)

• A gyökvonás,  $f(z) = \sqrt{z}$  a látott hiperbolákba (a  $\Re(z') > 0$  félsíkra) viszi a tengelyirányú egyeneseket; milyen görbéket visz tengelyirányú egyenesekbe? A  $\sqrt{z}$ -hez tartozó  $U$ -t és  $V$ -t a fentebbi (2.3) egyenletből másoljuk, és (a konstansokat kényelmesen jelölve) felismerjük a szintvonalakat:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \cdot U(x, y) &= \sqrt{\sqrt{x^2+y^2} + x} = \text{const} \equiv \sqrt{a} &\Rightarrow & \sqrt{x^2+y^2} = a-x \\ \text{sgn}(y) \cdot \sqrt{2} \cdot V(x, y) &= \sqrt{\sqrt{x^2+y^2} - x} = \text{const} \equiv \sqrt{b} &\Rightarrow & \sqrt{x^2+y^2} = b+x \end{aligned} \quad (2.14)$$



7. ábra. A  $\sqrt{z}$  a felvágott síkot (és a parabolákat) behajtogatja a  $\Re(z') \geq 0$  félsíkra (egyenesekké).

További rendezéssel is, de rögtön is látható, hogy ezek origó fókuszú,  $x$  irányban negatív ill. pozitív irányban nyitott parabolák. (Az  $a-x$  ill.  $b+x$  egy az origótól  $a$  ill.  $-b$  helyzetbe tolt függőleges egyenestől vett távolság: a pontok ugyanolyan messze vannak ezektől, mint az origótól.) Ilyen parabolákat már láttunk *parabolikus koordinátarendszer* címén; most is láthatjuk, hogy ortogonálisak, mert a differenciálható  $\sqrt{z}$  valós és képzetes részeinek szintvonalai. A **gyökvonás** tehát ilyen **parabolákat** visz át a  $\Re(z') > 0$  felsíkra tengelyirányú egyenesekké; a  $z \in \mathbb{R}_0^-$  vágáson átmenő  $V = \text{const}$  parabolákat kettészelve és kétféle hajtogatva.

• Tekintsük a **reciprokfüggvényt**:  $f(z) = \frac{\alpha}{z}$ , ahol  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  adott valós szám. Ez az  $f(z)$  önmaga inverze, így nem kell a kétféle ábrázolási lehetőséget külön nézni. A valós és képzetes részek:

$$f(x+iy) = \frac{\alpha}{x+iy} = \alpha \frac{x-iy}{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad U(x,y) = \frac{\alpha x}{x^2+y^2}, \quad V(x,y) = \frac{-\alpha y}{x^2+y^2}.$$

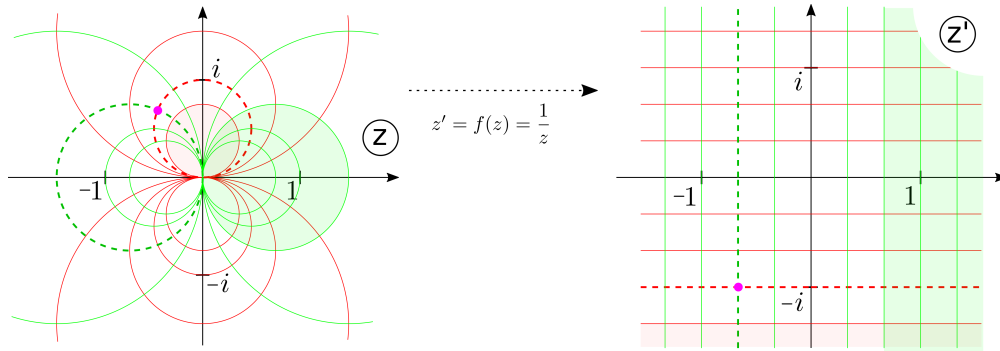
A szintvonal-görbék beazonosításához rögtön kényelmes jelöléssel írjuk az adott értékeket:<sup>22</sup>

$$U = \frac{\alpha x}{x^2+y^2} = \text{const} \equiv \frac{1}{2A} \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2-2\alpha Ax = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-\alpha A)^2 + y^2 = (\alpha A)^2,$$

$$V = \frac{-\alpha y}{x^2+y^2} = \text{const} \equiv \frac{1}{2B} \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2+2\alpha By = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + (y+\alpha B)^2 = (\alpha B)^2.$$

Ezek **körök**: az  $U = \text{const}$  körök sugara  $\alpha|A|$ , és középpontja az  $x$  tengelyen  $\alpha A$ -nál van; ezek az origóban érintik az  $y$ -tengelyt. A  $V = \text{const}$  körök középpontjai az  $y$  tengelyen vannak  $-\alpha B$ -nél, sugaruk  $\alpha|B|$ , így az  $x$ -tengelyt érintik az origóban. Ezek a körök is ortogonálisak, mert ők az  $\frac{\alpha}{z}$  differenciálható függvény valós és képzetes részeinek szintvonalai.<sup>23</sup>

A függvény csakis  $z=0$ -ban nem értelmes; egyébként *nagyobb* abszolútértékű  $z$  reciproka *kisebb* abszolútértékű: ebből kitalálható, hogy melyik *tartomány* hova képeződik. Az ábra ezt is jelöli.



8. ábra. Az  $f(z) = \frac{1}{z}$  függvény a köröket egyenesekbe (és az egyeneseket körökbe) képezi.

• Állítás: az  $f(z) = e^z$  **exponenciális** függvény a tengelyirányú egyeneseket a **polárkoordináta-rendszer** vonalaiba viszi. Mivel  $e^{n \cdot 2\pi i} = 1$ , mondhatjuk, hogy a komplex exponenciális  $2\pi i$  szerint periodikus (azaz  $z$ -hez és  $z + n \cdot 2\pi i$ -hez ugyanazt rendeli); az indulási halmazban így elég egy képzetes irányban  $2\pi$  szélességű vízszintes sávot tekinteni. Vegyük a  $-\pi$  és  $\pi$  közöttit; innen

<sup>22</sup>Itt is érvényes az, amit előszóban nem győzők hangsúlyozni: sokadszor csinálva (amikor már tudjuk, hogyan kell) mindent rögtön a „jó” módon kijelölve egyszerűnek tűnik már minden; először az életben nekiállva hosszabb lesz, az ötletek nem rögtön a megfelelő formában jönnek, stb. Érdekes mindennek magunk is nekiállni, próbálkozni!

<sup>23</sup>Aki ismeri elemi (?) geometriából az *inverzió* („körre tükrözés”) műveletét, annak: a komplex sík most látott leképezése a  $\sqrt{\alpha}$  sugarú origó közepű körre való inverzió és a valós tengelyre tükrözés egymásutánja.



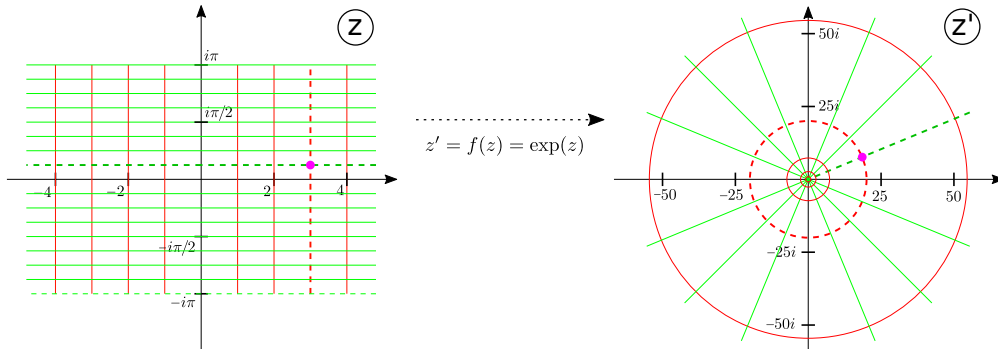
indulva (de más ilyen széles sávból indulva is) megkaphatjuk az egész  $z'$  síkot:

Vízszintes egyenes:  $z = x + ib$ , ahol  $b \in ]-\pi, \pi]$  rögzített,  $x$  végigfut  $\mathbb{R}$ -en

$$\Rightarrow e^z = e^x \cdot e^{ib}; \text{ a képhalmaz } b \text{ irányszögű, origóból induló félegyenes,}$$

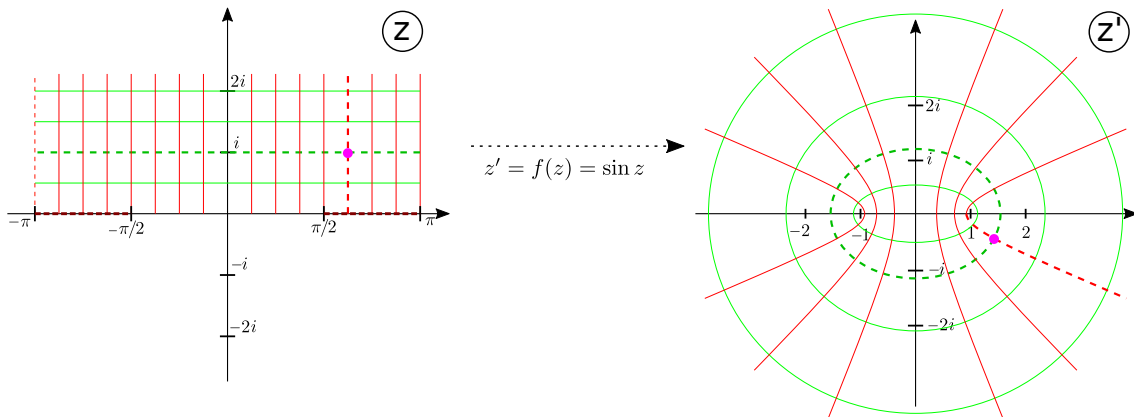
Függőleges egyenes:  $z = a + iy$ , ahol  $a \in \mathbb{R}$  rögzített,  $y$  végigfut  $]-\pi, \pi]$ -n

$$\Rightarrow e^z = e^a \cdot e^{iy}; \text{ a képhalmaz } e^a \text{ sugarú körvonal (az egységkör nagyítottja).}$$



9. ábra. Az  $e^z$  függvény képgörbéinek szemléltetése.

• Következzék a **szinuszfüggvény**,  $f(z) = \sin z$ . Ez  $2\pi$  szerint periodikus: az egyértelműség kedvéért szűkítsük le az indulási halmazt a  $-\pi$  és  $\pi$  közötti valós részű sávra. Állítás: a  $\sin z$  a tengelyirányú egyeneseket a már esetleg (pl. a Vektorszámítás jegyzet utolsó, 13.6. szakaszából) ismert ún. **elliptikus koordináta-rendszer** vonalaiba: adott, az  $x$ -tengelyen  $-1$ -ben és  $+1$ -ben lévő pontok mint fókuszpontok által fixált ellipszisekbe és hiperbolákba viszi. Ezek is ortogonálisak.



10. ábra. Az  $f(z) = \sin z$  ábrázolása.

Kiderül az is, hogy akkor kapunk injektív függvényt (ami egy  $z'$ -be csak egy  $z$ -t vihet), ha tovább szűkítjük a tartományt. Kezdjük azzal, hogy mik a  $z$  síkon vízszintes egyenesek képei:

$$\sin(x+ib) = X(x) + iY(x), \text{ ahol } X(x) = \sin x \operatorname{ch} b, \quad Y(x) = \cos x \operatorname{sh} b.$$

Ahogy  $x$ -szel végigfutunk  $-\pi$ -től  $\pi$ -ig (azaz a kijelölt komplex számmal egy adott  $b$  képzetes részű vízszintes egyenesdarabon), az eredmény valós és képzetes részére,  $X$ -re és  $Y$ -ra végig igaz, hogy

$$\frac{X^2}{\operatorname{ch}^2 b} + \frac{Y^2}{\operatorname{sh}^2 b} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{az ilyen } X\text{-ek és } Y\text{-ok egy } \operatorname{ch} b \text{ nagytengelyű és } |\operatorname{sh} b| \text{ kistengelyű ellipszist futnak be.}$$



A fókuszpontok origótól vett távolsága  $\operatorname{ch}^2 b - \operatorname{sh}^2 b = 1$ , és ha  $b$ -vel végigfutunk 0-tól  $\infty$ -ig, meg is kapjuk az összes ilyen ellipszist: az értelmezési tartományt leszűkíthetjük a  $-\pi < \Re(z) \leq \pi$  sáv felső félsíkra eső részére. Adott  $b$ -nél az  $x$  változóban felismerhetjük az ellipszis standard paraméterezéséhez tartozó paramétert (csak most  $X$ -ben van  $\sin x$  és  $Y$ -ban  $\cos x$ ).<sup>24</sup>

Hasonlóan a függőleges egyenesek képeire (tudva már, hogy elég a felső  $z$ -félsíkról indulni):

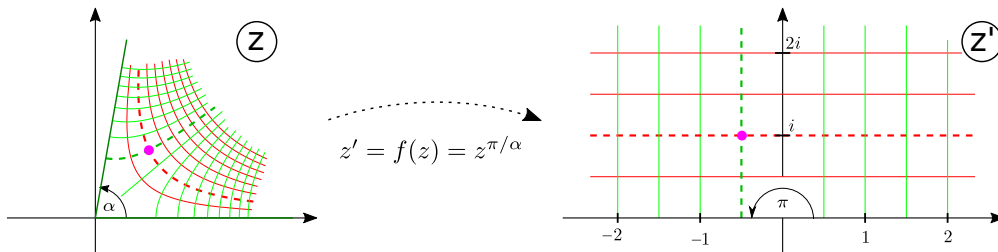
$$\sin(a+iy) = \tilde{X}(y) + i\tilde{Y}(y), \quad \text{ahol} \quad \tilde{X}(y) = \sin a \operatorname{ch} y, \quad \tilde{Y}(y) = \cos a \operatorname{sh} y,$$

és ahogy itt  $y$ -nal végigfutunk  $\mathbb{R}_0^+$ -on (azaz  $z$ -vel egy adott  $a \in ]-\pi, \pi]$  valós részű függőleges fél-egyenesen), az eredmény valós és képzetes részére,  $\tilde{X}$ -re és  $\tilde{Y}$ -ra végig igaz, hogy

$$\frac{\tilde{X}^2}{\sin^2 a} - \frac{\tilde{Y}^2}{\cos^2 a} = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{az ilyen } \tilde{X}\text{-ok és } \tilde{Y}\text{-ok egy } |\sin a| \text{ nagytengelyű} \\ \text{és } |\cos a| \text{ kistengelyű hiperbolaívét futnak be.} \end{array}$$

Az ilyen hiperbolának is kikereshetjük a fókuszpontjait: ezek az origótól  $\sin^2 a + \cos^2 a$ , azaz 1 távolságra vannak akármilyen  $a$  esetén. Az  $\tilde{X}$  és  $\tilde{Y}$  iménti kifejezéséből látszik, hogy ha  $a \in ]-\pi, -\frac{\pi}{2}[$ , vagy  $a \in ]-\frac{\pi}{2}, 0[$ , vagy  $a \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , vagy  $a \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[$ , akkor a  $z'$ -síkon rendre az első, a negyedik, a harmadik és a második síknegyedben fekvő hiperboladarabokon futhatunk végig.

- Az eddigiekben „névvel” beazonosíthattuk a görbéket. Néha azt kell majd tudni, hogy egy függvény kényelmesen leképez egy tartományt egy másikra; az csak plusz érdekesség lesz, hogy a szintvonalak merőlegesek. Példa: a  $z$ -sík adott  $\alpha$  középponti szögű ék alakú tartományát szeretnénk a  $z'$  sík felső félsíkjára leképezni. Ismerve a valós kitevőjű hatványozást (az argumentum a kitevővel szorzódik, ld. az 1.1. szakasz végén) beugorhat, hogy egy  $\frac{\pi}{\alpha}$  kitevőjű hatványozás jó lesz: ez kihajtogatja az ékünket a felső félsíkra (ami  $\pi$ , azaz  $180^\circ$  középponti szögű éknek tekinthető).



11. ábra. Az  $f(z) = z^{\pi/\alpha}$  éppen kihajtogatja az ék-tartományt a felső félsíkra.

Keressük meg a szintvonalakat is! Legyen  $\beta \equiv \frac{\pi}{\alpha}$ ; a mondott  $f(z) = z^\beta$  függvényt most a komplex számok trigonometrikus alakját használva („polárkoordinátákban”) érdemes keresni:

$$z = \rho e^{i\varphi} \quad \Rightarrow \quad \Re(z^\beta) = \rho^\beta \cos(\beta\varphi), \quad \Im(z^\beta) = \rho^\beta \sin(\beta\varphi),$$

Látjuk, hogy ha  $0 \leq \varphi \leq \alpha$ , akkor  $\beta\varphi$  valóban befutja a  $[0, \pi]$  tartományt, azaz tényleg, az ék a felső félsíkra képeződik. Ha az eredmény  $z' = z^\beta$  képzetes része állandó  $B \geq 0$  érték (ezek a  $z'$  síkon a vízszintes egyenesek), akkor (mivel az érdekes tartományon  $\sin(\beta\varphi) \geq 0$ ) azon  $z$ -k halmaza, amelyik egy ilyen egyenesbe képeződik, a következő  $\rho(\varphi)$  kapcsolattal leírható görbe:

$$\Im(z^\beta) = B \quad \Rightarrow \quad \rho(\varphi) = B^{1/\beta} [\sin(\beta\varphi)]^{-1/\beta}.$$

<sup>24</sup>A  $b=0$  eset itt kivétel: ez egy nulla kistengelyű „elfajult ellipszist”, azaz a  $z'$  síkon a  $[-1, 1]$  szakaszt adja meg, amelyen kétszer mennénk végig, ha  $x$   $-\pi$ -től  $\pi$ -ig futna. A kiindulási síkon tehát a valós tengelyen elég csak a fél-teljesszögön végigmenni; az ábrán barnával szaggatva jelöltem itt a kihagyandó részt.

A  $z'$  felső félsíkján a függőleges félegyenesek (amiken  $\Re(z^\beta) = A$  konstans)  $A \geq 0$  esetén  $0$  és  $\frac{\alpha}{2}$  közé eső  $\varphi$ -kból jöhetnek, ha  $A \leq 0$ , akkor pedig  $\frac{\alpha}{2}$  és  $\alpha$  közöttiekből. A két tartományban  $\cos(\beta\varphi) \geq 0$  ill.  $\cos(\beta\varphi) \leq 0$ , úgyhogy külön kell nézni ezt a két lehetőséget, de összefoglalhatjuk:

$$\Re(z^\beta) = A \quad \Leftrightarrow \quad \rho(\varphi) = |A|^{1/\beta} \cdot |\cos(\beta\varphi)|^{-1/\beta}, \quad \text{és} \quad \begin{array}{l} A \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\alpha}{2}, \\ A \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{2} \leq \varphi \leq \alpha, \end{array}$$

és tényleg nem kell negatív valós számot hatványozni (ez nem is igazán értelmes), csak pozitívat.

\* \* \*

• Idézzük fel a **görbe** fogalmát. Később pontosítjuk a követelményeket; általában mondva azonban ugyebár ha  $I \subset \mathbb{R}$  egy valós intervallum, akkor a  $\mathbb{C}$  síkon görbét jelöl ki egy  $I \rightarrow \mathbb{C}$  differenciálható függvény<sup>25</sup> (egy *paraméterezés*), jelben pl.  $z(t)$ :

A  $\mathbb{C}$ -n futó **görbe paraméterezése** lehet egy  $[t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{C}$  differenciálható leképezés.

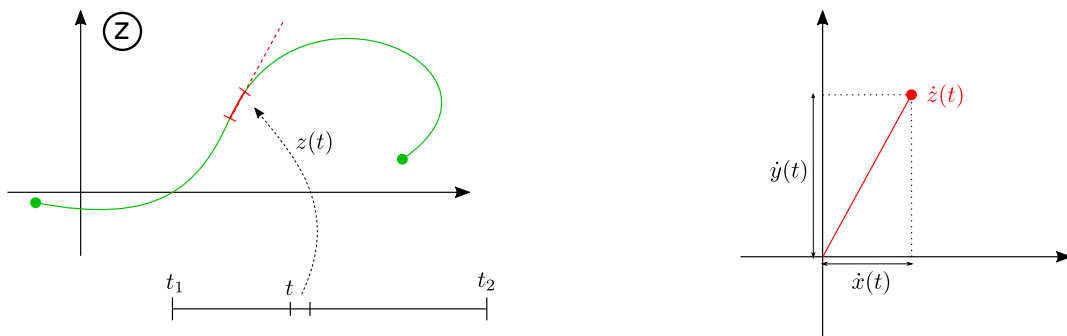
A  $z(t)$  függvény valós és képzetes része megadja a  $t$ -hez tartozó valós és képzetes részt, azaz a görbe  $z(t)$  pontjának Descartes-koordinátáit a  $\mathbb{C}$ -n mint síkon.

• Találkoztunk már görbe érintővektorának fogalmával is: ha egy síkgörbét a rajta futó helyvektor paraméterezésével,  $\mathbf{r}(t)$  módon adtuk meg, ez a következő volt:

$$\text{Síkgörbe: } \mathbf{r}(t) \equiv \begin{pmatrix} r_x(t) \\ r_y(t) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{érintővektora egy} \\ \text{adott } t \text{ paraméte-} \\ \text{rű } \mathbf{r}(t) \text{ pontban:} \end{array} \quad \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \equiv \begin{pmatrix} \frac{dr_x(t)}{dt} \\ \frac{dr_y(t)}{dt} \end{pmatrix}.$$

Innentől az egy darab valós paraméter szerinti deriváltat sokszor ponttal jelöljük, így:  $\dot{\mathbf{r}}(t) \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ . Az érintő ugye tényleg az a vektor, ami a görbe adott pontbeli irányába mutat, a közeli  $\mathbf{r}(t+\Delta t)$  és  $\mathbf{r}(t)$  pontok helyvektor-különbségéből kigondolva. A komplex  $\mathbb{C}$  síkon futó görbénél annyi újdonság van, hogy a kétdimenziós érintővektor komponenseit is összerakhatjuk egy *komplex számmá*:

$$\begin{array}{ll} \text{Görbe a } \mathbb{C} \text{ síkon: } z(t) \equiv x(t) + iy(t) & \text{ez a } \dot{z}(t) \text{ mint vektor} \\ \Rightarrow \text{érintője: } \dot{z}(t) \equiv \dot{x}(t) + i\dot{y}(t), & \text{tényleg ugyanaz, mint} \end{array} \quad \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}.$$



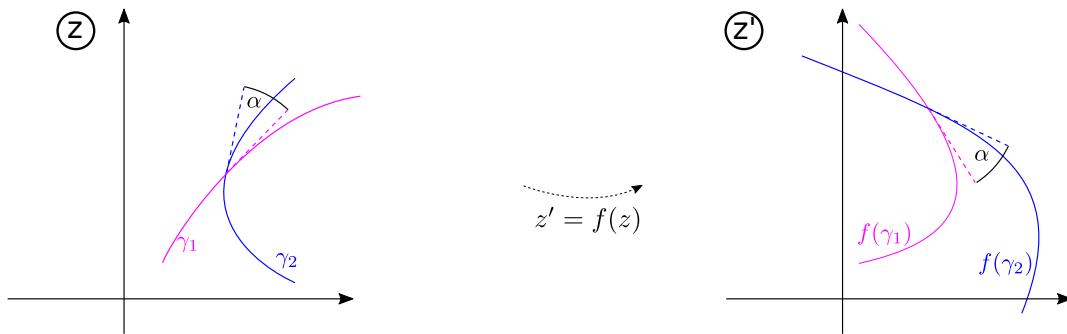
12. ábra. Görbe a komplex síkon; az érintővektora itt most komplex számnak is tekinthető.

<sup>25</sup>Figyelem: a *valósból komplexbe* menő  $z(t)$  differenciálhatósága kell; ez egyenértékű azzal, hogy  $x(t)$  és  $y(t)$  mint  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvények differenciálhatók. Itt tehát eszünkbe ne jussanak pl. Cauchy-Riemann-egyenletek: utóbbiak  $\mathbb{C}$  értelmezési tartományú függvényekhez valók.

• Láttuk az előzőekben, hogy differenciálható  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  esetén a tengelyekkel párhuzamos (emiatt derékszögben metsző) egyenesek kép-görbéi merőlegesen metszik egymást. **Több is igaz:**

**Állítás:** ha a  $\mathbb{C}$  síkon a  $\gamma_1$  és  $\gamma_2$  görbék  $\alpha$  szögben metszik egymást  $\Rightarrow$  a  $\mathbb{C}$ -t egy  $z'=f(z)$  differenciálható függvénnyel leképezve (ha  $f' \neq 0$  sehol) a  $z'$  síkon kapott kép-görbék ugyanolyan  $\alpha$  szögben metszik egymást.

Röviden mondván: differenciálható függvény mint a  $\mathbb{C}$  sík transzformációja **szögtartó**. Az ide kívánczoló elnevezés a szakasz címében volt: a sík olyan leképezései, amelyek az imént mondott értelemben szögtartók, **konform leképezések** névre hallgatnak. Ezzel a szóhasználattal élve: minden komplex differenciálható függvény a sík valamilyen konform leképezését valósítja meg.<sup>26</sup>



13. ábra. Komplex differenciálható függvény mint leképezés szögtartó (azaz: konform leképezés).

• Az állításunk **bizonyításához** jelöljük  $\gamma_1(t)$ -vel és  $\gamma_2(s)$ -sel a két görbe paraméterezését ( $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  függvényeket),  $G_1(t)$ -vel ill.  $G_2(s)$ -sel pedig a képeiket, melyeket  $z'=f(z)$  csinál belőlük:

Két görbe a  $\mathbb{C}$  síkon:  $\gamma_1(t)$ ,  $\gamma_2(s)$ , A  $z'=f(z)$  leképezéssel kapott kép-görbék:  $G_1(t) = f(\gamma_1(t))$ ,  $G_2(s) = f(\gamma_2(s))$ .

Az  $f$  az egész  $\mathbb{C}$  síkot eltranszformálja: ő a kapcsolat az eredeti  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  és a kép-görbéket megadó  $G_1$ ,  $G_2$  között.  $\gamma_1$  és  $\gamma_2$  metszik egymást: van olyan  $t_0$  és  $s_0$ , amikre igaz, hogy  $\gamma_1(t_0)=\gamma_2(s_0)$ . Az érintővektorok mint komplex számok a paraméter szerinti deriválással adódnak:

A görbéink érintői a metszéspontban:  $\dot{\gamma}_1(t_0)$ ,  $\dot{\gamma}_2(s_0)$ , A képei-ké pedig:  $\dot{G}_1(t_0) = \frac{d}{dt}f(\gamma_1(t_0)) = f'(\gamma_1(t_0)) \cdot \dot{\gamma}_1(t_0)$ ,  $\dot{G}_2(s_0) = \frac{d}{dt}f(\gamma_2(s_0)) = f'(\gamma_2(s_0)) \cdot \dot{\gamma}_2(s_0)$ .

Itt használtuk ki, hogy  $f$  differenciálható: közvetett függvényt deriválhattunk. Továbbmenve:

$$\text{Mivel } \gamma_1(t_0)=\gamma_2(s_0), \text{ az előzőekből adódik, hogy } \Rightarrow \frac{\dot{\gamma}_1(t_0)}{\dot{\gamma}_2(s_0)} = \frac{\dot{G}_1(t_0)}{\dot{G}_2(s_0)}. \tag{2.15}$$

Kigondolhatjuk, hogy (értelemszerű jelöléssel) ha  $z = ae^{i\varphi}$  és  $w = be^{i\chi}$ , akkor  $z/w = a/b \cdot e^{i(\varphi-\chi)}$ , azaz két komplex szám hányadosának argumentuma éppen a számok *bezárt szöge*. Az előző (2.15) eredmény tehát azt jelenti, hogy az érintővektorok *tényleg* ugyanakkora szöget zárnak be itt és ott.

Az, hogy  $f' \neq 0$ , ahol a görbék futnak (azaz  $f$  legalább azon a tartományon nem konstans függvény), ott kellett, hogy  $\dot{G}_1$  és  $\dot{G}_2$  ne lehessenek nullák; úgy értelmetlen lenne a  $\dot{G}_1/\dot{G}_2$  hányados. Ha egy tartományon  $f'=0$ , azaz innen  $f$  mindent ugyanoda képez, nyilván nem igaz a szögtartás.

<sup>26</sup>A szakasz korábbi részeiben ábrázolt függvények is ilyenek tehát. Mondanunk sem kell, hogy a szögtartásból nem következik, hogy egy ilyen transzformáció geometriailag „egyszerű”: láttuk, hogy változatos alakú görbéket vihet át másfajta görbékbe; a szögtartás csak és kizárólag egy adott metszéspontban „mért” szögre vonatkozik.

• A differenciálható leképezések szögtartását tudva visszanézve még nyilvánvalóbb, hogy a  $z^*$ ,  $\operatorname{Re} z$ ,  $\operatorname{Im} z$ ,  $|z|$  függvények nem lehetnek differenciálhatók. A komplex konjugálás minden bezárt szöveget  $-1$ -szeresére cserél, a többi pedig mindent a valós tengelybe képez: biztos nem lehet igaz ezekre a függvényekre, hogy két görbe képe változatlan szögben metszi egymást. Továbbmenve az is nyilvánvaló, hogy akármilyen  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvény, aminek a képhalmaza egydimenziós részhalmaz (mint pl.  $|z|$ -re,  $\operatorname{Re} z$ -re,  $\operatorname{Im} z$ -re a valós tengely), az nem lehet komplex differenciálható függvény.

## 2.4. Laplace-egyenlet, $U$ és $V$ harmonikus pár, „varázssformula”

• Sok alapvető fizikai törvény van, amiből az származtatható, hogy a szereplő fizikai mennyiségre mint skalármezőre teljesül a *Laplace-egyenlet*. Ugye a  $\Delta$  Laplace-operátor egy  $\Psi(\mathbf{r})$  skalármezőre hathat, és  $\Delta\Psi \equiv \operatorname{div}(\operatorname{grad} \Psi) = \partial_x^2\Psi + \partial_y^2\Psi + \partial_z^2\Psi$ . Most olyan esetekkel foglalkozunk, amikor  $\Psi$  csak két változótól,  $x$ -től és  $y$ -től függ: vagy mert eleve kétváltozós függvény szerepel a fizikai problémában, vagy mert a szereplő függvény eredendően háromváltozós lenne, de a kitűzött feladatnak a harmadik,  $z$ -vel jelölt tengely mentén való eltolásra vett szimmetriája miatt tudhatjuk, hogy  $\Psi(x, y)$  függés van csak,  $\Psi$  nem függ  $z$ -től (és így  $\partial_z$  deriváltjai nullák). Ilyenkor érvényes tehát a

$$\text{Kétdimenziós Laplace-egyenlet:} \quad \Delta\Psi \equiv \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = 0. \quad (2.16)$$

Néhány kiragadott fizikai **példa**, amelyből ilyen Laplace-egyenletre jutunk (most indoklás nélkül):

1. Zárt síkgörbe alakú drótkeretben kifeszülő szappanhártya is sík; ha a keretet a harmadik irányban kicsit deformáljuk, a hártya alakja is módosul: a (kis) függőleges kitérést mint az  $x, y$  függvényét az határozza meg, hogy ő a kétdimenziós Laplace-egyenletnek tesz eleget.
  2. Ha homogén hővezető (de hőt nem termelő) test határán ismert a hőmérséklet-eloszlás, és az időben állandó, akkor a test *belsejében* a  $T(\mathbf{r})$  hőmérséklet-eloszlásra Laplace-egyenlet vonatkozik. Ha az elrendezés  $z$  irányban eltolásszimmetrikus (mint pl. egy igen hosszú házfal és alapozás), akkor kétdimenziós a Laplace-egyenlet is.
  3. Összenyomhatatlan ideális folyadék sebességmezője sokszor egy skalármező gradienseként származtatható, és ez a skalármező (a *sebességpotenciál*) Laplace-egyenletnek tesz eleget. Kétdimenziós Laplace-egyenlettel tehát „kétdimenziós”, azaz a harmadik irányban nem folyó és attól nem függő sebességmezőjű folyadékaramlásokat tanulmányozhatunk.
  4. Elektrosztatikában az  $\mathbf{E}$  elektromos mező a(z elektromos) potenciál gradiense, a potenciálra Laplace-egyenlet vonatkozik ott, ahol vákuum van. Hasonlóan, ahol nem folyik áram, ott lokálisan a  $\mathbf{B}$  mágneses mező az ún. mágneses skalárpotenciálnak a gradiense; utóbbira is Laplace-egyenlet érvényes. „Kétdimenziós” a feladat, ha pl. az elrendezés harmadik irányban igen hosszú.
- Érdekes feladat tehát olyan függvényeket keresni, amelyek kielégítik a kétdimenziós Laplace-egyenletet (és még más, a vizsgált problémára jellemző feltételeket). A komplex differenciálható függvények egy alkalmazási lehetőséget kapnak itt.

**Állítás:** ha  $f(z) \equiv U(x, y) + iV(x, y)$  differenciálható egy tartományon, akkor

$$\Delta U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad \text{és} \quad \Delta V \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \quad (2.17)$$

• Szavakban: minden komplex **differenciálható** függvény **valós része** is és **képzetes része** is olyan függvény, ami automatikusan **kielégíti** a kétdimenziós Laplace-egyenletet.

Mielőtt ezt bebizonyítjuk, nézzünk példákat! Első lépésként ellenőrizzük, hogy valóban helyesen írtuk fel  $U(x, y)$ -t és  $V(x, y)$ -t a példáinkban (ld. a korábbi 2.2. szakasz eleji táblázatát is), és hogy leülepedjen, konkrétan a deriváltakat is számítsuk ki magunk is (csak részeredményeket írok le).

$$\begin{aligned} \text{Első példa: } f(z) = z^2 &\Rightarrow U(x, y) = x^2 - y^2, & V(x, y) = 2xy. \\ \Rightarrow \begin{aligned} \partial_x U &= 2x, & \partial_x^2 U &= 2, \\ \partial_y U &= -2y, & \partial_y^2 U &= -2, \end{aligned} &\Rightarrow \begin{aligned} &\text{tényleg teljesül, hogy} \\ \Delta U &= \partial_x^2 U + \partial_y^2 U = 0, \end{aligned} \\ \Rightarrow \begin{aligned} \partial_x V &= 2y, & \partial_x^2 V &= 0, \\ \partial_y V &= 2x, & \partial_y^2 V &= 0, \end{aligned} &\Rightarrow \begin{aligned} &\text{tényleg teljesül, hogy} \\ \Delta V &= \partial_x^2 V + \partial_y^2 V = 0. \end{aligned} \end{aligned}$$

A **második példa** bonyolultabb;  $U$  és  $V$  kifejezéseit érdemes most a kétszeres szögek függvényeire vonatkozó képletekkel egyszerűsíteni ahhoz képest, mint ahogy pl. a korábbi táblázatban szerepel. Ez a deriválás elvégzését is könnyíti (persze erre tipikusan utólag jön rá az ember...):

$$f(z) = \operatorname{tg} z \Rightarrow U(x, y) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x) + \operatorname{ch}(2y)}, \quad V(x, y) = \frac{\operatorname{sh}(2y)}{\cos(2x) + \operatorname{ch}(2y)}.$$

Számítsuk ki itt is a deriváltakat; már némi egyszerűsítéssel a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} \partial_x U &= 2 \frac{1 + \cos(2x) \operatorname{ch}(2y)}{[\cos(2x) + \operatorname{ch}(2y)]^2}, & \partial_x^2 U &= 4 \frac{\sin(2x) [\cos(2x) \operatorname{ch}(2y) + 2 - \operatorname{ch}^2(2y)]}{[\cos(2x) + \operatorname{ch}(2y)]^3}, \\ \partial_y U &= \frac{-2 \sin(2x) \operatorname{sh}(2y)}{[\cos(2x) + \operatorname{ch}(2y)]^2}, & \partial_y^2 U &= -4 \frac{\sin(2x) [\cos(2x) \operatorname{ch}(2y) + \operatorname{ch}^2(2y) - 2 \operatorname{sh}^2(2y)]}{[\cos(2x) + \operatorname{ch}(2y)]^3}, \\ \partial_x V &= \frac{2 \sin(2x) \operatorname{sh}(2y)}{[\cos(2x) + \operatorname{ch}(2y)]^2}, & \partial_x^2 V &= 4 \frac{\operatorname{sh}(2y) [\cos^2(2x) + 2 \sin^2(2x) + \cos(2x) \operatorname{ch}(2y)]}{[\cos(2x) + \operatorname{ch}(2y)]^3}, \\ \partial_y V &= 2 \frac{1 + \cos(2x) \operatorname{ch}(2y)}{[\cos(2x) + \operatorname{ch}(2y)]^2}, & \partial_y^2 V &= 4 \frac{\operatorname{sh}(2y) [\cos^2(2x) - \cos(2x) \operatorname{ch}(2y) - 2]}{[\cos(2x) + \operatorname{ch}(2y)]^3}. \end{aligned}$$

Némi további egyszerűsítéssel ezekből már leellenőrizhetjük, hogy valóban

$$\text{itt is teljesül, hogy } \Delta U = \partial_x^2 U + \partial_y^2 U = 0 \quad \text{és} \quad \Delta V = \partial_x^2 V + \partial_y^2 V = 0.$$

• Ehhez képest a fenti általános állításunk **bizonyítása** viszonylag egyszerű: következik a Cauchy-Riemann-egyenletekből (és a vegyes parciális deriváltak szimmetriájából, azaz a Young-tételből). Az  $f$  differenciálható, így fennállnak a Cauchy-Riemann-egyenletek, amik miatt:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\partial_x^2 U + \partial_y^2 U}} &= \partial_x(\partial_x U) + \partial_y(\partial_y U) = \partial_x(\partial_y V) + \partial_y(-\partial_x V) = \partial_x \partial_y V - \partial_y \partial_x V = \underline{\underline{0}}, \\ \text{és } \underline{\underline{\partial_x^2 V + \partial_y^2 V}} &= \partial_x(\partial_x V) + \partial_y(\partial_y V) = \partial_x(-\partial_y U) + \partial_y(\partial_x U) = -\partial_x \partial_y U + \partial_y \partial_x U = \underline{\underline{0}}. \end{aligned}$$

*Megjegyzés:* mostani szintünkön külön fel kell(ene) tenni, hogy  $f$  (és így  $U$  is és  $V$  is) kétszer is differenciálható. Valós,  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvények ugye lehetnek olyanok, hogy valahányszor differenciálhatók, de többször már nem. Nagy eredmény lesz majd, hogy ha egy *komplex*,  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvény egy nyílt halmazon differenciálható, akkor akárhányszor (*végtelenszer*) is differenciálható. Emiatt tehát a többszöri differenciálhatóság követelménye lényegében nem is plusz megszorítás most.

• Összegezve néhány eddigi eredményt: differenciálható  $f(z)$  valós és képzetes részeire,  $U(x, y)$ -ra és  $V(x, y)$ -re fennállnak a Cauchy-Riemann-egyenletek, és ebből következőleg  $U$  és  $V$  szintvonalai ortogonálisak, valamint  $\Delta U = 0$  és  $\Delta V = 0$ . Az olyan függvényeket, amelyekre  $\Delta \Psi = 0$ , azaz meg-

oldják a Laplace-egyenletet, ilyen kontextusban **harmonikus függvényeknek** hívják. Ezzel az elnevezéssel tehát differenciálható  $f(z)$  függvény valós és képzetes részei harmonikus függvények.

Újabb elnevezéssel élve: az olyan  $U(x, y)$  és  $V(x, y)$  elég sima függvényeket, amelyek kielégítik a Cauchy-Riemann-egyenleteket, **harmonikus pár** névvel illetjük.<sup>27</sup> Pontosán ilyen  $U$  és  $V$  esetén tehát az  $f(x+iy) \equiv U(x, y) + iV(x, y)$  függvény komplex értelemben differenciálható.

*Megjegyzés:* ezt az „elég sima” kitéfelt (mely a végtelenszer differenciálhatóságnál kicsit többet jelent) később, a 4.1. szakaszban pontosítjuk; most ne aggódjunk túlzottan, „általában” teljesül.

- Adott  $U$  és  $V$  függvényekről deriválásokkal kiderül, hogy harmonikus párt alkotnak-e. Érdeke-  
sebb, hogy ha adott *egy darab* elég sima  $U(x, y)$  függvény, akkor van-e  $U$ -nak harmonikus párja?  
Persze ellenőriznünk kell, hogy  $\Delta U = 0$  teljesül; különben semmi nincs.

$$\begin{aligned} \text{Az } U(x, y) \text{ függvényre} & \quad \text{létezik-e olyan} & \quad \partial_y V = \partial_x U, \quad \partial_x V = -\partial_y U, \\ \Delta U \equiv \partial_x^2 U + \partial_y^2 U = 0. & \quad \Rightarrow & \quad V(x, y), \text{ amire} & \quad (\text{és ekkor ugye } \Delta V = 0 \text{ is igaz?}) \end{aligned} \quad (2.18)$$

A megkövetelt Cauchy-Riemann-egyenletek most a keresett  $V(x, y)$  függvényre vonatkozó differenciálegyenletek; a jobb oldaluk adott  $U$  esetén adott függvények. Amit felírtunk, az a  $V$ -re vonatkozóan egy alábbi típusú differenciálegyenlet: keressük az olyan  $V(x, y)$ -t, amire

$$\partial_x V = F(x, y), \quad \text{és} \quad \partial_y V = G(x, y), \quad \text{ahol } F \text{ és } G \text{ adott függvények.} \quad (2.19)$$

- Az, hogy a  $V$ -re vonatkozólag igaz a Young-tétel, miszerint  $\partial_x(\partial_y V) = \partial_y(\partial_x V)$ , a megadható  $F$  és  $G$  függvényekre jelent feltételt: teljesülnie kell, hogy  $\partial_x G = \partial_y F$ . Ez a  $V$ -re vonatkozó (2.19) differenciálegyenlet *konzisztenciafeltétele*: ha nem teljesül, biztos nincs megoldás.

A most vizsgált (2.18) esetünkben  $F$  és  $G$  nem akármilyen, hanem  $F = \partial_y U$  és  $G = -\partial_x U$ . A feltétel ebből az lesz, hogy  $\partial_x^2 U = -\partial_y^2 U$ , vagyis  $\partial_x^2 U + \partial_y^2 U = 0$  teljesüljön. Körbeértünk: az, hogy  $\Delta U = 0$ , a keresett harmonikus párra vonatkozó egyenlet konzisztenciafeltétele!

Ha teljesül a konzisztenciafeltétel, találhatunk megoldást primitívfüggvény-kereséssel (ami technikailag lehet probléma, de elvi szempontból működik). Leírom a lépéseket (integrálással jelölve a primitív függvény megkeresését); a példákból talán jobban leülepszik majd. Tehát:

$$\begin{aligned} \text{Kezdjük a } \partial_x \text{ deriválttal:} & & \Rightarrow & & V(x, y) = \int_{x_0}^x d\xi F(\xi, y) + \chi(y), \\ \text{a feltétel: } \partial_x V = F(x, y) & & & & \end{aligned}$$

vagyis először az  $x$  változóban keresünk primitív függvényt (az integráljel alatti változót ildomos volt más betűvel jelölni). Az  $x_0$  alsó határ és az  $x$  szempontjából additív konstans  $\chi(y)$  egyváltozós függvény most még tetszőleges. A másik ( $\partial_y$ -ra vonatkozó) feltételbe már ezt az alakot írjuk:

$$\begin{aligned} \partial_y V = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \int_{x_0}^x d\xi F(\xi, y) + \chi(y) \right] & \stackrel{!}{=} G(x, y) & \stackrel{1}{\Rightarrow} & \int_{x_0}^x d\xi \partial_y F(\xi, y) + \chi'(y) \stackrel{!}{=} G(x, y) & \stackrel{2}{\Rightarrow} \\ & \stackrel{2}{\Rightarrow} & \int_{x_0}^x d\xi \partial_x G(\xi, y) + \chi'(y) \stackrel{!}{=} G(x, y) & \Rightarrow & G(x, y) - G(x_0, y) + \chi'(y) \stackrel{!}{=} G(x, y). \end{aligned}$$

<sup>27</sup>Olyan értelemben, hogy ők harmonikus függvények, és még kellemesen „párban” is vannak. A mondott következményekből (harmonikusság és ortogonalitás) nem következne rögtön visszafelé, hogy  $U$  és  $V$  a Cauchy-Riemann-egyenleteket is kielégítik; mindazonáltal mégis igaz egy „fordított” állítás: ha az  $U$  és  $V$  függvényekre  $\Delta U = 0$ ,  $\Delta V = 0$  és  $\nabla U \cdot \nabla V = 0$ , akkor igaz az is, hogy  $\partial_x U = \alpha \partial_y V$  és  $\partial_y U = -\alpha \partial_x V$ , ahol  $\alpha$  konstans szám. Ezek *majdnem* a Cauchy-Riemann-egyenletek; ha itt pl.  $V$ -t elosztjuk  $\alpha$ -val, olyan függvényt kapunk, ami  $U$ -val együtt már „igazi” harmonikus pár. *Lényegében* tehát a merőleges szintvonalak és a harmonikusság elegendő feltétel, hogy harmonikus párról beszélhessünk. Az említett állítás bizonyítása nem olyan bonyolult, mint amilyen hosszadalmas (a különféle deriváltakat kell kombinálni és afelé evezni, hogy tényleg kihasználhassuk az összes feltételt); most nem írom le.

Itt az 1. lépésben „bederiváltunk” az integráljel mögé (láttunk már ilyet), a 2. lépésben kihasználtuk a konzisztenciafeltételt ( $F$  és  $G$  deriváltjai között), amivel végül ebben az alakban deriváltat integrálhattunk  $x$  szerint, és látjuk, hogy ha  $\chi$ -t jól választjuk, tényleg teljesülhet a feltételünk:

Ha most  $\chi(y)$  olyan, akkor készen vagyunk: meg- *Tényleg kellett a konzisztenciafeltétel teljesülése!*  
 hogy  $\chi'(y) = G(x_0, y)$ , kaptuk a keresett  $V(x, y)$ -t.

Egyszerűbb esetekben lehet, hogy a lépéseket tömörebben áthidalhatjuk, kevesebb lépésben „ráérezve” a részeredményekre és/vagy a keresett  $V$  függvényre.<sup>28</sup>

- Nézzünk példákat harmonikus pár keresésére (mindegyik már látott példákat „követ”):

**1.példa:**  $U(x, y) = x^2(x+3) - 3y^2(x+1)$ , keressünk  $V(x, y)$  harmonikus párt!

Első lépés kiszámolni a deriváltakat. *Ellenőrizzünk mindent*, csak az eredményeket írom le:

$$\begin{aligned}\partial_x U &= 3x^2 + 6x - 3y^2, & \partial_x^2 U &= 6(x+1), \\ \partial_y U &= -6y(x+1), & \partial_y^2 U &= -6(x+1).\end{aligned}$$

Először is: értelmes a feladat, mert a megadott  $U$ -ra tényleg  $\Delta U = \partial_x^2 U + \partial_y^2 U = 0$ , ahogy kell. Következőnek felírjuk a keresett  $V$ -re vonatkozó (Cauchy-Riemann-féle) differenciálegyenleteket:

$$V = ?, \quad \text{amire} \quad \begin{aligned}\partial_x V &= -\partial_y U, & \text{azaz most} & \quad \partial_x V = 6xy + 6y, \\ \partial_y V &= \partial_x U, & \text{konkrétan:} & \quad \partial_y V = 3x^2 + 6x - 3y^2.\end{aligned}$$

Az első egyenletből ( $x$ -ben primitív függvényt keresve) kiderül, hogy itt  $V$  csak ilyen alakú lehet:

$$\begin{aligned}\partial_x V = 6xy + 6y & \Rightarrow V(x, y) = 3x^2 y + 6xy + \chi(y), & \text{a második egyenletbe helyettesítve:} \\ \partial_y V = 3x^2 + 6x + \chi'(y) & \stackrel{!}{=} 3x^2 + 6x - 3y^2 & \Rightarrow \chi'(y) = -3y^2 & \Rightarrow \chi(y) = -y^3 + K.\end{aligned}$$

Itt nyilvánult meg, hogy a feladat konzisztens: a  $\chi(y)$ -ra kapott feltételből  $x$  kiesett, tényleg csak  $y$ -t tartalmazó rész maradt, azaz létezhetett megfelelő  $\chi(y)$  függvény. Így viszont készen vagyunk:

$$U(x, y) = x^2(x+3) - 3y^2(x+1) \quad \text{harmonikus párja} \quad \underline{\underline{V(x, y) = 3x^2 y + 6xy - y^3 + K.}}$$

- A következő példa sem sokkal bonyolultabb; ismerős is lehet már valahonnan:

**2.példa:**  $U(x, y) = \sin x \operatorname{ch} y$ , harmonikus pár  $V(x, y) = ?$

Most már nagyobb léptekben haladva a megoldással:

$$\begin{aligned}\partial_x U &= \cos x \operatorname{ch} y, & \partial_x^2 U &= -\sin x \operatorname{ch} y, & \Rightarrow & \text{tényleg teljesül, hogy} \\ \partial_y U &= \sin x \operatorname{sh} y, & \partial_y^2 U &= \sin x \operatorname{ch} y & \Rightarrow & \Delta U = \partial_x^2 U + \partial_y^2 U = 0.\end{aligned}$$

A  $V$ -re vonatkozó differenciálegyenlet(ek)ből a következőkre jutunk:

$$\begin{aligned}\partial_x V = -\partial_y U & \Rightarrow \partial_x V = -\sin x \operatorname{sh} y & \Rightarrow & V(x, y) = \cos x \operatorname{sh} y + \chi(y), \\ \partial_y V = \partial_x U & \Rightarrow \partial_y (\cos x \operatorname{sh} y + \chi(y)) = \cos x \operatorname{ch} y & \Rightarrow & \chi'(y) = 0 & \Rightarrow & \chi(y) = K.\end{aligned}$$

<sup>28</sup>Ugyanilyen jellegű feladat volt az (ld. a Vektorszámítás jegyzet 12.3. szakaszát), amikor térbeli  $\Phi(\mathbf{r})$  skalármezőt kerestünk abból, hogy a gradiense adott  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  vektormező:  $\partial_x \Phi = v_x$ ,  $\partial_y \Phi = v_y$ ,  $\partial_z \Phi = v_z$ , ahol  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  adott függvények. Utóbbiakra is volt ilyenkor konzisztenciafeltétel (és az is a Young-tételén múlt): hogy  $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$  azonosan teljesüljön. Ez pont ugyanolyan típusú feltétel volt, mint a mostani problémánkban. A megoldás menete (ott három, itt kettő megadott parciális deriváltból visszafejteni a függvényt), illetve az, ahogyan a konzisztenciafeltételen múlt, hogy ezt tényleg megtehetjük, szintén lényegében azonos a két problémában.

Egy (le nem írt) lépésben persze a konzisztenciafeltétel jó gyümölcsöt termett. Az eredmény tehát:

$$U(x, y) = \sin x \operatorname{ch} y \quad \text{harmonikus párja:} \quad \underline{\underline{V(x, y) = \cos x \operatorname{sh} y + K.}}$$

• Az előző példában az  $f(z) = \sin z$  komplex függvény valós részéből kiindulva lényegében a képzetes részt találtuk meg. Utolsó példaként közelítsünk így rá az  $\frac{1}{z}$  függvényre (melynek valós ill. képzetes részeit már korábban is kiszámoltuk is és használtuk is az ábrázoláshoz; ld. ott):

**3.példa:**  $U(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ , keressünk harmonikus párt!

A menet ugyanaz, mint eddig. Először elvégezzük a deriválásokat (*csináljuk is meg!*):

$$\partial_x U = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \partial_y U = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \partial_x^2 U = \frac{2x(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3}, \quad \partial_y^2 U = \frac{2x(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3}.$$

Láthatólag igaz, hogy  $\partial_x^2 U + \partial_y^2 U = 0$ ; értelmes a feladat. A  $V$ -re vonatkozó egyik egyenletből:

$$\partial_x V = -\partial_y U \quad \Rightarrow \quad \partial_x V = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad \Rightarrow \quad V(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} + \chi(y).$$

Visszahelyettesíthetjük ezt a kapott eredményt a másik egyenletbe. Arra jutunk, hogy

$$\partial_y V = \partial_x U \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \chi'(y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \Rightarrow \quad \chi(y) = K \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{V(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} + K.}}$$

Az eredmény tényleg az lett, amit az  $\frac{1}{z}$  valós és képzetes része alapján vártunk.<sup>29</sup>

Gyakorlásképpen mindhárom példában ellenőrizhetjük még egyszer, hogy teljesülnek a Cauchy-Riemann-egyenletek, és külön azt is, hogy a kapott  $V(x, y)$ -ekre tényleg teljesül, hogy  $\Delta V = 0$ .

• Általánosan és példákkal is láttuk, hogy ha egy (elég sima)  $U(x, y)$  függvényre  $\Delta U = 0$ , akkor megtalálhatjuk az ő  $V(x, y)$  harmonikus párját. Ilyen  $U$  és  $V$  egy komplex differenciálható függvény valós és képzetes részei; kérdés lehet, hogy ezt az  $f(z)$ -t rekonstruálhatjuk-e  $U$ -ból és  $V$ -ből. Egyszerű esetekben (ismerve egyszerű függvényeket) *kitalálhatjuk*: a fenti 2. és 3. példában ezek (említettük is) a  $\sin z$  és az  $\frac{1}{z}$  voltak, az 1. példában pedig visszatekintve beláthatjuk, hogy a  $z^3 + 3z^2$  függvény valós részéből találtuk ki a képzetes részt harmonikuspár-kereséssel.<sup>30</sup>

Általános képletet is adhatunk, emlékezve, hogy mi a kapcsolat  $z$  és az  $x, y$  koordináták között:

$$\begin{aligned} \text{Ha } z = x + iy \quad &\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}(z + z^*) \quad \text{és} \quad y = \frac{1}{2i}(z - z^*), \quad \text{és ebből} \\ f(z) = U(x, y) + iV(x, y) \quad &\Rightarrow \quad f(z) = U\left(\frac{z+z^*}{2}, \frac{z-z^*}{2i}\right) + iV\left(\frac{z+z^*}{2}, \frac{z-z^*}{2i}\right), \end{aligned} \quad (2.20)$$

azaz  $U$  és  $V$  konkrét alakjaiba  $x$  és  $y$  ilyen kifejezéseit beírva megkapjuk az  $f(z)$ -t mint  $z$  függvényét. Megjeshet a  $z^*$  megjelenése, amiről ugye tudjuk, hogy nagyon is *nem* differenciálható; mindenesetre az eredményként várt  $f(z)$ -ről *tudjuk, hogy* differenciálható: emiatt (pláne ha sikerül az  $U$ -vel és  $V$ -vel utolsónak írt kifejezést algebrailag egyszerűsíteni) biztosak lehetünk, hogy  $f(z)$  tényleg csak  $z$  függvényeként fog adódni,  $z^*$ -tól ilyen értelemben nem fog függeni.

<sup>29</sup>Megjegyzés: az itt  $\partial_x V$ -re felírt egyenletből  $V$ -t  $x$  szerinti primitívfüggvény-kereséssel megkapni persze akkor a legegyszerűbb, ha (ismerve az  $\frac{1}{z}$  függvényt) *tudjuk előre*, hogy mi is a keresett  $V(x, y)$ . Ha nem tudjuk előre, akkor egy változócserevel számíthatunk ki az  $\int dx$  határozatlan integrált:  $x \rightarrow t$  úgy, hogy  $x = y\sqrt{t}$ . Próbáljuk ki!

<sup>30</sup>Mindig  $U$ -val jelöltük a kiinduló függvényt, és  $V$ -vel a keresett harmonikus párt; a „harmonikuspár-ság” nem teljesen „szimmetrikus” fogalom, de „majdnem” az a következő értelemben: ha  $f(z)$  valós része  $U$  és képzetes része  $V$ , akkor az  $i \cdot f(z)$  függvény valós része  $-V$ , képzetes része  $U$ , így ha  $U$  és  $V$  harmonikus pár, akkor  $-V$  és  $U$  is az.



- Nézzük meg így az előző példákat (ezeknél sikerülni fog egyszerűsíteni):

A fenti 1.példában:

$$U(x, y) = x^3 + 3x^2 - 3xy^2 - 3y^2,$$

$$V(x, y) = 3x^2y + 6xy - y^3.$$

a megfelelő komplex függvény:  $f(z) = U\left(\frac{z+z^*}{2}, \frac{z-z^*}{2i}\right) + iV\left(\frac{z+z^*}{2}, \frac{z-z^*}{2i}\right)$ ,  
 behelyettesítve majd elvégezve, amit el lehet:

$$\begin{aligned} \underline{f(z)} &= \left[\frac{z+z^*}{2}\right]^3 + 3\left[\frac{z+z^*}{2}\right]^2 - 3\left[\frac{z+z^*}{2}\right]\left[\frac{z-z^*}{2i}\right]^2 - 3\left[\frac{z-z^*}{2i}\right]^2 + \\ &+ i\left\{3\left[\frac{z+z^*}{2}\right]^2\left[\frac{z-z^*}{2i}\right] + 6\left[\frac{z+z^*}{2}\right]\left[\frac{z-z^*}{2i}\right] - \left[\frac{z-z^*}{2i}\right]^3\right\} = \dots = \underline{\underline{z^3 + 3z^2}}. \end{aligned}$$

Kijön az elvárt (és utólag visszafelé is ellenőrizhető) eredmény; akkor értékeljük ezt, ha most az összes közbülső lépést (a lényegét, azaz a le nem írt egyszerűsítéseket is) megcsináltuk. Tovább:

A fenti 2.példában:  $U(x, y) = \sin x \operatorname{ch} y$ ,  $V(x, y) = \cos x \operatorname{sh} y$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{ a komplex függvény: } \underline{f(z)} &= U\left(\frac{z+z^*}{2}, \frac{z-z^*}{2i}\right) + iV\left(\frac{z+z^*}{2}, \frac{z-z^*}{2i}\right) = \\ &= \sin\left(\frac{z+z^*}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{z-z^*}{2i}\right) + i \cos\left(\frac{z+z^*}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{z-z^*}{2i}\right) = \dots = \underline{\underline{\sin z}}. \end{aligned}$$

Itt a  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{sh}$ ,  $\operatorname{ch}$  (komplexben is minden további nélkül igaz) addíciós tételeit és az  $i$ -szeres argumentum szabályait (mint pl.  $\sin(iz) = i \operatorname{sh} z$ ) kellett nyakló nélkül alkalmazni.

Az utolsó fenti példát is megcsinálhatjuk: most kicsit trükkösebben rövidebben írrom le:

A fenti 3.példában:  $U(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ ,  $V(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$ .

$$\Rightarrow \underline{f(z)} = U(x, y) + iV(x, y) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{z^*}{zz^*} = \underline{\underline{\frac{1}{z}}}.$$

Mindhárom fenti példában megkaptuk tehát az  $U$ -ból és a  $V$ -ből a megfelelő  $f(z)$  függvényt, „konstruktívan”, azaz a felírt, általánosnak mondható (2.20) módszert követve is.

\* \* \*

- Az eddigiek alapján ha egy  $U(x, y)$  elég sima függvényre  $\Delta U=0$ , akkor úgy kaphatjuk meg azt az  $f(z)$  komplex differenciálható függvényt, aminek  $U$  a valós része, hogy a Cauchy-Riemann-egyenletekkel megkeressük a harmonikus párt, majd ezekből (felismeréssel vagy a (2.20) recepttel) kihozzuk  $f(z)$ -t. Ez általánosan ismert módszer, és más matematikai trükkök „előzménye” is.

Létezik egy kevésbé ismert képlet, ami az  $U(x, y)$ -ből egy lépésben megadja a megfelelő  $f(z)$ -t, átugorva azt, hogy (differenciálegyenlet-megoldással, azaz lényegében integrálással) megkeressék  $V(x, y)$ -t. *Nem tudom*, hogy honnan származik ez a képlet, vagy hogy lenne valamilyen általánosan ismert neve; a budapesti (ELTE fizika BSc) folklórban „varázsformula” néven fut pár éve.<sup>31</sup>

<sup>31</sup>Ez a formula tehát egy kis „plusz”: a nemzetközi mezőnyben is kevesen ismerik. Előre nem látható esetben esetleg előnyt jelenthet tudni; számomra pedig különösen kedves. Egy egyszerűsített ( $z_0=0$ -t vevő, ld. rögtön) verziót hallottam Dávid Gyulától (ő pedig saját bevallása szerint egy 1950-es években írt orosz hidrodinamikakönyvben olvasta),  $z_0 \neq 0$ -ra sikerült általánosítanom és bebizonyítanom. Később olvastam egy másfajta bizonyítást a következő cikkben: W. T. Shaw, SIAM Review **46** 4, 717 (2004). Ez a szerző sem ad eligazítást afelől, hogy eredetileg honnan, kitől származik a formula; hogy a témáról 2004-ben cikket írtak (pedig a komplex függvénytan a Cauchy-Riemann-egyenletekkel együtt jó 200 éve művelt terület), mutatja, hogy mennyire nem általánosan ismert dologról van szó.

• Legyen  $U(x, y)$  legalábbis egy nyílt halmazon elég sima, és legyen  $\Delta U=0$ . Vegyünk egy olyan  $x_0, y_0$  pontot, ahol  $U$  értelmes; ekkor igaz a

**Varázssformula:** az az  $f(z)$ , amire  $\operatorname{Re} f(z) = U(x, y)$ , a következő:

$$f(z) = 2 \cdot U\left(x = \frac{z+z_0^*}{2}, y = \frac{z-z_0^*}{2i}\right) - U(x_0, y_0), \quad \text{ahol} \quad \begin{aligned} z &\equiv x+iy, \\ z_0 &\equiv x_0+iy_0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ezzel a képlettel tehát olyan  $f(z)$  komplex differenciálható függvényt kapunk, aminek valós része  $U(x, y)$ , a szokásos  $f(x+iy) \equiv U(x, y) + iV(x, y)$  értelemben. Ahogy jelöltük,  $U$ -ba az  $x$  és az  $y$  változók helyére a  $z$ -t és  $z_0$ -t tartalmazó megadott kifejezéseket kell írni: egyszerű esetekben ez nem okoz gondot (mint az alábbi példákban sem); az elvi kérdést (hogyan mit is jelent, hogy eredendően valós változók helyére komplex változókat írunk) később tisztázzuk.

• Érdekes, hogy a formula minden elég sima  $U(x, y)$  esetén megad egy  $f(z)$  komplex differenciálható függvényt; akkor is, ha  $\Delta U \neq 0$ . Ekkor viszont a kapott  $f(z)$  valós része *nem* a megadott  $U(x, y)$ ; az  $f(z)$  valós részéről ugyanis *tudjuk*, hogy kielégíti a Laplace-egyenletet. Megnézve tehát, hogy a kapott  $f(z)$  valós része tényleg a kiindulási  $U(x, y)$  függvény-e, ellenőrizhetjük azt is, hogy az  $U$  kielégíti-e a Laplace-egyenletet: ha  $f(z)$ -ből visszkapjuk  $U$ -t, akkor biztosak lehetünk ebben, úgy, hogy közben egyetlen deriválást sem kellett elvégezni.

Az is érdekes, hogy *bármilyen*  $z_0$ -t, azaz  $x_0, y_0$  helyet választhatunk (ahol  $U$  sima). Sok esetben (ha  $U(x, y)$  jól viselkedik az  $x=0, y=0$  helyen, ami gyorsan végiggondolható) a legegyszerűbb a  $z_0=0$  választás. Az állítás része az is, hogy különböző  $z_0$ -kat választva a mostani szempontból *lényegében* ugyanazt az  $f(z)$ -t kapjuk: a különbség mindössze az lesz, hogy a kapott  $f(z)$  *képzetes részéhez*, azaz a szokásos jelölésünkkel:  $V(x, y)$ -hoz a  $z_0$  választásától függően más és más *konstans érték* adódik. Ez konzisztens azzal, hogy egy adott  $U$  függvény harmonikus párja,  $V$  egyértelmű; legfeljebb egy konstans adhatunk hozzá úgy, hogy a „harmonikuspárosa” ne romoljon el.

• Nézzünk meg (részben már látott) példákat! Elsőként tegyük fel, hogy nem hallottunk még az  $f(z) = z^2$  függvény valós és képzetes részéről, viszont élénk rakják az alábbi  $U(x, y)$ -t:

$$U(x, y) = x^2 - y^2, \quad \text{minek a valós része ez?}$$

A fenti varázssformula itt a következőt nyújtja:

$$\begin{aligned} \underline{f(z)} &= 2 \cdot \left\{ \left[ \frac{z+z_0^*}{2} \right]^2 - \left[ \frac{z-z_0^*}{2i} \right]^2 \right\} - (x_0^2 - y_0^2) = 2 \cdot \left[ \frac{z^2}{4} + \frac{zz_0^*}{2} + \frac{z_0^{*2}}{4} + \frac{z^2}{4} - \frac{zz_0^*}{2} + \frac{z_0^{*2}}{4} \right] - x_0^2 + y_0^2 = \\ &= z^2 + z_0^{*2} - x_0^2 + y_0^2 = z^2 + (x_0 - iy_0)^2 - x_0^2 + y_0^2 = \underline{\underline{z^2 - 2ix_0y_0}}. \end{aligned}$$

Tényleg működik: megkaptuk az  $f(z) = z^2$ -et, *amiről most újra ellenőrizni kellene, hogy a valós része tényleg a kiindulási  $U$* ; ezt már sokszor megcsináltuk mostanra, úgyhogy nem húzom vele az időt. Így viszont az is világos, hogy noha most nem ellenőriztük, hogy  $\Delta U=0$ , erről is tudhatjuk, hogy biztos teljesül. Másrészt a  $z_0$ , azaz az  $x_0, y_0$  választása (ami most teljesen tetszőleges, mivel a kiinduló  $U(x, y)$  függvényünk *mindenhol* elég sima) tényleg csak az eredményül kapott  $f(z)$  képzetes részében jelentkezik, és ahhoz is csak egy konstans ad. Persze most akár rögtön  $z_0=0$ -t is választhattunk volna; úgy még egyszerűbb lett volna gyorsan rekonstruálni  $f(z)=z^2$ -et.

• Az  $f(z)=z$  és az  $f(z)=iz$  függvényekre is működik a varázssformula: visszkapjuk őket az  $U=x$  ill. az  $U=y$  valós részekből. Ezek egyszerűek, de segítenek memorizálni, hogy  $z_0^*$  előjelei hogyan

szerepelnek: kipróbálhatjuk, hogy ha másképp lennének, már ezeken a függvényeken elbuknánk.

- Egy összetettebb példa (amiről rögtön elárulom, hogy az  $f(z) = \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$  valós része):

$$U(x, y) = \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y} \quad ??? \quad (2.22)$$

Mit kapunk a varázsformulával? Itt *szinte* akárhol lehet  $z_0 \equiv x_0 + iy_0$ , de pl.  $z_0=0$ -ba biztos nem: az  $U(x, y)$  ott nem értelmes. Általános  $z_0$ -t beírva kell haladunk. Érdekes itt is a kétszeres szögek képleteit ( $\sin(2X)=2 \sin X \cos X$ ,  $\cos(2X)=1-2\sin^2 X$ ,  $\operatorname{ch}(2X)=1+2\operatorname{sh}^2 X$ ) használni:

$$U(x, y) = \frac{\sin(2x)}{\operatorname{ch}(2y) - \cos(2x)} \Rightarrow f(z) = \frac{2 \sin(z+z_0^*)}{\operatorname{ch}\left(\frac{z-z_0^*}{i}\right) - \cos(z+z_0^*)} - \frac{\sin(2x_0)}{\operatorname{ch}(2y_0) - \cos(2x_0)}.$$

Kész; azért ha van szépérzékünk, érdemes tovább alakítani, hogy kicsit kibontva elénk álljon a függvény, másrészt hogy megnyugodjunk afelől, hogy a  $z_0$  különféle választásai tényleg csak a képzetes részt tolják el konstanssal. Nyilván az addíciós tételeket kell használni, közben esetleg ízlésesen visszatérni a  $z_0 \equiv x_0 + iy_0$ -lal az  $x_0$  és  $y_0$  használatára. Próbáljuk meg! Tömören leírok egy lehetséges utat (ami nyilván már a többedik próbálkozásom...). Először az első törtet alakítva:

$$\begin{aligned} \frac{2 \sin(z+z_0^*)}{\operatorname{ch}\left(\frac{z-z_0^*}{i}\right) - \cos(z+z_0^*)} &= 2 \frac{\sin z \cos z_0^* + \cos z \sin z_0^*}{\cos(z-z_0^*) - \cos(z+z_0^*)} = \frac{\sin z \cos z_0^* + \cos z \sin z_0^*}{\sin z \sin z_0^*} = \frac{\cos z}{\sin z} + \frac{\cos z_0^*}{\sin z_0^*} = \\ &= \operatorname{ctg} z + \frac{\cos(x_0 - iy_0)}{\sin(x_0 - iy_0)} = \operatorname{ctg} z + \frac{\cos x_0 \operatorname{ch} y_0 + i \sin x_0 \operatorname{sh} y_0}{\sin x_0 \operatorname{ch} y_0 - i \cos x_0 \operatorname{sh} y_0} = \operatorname{ctg} z + \frac{\cos x_0 \sin x_0 + i \operatorname{sh} y_0 \operatorname{ch} y_0}{\sin^2 x_0 + \operatorname{sh}^2 y_0} = \\ &= \operatorname{ctg} z + \frac{\sin(2x_0)}{\operatorname{ch}(2y_0) - \cos(2x_0)} + i \frac{\operatorname{sh}(2y_0)}{\operatorname{ch}(2y_0) - \cos(2x_0)}. \end{aligned}$$

Visszavéve a fenti kifejezés második tört tagját is, a varázsformula itt azt adta, hogy

$$U(x, y) = \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y} \Rightarrow f(z) = \operatorname{ctg} z + i \frac{\operatorname{sh}(2y_0)}{\operatorname{ch}(2y_0) - \cos(2x_0)}, \quad (2.23)$$

azaz  $z_0$  választása itt is tényleg csak a képzetes részbe szól bele egy konstans erejéig. Megint: gömb-érzékfejlesztés végett érdemes újra konkrétan ellenőrizni, hogy a kapott  $\operatorname{ctg} z$  valós része tényleg a kiindulási  $U(x, y)$ ; ezzel egyúttal ugye azt is belátjuk (egyetlen deriválás nélkül), hogy  $\Delta U=0$ .

- A példák alapján elhithetjük, hogy működik a varázsformula. **Most nem bizonyítjuk be:** noha a szükséges algebrai lépések nem nehezek, és elérhető közelségben lennének, van a komplex függvények lelkivilágának egy aprónak tűnő részlete (ld. nemsokára, „analitikusság” hívószóval), ami mintegy habarcsként összeragasztja majd a bizonyítást. A C.3. függelékben visszatérünk ide.

## 2.5. Jellemző függvénytípusok és elnevezések

A kétdimenziós Laplace-egyenletre megoldásokat kínáló alkalmazásokhoz (is) visszatérünk majd, amikor *kicsit* többet tudunk már általában komplex differenciálható függvényekről. A mostani szakasz mindenfajta további függvényvizsgálathoz való kiegészítő bevezetés.

- A „függvény” általános fogalmába a hozzárendelési utasítás („képlet”) mellett beletartozik az érkezési halmaz és az indulási halmaz megadása is. Legtöbbször (ha nem kötjük ki másképp) úgy értünk egy függvényt, hogy mindenhol értelmezett, ahol az őt megadó képlet értelmes.

Láttuk már, és messzemenően fogjuk is, hogy váratlan erősebb következményekkel jár, ha egy

komplex függvény differenciálható.<sup>32</sup> A következő fejezetekben (is) olyan tételek jönnek majd, ahol a kikötés mindig az, hogy a vizsgált  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvény egy nyílt halmazon, azaz egy „kövérkés tartományon” legyen differenciálható. Az ábrákon is sokszor kijelölünk egy krumpli alakú ilyen tartományt. A tipikus esetekben azonban a differenciálhatóság mintegy automatikusan teljesül a  $\mathbb{C}$  sík „legnagyobb részén”, kivéve esetleg pl. egy-két pontot vagy vonaldarabot. Ilyen „kisebb” részhalmozok megjelenése (ahol a függvényünk nem differenciálható) alaposan módosíthatja a levonható következtetéseket. Ezért tehát fontos lesz, hogy egy képlettel adott  $f(z)$  függvényről eldöntsük, hogy mi a „természetes” értelmezési tartománya, hol differenciálható (és hol *nem* az). Ebben a szakaszban ide való példákat és a függvények egyéb „globális” tulajdonságait vizsgáljuk.

- **Égészfüggvények** névre hallgatnak az olyan függvények, amelyek az *egész*  $\mathbb{C}$  komplex síkon (egy pontot sem kihagyva) mindenhol differenciálhatók. **Példák:** a konstans függvények, az  $f(z)=z$  identitás, az  $f(z)=z^2$ , sőt: minden polinom, továbbá az  $e^z$ , a  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $\operatorname{sh} z$ ,  $\operatorname{ch} z$ . Viszont pl. a  $\operatorname{tg} z$  *nem* egészfüggvény:  $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$ , és nem értelmes ott, ahol  $\cos z = 0$ . A valós  $\operatorname{tg} x$  grafikonjából is tudjuk, hogy ő a  $\cos$  zérushelyeiben, azaz  $\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ -ben nem értelmes. A valós  $\operatorname{th} x$  függvény valósban mindenhol értelmesnek tűnik, a  $\operatorname{th} z$  komplex függvény viszont szintén *nem* egészfüggvény:  $\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$ , és a  $\operatorname{ch} z$ -nek nagyon is vannak (tisztá képzetes) zérushelyei:  $i \cdot \left(\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi\right)$ .

- Érdekes állítások vonatkoznak egészfüggvényekre; az egyiket már most idehozzuk:

**Liouville tétele:** *Korlátos egészfüggvény konstans.*

Azaz ha egy  $f(z)$  egészfüggvényről tudjuk, hogy van olyan  $K \in \mathbb{R}_0^+$ , amivel (2.24)  
 $|f(z)| \leq K$  mindehol teljesül, akkor csakis  $f(z) = c$  konstans függvény lehet.

Természetesen ez nem igaz valós függvényekre: simán tudunk olyan nem konstans végtelenszer differenciálható  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt mondani (rajzolni), ami korlátos; ilyen pl. az  $f(x) = \operatorname{th} x$ .

- A Liouville-tételt később látjuk be; addig is megmutatjuk rá alapozva **az algebra alaptételének** egy közkén forgó **bizonyítását**. Tegyük fel, hogy a  $P(z)$  nem nulladfokú polinom sehol nem vesz fel nullát. Ekkor  $1/P(z)$  is egészfüggvény lenne. Tudjuk (ld. az 1.2. szakaszban is), hogy ha  $|z| \rightarrow \infty$  (akármilyen irányban menve  $z$ -vel), akkor  $|P(z)| \rightarrow \infty$ . Emiatt minden adott  $K \in \mathbb{R}^+$  számhoz van olyan  $R$  sugarú kör, hogy ha  $|z| > R$ , akkor már  $|1/P(z)| < K$ . Viszont  $1/P(z)$  folytonos, így az  $R$  sugarú zárt körlapon felveszi a maximumát. Ezeket összerakva  $1/P(z)$  korlátos egészfüggvény, azaz konstans lenne. Ellentmondásra jutottunk: tarthatatlan a feltevés, hogy  $P(z)$  sehol sem nulla.

Megjegyzés: *van sok* nem polinom egészfüggvény, aminek nincsen zérushelye (pl. az  $e^z$ ); zavaró lehet, hogy mintha a bizonyításunk nem is igazán használta volna ki, hogy  $P(z)$  polinom. *Egyetlen* dologhoz kellett a polinomság: hogy ha  $|z| \rightarrow \infty$ , akkor  $|P(z)| \rightarrow \infty$ . Később megvilágosodik, hogy ez a tulajdonság az egészfüggvények közül *kizárólag a polinomokra igaz*. Ellenben például az  $e^z$  függvényre: ha  $z \in \mathbb{R}$ , és  $z \rightarrow \infty$ , akkor  $|e^z| \rightarrow \infty$ , de ha  $z \rightarrow -\infty$ , akkor  $|e^z| \rightarrow 0$ .

<sup>32</sup>Komplex függvénytanban használják a „differenciálható” helyett szinte azonos értelemben a „**holomorf**” szót is. (Görögösen *holo*: „egészen”, *morf*: (szép)„alakú”). Az említett körülmény (hogy egy nyílt halmazon komplex differenciálható függvény sok egyebet is tud) lehet a külön elnevezés létjogosultsága. A „holomorf” jelzőbe beleértik, hogy egy nyílt halmazon is igaz a differenciálhatóság (amit mi eddig is szinte mindig kikötöttünk); hogy egy függvény egy nyílt tartományon holomorf, az pont ugyanazt jelenti, mint hogy differenciálható ott. Általában viszont a „holomorf” megjelölés még nem mondja meg, hogy a függvény közelebről milyen tartományon differenciálható. Az ezek okozta kétértelműségek miatt (is) a magam részéről nem igazán használom a „holomorf” szót; maradok a „(komplex) differenciálható” megjelölésnél, ahol a „komplex” előtag hozzámondása hívja be gondolatilag azt, hogy minden egyéb, a differenciálhatóságból következő kellemes tulajdonságot tud a függvény.

- Sok függvénynek ún. *izolált szingularitása*(*i*) van(nak) itt-ott; az alkalmazások szempontjából különösen fontos, hogy ezeket beazonosítsuk. (Később *osztályozzuk* is a lehetséges típusokat.)

Egy  $z_0 \in \mathbb{C}$  pont egy  $f(z)$  függvénynek **izolált szingularitása**, ha  $f(z)$  nem értelmes  $z_0$ -ban, de van egy (legalábbis nem nulla) (2.25) sugarú) körlap  $z_0$  körül, amin  $f(z)$  differenciálható ( $z_0$ -t kivéve).

Ha izolált (=„elszigetelt”) szingularitásra gyanakszunk, ellenőrizzük, hogy létezik a megkövetelt „kipontozott” körlap. Ez biztos igaz, ha *izolált* (egymástól véges távolságra lévő) pontokat kivéve a függvény differenciálható. Pl. az  $\frac{1}{z}$ -nek a  $z=0$  izolált szingularitása: a függvény mindenhol máshol differenciálható, egy (sőt most: akármilyen)  $z=0$  körüli kipontozott körlapon is.

- Némely  $f(z)$  függvénynek **vágása**(**i**) van(nak). Ezek olyan, két kijelölt perempont közötti sima (egyenes vagy görbe) vonalak, amelyek pontjaiban  $f$  nem differenciálható, de a vonalat tartalmazó nyílt halmazon (a vonalat kivéve) igen, és a vonal „belső” (azaz: nem a perem-)pontjaihoz  $z$ -vel a két oldal felől tartva  $f$ -nek és deriváltjainak értelmes véges határértékei vannak, melyek legalább valamelyik deriváltra különböznek a két oldal felől. Azt is megengedjük, hogy az egyik perempont a „végtelenben” legyen valamerre.<sup>33</sup> A vágások perempontjait (később megértendő okból) a függvény **elágazási pontjainak** hívjuk (angolul: *branch(ing) point*). Ezekben a függvény (és/vagy deriváltjai) tarthatnak véges vagy végtelen határértékhez, vagy lehet, hogy nincs határértékük (ha különböző „határértékeket” kapnánk különböző irányokból).

*Vigyázat!* egy elágazási pont (noha az illet is hívják „szingularitásnak”, „szinguláris pontnak”) a fentebbiek tükrében **nem izolált szingularitás**: *minden* köré rajzolt nemnulla sugarú körlapon átfut a vágás, így *nincs olyan körlap*, amin a függvény (a pontot kivéve) differenciálható lenne.

- A legalapvetőbb példa vágásos függvényre: az  $f(z) = \text{Ln } z$  logaritmusnak az  $\mathbb{R}_0^-$  negatív valós tengely vágása, hiszen emlékszünk:  $\text{Ln } z$  képzetes része  $+i\pi$ -hez ill.  $-i\pi$ -hez tart, ha  $z$ -vel felülről vagy alulról tartunk egy negatív valós számhoz. Itt a  $z=0$  elágazási pontban az  $|\text{Ln } z|$  végtelenhez tart (hiszen a valós rész,  $\ln |z|$  valós  $-\infty$ -hez tart itt).

A logaritmus vágása „öröklődik” az általános kitevőjű  $f(z) = z^\alpha$  hatványfüggvényre (ha  $\alpha \notin \mathbb{Z}$ , azaz nem valós egész szám), hiszen ugye  $z^\alpha \equiv \exp(\alpha \cdot \text{Ln } z)$ , így ennek is különböző lesz a határértéke az  $\mathbb{R}_0^-$  tengely fölöttről ill. alatról (hacsak  $\alpha$  nem egész szám). A  $z=0$  elágazási pontban ezen  $f(z)$  határértéke 0, ha  $\alpha > 0$ ; ha pedig  $\alpha < 0$ , akkor a  $|z^\alpha|$  abszolútérték  $\infty$ -hez tart itt.

- Nézzünk **példákat** (útmutatásokkal) különféle függvények „struktúrájára”! Szokjunk hozzá, hogy az effajta vizsgálatot minden előkerülő függvényre mindig elvégezzük. Jó szokás ábrákat is rajzolni.

1.  $f(z) = e^{1/z}$ .

Ez szinte mindenhol differenciálható; egyedül  $z=0$ -ban nem értelmes, így ez izolált szingularitás.

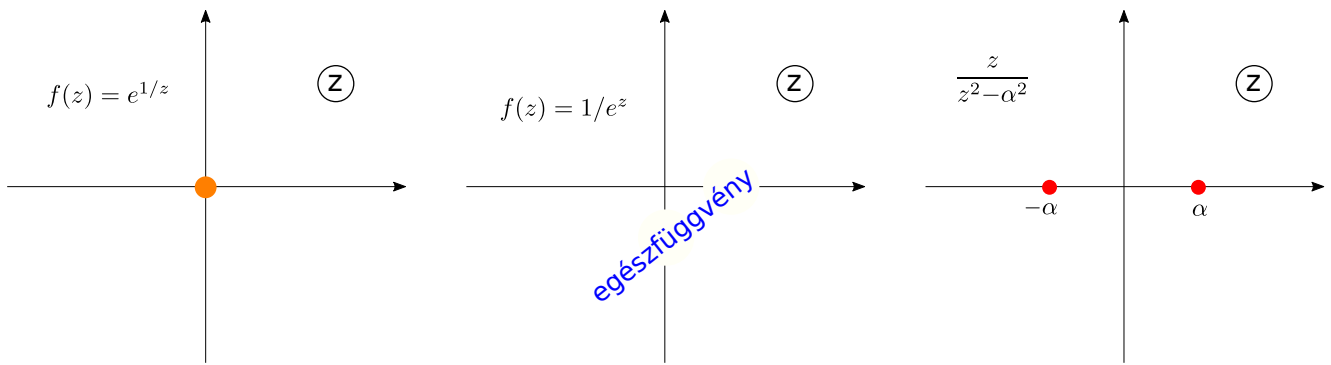
2.  $f(z) = 1/e^z$ .

Ez mindenhol differenciálható egészfüggvény;  $e^{-z}$ -vel egyenlő. (Ugye  $e^z$  sehol sem nulla.)

3.  $f(z) = \frac{z}{z^2 - \alpha^2}$ , ahol  $\alpha > 0$  pozitív valós szám.

Minden  $z$ -re differenciálható, kivéve  $\alpha$ -t és  $-\alpha$ -t (itt a nevező nulla): ezek izolált szingularitások.

<sup>33</sup>Ha *mindkét* perempont a végtelenben lenne, azaz egy vágás kettészelné a síkot, akkor az ilyen függvény ténylegesen „két darabból” állna: ekkor nem igazán lényeges, hogy öt *egy* jól definiált függvénynek tekintsük.



14. ábra. Példák függvények szingularitásaira, vágásaira.

4.  $f(z) = \frac{1}{z^2 + \beta^2}$ , ahol  $\beta > 0$  pozitív valós szám.

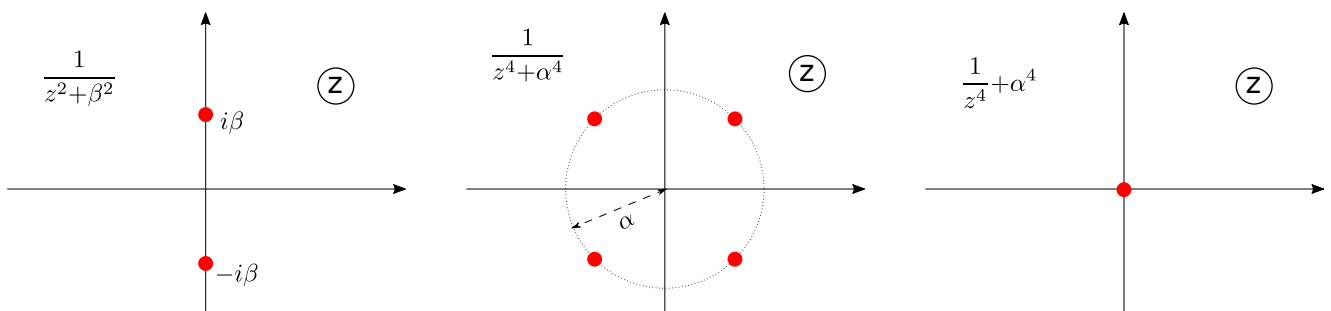
A valós számok között ugye a nevezőnek nincs zérushelye, komplex számok között viszont nagyon is van: két darab, a  $z = i\beta$  és a  $z = -i\beta$ . Ezek izolált szingularitások tehát.

5.  $f(z) = \frac{1}{z^4 + \alpha^4}$ , ahol itt is  $\alpha > 0$  pozitív valós.

A nevező a lényeg. Négy olyan  $z$  van, amire  $z^4 = -\alpha^4$ , az egyik  $\alpha \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}}$  (mert hogy  $(\frac{1+i}{\sqrt{2}})^2 = i$ , és  $i^2 = -1$ ), a másik három pedig ugye egy négyzet többi csúcsa. Ezek izolált szingularitások.

6.  $f(z) = \frac{1}{z^4} + \alpha^4$ .

Ne csapódjunk be: ez csak  $z=0$ -ban nem differenciálható; a  $z=0$  tehát izolált szingularitás.



15. ábra. Példák függvények szingularitásaira, vágásaira.

7.  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ .

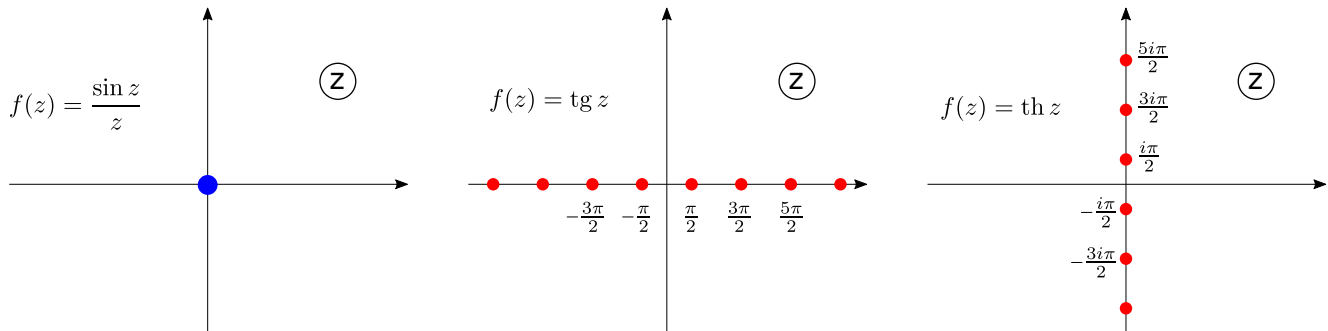
A  $\sin z$  egészfüggvény, a nevező csak  $z=0$ -ban nulla: itt is  $z=0$  az egy izolált szingularitás.

8.  $f(z) = \operatorname{tg} z$ .

Mivel  $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$ , ahol  $\cos z = 0$  (végtelen sok, de izolált, azaz egymástól legalább véges távolságra lévő pont, a  $\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$  valós számok, mások nem) ott lesznek a  $\operatorname{tg} z$ -nek szingularitásai, izoláltak.

9.  $f(z) = \operatorname{th} z$ .

Itt viszont  $\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = -i \operatorname{tg}(iz)$ : így is, úgy is kijön, hogy  $\operatorname{ch} z$  zérushelyeiben, azaz a tiszta képzetes  $\frac{i\pi}{2} + n \cdot i\pi$  számokban vannak szingularitások; izoláltak.



16. ábra. Példák függvények szingularitásaira, vágásaira.

10.  $f(z) = \frac{\operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2 + \alpha^2}$ , ahol  $\alpha > 0$  pozitív valós szám.

A nevezőből  $\pm i\alpha$  két izolált szingularitás (nem valósak). A számláló is tört:  $\operatorname{ctg}(\pi z) = \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$ , és  $\sin(\pi z)$  zérushelyei éppen a valós *egész számok*. Ezek is izolált szingularitások itt.

11.  $f(z) = \frac{1}{z^4 + 5z^2 + 4}$ .

A nevező szorzattá alakításával:  $z^4 + 5z^2 + 4 = (z^2 + 1)(z^2 + 4) = (z - i)(z + i)(z - 2i)(z + 2i)$ . Négy izolált szingularitás van tehát:  $i$ ,  $-i$ ,  $2i$  és  $-2i$ , máshol minden rendben.

12.  $f(z) = \operatorname{Ln} z$ .

Ez az alapvető vágásos függvény:  $z=0$  elágazási pont, vágás az  $\mathbb{R}_0^-$  tengelyen.

13.  $f(z) = \operatorname{Ln}(-z)$ .

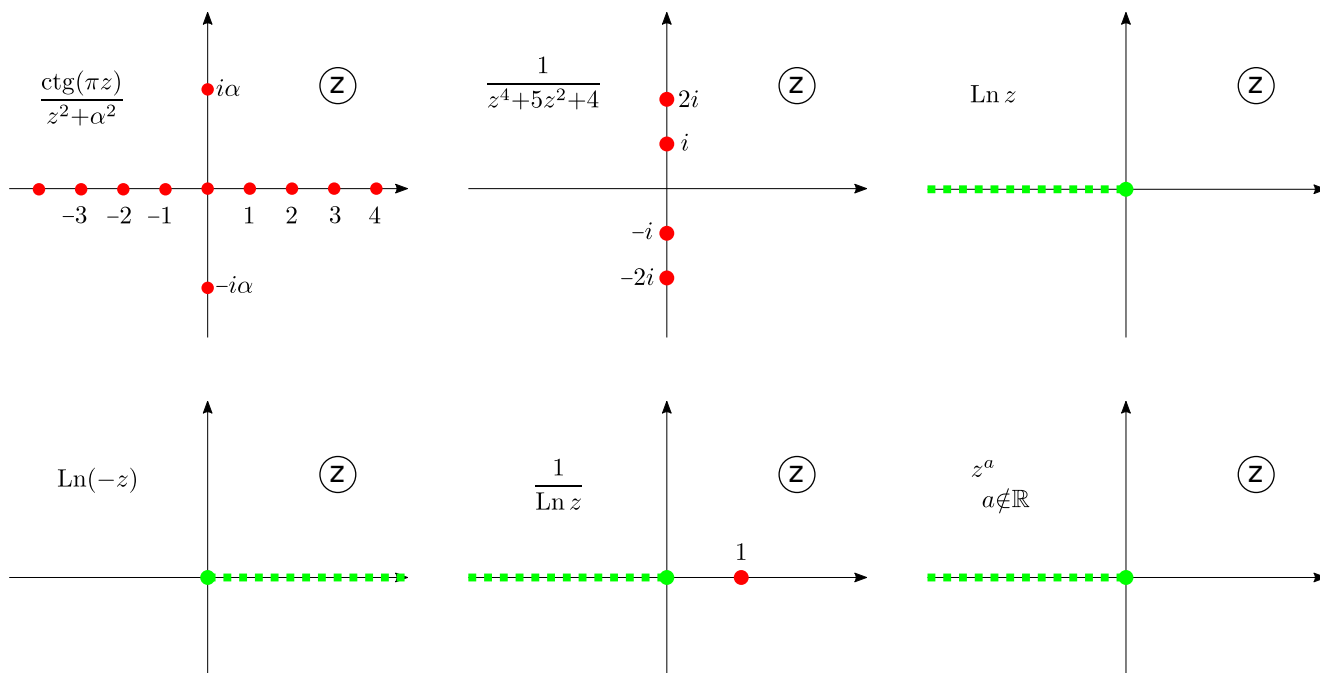
Az  $\operatorname{Ln}$  lényege vágások szempontjából, hogy ott okoz vágást, ahol a „hasába” nempozitív valós szám kerül. Emiatt most az  $\mathbb{R}_0^+$  pozitív valós tengelyen lesz vágás ( $z=0$  pedig elágazási pont).

14.  $f(z) = \frac{1}{\operatorname{Ln} z}$ .

Mint fent, vágás  $\mathbb{R}_0^-$ -on. Továbbá a nevező  $\operatorname{Ln} z$  nullává válhat: ez pontosan a  $z=1$ -ben lesz, ami (mivel a vágástól jó távol van) izolált szingularitás.

15.  $f(z) = z^a$ , ahol  $a$  akármilyen (akár komplex) szám.

Ha  $a \in \mathbb{N}_0^+$ , akkor ugye egészfüggvény. Ha  $a \in \mathbb{Z}^-$ , akkor  $z=0$ -ban izolált szingularitás van. Egyéb esetekben vágás fut az  $\mathbb{R}_0^-$  tengelyen. Érdekes most már egyszer tényleg konkrétan kigondolni, hogy ezen függvény határértéke ekkor (ha  $a \notin \mathbb{Z}$ ) tényleg más a vágás két oldalán.



17. ábra. Példák függvények szingularitásaira, vágásaira.

16.  $f(z) = (-z)^\alpha$ , ahol  $\alpha$  határozottan nem egész szám.

Ott van ugye vágás, ahol a *hatványalap*  $\mathbb{R}_0^-$  eleme; mint fent  $\text{Ln}(-z)$ -nél, (sőt abból következően) most is az  $\mathbb{R}_0^+$  pozitív valós tengelyen lesz vágás.

17.  $f(z) = \sqrt{z}$ .

Ez a  $z^\alpha$  általános kitevős hatványozás speciális esete, de külön kiemeljük. Vágás van  $\mathbb{R}_0^-$ -on (és mint korábban láttuk, a függvény onnan kiindulva kétfelé „félbehajtogat”).

18.  $f(z) = \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{z+1}{z-1}$ .

Milyen  $z$ -k esetén lesz nempozitív valós szám  $\text{Ln}$  hasában? Ha  $\frac{z+1}{z-1} = -r$ , és  $r \in \mathbb{R}_0^+$ , akkor (ellenőrizzük!)  $z = \frac{r-1}{r+1} = 1 - \frac{2}{r+1}$ . Az ilyen  $z$ -k tehát valósak: felrajzolva ezen  $z(r)$  függés grafikonját, és tudva, hogy az  $r \in \mathbb{R}_0^+$  eset kell, kiderül, hogy a vágás a  $z \in [-1, 1]$  valós szakaszon van. Közben afelől is megnyugszunk, hogy ennyi, semmi több: az  $\text{Ln}$  hasába végtelen kerül  $z=1$ -ben, de ez „már” az egyik elágazási pontunk, ill. nulla kerül  $z=-1$ -ben; ez pedig a másik.

19.  $f(z) = \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{1+z}{1-z}$ .

Az előző módszerrel adódik, hogy itt két vágás lesz: a  $]-\infty, -1[ \subset \mathbb{R}$  és az  $[1, \infty[ \subset \mathbb{R}$  félegyenesek.

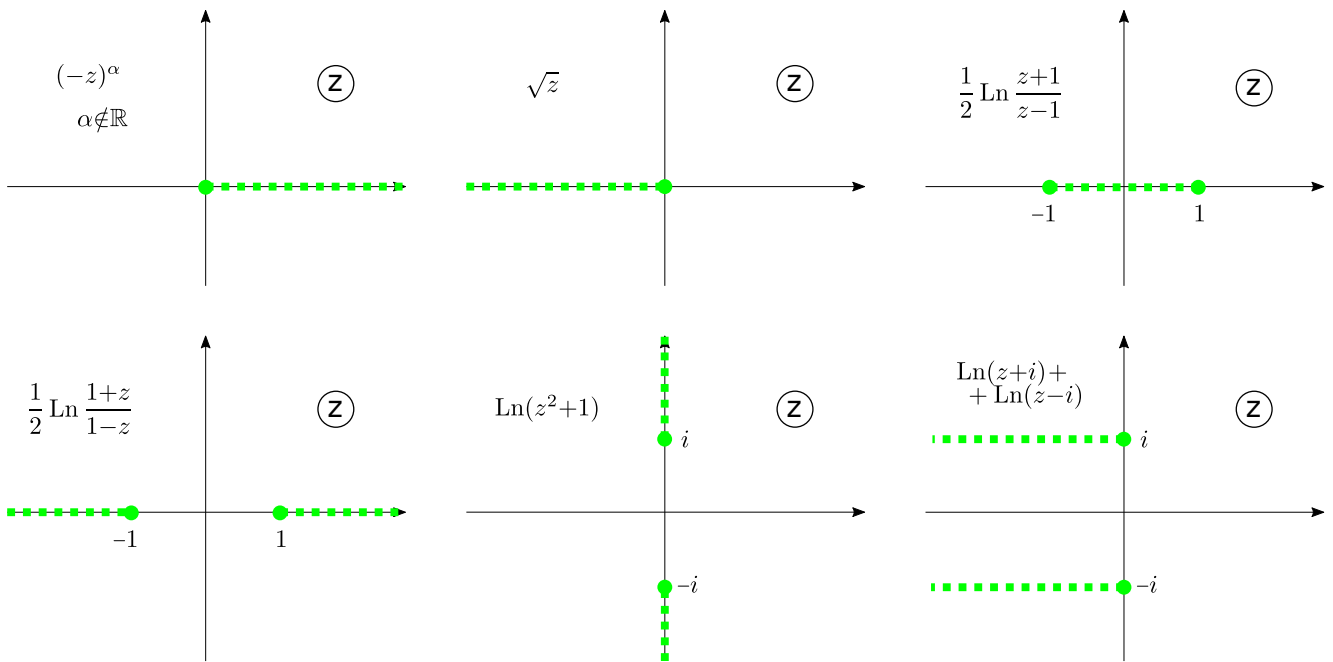
20.  $f(z) = \text{Ln}(z^2+1)$ .

A logaritmus hasában lévő  $z^2+1$  ott negatív valós, ahol  $z^2 \in ]-\infty, -1]$ : ez két vágást eredményez a képzetes tengelyen: érthető jelöléssel  $[i, i\infty[$  és  $[-i, -i\infty[$ ; gondoljuk végig!

21.  $f(z) = \text{Ln}(z+i) + \text{Ln}(z-i)$ .

Az egyik tag vágása  $-i$ -ből, a másik  $i$ -ből induló negatív valós irányú félegyenes. Érdekes lesz majd ezt összevetni az előzővel:  $(z+i)(z-i) = z^2+1$ , és rémlik, hogy  $\text{Ln}(AB) \stackrel{?}{=} \text{Ln} A + \text{Ln} B$ .





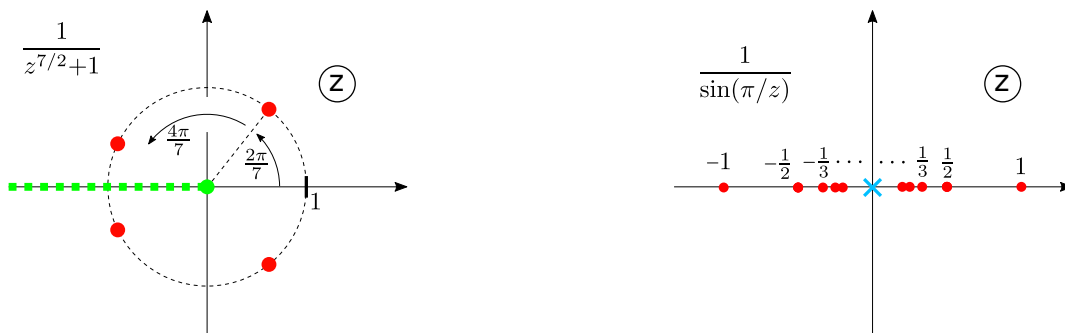
18. ábra. Példák függvények szingularitásaira, vágásaira.

22.  $f(z) = \frac{1}{z^{7/2}+1}$ .

Nehezebb. Vágás van a törtekitevő miatt  $\mathbb{R}_0^-$ -on, emellett pedig gondoljuk ki, hogy a nevező négy helyen is nulla (mind az egységkörtől); ezek izolált szingularitások.

23.  $f(z) = \frac{1}{\sin(\pi/z)}$ .

Elsőre ott van gond, ha a sin nullát vesz fel: ez itt akkor lesz, ha  $z = \frac{1}{n}$ , ahol  $n \in \mathbb{Z}$ , de persze  $n \neq 0$ . Akármekkora is  $n$ , az  $1/n$ -től az előző és a következő *nemnulla távolságra* van, úgyhogy ezek mind izolált szingularitások. Van viszont egy torlódási pontjuk, a  $z=0$ : itt sem értelmes ez az  $f(z)$ . Ez a  $z=0$  most „vad” szingularitás, *nem izolált*.<sup>34</sup> bármely kicsi kipontozott környezetében még mindig *végtelen sok* izolált szingularitás van, ahol  $f(z)$  nem differenciálható.



19. ábra. Példák függvények szingularitásaira, vágásaira.

<sup>34</sup>Nem is igazán találkozunk ilyen fajta szingularitásokkal; csak a példa kedvéért hoztam ide, hogy ilyen is van.

• Újabb kérdéskör, hogy egy adott  $f(z)$  függvény korlátos marad-e, vagy végtelenhez tart-e, ha  $z \rightarrow \infty$ -be tartunk bizonyos irányokban. Ismertnek vesszük a különféle **valós**,  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  **függvényekről** (növekedésről, csökkenésről) tudott „**hierarchiát**”; néhány fontos pont:

1. Valós nem nulladfokú  $P(x)$  polinomok  $x \rightarrow \pm\infty$ -re abszolútértékben végtelenhez tartanak.
2. Polinomok hányadosa  $\pm\infty$ -hez, nullához, vagy konstanshoz tart, ha  $x \rightarrow \pm\infty$ , ha a nevező fokszáma kisebb, egyforma, vagy nagyobb a számlálónál. Azt is mondjuk, hogy ha pl. ha a nevező kettővel magasabb fokú, mint a számláló, akkor a tört „ $1/x^2$  szerint” tart nullához: ez azt is jelenti, hogy őt még bármilyen kettőnél kisebb fokú polinommal beszorozva is olyan függvényt kapunk, ami nullához tart. Sokszor használjuk ezt a fajta fogalmazást; barátokozunk vele!
3. A valós logaritmus,  $\ln x$  végtelenhez tart  $x \rightarrow \infty$ -re, de *minden hatványfüggvényénél lassabban*: bármilyen (kicsi)  $\alpha > 0$  kitevőre  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^{-\alpha} \cdot \ln x) = 0$ .
4. Az exponenciális függvény *gyorsabban nő*  $x \rightarrow \infty$ -re, mint akármilyen hatványfüggvény vagy polinom: bármilyen (nagy)  $\beta > 0$  kitevőre és bármilyen (kicsi)  $\alpha > 0$  szorzóra  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^\beta \cdot e^{-\alpha x}) = 0$ , vagy másképp ugyanez:  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^{-\beta} \cdot e^{\alpha x}) = \infty$ .

Ezeket (is) tudva komplex függvényekre is levonhatunk következtetéseket. Néhány fontos példa:

1. Polinomokra és hányadosaikra ugyanaz érvényes akármilyen irányban való  $z \rightarrow \infty$  határesetben, mint valósban: a számláló és a nevező fokszámai határozzák meg, hogy egy tört 0-hoz, konstanshoz vagy  $\infty$ -hez tart-e (és hogy *milyen gyorsan*, azaz  $z$ -nek milyen hatványa szerint).
2. Az exponenciális függvényt érdemes külön megvizsgálni: ha  $z = x + iy$ , akkor  $|e^z| = |e^x e^{iy}| = e^x$ , azaz ha úgy tartunk  $z$ -vel végtelenbe, hogy  $z$  valós része  $+\infty$ -be tart, akkor  $|e^z|$  végtelenhez tart, ha  $x$  a  $-\infty$ -be tart, akkor pedig nullához. Ha  $x$  véges marad, ahogy  $z$ -vel (képzetes irányban „elszállva”) a végtelenbe megyünk, akkor  $|e^z|$  véges marad.
3. Sok alkalmazásban fontos a *képzetes exponenciális*: valós  $x$ -re az  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  függvény abszolútértéke 1, azaz korlátos  $x \rightarrow \pm\infty$  felé menve. Az  $e^{iz}$  függvény viszont, (ahol  $z$  lehet komplex), már tudhat ehhez képest extrákat. (Már most mondjuk, hogy sokszor még egy pl.  $\omega$ -val jelölt valós paraméterrel szorzott kitevővel kerül ez elő: amikor majd  $e^{i\omega z}$ -ket látunk, emlékezzünk vissza ide!...) Ha pl.  $z \equiv x + iy$ -nal úgy tartunk végtelenbe, hogy közben  $y \rightarrow +\infty$ , akkor  $|e^{iz}| = |e^{i(x+iy)}| = e^{-y}$  miatt  $e^{iz}$  nullához tart ( $y$ -ban nézve *exponenciálisan*). Ha viszont  $y \rightarrow -\infty$ , akkor  $|e^{iz}|$  ugyanemiat *exponenciálisan növekszik*. Az  $e^{-iz}$  függvényre fordítva fogalmazhatjuk meg ugyanezt; gyakorlásképpen mondjuk végig!
4. A  $\sin z$ ,  $\cos z$  függvények valós esetben,  $z \equiv x$ -re korlátosak, komplexben viszont abszolútértékben exponenciálisan nőnek, ha  $z$  képzetes részével *akár  $+\infty$ -hez, akár  $-\infty$ -hez tartunk*. Indoklás:  $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} + e^{-iz})$  és  $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ , és mindkettőnél a mondott esetben az egyik tag biztosan exponenciálisan nő, a másik pedig csökken (azaz „nem számít”). Másképp:  $|\sin(x+iy)|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y$ , és  $|\cos(x+iy)|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y$ , innen is látszik, amit mondtunk.
5. A tg és a th (noha periodikusan izolált szingularitásaik vannak, amiknél végtelenhez tartanak) olyanok, hogy ha a tengelytől eltávolodunk, *abszolútértékük* konstans 1-hez tart. Tényleg:

$$|\operatorname{tg}(x+iy)|^2 = \dots = \frac{\operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x}{\operatorname{sh}^2 y + \cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad \text{ha } y \rightarrow \infty, \text{ 1-hez tart.} \quad (2.26)$$

Ugye  $\operatorname{th}(z) = i \operatorname{tg}(-iz)$ , így  $90^\circ$ -kal elforgatva hasonlóakat mondhatunk th-ra is.

### 3. Vonalintegrálok

A komplex differenciálható függvények lelkivilágának megismerésében váratlanul hasznos lépcsőfok a *komplex vonalintegrál* bevezetése. Előbb azonban következzenek *két léktömögő közjáték*.

#### 3.1. Közjáték: görbefogalmak

• Néhány fogalmat pontosítunk, hogy nyugodtan alhassunk. Az alkalmazásokhoz ez kevésbé fontos; később is visszatérhetünk. *Görbe* az, aminek van differenciálható paraméterezése. Pontosabban:

Ha  $I \equiv ]t_a, t_b[ \subset \mathbb{R}$  nyílt intervallum (ahol  $t_a < t_b$ ; lehetnek  $\pm\infty$ -ek is), és egy  $p : I \rightarrow \mathbb{C}$  függvény (a *paraméterezés*)  $I$ -n folytonosan differenciálható, injektív, inverze folytonos, és  $\dot{p}(t) \neq 0$  sehol, akkor  $p$  képhalmaza **görbe** a  $\mathbb{C}$  síkon. (3.1)

A plusz követelmények sokszor kapásból teljesülnek, de elvileg függetlenek. Egy görbének sok paraméterezése lehet. Két paraméterezés,  $p_1(t)$  és  $p_2(t)$  *egyforma*, vagy *ellentétes irányítású*, ha a  $\dot{p}_1(t)$ -re és  $\dot{p}_2(t)$ -re  $\frac{\dot{p}_1(t)}{\dot{p}_2(t)}$  pozitív vagy negatív valós (a  $p_1$ -ből és a  $p_2$ -ből számolt érintővektorok ugyanabba vagy ellentétes irányba mutatnak) *az egész görbén*.<sup>35</sup> **Irányított** a görbe, ha az azonos irányítású paraméterezések egyik halmazát kitüntetjük mint *irányítást*.

• Kicsit módosítva a definíciót adódik a természetes következő fogalom:

Ha  $I \equiv [t_a, t_b]$  korlátos zárt intervallum,  $p(t) : I \rightarrow \mathbb{C}$  injektív,  $I$ -n folytonosan differenciálható ( $t_a$ -ban és  $t_b$ -ben féloldali deriváltakat tekintve), és  $\dot{p}(t) \neq 0$ , akkor  $p$  képhalmaza **peremes görbe**,  $p(t_a)$  és  $p(t_b)$  a *perempontjai*. (3.2)

Peremes görbék is *irányíthatók*. Nyilvánvaló(nak tűnik, és tényleg belátható), hogy a perempontok más paraméterezést véve is ugyanazok. Egyszerűbb esetekben görbe *lezártja* peremes görbe.<sup>36</sup>

Ha annyit lazítunk, hogy *szakaszos folytonos differenciálhatóságot* követelünk meg (azaz  $I$  néhány belső pontjában a bal- és a jobb oldali deriváltak különbözhetnek), a **szakaszos** görbe ill. peremes görbe fogalmihoz jutunk. (3.3)

Ezek is fontosak alkalmazásokban; ilyenek pl. a töröttvonalak. A *zárt* görbék vannak hátra:

Ha a szakaszos peremes görbe definíciójában  $p : [t_a, t_b] \rightarrow \mathbb{C}$  injektívsege helyett azt kötjük ki, hogy  $p$  a  $[t_a, t_b]$  zárt-nyílt intervallumon injektív legyen, és  $p(t_a) = p(t_b)$  legyen, **szakaszos zárt görbét** kapunk. Ha visszatérünk a folytonos (nem szakaszos) differenciálhatósághoz, és még  $\dot{p}(t_a) = \dot{p}(t_b)$ -t is megköveteljük, **zárt görbét** kapunk. (3.4)

Ilyenek a „hurkok”: az  $I$  intervallum végei ugyanoda képződnek. A „zárt görbe” szép sima, az összevarrásnál is, oda ezért kell a  $\dot{p}(t_a) = \dot{p}(t_b)$  követelmény, ami az érintővektorok (mint  $\dot{p}$  komplex számok) irányát összeilleszti. „Szakaszos zárt görbe” lehet tített-törött; az összevarrásnál is.

• A következőkben az egyszerűség kedvéért mindig „görbét” és „zárt görbét” mondunk; a tételek ilyenkor mindig a fenti definíció szerinti „szakaszos peremes görbékre” ill. „szakaszos zárt görbékre” vonatkoznak. Minden szakasznak van külön differenciálható paraméterezése; ha majd egy képlet-

<sup>35</sup>Itt be kell, és lehet is bizonyítani a definícióból, hogy más lehetőség nincs is; ezzel most nem foglalkozunk.

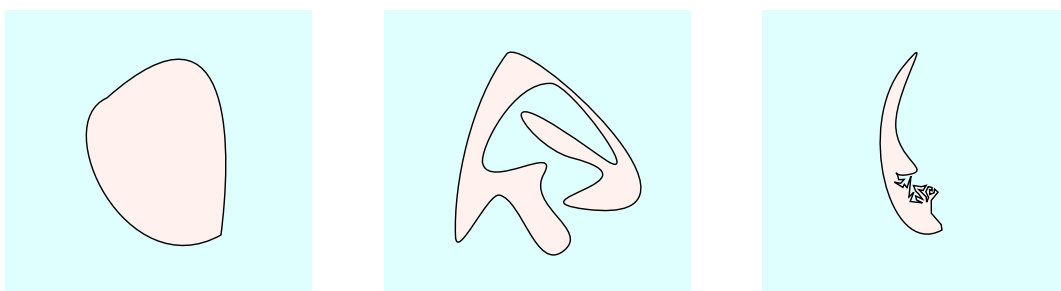
<sup>36</sup>A perempontokat hívják a görbe „határpontjainak” is. Nyílt/zárt halmazok tekintetében a „határpont” mást jelent; jó az egyértelmű „perem-” megjelölés. Ugyanígy: a *zárt halmaz* másképp értendő, mint a *zárt görbe*.

ben az egyszerűség kedvéért *egy* paraméterezést írunk egy görbéhez, akkor igaziból a szakaszokra vett külön paraméterezésekre és az azokra is vett összegre kell gondolni.

• Idézzük fel (pl. a „Vektorszámítás” jegyzet 12.2. szakaszából) az **egyszeresen összefüggőség** fogalmát:  $\mathbb{C}$  egy részhalmaza ilyen, ha bármilyen két benne fekvő zárt görbét folytonosan át lehet vinni egymásba. (Egy körlap egyszeresen összefüggő, egy körgyűrű nem az.) Igen fontos az ún.

**Jordan-Schönflies-tétel:** ha  $\gamma$  folytonos zárt görbe a síkon, akkor  $\gamma$  komplexenteterének két összefüggő komponense van. Az egyik (a görbén **kívüli** rész) (3.5) nem korlátos, a másik (a görbén **belüli** rész) korlátos és egyszeresen összefüggő.

Ez akkor is igaz, ha nem követelünk meg semmilyen differenciálhatóságot a paraméterezésről, hanem csak folytonosságot; a matematikusok természetesen foglalkoznak ezzel az esettel is.



20. ábra. Görbe belseje és külseje (azaz a Jordan-Schönflies-tétel illusztrálása).

Noha a tétel elsőre annyira nyilvánvalónak tűnik, hogy talán nem is érthető, mire a nagy felhajtás, és állandóan támaszkodunk rá (pl. amikor arról beszélünk majd, hogy egy zárt görbe milyen pontokat „kerül meg”; éppen a görbén belülieket); mégis, meglepően *nehéz bizonyítani*.<sup>37</sup>

• Zárt görbénél **pozitív** ( $\odot$ ) illetve **negatív** ( $\oslash$ ) **irányításról** szoktunk beszélni. Mindig azonosítsuk be ezeket; „szép kövér” görbékre könnyű, de összevissza kunkorodókra nehezebb lehet.

### 3.2. Közjáték: az integrálfogalom finomságai, becslések, Lebesgue-tétel

Valós ( $\mathbb{R}$  vagy részhalmazai) értelmezési tartományú függvények integrálásának részleteit vesszük elő, jobbra bizonyítások nélkül. Az *érkezési halmaz* itt  $\mathbb{R}$  vagy  $\mathbb{C}$ . Az  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvények az  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  függvények speciális esetei,  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  függvények valós ill. képzetes részei viszont  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvények.

• Előkerülhetett már, hogy az  $\int_a^b dx f(x)$  integrálfogalom többféleképpen bevezethető. A „darabolás, darabhossz függvényértékkel szorzása, összeadás majd finomítás” a **Riemann-féle** integrálfogalomra vezet. A **Lebesgue-féle** integrálfogalom máshogy indít: az integrandust *egyszerű lépcsős függvényekkel* (=véges sok fokozatú „dobogókkal”) megközelítve utóbbiak területeinek határértékét tekinti. A Lebesgue-integrálfogalom általánosabb: „szinte minden” (minden ún. *mérhető*) függvény<sup>38</sup> szóba jön abból a szempontból, hogy integrálható-e vagy nem. A Riemann-értelemben integ-

<sup>37</sup>Ugyanaz a helyzet, mint ami sokszor: egyszerű esetekre gondolva nyilvánvaló az állítás; mégis, ha egyszer általánosan bebizonyította valaki, akkor jó tudni, hogy tényleg mindig igaz, olyan (félíg-meddig „patologikus”) esetekben is, amikre esetleg nem is gondoltunk elsőre. (A fentebbi görbe-definíciók elég „szorosnak” tűnnek; mégis sok „vad” eset belefér, főleg a nem differenciálható de folytonos esetben: *fraktálok, pozitív területű görbék*, stb.)

<sup>38</sup>Tényleg „szinte minden” függvény mérhető: nem ilyenek *sosem* fordulnak elő a gyakorlatban (sőt, a létezésük sem magától értetődő). A következőkben mindig minden függvényhez hozzáértjük, hogy mérhető.

rálható függvények Lebesgue-értelemben is azok, és az integráljuk ugyanaz. Lebesgue-integrálban viszont pl. az értelmezési tartomány **nulla mértékű** (=„összhosszúságú”) részalmazai (pl. néhány pont halmaza) nem számítanak. Azt, hogy *majdnem mindenhol, majdnem minden  $x$ -re* teljesül (nie kell) valami(nek), úgy értjük, hogy „ahol nem teljesül, az legfeljebb egy nulla mértékű halmaz”.

• Az alábbi alapvető állítások az integrálra mint görbe alatti területre gondolva nyilvánvalónak tűnnek; igazak is, rendes bizonyításukhoz viszont rendesen fel kellene építeni az integrálfogalmat.

- 1.) Egy  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  vagy  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény pontosan akkor integrálható, ha  $|f|$  is az.
- 2.) Ha  $g$  integrálható, és  $|f| \leq |g|$  majdnem mindenhol, akkor  $|f|$  is (és  $f$  is) integrálható.
- 3.) Megfordítva: ha  $|f| \geq |g|$  majdnem mindenhol, és  $g$  nem integrálható, akkor  $f$  sem az.

Ezek jók, mert **abszolútértékekkel** sokszor könnyebb „bánni”, másrészt olyan függvényeket, amelyeknek egyszerű bizonyítani (vagy cáfolni) az integrálhatóságát, a  $g$  szerepében felül- ill. alulbecsléshez használva bonyolultabb függvények integrálhatóságát is eldönthetjük. Az a kitétel, hogy létezen integrálható  $|g|$ , ami nagyobb-egyenlő  $f$ -nél, latinosan így hangzik: létezen  $g$  integrálható **majoránsa**  $f$ -nek, igével: olyan integrálható  $g$ , ami **majorálja**  $f$ -et. (*Maior*=„nagyobb”).

*Megjegyzés:* a Lebesgue-integrálban az alapvető az egész  $\mathbb{R}$ -re vett integrálhatóság; véges szakaszokra vett integrálokhoz a szakaszon kívül „kinullázott” függvényeket kell elgondolni.

• Tisztázzuk az **improprius integrál** fogalmát! Riemann-értelemben minden olyan integrál *improprius* (=„nem valódi”), ahol egyik határ  $\pm\infty$ , vagy a függvény a határnál  $\infty$ -hez tart. Lebesgue-értelemben sok ilyen integrál „valódi”, és *állításként kimondható* két nyilvánvalónak tűnő dolog:

- 1.) Ha létezik  $\int_a^b f(x)dx$ , akkor minden  $a', b'$ -re, amire  $a < a' < b' < b$ , létezik  $\int_{a'}^{b'} f(x)dx$ , és ahogy várjuk:  $\lim_{a' \rightarrow a, b' \rightarrow b} \left( \int_{a'}^{b'} f(x)dx \right) = \int_a^b f(x)dx$ .
- 2.) Ha  $x \in ]a, b[$  esetén  $f(x) \geq 0$ , továbbá  $a < a' < b' < b$ , és legalábbis egy konkrét  $a' \rightarrow a$ ,  $b' \rightarrow b$  határátmenetet véve léteznek az  $\int_{a'}^{b'} f(x)dx$  integrálok és  $\lim_{a', b' \rightarrow a, b} \int_{a'}^{b'} f(x)dx$  határértékük, akkor létezik az  $\int_a^b f(x)dx$  integrál is, és egyenlő az előző határértékkel.

Az  $a, b$  határok lehetnek  $\pm\infty$ -k is, vagy lehet, hogy a (véges) határoknál  $f(x)$  végtelenhez tart. A második állítás érdekesebb: tipikusan az  $a$ -tól  $b$ -ig (pl.  $-\infty$ -tól  $\infty$ -ig) vett integrálhatóságot vizsgálunk úgy, hogy a véges  $[a', b']$  szakaszra (pl. Newton-Leibniz-formulával) kiszámolt integrálok ismerjük: *ha a függvényünk pozitív valós*, már levonhatjuk a kívánt következtetést az  $a' \rightarrow a$ ,  $b' \rightarrow b$  határértékből (pl. az  $\int_0^\infty$  integrálra abból, hogy létezik-e és mennyi a  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R$  határérték).

Ha nem igaz, hogy  $f \geq 0$ , akkor előfordulhat, hogy  $f$  (és  $|f|$ ) nem integrálható Lebesgue-értelemben sem  $\infty$ -ig, de létezik a  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x)dx$  határérték. Ekkor ezt  $f$  improprius integráljának hívjuk. Azért érdemes ezt külön kezelni, mert a „valódi”  $\pm\infty$  határú integrálokra erősebb állítások vonatkoznak, kellemesebben kezelhetők, mint a „csak” improprius értelemben létezők.<sup>39</sup>

Végül némely függvények impropriusan sem integrálhatók pl.  $\mathbb{R}$ -re, de véges  $[a, b]$ -re igen, és  $a$ -val és  $b$ -vel egy határozott módon tartva  $\pm\infty$ -hez létezik az integrál határértéke. **Példák:**

1.  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ . Itt  $f = \arctg'$ , így  $\int_a^b f(x)dx = \arctg a - \arctg b$ . Itt  $f > 0$ , és léteznek a határértékek:  $\lim_{b \rightarrow -\infty} \arctg b = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\lim_{a \rightarrow \infty} \arctg a = \frac{\pi}{2}$ .  $f$  tehát Lebesgue-értelemben *integrálható*  $-\infty$ -tól  $\infty$ -ig, és  $\pi$  az eredmény. Riemann-értelemben ezt az  $\int_{-\infty}^\infty f$  integrált impropriusnak mondják.

<sup>39</sup>Pl. az ún. Fubini-tétel, ami a kétdimenziós integrálra vonatkozik, csak „rendes” sorrendi integrálhatóság esetén működik, improprius integrálra semmi sem biztos többszörös (=„többdimenziós”) integrálhatóság szempontjából.

2. Legyen  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \chi_{[n, n+1]}(x)$ , ez 0-tól  $\infty$ -ig váltakozó előjelű,  $1/n$  módjára csökkenő „lépcsőkből” áll. Ismert (ld. a B.2. függeléket is), hogy az  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots$  sorösszeg véges érték (és  $\ln 2$ ): ebből kiindulva itt létezik  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x) dx$  (és  $\ln 2$ -vel egyenlő). Az abszolútértékre viszont nem, mivel az  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots$  sorösszeg nem létezik, végtelen. Emiatt ez az  $f$  Lebesgue-értelemben mondva is csak impropriusan integrálható 0-tól  $\infty$ -ig.
3. Legyen  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ ; erre  $\int_a^b f(x) dx = \ln \frac{1+a^2}{1+b^2}$ . Itt nem létezik (egyértelmű)  $a \rightarrow -\infty$ ,  $b \rightarrow \infty$  határérték: ez az  $f$  impropriusan sem integrálható  $\mathbb{R}$ -re. Azonban pl. a  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$  határérték létezik (és nulla); így érthetik, ha azt találják mondani, hogy itt  $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = 0$ .

- Az iméntiekkel gyakran találkozunk **hatványfüggvényekkel** kapcsolatban. Tudjuk, hogy

$$\begin{array}{l} \text{Ha } \alpha > 0 \text{ valós, és } f(x) = x^{-\alpha} \\ \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ hatványfüggvény:} \end{array} \Rightarrow \int_a^b dx x^{-\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} [b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}], & \text{ha } \alpha \neq 1, \\ \ln b - \ln a, & \text{ha } \alpha = 1, \end{cases} \quad (3.6)$$

véges  $0 < a < b < \infty$  határookra. Az  $a \rightarrow 0$ , ill. a  $b \rightarrow \infty$  határértékeket vizsgálva itt kiderül, hogy 1.) fix  $b$  esetén  $\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^b x^{-\alpha} dx$  pontosan akkor létezik, ha  $\alpha < 1$ , és 2.) fix  $a$  esetén  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b x^{-\alpha} dx$  pontosan akkor létezik, ha  $\alpha > 1$ . Mivel itt pozitív függvényről van szó, ezekből a határértékekből rögtön megállapíthatjuk a 0-tól véges  $b$ -ig, vagy véges  $a$ -tól  $\infty$ -ig való *integrálhatóságot* is. Összerakva:

$f(x) = 1/x$  nem integrálható sem 0-tól véges  $b$ -ig, sem véges  $a$ -tól  $\infty$ -ig.

Ha  $\alpha > 1$ ,  $x^{-\alpha}$  integrálható véges  $a$ -tól  $\infty$ -ig, de 0-tól véges  $b$ -ig nem. (Ilyen pl.  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ .)

Ha  $\alpha < 1$ ,  $x^{-\alpha}$  integrálható 0-tól véges  $b$ -ig, de véges  $a$ -tól  $\infty$ -ig nem. (Ilyen pl.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ .)

- Az előbb látottakból más függvények integrálhatóságára is sokszor következtethetünk (anélkül esetleg, hogy az integráljukat konkrétan kiszámolnánk). Gyakran előkerülő tipikus esetek:

1. Ha  $f$  egy  $x_0$  környékén „olyasmi, mint  $\frac{1}{x-x_0}$ ” (azaz  $f(x) \cdot (x-x_0)$  folytonos itt és  $x_0$ -ban véges határértékű), akkor  $|f|$ -et itt *alulbecsülhetjük* egy  $K$  konstanssal  $\frac{K}{|x-x_0|}$ -val, ami ezen a környéken nem integrálható, így  $f$  sem az. Példa: racionális törtfüggvény, ahol a nevezőnek  $x_0$  egyszeres zérushelye; pl. az  $\frac{1}{1-x^2}$ -nek  $x_0 = \pm 1$ . (Plusz előírásokkal lehet értelmezni ilyenkor is  $a < x_0 < b$ -re a  $\lim_{a, b \rightarrow x_0} (\int_A^a + \int_b^B) f(x) dx$ -et, de ez nem a „rendes” integrál; ld. későbbi tanulmányokban is).
2. Ha  $|f|$  egy véges szakaszon korlátos, máshol pedig fölülbecsülhető valamilyen  $K \cdot x^{-\alpha}$ -val, ahol  $\alpha > 1$ , akkor  $f$  integrálható  $\mathbb{R}$ -re. Pl.: racionális törtfüggvények, ahol a nevezőnek nincs valós zérushelye, és a nevező *legalább kettővel* magasabb fokú, mint a számláló (ekkor  $\alpha = 2$ -t választhatunk). Innen is leszűrhetjük  $\frac{1}{1+x^2}$  integrálhatóságát, még mielőtt tudnánk, hogy ő  $\arctg'$ .

- Általánosan is igen fontos dolog **integrálok becslése**. „Ösztönösen” tudhatjuk a következőket.

$$\begin{array}{l} \text{Állítás: ha } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ \text{függvény, akkor} \end{array} \quad \left| \int_a^b dx f(x) \right| \leq \int_a^b dx |f(x)| \leq |b-a| \cdot \max_{x \in [a,b]} |f(x)|. \quad (3.7)$$

Az első egyenlőtlenség akkor is érvényes, ha  $a$  vagy  $b$  nem véges, hanem  $\pm \infty$ ; a második csak véges szakaszra nem semmitmondó. Persze a függvény lehet valós értékű is. A Riemann-féle integrálfogalomban az indoklás lényege: összeg abszolútértéke legfeljebb az abszolútértékek összege, és nyilván mindegyik függvényérték abszolútértékét felülbecsülhetjük a legnagyobb ilyen értékkel:

$$\left| \sum_j \Delta x_j \cdot f(x_j) \right| \leq \sum_j |\Delta x_j| \cdot |f(x_j)| \leq \sum_j |\Delta x_j| \cdot \left( \max_{x \in [a,b]} |f(x)| \right) = |b-a| \cdot \left( \max_{x \in [a,b]} |f(x)| \right).$$

Ez felosztásfinomítással a fenti egyenlőtlenségeket adja. Lebesgue-integrálnál még az is igaz, hogy  $f$  pontosan akkor integrálható, ha  $|f|$  is, és ez biztos igaz, ha a (3.7) egyenlőtlenség utolsó jobb oldala véges (mert ekkor a konstans  $\max_{x \in [a,b]} |f(x)|$  értékű függvény integrálható majoráns).<sup>40</sup>

• **Függvénysorozat** határértékfüggvényének integrálja *általában nem* egyenlő az integrálok határértékével (és ez tényleges buktató lehet). A most bizonyítás nélkül kimondott *Lebesgue-tétel* egy plusz feltétellel már kiegészít: ha van olyan *integrálható* függvény, ami *majorálja* az *összes* függvényt.

**Lebesgue-tétel:** (3.8)

<p><b>Ha</b> majdnem minden <math>x</math>-re igaz, hogy</p> <p>1.) az integrálható <math>f_n(x)</math>-eknek létezik pontonkénti határértéke, <math>f(x)</math>, és</p> <p>2.) van olyan <i>integrálható</i> <math>g(x)</math>, amire <math> f_n(x)  \leq  g(x) </math> teljesül minden <math>n</math>-re,</p>	<p><b>akkor</b> az <math>\int_{\mathbb{R}} dx f_n(x)</math>-eknek, azaz az <math>f_n</math>-ek integráljainak sorozata konvergens, <math>f(x)</math> is integrálható, és igaz, amit „várunk”:</p> $\int_{\mathbb{R}} dx f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} dx f_n(x).$
---	--

Ugyanez igaz olyan határértékekre is, amikor az integrandusban egy folytonos paraméter tart valahova. A tételt **dominált konvergencia tételének** is hívják: az integrálható majoráns „leuralja” a határérték rakoncátlanokodásait. A Lebesgue-tétel tehát jól használható integrálok határértékeinek vizsgálatához; fogjuk is használni. Tipikus eset, hogy ismert az  $f_n$  függvénysorozat  $f = \lim_n f_n$  pontonkénti határértékfüggvénye és annak integrálja (pl. hogy  $f \equiv 0$ , így  $\int_a^b f dx = 0$ ), és kérdés, hogy az  $\int_a^b f_n dx$  integrálok  $\int_a^b f dx$ -hez tartanak-e (pl. a mondott esetben: nullához). *Ha nincs* kellő  $g$  integrálható majoráns, akkor a Lebesgue-tétel nem tud döntenit; ha viszont van, akkor igen a válasz. Megfelelő  $g$ -t találni hol könnyű, hol nehezebb, de ezzel együtt ha van megfelelő  $g$ , akkor sok esetben az  $|f_n|$ -ek „nagyvonalú” felülbecslése is célra vezethet. Persze *ha nem igaz a kívánt következtetés*, akkor hiába is keresünk megfelelő  $g(x)$ -et. **Nézzünk példákat**; lentebb rajzolok!

1.) **Véges szakaszon** integrálható  $f_n$ -ek **egyenletesen konvergens** sorozatára  $\lim_n \int_a^b f_n = \int_a^b f$ , ahol  $f \equiv \lim_n f_n$  (és az is *következmény*, hogy  $f$  is integrálható). Ugyanis ekkor egy adott  $K > 0$  számhoz van olyan  $N_K$  küszöbindex, hogy ha  $n \geq N_K$ , akkor  $|f(x) - f_n(x)| \leq K$  minden  $x$ -re. Így a háromszög-egyenlőtlenség miatt  $|f_n - f_{N_K}| \leq |f_n - f| + |f - f_{N_K}| \leq 2K$ , amiből következik, hogy  $|f_n| \leq |f_{N_K} + 2K| \leq |f_{N_K}| + 2K$ . Utóbbi függvény integrálható a szakaszra: ő jó lesz  $g$ -nek.

2.) Legyen  $f_n(x) = \chi_{[n, n+1]}(x)$ . Mindegyik  $f_n$ -re  $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$ , így  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = 1$ , viszont az  $f_n(x)$ -ek pontonkénti határértéke  $f \equiv 0$ , aminek integrálja nulla. Mégsincs paradoxon: olyan  $g$ , amire minden  $n$ -re  $|f_n| \leq |g|$  mindenhol, legalábbis az  $\mathbb{R}^+$ -on konstans 1 lehetne, de ez nem (és semmilyen ennél nagyobb függvény sem) integrálható  $\mathbb{R}^+$ -ra; nem teljesülhet a Lebesgue-tétel feltétele.

3.) Még érdekesebb, ha a konvergencia tényleg „vadabb”, mint következő vizsgált példában is:

Legyen $\alpha > 0$ fix érték,	$f_\lambda(x) := \frac{\lambda^\alpha}{\lambda^2 + x^2}$ .	Kérdés a $\lambda \rightarrow 0$ eset; elég egy fix $\lambda_0$ -tól „indítani”.
$\lambda > 0$ pedig paraméter,		

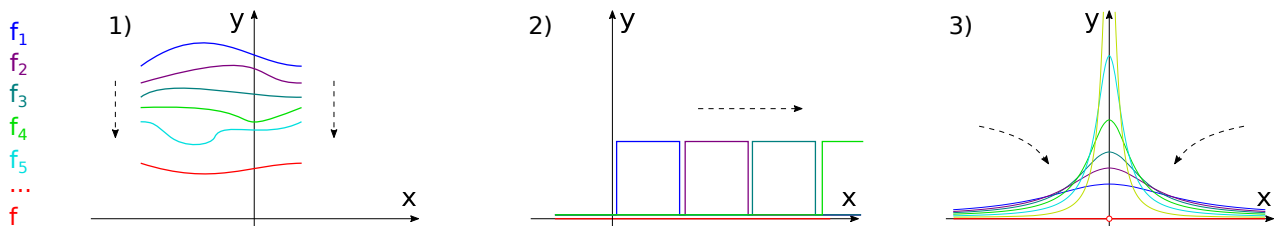
Ha  $x \neq 0$ , akkor  $f_\lambda(x)$  nullához tart, ha  $\lambda \rightarrow 0$ : a pontonkénti határérték tehát az azonosan nulla függvény (esetleg  $x=0$ -t kivéve, de ez nulla mértékű halmaz). Kérdés: vajon az  $\int_{\mathbb{R}} dx f_\lambda(x)$  integrálok is nullához tartanak-e. Az a baj, hogy nagy értékek felé is „elkirándulhat”  $f_\lambda(x)$ , mielőtt

<sup>40</sup>Lebesgue-féle integrált tekintve nulla mértékű halmaz nem számít. Az egyenlőtlenség jobb oldalán „maximum” helyett ún. „lényeges szuprémumot” kellene írni: ez az, aminél nagyobb függvény(abszolút)értékek már csak nulla mértékű halmazon vannak. (Ha pl. egy amúgy folytonos  $f$  függvényt egyetlen pontban úgy értelmezünk, hogy ottani értéke igen nagy legyen, az nem változtatja az integrál értékét, és nem is növeli a függvény „lényeges szuprémumát”.)

a nullához közeledne. Ugye *minden*  $\lambda$  esetén az  $|f_\lambda(x)|=f_\lambda(x)$ -nél majdnem mindenhol nagyobb  $g(x)$ -et keresnénk: nincs mese, minden  $x$ -ben meg kell nézni, hogy mi a legnagyobb  $f_\lambda(x)$  függvényérték, *ahogy a  $\lambda$ -t változtatjuk*. Lássuk:  $\frac{d}{d\lambda}f_\lambda(x)\stackrel{!}{=}0$ , ezt  $\lambda$ -ra megoldva arra jutunk (ellenőrizzük!), hogy adott  $x$ -nél az  $f_{\lambda_1}(x)$  értéke legnagyobb, ahol  $\lambda_1:=\sqrt{\frac{\alpha}{2-\alpha}}|x|$ .

Ha  $\alpha\geq 2$ , nincs is ilyen  $\lambda_1$ : ekkor  $\lambda\rightarrow 0$  közben minden  $f_\lambda(x)$  érték mindenhol monoton csökken az indulási  $\lambda_0$ -tól kezdve is. Ekkor  $g(x)$ -nek jó lesz  $f_{\lambda_0}(x)$ , és ez integrálható; a Lebesgue-tétel alapján ekkor  $f_\lambda$ -k integrálja nullához tart, ha  $\lambda\rightarrow 0$ . Ha  $\alpha<2$ , akkor minden  $x$ -re van  $\lambda_1$ . Azon  $x$ -ekre, amelyek elég távol vannak 0-tól, konkrétan: amikre  $|x|>\sqrt{\frac{2-\alpha}{\alpha}}\lambda_0$ , a kapott  $\lambda_1$  értékre  $\lambda_1 > \lambda_0$ , úgyhogy itt már az elejétől monoton csökkenés van: ilyen  $x$ -ekre az  $f_{\lambda_0}(x)$  jó integrálható majoráns. A lényeg viszont a kisebb  $x$ -ek világa: olyan majoráns, ami itt is minden  $f_\lambda(x)$ -nél nagyobb, úgy születik, hogy minden  $x$ -re összeszedjük  $f_{\lambda_1}(x)$  értékét (azaz visszahelyettesítjük  $\lambda_1$ -et): azt kapjuk, hogy az  $|x|\leq\sqrt{\frac{2-\alpha}{\alpha}}\lambda_0$  tartományban a legkisebb lehetséges majoráns az  $\frac{1}{2}\alpha^{\frac{\alpha}{2}}(2-\alpha)^{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot|x|^{\alpha-2}$  függvény. Ha  $\alpha>1$ , akkor ez (noha  $x=0$ -ban végtelenhez tart, mégis *integrálható*: ekkor tehát a Lebesgue-tétel miatt az  $f_\lambda(x)$ -ek integráljainak sorozata tényleg nullához tart. Ha viszont  $\alpha=1$ , vagy még kisebb, akkor a kapott majoráns  $x=0$  körül *nem* integrálható: a Lebesgue-tétel nem biztosítja, hogy  $\int_{\mathbb{R}}f_\lambda(x)dx$ -ek nullához tartanak.

Kész vagyunk; mellel most  $\int_{\mathbb{R}}dx f_\lambda(x)=\pi\lambda^{\alpha-1}$ : tényleg jól következtettünk. Ha  $\alpha>1$ , nullához tartanak, egyébként nem. A legérdekesebb az  $\alpha=1$ : „egyre szűkebb, egyre magasabb” függvények, az integráljuk konstans, és tényleg, pont inentől nincs integrálható majoráns.



21. ábra. Integrálok határértéke egyenlő-e a határértékfüggvény integráljával. 1.) véges szakaszon egyenletes konvergencia esetén igen. 2.) az odébbtolós ellenpélda, 3.) a bonyolultabb példa egy része. (A határértékfüggvények pirosak; az utolsóban nem indexek nőnek, hanem a szövegben mondott  $\lambda\rightarrow 0$  esetről van szó; a *pontonkénti határérték* tényleg majdnem mindenütt nulla.)

### 3.3. Vonalintegrálás a komplex síkon

Következzék a fejezet igazi témája; az előző szakaszokra bármikor visszatérhet, aki akar.

• Komplex  $f:\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}$  függvények vonalintegráljaival foglalkozunk; ez egészen hasonló fogalom, mint amilyenek skalár- és vektormezőik vonalintegráljai voltak. Ha most adott egy  $\gamma$  görbe a  $\mathbb{C}$  komplex síkon, akkor egy  $f(z)$  komplex függvény erre vett vonalintegrálját (a Riemann-féle integrálfogalom szemléletét követve) a következő lépéseket követve értelmeznénk:

1. felosztjuk a görbét kis darabokra sok ( $N$  darab)  $z_j$  pont beszurásával,
2. mindegyik  $z_j$ -ben kiértékeljük  $f$ -et, a kapott  $f(z_j)$  értéket megszorozzuk a kis szakasznak megfelelő  $\Delta z_j\equiv z_{j+1}-z_j$  komplex számmal, és a kapott  $\Delta z_j\cdot f(z_j)$  számokat összeadjuk,
3. ha ez az összeg tart valahova, ha  $N\rightarrow\infty$  és minden kis darab nullához tart, akkor az összeg határértékét hívjuk az  $f(z)$  függvénynek a  $\gamma$  görbére vett integráljának.



közelítő összeg:  $\sum_j f(z_j) \cdot \Delta z_j \rightarrow$  felosztást végtelenre finomítva:  $\rightarrow$  integrál:  $\int_\gamma f(z) dz$ .

• A következő lépés ugye áttérni valós ( $\mathbb{R}$ ) értelmezési tartományú integrálra. Ha a  $z(t)$  függvény a  $\gamma$  görbénk paraméterezése (azaz ha  $t$  végigfut a  $[t_a, t_b]$  szakaszon, akkor  $z(t)$  végigfut a görbén), akkor a  $[t_a, t_b]$  szakaszt felosztva  $t_j$  pontokkal a görbe egy felosztását is kapjuk a  $z(t_j)$  számokkal. A szakaszt megadó kis komplex számot közelítőleg kifejezhetjük a paraméterezés deriváltjával:

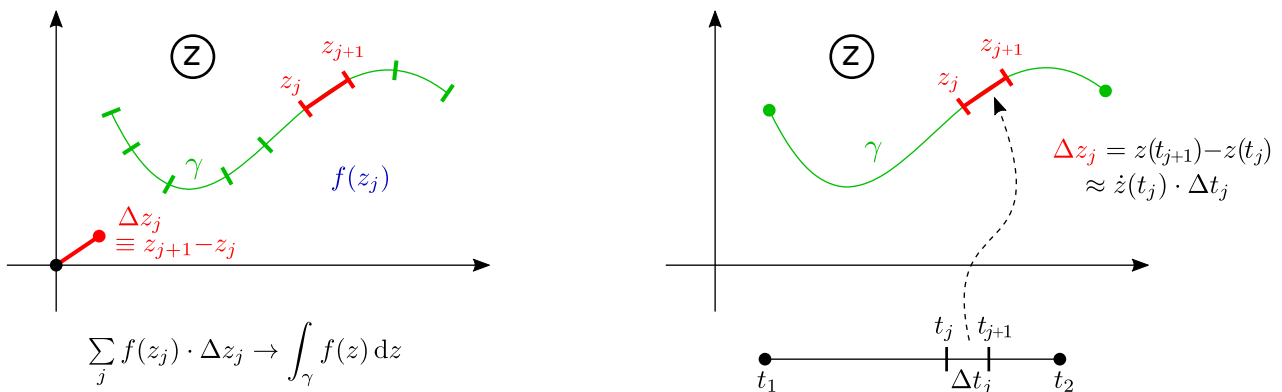
$$\begin{aligned} \Delta z_j &= z(t_{j+1}) - z(t_j) \approx \frac{dz(t_j)}{dt} \cdot (t_{j+1} - t_j) = \dot{z}(t_j) \cdot \Delta t_j \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_j f(z_j) \cdot \Delta z_j \approx \sum_j f(z(t_j)) \cdot \dot{z}(t_j) \cdot \Delta t_j, \end{aligned}$$

amiből a  $t$ -felosztást finomítva azt szűrhetjük le az integrálra, hogy

$$\text{Ha } z(t) \text{ a } \gamma \text{ görbe paraméterezése, akkor} \quad \int_\gamma f(z) dz = \int_{t_a}^{t_b} f(z(t)) \cdot \frac{dz(t)}{dt} dt. \quad (3.9)$$

Precízebben (ill. Lebesgue-értelemben) ezen formulával értelmezzük a komplex vonalintegrált.

• A  $z(t)$  paraméterezés a valós szakaszból  $\mathbb{C}$ -be menő függvény; deriváltja,  $\dot{z}(t)$  egyrészt a  $\mathbb{C}$  síkon érintővektor, másrészt komplex szám: a paraméterezett integrál tehát komplex értékű, valós értelmezési tartományú, a  $[t_a, t_b]$  szakaszra vett integrál. A komplex vonalintegrál eredménye (komplex) szám. A paraméterhalmazra átírás hasonló itt, mint pl.  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  vektormezőök vonalintegráljánál volt; különbség: ott az adott osztópontbeli  $\mathbf{v}(\mathbf{r}_j)$  függvényértéket (vektort) és a  $\Delta \mathbf{r}_j$  szakaszdarabot csak pl. skalárszorzással kombinálhattuk össze, eredményül számot kapva. Itt az  $f(z_j)$ -ket és a  $\Delta z_j$ -ket, vagy a paraméterezett alakban  $f(z(t))$ -t és  $\dot{z}(t)$ -t komplex számokként lehet egymással szorozni, eredményül újra komplex számokat kapva: ez a „plusz” a korábbi fajta vonalintegrálokhoz képest.



22. ábra. Komplex vonalintegrál: értelmezés a görbe szakaszokra való felosztásával (bal oldal), segítség a paraméterezett alakra átíráshoz (jobb oldal).

• Kiemelendő, hogy a **valós integrálfogalom**, azaz esetleg  $\mathbb{C}$  értékű, de valós értelmezési tartományú  $f$  függvény  $[a, b]$  szakaszra vett integrálja,  $\int_a^b f(x) dx$  a bevezetett **komplex vonalintegrál speciális esete**: ha a  $\gamma$  görbe éppen az  $[a, b]$  szakasz, akkor a  $\Delta z_j$  darabok valós  $\Delta x_j$  számok, a függvényt pedig a valós  $x_j$  osztópontokban értékelnénk ki, és tényleg a  $\sum_j f(x_j) \cdot \Delta x_j$  összeg határértékét hívtuk valós integrálnak. Ha „paraméterezzük” az  $[a, b]$  szakaszt mint „görbét” egy  $x(t)$  függvénnyel, ami egy  $[t_a, t_b]$  másik intervallumot az  $[a, b]$ -re képez, akkor a paraméterező (3.9) képlet az  $\int_a^b f(x) dx = \int_{t_a}^{t_b} f(x(t)) \cdot \frac{dx}{dt} dt$  alakot ölti, amit mint *integrálhelyettesítést* ismertünk.

• Zárt görbére integrálást most is a  $\oint$  jelöli. Komplex vonalintegrálokra ugyanazok igazak görbék darabolásait, unióit tekintve, mint mezők *vektori hossz mérték szerinti* vonalintegráljaira (ld. pl. a Vektorszámítás jegyzet 9.5. szakaszát; az ottani ábrák ide is vonatkoznak). Pl. a görbe irányítását megfordítva az integrál értéke  $-1$ -szeresre változik. Valóban: megfordul az osztópontok sorrendje, így a  $\Delta z_j$  számok  $-1$ -szeresét kell venni, az összeg  $-1$ -szeres lesz. A paraméterezés (3.9) képletből gondolkodva: a megfordítástól a  $\frac{dz}{dt}$  derivált azonosan  $-1$ -gyel szorzódik, így az eredmény is.

Emiatt komplex vonalintegrálokra is igaz, hogy az ellentétes irányítású, de „érintkező” (egybeeső) görbeszakaszokra vett integrálok kiejtik egymást. Ezt (pozitív,  $\circlearrowright$  irányítású) zárt görbék „feldarabolására” használhatjuk: ha a görbénk több másiknak az uniója úgy, hogy a belső szakaszok érintkeznek, akkor az összes zárt görbére vett integrál összege egyenlő az eredő görbére vettel, mert az érintkező szakaszok közül mindig egyik erre, másik arra irányított lesz.

• **Komplex integrálok becslésére** az előző szakaszban valós integrálokra látott egyszerű (3.7) becslésnek megfelelő érvényes; sőt, legtöbbször elég lesz az ottani „középső fokozatot kihagyva” kapott alábbi képlet. Erre mint „*szokásos integrálbecslés*”-re fogunk hivatkozni.

**Állítás:** ha  $\gamma$  egy görbe,  $\ell(\gamma)$  a hossza,  $f$  pedig  $\mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$  függvény, akkor

$$\left| \int_{\gamma} dz f(z) \right| \leq \ell(\gamma) \cdot \max_{z \in \gamma} |f(z)|, \quad (3.10)$$

azaz komplex integrál eredménye abszolútértékben nem nagyobb, mint a görbehossz szorozva az integrandus abszolútértékének a görbén vett maximumával. Az „indoklás” ugyanaz, mint valósra:

$$\left| \sum_j \Delta z_j \cdot f(z_j) \right| \leq \sum_j |\Delta z_j| \cdot |f(z_j)| \leq \max_{z \in \gamma} |f(z)| \cdot \sum_j |\Delta z_j|, \quad (3.11)$$

és „finomítás” határesetben az első alak az integrál abszolútértéke,  $\sum_j |\Delta z_j|$  pedig az  $\ell(\gamma)$ . Rendes bizonyítás a  $\gamma$  paraméterezésével, a valós integrálok 3.2. szakaszban látott becsléseivel kapható.

A (3.10) igen durva becslés, mégis hasznos; vessük észbe! Sokszor használjuk, amikor (vonal)integrálok (vagy részeik) nullához tartását akarjuk megállapítani; kigondolhatjuk, hogy ekkor ez lényegében a *Lebesgue-tétel* nagyon speciális „lebutított” változata. Ha viszont ez a becslés nem segít ki (látunk majd ilyet is), visszatérhetünk a komolyabb Lebesgue-tételes vizsgálathoz.

• A komplex integrálok alkalmazásának az lesz a lényege, hogy sokszor „kapásból” egyszerűen kiértékelhetjük őket. Ezért most nem is számolunk ki a (3.9) képletre példaképpen komplex integrálokat valós paraméterre átírva; *pont fordítva* lesz érdekes a dolog. Az elmélet kifejtésének további motiválásához **egyetlen** típusú **integrált érdemes** a (3.9) formulát használva kiszámolni.

Legyen  $\gamma$  egy origó középpontú  $R$  sugarú kör, *pozitív irányítással*. Legyen továbbá  $f(z) = z^n, \quad n \in \mathbb{Z}$ .  $\oint_{\gamma} dz f(z) = ?$

Az  $n$  akármilyen egész (pozitív, nulla, negatív) is lehet. A körvonalnak a  $\varphi$  középponti szöggel való paraméterezését könnyen „átvihetjük” a komplex síkra az Euler-formulával:

Körvonalunk szokásos paraméterezése:  $x(\varphi) = R \cos \varphi,$   
 $y(\varphi) = R \sin \varphi.$   $\Rightarrow$  A  $z \equiv x+iy$  módon a  $\mathbb{C}$  síkra átvive:  
 $z(\varphi) = R(\cos \varphi + i \sin \varphi) = Re^{i\varphi}.$

Ezzel már kellemesen átírhatjuk a kiszámítandó integrált:

$$\oint_{\gamma} dz f(z) = \oint_{\gamma} dz z^n = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \underbrace{(Re^{i\varphi})^n}_{=f(z(\varphi))} \cdot \underbrace{iRe^{i\varphi}}_{=z'(\varphi)} d\varphi = iR^{n+1} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi e^{i(n+1)\varphi} = (*)$$

Az  $e^{i(n+1)\varphi}$  függvény primitív függvénye ugye  $\frac{1}{i(n+1)}e^{i(n+1)\varphi}$ , de **nagyon fontos** (kb. *minden* ezen múlik), hogy ez csak akkor igaz, ha az  $n$  nem egyenlő  $-1$ -gyel, mert akkor a nevezőbeli  $n+1$  értelmetlen lenne. Emiatt **külön kell vizsgálni** az  $n \neq -1$  összes többi, és **az  $n = -1$  esetet**.

Ha  $n \neq -1$ , akkor a monodott primitív függvényből

$$(*) = \frac{iR^{n+1}}{n+1} e^{i(n+1)\varphi} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{iR^{n+1}}{n+1} \left( \underbrace{e^{i(n+1)\pi}}_{=(-1)^{n+1}} - \underbrace{e^{i(n+1)(-\pi)}}_{=(-1)^{n+1}} \right) = 0.$$

Az  $n = -1$  eset még egyszerűbb, mert konstanst kell integrálni; ekkor tehát

$$(*) = i \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \cdot 1 = \underline{\underline{2\pi i}}.$$

- Az  $n = -1$  eset tényleg különleges.<sup>41</sup> **Összefoglalva az eredményünk:**

Ha a  $\gamma$  akármilyen sugarú, origó középpontú pozitív irányítású kör, akkor

$$\Rightarrow \oint_{\gamma} dz z^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \neq -1, \text{ azaz } n = \dots, -3, -2, 0, 1, 2, 3, \dots \\ 2\pi i, & \text{ha } n = -1, \text{ azaz az } \frac{1}{z} \text{ függvényről van szó.} \end{cases} \quad (3.12)$$

vagy ha az egész elrendezést „eltoljuk” egy konstans  $z_0$  komplex számmal: ha  $\gamma$  egy  $z_0$  középpontú,  $R$  sugarú, pozitív irányítású kör, akkor

$$\Rightarrow \oint_{\gamma} (z-z_0)^n dz = 0, \quad \text{ha } n \neq -1, \quad \text{és} \quad \oint_{\gamma} \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i. \quad (3.13)$$

### 3.4. Komplex Newton-Leibniz-formula

- **Idézzük fel** a Newton-Leibniz-formulát és skalármezőkre/vonalintegrálokra vonatkozó (*gradiens-tétel* nevű) megfelelőjét (ld. pl. a Vektorszámítás jegyzet 12.3. szakaszát); értelemszerű jelöléssel:

Newton-Leibniz:  $\int_a^b dx F'(x) = F(b) - F(a)$ , Gradienstétel:  $\int_{\gamma} d\mathbf{r} \nabla \Phi(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}_b) - \Phi(\mathbf{r}_a)$ .

Ne feledjük:  $F(x)$  az  $[a, b]$ -n,  $\Phi(\mathbf{r})$  pedig a (perempontjait,  $\mathbf{r}_a$ -t és  $\mathbf{r}_b$ -t is hozzáértett)  $\gamma$  görbe egy környezetén *mindenhol* folytonosan differenciálható kell, hogy legyen. A gradienstételt visszavezethettük a Newton-Leibniz-formulára a  $\nabla \Phi$  vonalintegráljának paraméterezett felírásával.

- Ezeket tudva talán nem meglepő, hogy hasonló igaz komplex vonalintegrálokra:

**Állítás** (derivált integrálja): ha az  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvény legalább a  $\gamma$  görbe egy környezetén *mindenhol* folytonosan differenciálható, akkor

$$\int_{\gamma} dz F'(z) = F(z_b) - F(z_a), \quad \text{ahol a } \gamma \text{ görbe } z_a\text{-tól } z_b\text{-ig fut.} \quad (3.14)$$

Itt *komplex* differenciálhatóság kell. Az állítást hívhatjuk „komplex Newton-Leibniz-formulának”, annyira rokon a valóssal (sőt pont azt kapjuk vissza, ha  $\gamma$  éppen egy valós szakasz). **Indoklásfélé:**

$$\int_{\gamma} dz F'(z) \approx \sum_j F'(z_j) \Delta z_j \approx \sum_j [F(z_{j+1}) - F(z_j)] = \underline{\underline{F(z_b) - F(z_a)}}, \quad (3.15)$$

mert az utolsó lépésben a közbülső pontok járulékaik mind kiesnek, és csak a perempontokéi maradnak. **Rendesebb bizonyítás** a  $\gamma$  paraméterezését (ennek jele most  $z(t) : [t_a, t_b] \rightarrow \mathbb{C}$ ) használva,

<sup>41</sup>A későbbiekben *eszméletlen sokszor* előkerül a  $2\pi i$ ; lényegében ebből az integrálból származóan. Meglátjuk nemsokára, hogy lényegében sem ezt, sem a többi  $n$  esetét sem kellett volna így konkrétan kiszámítani; azért csináltuk meg most, hogy minimális motivációt és példát adjon a későbbiekhez.

és a jelölt lépésben az  $F(z(t))$  közvetett függvény  $t$  szerinti (valós) deriváltját felismerve:

$$\int_{\gamma} dz F'(z) = \int_{t_a}^{t_b} dt \dot{z}(t) \cdot F'(z(t)) \stackrel{(*)}{=} \int_{t_a}^{t_b} dt \frac{d}{dt} F(z(t)) = F(z(t_b)) - F(z(t_a)) = \underline{\underline{F(z_b) - F(z_a)}}.$$

• A gradienstételből is az derült ki annak idején, hogy skalármező gradienseinek vonalintegrálja nem függ a vonalalaktól, csak a kezdő- és végponttól. Most is ilyen helyzet állt elő: a fenti (3.14) állításunk azt is mondja, hogy az  $F'(z)$ -nek *bármely két*  $z_a$  kezdő- és  $z_b$  végpontú görbére ugyanannyi az integrálja; természetesen akkor, ha a görbék mindketten teljesítik azt a feltételt, hogy  $F$  egy környezetükön folytonosan differenciálható.

**Zárt görbékre:** a  $z_a$  kezdőpont és a  $z_b$  végpont (és emiatt az  $F$  függvénynek a „két végpontban” felvett függvényértéke is) megegyezik. Iménti állításunk következménye tehát, hogy

$$\text{Ha } \gamma \text{ zárt görbe és } F \text{ folytonosan differenciálható } \gamma \text{ egy környezetén} \quad \Rightarrow \quad \oint_{\gamma} dz F'(z) = 0. \quad (3.16)$$

Ezt ugye a görbét két darabra vágva is leszűrhetjük: az előzőek miatt az egyikre ugyanannyi az integrál, mint a másikra, így az egyikken oda-, másikon visszamenve integrálva nullát kapunk.

• **Nézzünk vissza** a  $z^n$  függvényeknek ( $n \in \mathbb{Z}$ ) az előző szakaszban kiszámolt integráljaira!

$$\text{Első észrevétel: ha } n \neq -1, \text{ akkor} \quad F(z) = \frac{1}{n+1} z^{n+1} \quad \Rightarrow \quad F'(z) = z^n.$$

Ezen  $F(z)$  egészfüggvény, ha  $n > 0$ , ha pedig  $n = -2, -3, -4, \dots$ , akkor az origóban izolált szingularitása van. Mindkét esetben igaz, hogy ő legalábbis a görbéknek (az origó középpontú körvonalnak) egy környezetében folytonosan differenciálható. **Innen is leszűrhetjük** most már, hogy

$$\text{Ha } n \neq -1: \quad \oint_{\gamma} dz z^n = \oint_{\gamma} dz F'(z) = 0 \quad \text{egy origót megkerülő körre. (Nem is kellett volna tehát ezt paraméterezve kiszámolni.)}$$

Többet is tudhatunk már: ha  $n \neq -1$ , akkor  $f(z) = z^n$  körintegrálja nemcsak a köreinkre, hanem *minden zárt görbére is* nulla (ami ha  $n < 0$ , nem megy át az origón; úgy nem létezne az integrál).

• **Még érdekesebb** az  $n = -1$ , azaz az  $f(z) = \frac{1}{z}$  esete. Kijött, hogy  $2\pi i$  az origó középpontú pozitív irányítású körre vett integrál. Emiatt *nincsen* olyan, a körvonal környezetében mindenhol folytonosan differenciálható  $F(z)$ , amire  $F'(z) = \frac{1}{z}$ . Az egyik „legsikeresebb” ötlet az lehetne, hogy

$$F(z) = \text{Ln } z \quad \Rightarrow \quad F'(z) = \frac{1}{z} \quad ??? \quad \text{közben pedig} \quad \oint_{\gamma} dz \frac{1}{z} = 2\pi i. \quad (3.17)$$

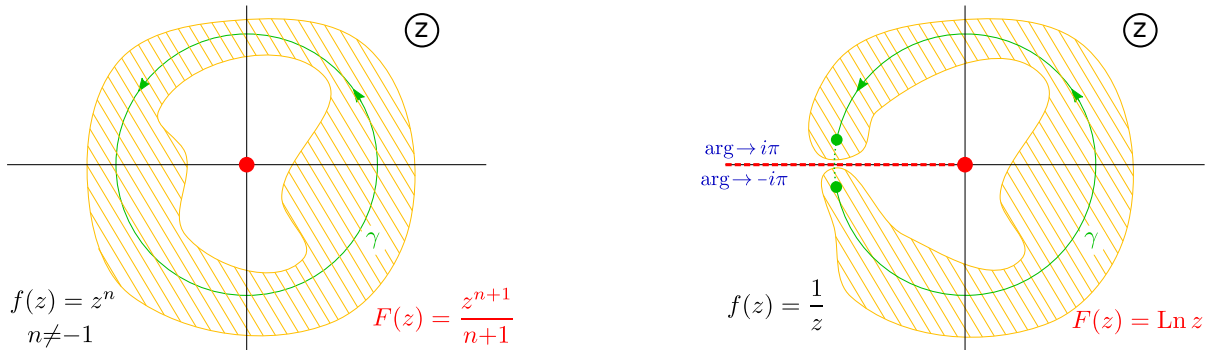
A kulcs: az  $\text{Ln}$  deriváltjának ilyen egyszerű felírásával *éppen a lényeg* vész el. Az  $\text{Ln } z$  nemcsak  $z=0$ -ban nem differenciálható, hanem az  $\mathbb{R}^-$  *vágáson sem*. Akárhogy igyekszünk, nem lesz egy origót megkerülő (így a vágást metsző) körvonalnak olyan környezete, amin  $\text{Ln } z$  mindenhol differenciálható. (Nem is lehet, hiszen akkor ellentmondásra jutnánk!) Az  $(\text{Ln } z)' = \frac{1}{z}$  képletet úgy kell rendesen megfogalmazni, hogy az  $\text{Ln } z$  függvény a „felvágott” komplex síkon (a  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$  halmazon) folytonosan differenciálható, deriváltja az *ezen halmazra leszűkített*  $\frac{1}{z}$  függvény, és utóbbit *ezután* kiterjeszthetjük  $\mathbb{R}^-$ -ra is, azaz a  $z=0$ -t kivéve mindenhol értelmezett függvényé.

Az  $\frac{1}{z}$  körintegrálját (a  $2\pi i$  értéket) megkaphatjuk a Newton-Leibniz-formulából, ha óvatoskodva bánunk a(z  $R$  sugarú) körvonallal. Hagyjunk ki belőle az  $\text{Ln}$  vágása, az  $\mathbb{R}^-$  tengely körül egy kis  $2\varepsilon$  középponti szögű darabot, azaz a nyílt körvonaldarabunk fusson  $z_a \equiv Re^{-i\pi+i\varepsilon}$ -ből  $z_b \equiv Re^{i\pi-i\varepsilon}$ -ba (a vágás alatról fölöttre). *Ez a nyílt körvonaldarab* bennfoglalható olyan tartományba, ahol  $\text{Ln } z$

mindenhol differenciálható, így az integrál értéke itt

$$\int_{z_a}^{z_b} dz \frac{1}{z} = \text{Ln}(z_b) - \text{Ln}(z_a) = [\ln R + i(\pi - \varepsilon)] - [\ln R - i(\pi - \varepsilon)] = 2\pi i - 2i\varepsilon.$$

Most  $\varepsilon \rightarrow 0$ -val helyesen megkapjuk a  $2\pi i$ -t: ez így tehát az  $\text{Ln}$  fázisvisszaugrásából jön.<sup>42</sup>



23. ábra. Balra:  $n \neq -1$  esetben a  $z^n$  körintegrálja nulla a komplex Newton-Leibniz-formula miatt. Jobb oldal: az  $\text{Ln}$  vágása miatt ilyen következtetés nem igaz az  $\frac{1}{z}$  függvényre; az integrál  $2\pi i$  értékét a görbét a vágás két oldaláról óvatosan bezárva megkaphatjuk  $\text{Ln}$  ugrásából.

### 3.5. Komplex integrál útfüggetlensége, Cauchy-tétel

- Mindig érdekes, amikor a vonalintegrál nem függ a görbealaktól. Mostanra azt tudjuk tehát, hogy ha  $f(z)$  olyan, hogy *ő valaminek a deriváltja*, (azaz egy  $F(z)$  egy tartományon folytonosan differenciálható, és ott  $F' = f$ ), akkor a tartományon belüli görbéket nézve  $f(z)$  komplex vonalintegrálja csak a kezdő- és végponttól függ. Vektoranalízisben ugyanezt láttuk annak idején: ha a vektormező valaminek a gradiense. Utóbbit nem egyszerű közvetlenül vizsgálni, de találtunk egyszerűbben ellenőrizhető feltételt: tartomány egyszerűen összefüggő és  $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ .

- Hasonló a mostani helyzet is: noha a  $z^n$ -nél könnyű volt, általában nem egyszerű egy konkrét függvényről eldönteni, hogy *ő valaminek a deriváltja-e*.<sup>43</sup> Zseniális felismerés volt, hogy mégis sokszor biztosak lehetünk a vonalintegrál útfüggetlenségében. Ugye egy tartomány *egyszerűen összefüggő*, ha bármely két benne futó zárt görbét egymásba lehet mozgatni folytonosan.

**Cauchy-tétel:** ha  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  egy egyszerűen összefüggő nyílt halmazon *differenciálható*, akkor az ebben futó zárt görbékre  $\oint_{\gamma} dz f(z) = 0.$  (3.18)

Másképp: (a halmazunkban futó) nem zárt görbékre  $f$  vonalintegrálja csak a kezdő- és végponttól függ. Ekkor az is biztos, hogy *van* olyan  $F(z)$ , amire  $F' = f$ : az ilyen  $F$ -et *definiálhatjuk* úgy, hogy  $F(z)$  értéke legyen  $f$ -nek egy fix  $z_0$  ponttól  $z$ -ig vett vonalintegrálja (akármilyen útra):

Ha a vonalintegrál csak a perempontoktól függ:  $F(z) := \int_{z_0}^z ds f(s)$  olyan, amire  $F'(z) = f(z)$  a Newton-Leibniz-formula miatt. (3.19)

<sup>42</sup>Az  $\text{Ln}$  más változatát is használhatnánk: pl.  $\text{Ln}(e^{i\alpha} z)$  vágása (gondjuk ki!) az  $\mathbb{R}^-$  tengely  $\alpha$  szöggel való elforgatottján van, és azon kívül  $(\text{Ln}(e^{i\alpha} z))' = \frac{1}{z}$  mindenhol. Itt is a vágást kell kihagyni az előző gondolatmenethez. Akárhogy is: *valahol* vissza kell ugrania a fázisnak  $2\pi i$ -t: az integrálra kapott eredmény ugyanaz lesz.

<sup>43</sup>Valós,  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  esetben sokféle függvényről (pl. minden folytonosról) tudhatjuk, hogy van primitív függvénye (amit vagy ki lehet fejezni egyszerűen, vagy nem). Komplexben a komplex differenciálhatóság „igényesebb” volta miatt nem lennénk eleve biztosak ebben; láttunk is óvatosságra intő példát, az  $f(z) = \frac{1}{z}$ -t.

• A tartományra vonatkozó feltétel itt erősebb, mint a Newton-Leibniz-formulánál volt (ott nem kellett a görbe vonalát körülvevő halmaznak egyszeresen összefüggőnek lennie, a Cauchy-tételnél igen). A Cauchy-tételből tehát *nem következne*, hogy pl.  $f(z) = \frac{1}{z^2}$  körintegrálja az origót (ami itt izolált szingularitás, így  $\text{Dom } f$  nem egyszeresen összefüggő!) megkerülő körre nulla; ezt máshonnan tudjuk. Az  $\frac{1}{z}$  ilyen körintegrálja pedig tényleg nem nulla (hanem  $2\pi i$ ).

• A (3.18) Cauchy-tétel Cauchy-tól származó **bizonyításához** a **Stokes-tételt** és a **Cauchy-Riemann-egyenleteket** kell ügyesen használni. A  $\gamma$  zárt görbe paraméterezése  $z(t) : [t_a, t_b] \rightarrow \mathbb{C}$ ; írjuk át rá az integrált, és írjuk szét valós és képzetes részekre, amit csak tudunk:

$$\oint_{\gamma} dz f(z) = \int_{t_a}^{t_b} dt \dot{z}(t) \cdot f(z(t)) = (*). \quad z(t) \equiv x(t) + iy(t), \quad f(z) \equiv U(x, y) + iV(x, y).$$

A pötty a  $t$  szerinti deriválás jele. Ugye  $x(t)$  és  $y(t)$  a görbe pontjának koordinátái, az  $U$  és  $V$  függvényeknek változói is az  $x, y$  koordináták. Ahogy  $f(z)$ -be az integrálás során az aktuális  $t$  paraméterű  $z(t)$ -t, az  $U$ -ba és a  $V$ -be az ennek megfelelő  $x(t)$ -t és  $y(t)$ -t kell beírni:

$$\begin{aligned} (*) &= \int_{t_a}^{t_b} dt (\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)) \cdot (U(x(t), y(t)) + iV(x(t), y(t))) = \text{elvégezve a szorzást:} \\ &= \int_{t_a}^{t_b} dt [\dot{x}(t) \cdot U(x(t), y(t)) + \dot{y}(t) \cdot -V(x(t), y(t))] + \\ &+ i \int_{t_a}^{t_b} dt [\dot{x}(t) \cdot V(x(t), y(t)) + \dot{y}(t) \cdot U(x(t), y(t))] = (**). \end{aligned}$$

Észrevehetjük, hogy „rendes” vektormezők vonalintegráljai kerültek elő az  $x$ - $y$  síkon fekvő görbénkre. (Így hál’ Istennek nem is kell a harmadik irányt  $z$ -vel jelölni. . .) Konkrétan legyen

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \equiv \begin{pmatrix} U(x, y) \\ -V(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{r}) \equiv \begin{pmatrix} V(x, y) \\ U(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{és a görbénk paraméterezését is értelhetjük úgy, hogy} \quad \mathbf{r}(t) \equiv \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ezekkel beazonosíthatjuk, hogy a komplex vonalintegrálunkat ilyen alakba tudtuk átírni:

$$\oint_{\gamma} dz f(z) = (***) = \int_{t_a}^{t_b} dt \dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) + i \int_{t_a}^{t_b} dt \dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r}(t)) = \oint_{\gamma} d\mathbf{r} \mathbf{F}(\mathbf{r}) + i \oint_{\gamma} d\mathbf{r} \mathbf{G}(\mathbf{r}). \quad (3.20)$$

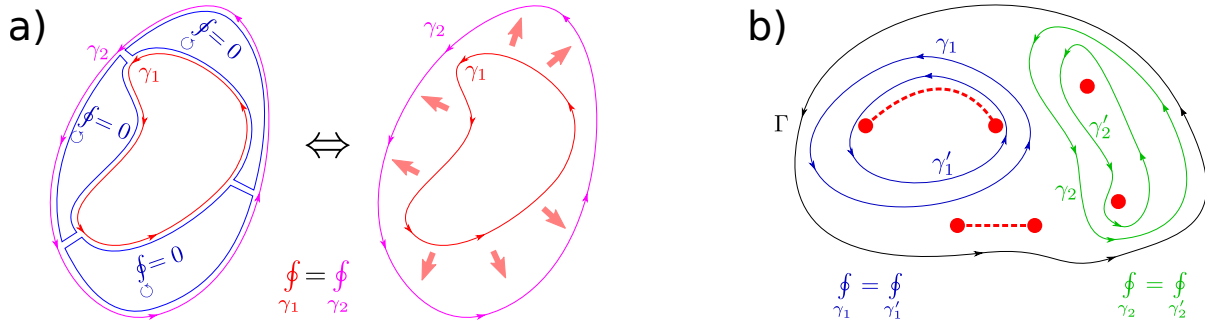
A szorzásjel skalárszorozást jelent: a paraméterezett alakokat visszaírhattuk „önálló jogú” vonalintegrálokká. Állítás: ha  $f$  differenciálható, azaz  $U$ -ra és  $V$ -re teljesülnek a Cauchy-Riemann-egyenletek, akkor az előkerült  $\mathbf{F}$  és a  $\mathbf{G}$  vektormezők rotációja nulla. Valóban:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\partial_y U - \partial_x V \end{pmatrix}, \quad \nabla \times \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_x U - \partial_y V \end{pmatrix}. \quad \begin{array}{ll} \text{Ha tehát teljesül} & \text{akkor valóban:} \\ \partial_x U = \partial_y V, \text{ és} & \nabla \times \mathbf{F} = 0, \\ \partial_y U = -\partial_x V, & \nabla \times \mathbf{G} = 0. \end{array}$$

A Stokes-tétel miatt viszont ha  $f$ , azaz  $U$  és  $V$ , emiatt  $\mathbf{F}$  és  $\mathbf{G}$  is a  $\gamma$  zárt görbét tartalmazó egyszeresen összefüggő tartományon *folytonosan differenciálható*, továbbá  $\text{rot } \mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{G} = 0$ , akkor  $\mathbf{F}$  ill.  $\mathbf{G}$  körintegráljai (azaz a rotációknak a bezárt felületre vett integrálja) nullák. Az iménti (3.20) alakban tehát a valós és képzetes rész is nulla. **Készen vagyunk.**

• A gyakorlatban legtöbbször az integrandus majdnem mindenhol differenciálható. Olyan tartományokban, ahol nincs se szingularitás, se vágás, se semmi, a kis zárt görbékre vett integrálok

nullák a Cauchy-tétel miatt. Ezt úgy „válthatjuk aprópénzre”, hogy ilyen részeken az utat „átmozgathatjuk” másik görbébe: a különbség zárt görbe hozzáadódó járuléka nulla. Így elég érdektelenné válik, hogy *pontosan merre* megy az út: **az számít, hogy merről, hogyan kerüli meg** a vágásokat, szingularitásokat. Ezeken már *nem* dobhatjuk át „büntetlenül” az utat, mert az ezeket megkerülő „maradék” integrálok nulla voltában *nem* lehetünk biztosak.



24. ábra. a.) A  $\gamma_1$ -re és a  $\gamma_2$ -re vett integrálok egyenlők, ha a ledarabolt (kék) zárt görbékre nullák az integrálok. b.) Az integrandus (piros) szingularitásait adott módon megkerülő görbékre vett integrálok egymással egyenlők: az ábrán a  $\gamma_1$ -re és  $\gamma'_1$ -re, ill. a  $\gamma_2$ -re és a  $\gamma'_2$ -re vettek, ezeket „át lehet mozgatni” egymásba. A  $\Gamma$ -ra vett integrál egyikükkel sem feltétlenül egyenlő.

• Ezeket tudva van egy hasznos szisztéma **vonaleintegrálok kijelölésére**: zárójelben írjuk (csakis) azon szingularitásokat, amelyeket az út megkerül, és azt is, hogy merről (hallgatólagosan feltéve, hogy az integrandus vágásait, szingularitásait mindenki beazonosította, és hogy az út a differenciálható tartományban fut). Sokszor nem is kell több magyarázat. **Példák** a jelölésre:

$\oint^{(ia+)} dz \frac{1}{z^2+a^2}$	A szingularitások $z=ia$ és $z=-ia$ , a kijelölt integrálban az út zárt, és $ia$ -t kerüli meg egyszer pozitív (+) irányban, $-ia$ -t nem. Ez elég.
$\oint^{(ia+,-ia+)} dz \frac{1}{z^2+a^2}$	Az integrandus ugyanaz; most az út olyan zárt görbe, ami mindkét szingularitást ( $-ia$ -t is és $ia$ -t is) egyszer pozitív irányban megkerüli. Ez az integrál tehát nem (feltétlenül) ugyanannyi, mint az előző.
$\oint^{(0+,1+)} dz \operatorname{Ln} \left(1-\frac{1}{z}\right)$	Az integrandus a $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ vágást kivéve differenciálható. A zárt út egyszer megkerüli ezt pozitív irányban.
$\int_{-\infty}^{(0-)} dz \frac{z^\alpha}{(1-z)^\beta}$	Vágás $\mathbb{R}_0^-$ -on és $[1, \infty) \subset \mathbb{R}$ -en. A <i>nem zárt</i> út $-\infty$ -ból jön, $0$ -t megkerüli $-$ irányban, és visszatér $-\infty$ -be, áthaladva a két vágás között.

Ezek az integrálok így egyértelműek: bármilyen útra, amely teljesíti a kikötéseket, ugyanannyik.

• **Kiegészítés:** a Cauchy-tétel látott bizonyításához (a Stokes-tétel alkalmazhatóságához) fel kellett tenni a *folytonos* differenciálhatóságot (a deriváltfüggvény folytonosságát). Egy Émile Goursat-tól származó bizonyítás (ld. a C.1. függelékben) megmutatja, hogy elég *csak* a differenciálhatóságot feltenni a Cauchy-tétel igazságához. A Cauchy-tétel folyománya az (ld. nemsokára), hogy ha egy komplex függvény differenciálható egy nyílt halmazon, akkor végtelen sokszor is az: így minden deriváltja folytonos is. Annyi tehát a különbség a kétféle bizonyítás eredményessége között, hogy kiindulásul feltesszük-e a derivált folytonosságát (ami végülis úgyis igaznak bizonyul).<sup>44</sup>

<sup>44</sup> $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  esetben tehát nincsenek nyílt halmazon differenciálható de nem folytonosan differenciálható függvények;  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvények között vannak. (Az  $f(x)=|x|$  valós abszolútérték-függvény *nem* jó példa: ez  $x=0$ -ban *nem differenciálható*.) Egy ismert példa viszont:  $f(x)=x^2 \sin(1/x)$ , ha  $x \neq 0$ , és  $f(0)=0$ . Ellenőrizhetjük (külön vizsgálva  $x=0$ -t), hogy ez mindenhol differenciálható, de a derivált nem folytonos  $x=0$ -ban.

### 3.6. Integrálok útfüggetlensége: közvetlen alkalmazások

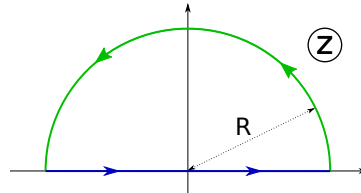
Az eddigiek alapján sok *valós integrált* kezelhetünk. Összetevőink: integrálokat felülbecsülhetünk, határértékeiket vizsgálhatjuk (ld. a korábbi 3.2. szakaszt, ill. vonalintegrálokra a (3.10) képletet), valamint zárt görbére vett integrál nulla, ha az integrandus egy egyszeresen összefüggő környéken differenciálható. Az alábbiakhoz egyszer *ötlet* kellett; mi most így alakítjuk ki az „érzékét”.

• Első példa: az alábbi integrállal Newton-Leibniz-formulával nem boldogulunk. Persze számítógéppel kiszámolhatnánk, de „otthonos” érzést nyújt, hogy ismert számra jutunk.

$$\int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} \equiv \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R dx \frac{\sin x}{x} =? \quad \text{Állítás: } \int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}. \quad (3.21)$$

Ez **improprius** integrál (ld. a 3.2. szakaszban is): rendes (Lebesgue-)integrálként nem létezik, csak a felírt  $R \rightarrow \infty$  határértékként, de ez nem sok vizet zavar; éppen erre a határértékre vagyunk kíváncsiak. A levezetés ötlete: egy jól kapcsolódó  $f(z)$  függvény és  $\gamma$  zárt integrációs út. Utóbbi legyen az  $\mathfrak{J}(z) \geq 0$  félsíkon lévő  $R$  sugarú félkörív, bezárva a  $[-R, R]$  szakasszal, a függvény pedig

$$\text{legyen } f(z) = \begin{cases} \frac{e^{iz}-1}{iz}, & \text{ha } z \neq 0, \\ 1, & \text{ha } z=0, \end{cases}$$



A  $\frac{\sin x}{x}$  függvény  $x=0$ -ban véges 1 (határ)értékű; a komplex  $f(z)$  szempontjából is egyedül  $z=0$  kérdéses, de úgy csináltuk, hogy  $z=0$  körül hatványsorba fejthessük: az exponenciális sorából  $\frac{e^{iz}-1}{iz} = 1 + \frac{iz}{2!} + \frac{(iz)^2}{3!} + \frac{(iz)^3}{4!} + \dots$ . A függvényünknek tényleg létezik  $z=0$ -ban határértéke: 1, ezért definiáltuk őt ennyinek itt. Emellett (ld. a korábbi 1.3. hatványsoros szakaszt is) tényleg mindenhol differenciálható, és kapcsolódik is a feladatunkhoz: ha  $z \equiv x \in \mathbb{R}$ , akkor  $\operatorname{Re} f(x) = \frac{\sin x}{x}$ . Továbbá „illeszkedik” a felfelé kitérő integrációs úthoz az, hogy  $|e^{iz}|$  csökken, ha  $\mathfrak{J}(z) \rightarrow +\infty$ .

A Cauchy-tétel miatt tehát az  $f(z)$  függvényünknek nulla a  $\gamma$ -ra vett (pozitív irányítású) vonalintegrálja, amit viszont konkrétan paraméterezve is felírhatunk:

$$0 = \oint_\gamma dz f(z) = \int_{-R}^R dx f(x) + \int_{\text{körív}} dz f(z) = \int_{-R}^R dx \frac{\sin x}{x} + i \int_{-R}^R dx \frac{1 - \cos x}{x} + \int_0^\pi d\varphi [\exp(iRe^{i\varphi}) - 1].$$

A  $[-R, R]$  szakaszra vett integrál valós integrál, beírtuk  $f(z)$  valós és képzetes részeit. A félkörívet a  $\varphi$  szöggel paramétereztük:  $z(\varphi) = Re^{i\varphi}$ ; a  $\frac{dz(\varphi)}{d\varphi}$  éppen kiejti  $f(z)$  nevezőjéből  $iz(\varphi)$ -t. Az első felírt tag a kérdéses integrál kétszerese (páros függvényről van szó), a második tag pedig nulla, mert páratlan függvény integrálja  $-R$ -től  $R$ -ig. A harmadik tagban a  $-1$ -es rész integrálja  $-\pi$ .

Ha még azt is tudnánk, hogy készen is lennénk: összerakva azt kapnánk, hogy

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \int_0^\pi d\varphi \exp(iRe^{i\varphi}) \right] = 0, \quad 0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ 2 \int_0^R dx \frac{\sin x}{x} - \pi \right] \Rightarrow \underline{\underline{\int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}}}.$$

A hiányzó láncszem integrandusára  $|\exp(iRe^{i\varphi})| = e^{-R \sin \varphi}$ . A felső félköríven  $\sin \varphi > 0$ : emiatt minden adott  $\varphi$ -nél az  $R \rightarrow \infty$  esetben az integrandus nullához tart, ahogy céloztunk is erre. Azonban (a határok környéke miatt) az egész szakaszon nem tudunk nullához tartó konstans értékkel felülbecsülni. A *Lebesgue-tétel* kell (ld. a fentebbi 3.2. közjáték-szakaszt): ha van olyan  $g(x)$  integrálható függvény, ami mindenhol abszolútértékben nagyobb-egyenlő, mint minden integrandus az

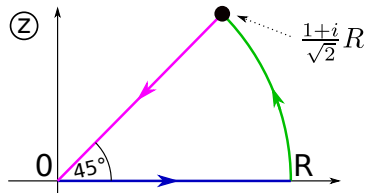


$R \rightarrow \infty$  határátmenet során, akkor biztos lehetünk benne, hogy az integrálok határértéke is nulla. Ezzel már nyerünk itt: a konstans 1 integrálható  $[0, \pi]$ -n, és nagyobb-egyenlő, mint  $e^{-R \sin \varphi}$ , minden  $R$ -re egyszerre. Emiatt az integrál határértéke tényleg létezik, és egyenlő a határértékfüggvény (a konstans 0) integráljával, ami nulla. **Kész:** bebizonyítottuk (3.21)-et.

• Nézzünk egy bonyolultabb példát, hogy a módszerek részben vérünké váljanak. A fénytannban (ernyő széle melletti *fényelhajlás* tanulmányozásakor) kerülnek elő az ún. **Fresnel-integrálok:**

$$\text{Állítás:} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R dx \cos(x^2) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R dx \sin(x^2) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (3.22)$$

A  $\sin(x^2)$ -et és a  $\cos(x^2)$ -et összerakhatnánk valamilyen  $x^2$  változójú exponenciálissá, ami esetleg a Gauss-integrálra vezet. Valóban, az a nyerő ötlet, ha a (mindenhol differenciálható)  $e^{iz^2}$  függvényt integráljuk egy  $R$  sugarú *nyolcadkörtörcikkre*. Az integrál nulla; ebből kiindulva

$$0 = \oint_{\gamma} dz e^{iz^2} = \int_{1.\text{él}} dz e^{iz^2} + \int_{\text{körív}} dz e^{iz^2} + \int_{2.\text{él}} dz e^{iz^2}.$$


Paraméterezzünk! Az első tag valós értelmezési tartományú integrál 0-tól  $R$ -ig, kiírjuk a valós és képzetes részeket. A második tagba a körvonal  $z(\varphi) = Re^{i\varphi}$  paraméterezése kerül; ne feledjük  $\frac{dz}{d\varphi}$ -t. A harmadikban a  $45^\circ$ -os élen megyünk *vissza*: az irányt az  $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$  szám jelöli ki, a paraméterezés tehát  $z(t) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}t$ , és  $t$ - $R$ -től 0-ig fut. A  $\frac{dz}{dt}$  derivált itt konstans, rögtön kiemeljük. Összerakva:

$$0 = \int_0^R dx \cos(x^2) + i \int_0^R dx \sin(x^2) + \int_0^{\pi/4} d\varphi i R e^{i\varphi} \exp(i(R e^{i\varphi})^2) + \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_R^0 dt \exp \left\{ i \left( \frac{1+i}{\sqrt{2}} t \right)^2 \right\}. \quad (3.23)$$

Az utolsó tagban visszafordíthatjuk az irányt egy  $-1$  szorzóval, és elvégezhetjük a kitevőben a négyzetre emelést. Így tényleg a Gauss-integrált kapjuk:

$$-\frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^R dt e^{-t^2}, \quad \text{ennek határértéke az } R \rightarrow \infty \text{ esetben:} \quad \rightarrow -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

A körcikkvonalból jövő középső tag integrandusának abszolútértékére pedig azt kapjuk, hogy

$$|i R e^{i\varphi} \exp(i(R e^{i\varphi})^2)| = R \exp(-R^2 \sin(2\varphi)).$$

Ez olyan, hogy ha  $\sin(2\varphi) > 0$ , akkor nullához tart  $R \rightarrow \infty$  esetén (mivel  $e^{-R^2}$  gyorsabban csökken, mint ahogy  $R$  nő). Csak abból, hogy ez az integrandus *pontonként* nullához tart, még *nem* feltétlenül következne, hogy ezen középső *integrál értéke* is nullához tart. Ha viszont ezt mégis belátnánk, akkor az iménti (3.23) egyenlőség azt adná  $R \rightarrow \infty$ -nél, hogy

$$0 = \int_0^\infty dx \cos(x^2) + i \int_0^\infty dx \sin(x^2) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (\text{improprius, } \int_0^R, \text{ majd } R \rightarrow \infty \text{ értelemben),}$$

ennek valós és képzetes részéből pedig a fent állított (3.22) egyenlőségeket kapjuk. A hiányzó láncszem: a (3.23) felírásban a középső (a körcikkvonalból jövő) integrál nullához tartása. Már tudjuk, hogy az integrandus *pontonként* nullához tart. A *Lebesgue-tételt* tudva: ha találunk *integrálható majoránst*, azzal együtt már következne, amit szeretnénk. Először keressünk

olyan függvényt, ami a  $\varphi$  változónak minden értékére nagyobb-egyenlő, mint az integrandusok abszolútértéke, minden szóba jövő  $R$  esetén (ami ugye valamilyen fix értéktől kezdve  $\infty$ -hez tart). Hasonlóan ahhoz, ahogy a Lebesgue-tételre a 3.2. szakaszban nézett utolsó példa esetén tettük, meg kell keresni, hogy minden adott  $\varphi$ -nél  $R$ -et változtatva mi a lehető legnagyobb integrandus-abszolútérték, azaz  $Re^{-R^2\sin(2\varphi)}$  maximumát kell megkeresni adott  $\varphi$ -nél az  $R$  függvényében. Lásuk:  $\frac{d}{dR}(Re^{-R^2\sin(2\varphi)}) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \frac{1}{R} - 2R\sin(2\varphi) \stackrel{!}{=} 0$ , vagyis a maximumhely:  $R = \frac{1}{\sqrt{2\sin(2\varphi)}}$ , ezt visszahelyettesítve a maximumérték adott  $\varphi$ -nél  $\frac{1}{\sqrt{2e\cdot\sin(2\varphi)}}$ . Ez  $\varphi=0$  körül végtelenhez tart, mégis: integrálható.<sup>45</sup> Van tehát integrálható majoráns: elvartunk minden szálát.

*Megjegyzés:* a látott gondolatmenet sokadszorra megy ilyen simán. Próbáltam utalgatni a gondolkodás menetére is; ha az ember hasonlókat próbál, „több részletben”, érzésszintű ötletekkel jön rá a megoldásra (pl. most arra, hogy a kapott majoráns integrálható, de még előbb: hogy a körívre vett integrálnak valahogy nullához kell tartania, sőt: hogy éppen emiatt jó a látott integrációs utat választani); a megérzések aztán már vezetnek a bizonyítás kidolgozásához.

• Fontos alkalmazást nyer majd **Gauss-integrálok** általánosítása komplex paraméterekre. Emlék:

$$\text{Ha } \alpha \in \mathbb{R}^+ \text{ pozitív, } \beta \in \mathbb{R} \text{ pedig bármilyen valós szám, akkor } \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha x^2 + \beta x\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} e^{\frac{\beta^2}{2\alpha}}. \quad (3.24)$$

Mi a helyzet, ha  $\beta$  komplex? Állítás: **pontosan ugyanez a képlet** adja meg az eredményt. Ezt később nagyon egyszerűen belátjuk, de a mostani gondolatkörben is levezetjük. Emlék:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}\alpha x^2 + \beta x} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{\alpha}{2}\left(x - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \frac{\beta^2}{2\alpha}} = e^{\frac{\beta^2}{2\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{\alpha}{2}\left(x - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2}, \quad \text{ez valós és komplex } \beta\text{-ra is működik.}$$

Ha  $\beta/\alpha$  valós, akkor az  $x = t + \frac{\beta}{\alpha}$  módon áttérhettünk a  $t$  változóra (azaz: eltolhattuk a változót); ekkor az integrálási határok,  $-\infty$  és  $\infty$  ugyanazok maradnak, és a kapott  $\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\frac{\alpha}{2}t^2}$  integrál az alapvető Gauss-integrál,  $\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}$ . Így jött ki annak idején az iménti (3.24) eredmény  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  esetén.

Az  $x = t + \frac{\beta}{\alpha}$  helyettesítés problémás komplex  $\beta$  esetén: ekkor az integrálási határookra nem mondanánk, hogy  $\pm\infty$  maradnak. Ha  $\Im(\beta) \neq 0$ , akkor ha  $x$ -szel  $-\infty$ -ből indulunk és  $\infty$ -be érkezünk, akkor  $t$ -nek úgymond  $-\infty - \frac{i}{\alpha}\Im(\beta)$ -ből kell indulnia és  $\infty - \frac{i}{\alpha}\Im(\beta)$ -ba érkeznie: az út képzetes irányban eltolódik. Pont ilyenekkel foglalkozunk mostanában; azt kellene tehát belátni, hogy

$$\text{nemcsak az igaz, hogy } \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}, \quad \text{hanem még az is, hogy } \int_{-\infty-ib}^{\infty-ib} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}, \quad \text{ahol } b \in \mathbb{R} \text{ adott szám.}$$

Az  $e^{-z^2}$  egészfüggvény: zárt görbére vett integrálja nulla. Vegyünk egy  $-R$ -től  $R$ -ig ill.  $0$ -tól  $-ib$ -ig terjedő téglalapot: konkrétan felírva, az ábrával is segítve értelemszerűen kijelölve a darabokat:

$$\int_{-R}^R dz e^{-z^2} + \int_{-R-ib}^{-R} dz e^{-z^2} + \int_{-R-ib}^{R-ib} dz e^{-z^2} + \int_{R-ib}^R dz e^{-z^2} = 0.$$

<sup>45</sup>Azon múlik ez, hogy az  $f(x) = 1/\sqrt{x}$  függvény egy  $[0, a]$  véges szakaszra integrálható (noha  $x=0$  körül végtelenhez tart). Nekünk itt a  $\varphi=0$  körüli viselkedés a lényeg: itt  $\sin(2\varphi) \approx 2\varphi$ , így sejtethetjük, hogy a felírt függvényünk tényleg integrálható. Konkrétabban:  $0$  és  $\pi/4$  között  $\sin(2\varphi) \geq \frac{4}{\pi}\varphi$  (ezt a szinuszgörbébe szelőt húzva láthatjuk), emiatt  $\frac{1}{\sqrt{2e\cdot\sin(2\varphi)}} \leq \sqrt{\frac{\pi}{8e}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varphi}}$  az érdekes tartományon; utóbbi függvény integrálható, így az előbbi is az.

(Figyelem: szívesen mondanánk, arra hajazva, hogy *véges zárt* integrációs utakat egymásba átmozgathatunk, hogy a  $-\infty$ -tól  $\infty$ -ig vett eredeti utat elmozgathatjuk  $ib$ -vel lefelé, kész. Mégis jobb most az óvatosság, hiszen most nem zártak a görbék, és nem lenne biztos, hogy a „végtelenben lévő” lezáró szakaszokra vett integrálok tényleg nullák).

Visszatérve a téglalapunkhoz: a két szélső élre vett integrálok nullához tartanak, ha  $R \rightarrow \infty$ . Valóban: a jobb oldali élen  $z = R - it$ , és  $t \in [0, b]$ : itt  $|e^{-z^2}| = e^{t^2 - R^2} \leq e^{b^2 - R^2}$ , ezen konstansnak a véges szakaszra vett integrálja pedig nullához tart  $R \rightarrow \infty$ -nél. Ugyanezt mondhatjuk a bal oldali élre is. Tényleg arra jutottunk tehát (az  $R$ -től  $-R$ -ig vett integrált megfordítva), hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \int_{-\infty - ib}^{\infty - ib} dx e^{-x^2}, \quad \text{így már következik, amit állítottunk: komplex } \beta\text{-ra}$$

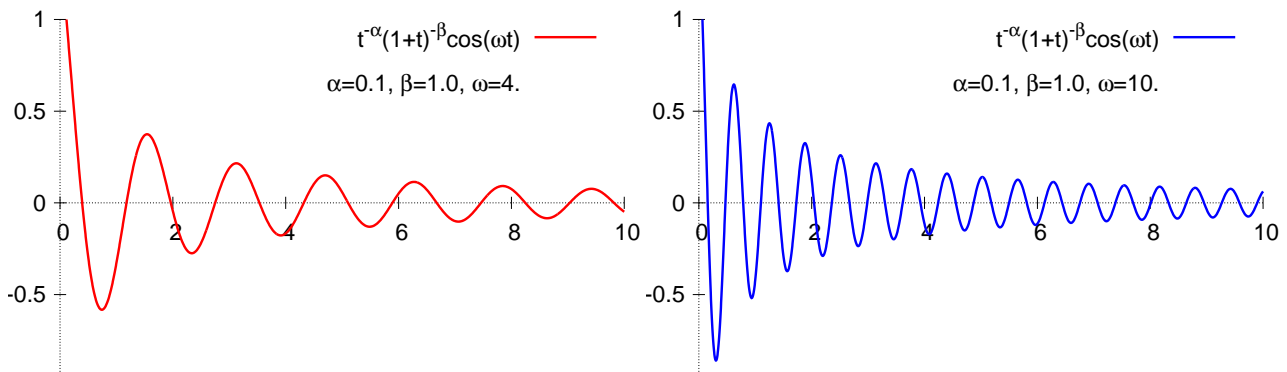
is a (3.24) képlet adja a Gauss-integrál eredményét.

• Bizonyos integrálok érdeemes lehet *más alakba átírni*. Pl. numerikus integrálásnál sem feltétlenül mindegy, hogy mennyire „kellemes” az integrandus. Nem megyünk bele az ilyen módszerekbe, csak egy példát nézünk egy (a mostani témakörben érdekes) lehetőségre (amely *Wick-forgatás* címen köszönhet majd vissza). Tekintsük az  $\omega > 0$  valós változó alábbi módon definiált függvényét:

**Példa:** 
$$\mathcal{I}(\omega) := \int_0^{\infty} t^{-\alpha} (1+t)^{-\beta} \cos(\omega t) dt, \quad \text{ahol most } \alpha \text{ és } \beta \text{ valós paramé-} \quad (3.25)$$
  
 méterek,  $\alpha < 1$ , de  $(\alpha + \beta) > 1$ .

Az integrálhatóság szempontjából  $t=0$  és  $t=\infty$  környéke kérdéses.  $t=0$ -ban a  $t^{-\alpha}$  a gyanús: ha  $\alpha \geq 1$ , akkor ez nem integrálható 0-tól, és ezen a többi szorzó sem segít. Ha  $\alpha + \beta \leq 1$  lenne, akkor az integrandus nem csökkenne elég gyorsan  $t \rightarrow \infty$  felé, nem létezne a (rendes értelmű) integrál.

Az  $\mathcal{I}(\omega)$  integrált nem igazán lehet egyszerű függvényekkel kifejezni.<sup>46</sup> Sőt, ha pl.  $\omega$  nagyobacska,  $\alpha + \beta$  pedig alig nagyobb 1-nél, akkor az integrandus lassan csökken, és gyorsan oszcillálgat:



Minél nagyobb az  $\omega$  frekvencia, annál inkább „kompenzálódnak” a váltakozó területek: az eredmény kicsi lesz. De közben sok-sok nem túl kicsi területet kell összeadni-kivonni. Továbbá ténylegesen  $\infty$ -ig nem tudunk numerikusan integrálni, és a lassú csökkenés miatt nem bizonyos, hogy milyen nagy felső  $t$ -határ „elég”. Ezek együtt *numerikusan is* kellemetlenné teszik az integrálunkat.

Ha a  $t$ -t komplex változónak tekintjük, akkor az integrandus többé-kevésbé mindenhol differenciálható, az integrálunk pedig a valós tengelyen futó „vonalintegrál”. Eszünkbe juthat, hogy valós  $t$ -re  $\cos(\omega t) = \text{Re}(e^{i\omega t})$ , az  $e^{i\omega t}$  pedig (abszolútértékben) csökkenhet is, ha  $t$ -vel lemászunk a valós tengelyről: ha  $t$ -vel *felfelé* megyünk a komplex  $t$ -síkon, akkor  $|e^{i\omega t}|$  exponenciálisan csökken, mert  $t \equiv a + ib$ -t írva (ahol  $a, b \in \mathbb{R}$ )  $|e^{i\omega t}| = |e^{i\omega a} e^{-\omega b}| = e^{-\omega b}$ , és ha  $b$  pozitív és növekszik, akkor ez

<sup>46</sup>Vannak olyan (a matematikában jól kitanulmányozott) *speciális függvények*, amelyekkel igen, de kis túlzással mondhatjuk, hogy az ilyen függvényeket lényegében a felírt integrálkifejezés *definiálja*. Ezeket a függvényeket másképp kiértékelni sem feltétlenül egyszerű: bőven lehet, hogy „nem úszhatjuk meg” a numerikus integrálást.

csökken (mert itt  $\omega > 0$ ). Emiatt az  $e^{i\omega t}$  „jobb”, mint a  $\cos(\omega t)$ ; érdemes tehát így írni az integrált:

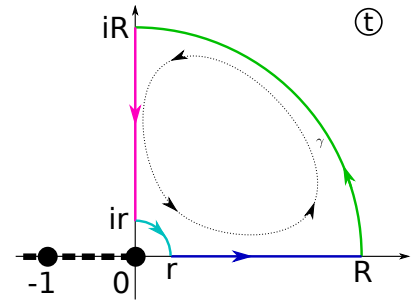
$$\mathcal{I}(\omega) = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty f(t) dt \right\}, \quad \text{ahol } f(t) = t^{-\alpha}(1+t)^{-\beta} e^{i\omega t}. \quad (3.26)$$

Abból, hogy de jó lenne, ha az eredeti helyett egy exponenciálisan csökkenő integrandusunk lenne, eszünkbe jut, hogy a komplex  $t$  síkjában egy bekerekített csúcsú *negyedkört* tekintsünk, amelyre nulla a körintegrál. Az egyik él adja az eredeti integrált, másik a kívánatosabbat, az ívekre vett integrálok pedig nullához fognak tartani: lényegében tehát „elforgattuk” az integrációs utat.

$$0 = \oint_\gamma dt f(t) = \int_r^R dt f(t) + \int_{\text{nagy ív}} dt f(t) + \int_{iR}^{ir} dt f(t) + \int_{\text{kis ív}} dt f(t).$$

$$\text{Továbbá: } \int_r^R dt f(t) = \int_r^R dt t^{-\alpha}(1+t)^{-\beta} e^{i\omega t},$$

$$\text{és } \int_{iR}^{ir} dt f(t) = -i \int_r^R ds (is)^{-\alpha}(1+is)^{-\beta} e^{-\omega s}.$$



Az  $\mathbb{R}$  tengelyen  $r$ -től  $R$ -ig vett integráldarab  $\mathcal{I}(\omega)$ -t adja, ha  $r \rightarrow 0$  és  $R \rightarrow \infty$ , a képzetes tengelyen visszafutót pedig a  $t=is$  paraméterezéssel kezeltük. Ha tudnánk, hogy a körívekre vett integrálok nullához tartanak  $r \rightarrow 0$  és  $R \rightarrow \infty$  esetén, akkor az összeg nullasága miatt írhatnánk, hogy

$$\mathcal{I}(\omega) = \operatorname{Re} \left\{ i^{-\alpha+1} \int_0^\infty ds s^{-\alpha}(1+is)^{-\beta} e^{-\omega s} \right\}, \quad (3.27)$$

ahol még  $(is)^{-\alpha}$ -t is kibontottuk. A lényeg már látszik: az oszcilláló és lassan csökkenő eredeti integrandus helyett gyorsan (exponenciálisan) csökkenőt kaptunk.

A hiányzó láncszemeket sem nehéz pótolni: most elég lesz a „szokásos integrálbecslés”, ld. a (3.10) képletet. Sőt az abszolútértékeket magukat is nagyvonalúan felülbecsülhetjük. Azt persze kihasználjuk, hogy a felső félsíkon futó körívünkön  $|e^{i\omega t}|$  növekedés helyett csökken, de ezt is csak annyiban, hogy itt  $|e^{i\omega t}| \leq 1$ . Tudva még, hogy mivel  $\alpha$  és  $\beta$  valósak,  $|t^{-\alpha}| = |t|^{-\alpha}$ , és hogy ha  $|t|$  elég kicsi, akkor  $|(1+t)^{-\beta}|$  már nem lehet valamilyen konstans  $K$ -nál nagyobb, arra jutunk, hogy

$$\int_{\text{kis ív}} dt f(t) \leq \frac{\pi}{2} r \cdot \max_{t \text{ az íven}} \left| t^{-\alpha}(1+t)^{-\beta} e^{i\omega t} \right| \leq K \cdot \frac{\pi}{2} \cdot r^{1-\alpha}, \quad \text{ez pedig nullához tart, ha } r \rightarrow 0.$$

Ugyanígy a nagy íven: ha  $|t|$  mindenhol elég nagy, akkor  $|(1+t)^{-\beta}|$  felülbecsülhető  $K' \cdot |t|^{-\beta}$ -val, ahol  $K'$  valamilyen konstans (ezt is gondoljuk végig!), így azt kapjuk, hogy

$$\int_{\text{nagy ív}} dt f(t) \leq \frac{\pi}{2} R \cdot \max_{t \text{ az íven}} \left| t^{-\alpha}(1+t)^{-\beta} e^{i\omega t} \right| \leq K' \cdot \frac{\pi}{2} \cdot R^{1-\alpha-\beta}, \quad \text{és ez is nullához tart, ha } R \rightarrow \infty.$$

1. megjegyzés: a Cauchy-tételt azért használhattuk, mert a görbénk tényleg egy olyan *nyílt* hal-mazban futott, ahol a komplex  $f(t)$  integrandus differenciálható. Az  $f(t)$ -nek (az iménti kis ábrán is jelölt módon) a  $t^{-\alpha}$  miatt  $t=0$  elágazási pontja: ezért kellett oda óvatossággal közelíteni.

2. megjegyzés: az  $\mathcal{I}(\omega)$  integrál  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R$  értelemben akkor is létezik, ha  $\alpha + \beta > 1$  helyett csak  $\alpha + \beta > 0$ -t követelünk meg. Ekkor is működik az átalakításunk (sőt, kisebb  $\alpha + \beta$ -k esetén még „kívánatosabb” lehet). Annyi különbség lesz, hogy a szokásos integrálbecslés helyett csak a Lebesgue-tétellel derül ki a nagy ívdarab járulékanak nullához tartása; lesznek még hasonló példák.

## 4. Analitikusság, Cauchy-formulák, Laurent-sor

Az alább tárgyaltak a komplex vonalintegrálok témakörének kiteljesítései ill. sokféle alkalmazás előkészítései is. Az első szakasz most is hiánypótlás, motiváció és lelki támasz a későbbiekhez.

### 4.1. Függvények analitikussága, analitikus elfolytatás

- Idézzük fel az 1.3. szakaszt! *Hatványsornak* hívjuk az ilyen kifejezést:

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

adott  $a_n$  *együtthatók* és  $z_0$  középpont esetén. A sor az (együtthatók viselkedéséből leszűrhető)  $R$  *konvergenciasugarú*,  $z_0$  középpontú körön, a *konvergenciakörön* kívül divergens, belül viszont jól definiált végtelenszer differenciálható függvényt ad meg. (Ha mindent leszűkítünk  $\mathbb{R}$ -re, akkor a *konvergenciakör* a  $]z_0-R, z_0+R[$  szakasz.) A hatványsor deriváltjait tagonkénti deriválással kaphatjuk. Ebből kiderül, hogy az  $a_n$  együtthatót az  $n$ -edik derivált értéke,  $f^{(n)}(z_0)$  adja meg:

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad \Rightarrow \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n. \quad (4.1)$$

- Sok fontos függvényt hatványsorral *definiálunk*, de felmerül az is, hogy egy másképp adott függvényhez van-e olyan hatványsor (adott  $z_0$  pont körül), ami legalábbis  $z_0$  környékén tényleg előállítja a függvényünket. Először is („időhúzásként”) külön fogalomként definiáljuk ezt a tulajdonságot:

**Definíció:** egy  $f$  függvény **analitikus**, ha minden  $z_0 \in \text{Dom} f$  pontnak van olyan nemnulla sugarú körlap-környezete, amin belül  $f$  előállítható egy  $z_0$  középpontú megfelelő hatványsorral. (4.2)

Analitikus függvény tehát minden  $z \in \text{Dom} f$  pont körül **hatványsorba fejthető**. A konvergenciasugarak ekkor minden pontban nullánál nagyobbak, de *egymáshoz képest* eléggé eltérhetnek. Analitikus függvény **értelmezési tartománya nyílt** halmaz (hiszen minden pont körül van olyan környezet, ahol legalábbis *értelmes*); a továbbiakban (ha nem is mondjuk külön) azt is **feltesszük**, **hogy** az értelmezési tartomány **összefüggő** is (azaz nem áll „több darabból”).

- Analitikus függvény nyilván végtelenszer is differenciálható, sőt: egy adott  $z_0$  pont körüli hatványsorának együtthatóit kifejezhetjük a deriváltjaival a (4.1) képlet szerint (és ezt a hatványsort ilyen ráközelítéssel az  $f$   $z_0$  pontbeli *Taylor-sorának* is hívjuk). Az analitikusság mint külön fogalom létjogosultságához mutatni kellene egy végtelenszer differenciálható („sima”) függvényt, ami viszont nem analitikus. A szokásos ilyen (**ellen**)**példa** *valós* függvények között:

$$\begin{array}{l} \text{A következő } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ függvény minden-} \\ \text{hol sima, de } x=0\text{-ban nem analitikus:} \end{array} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ e^{-1/x}, & \text{ha } x > 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

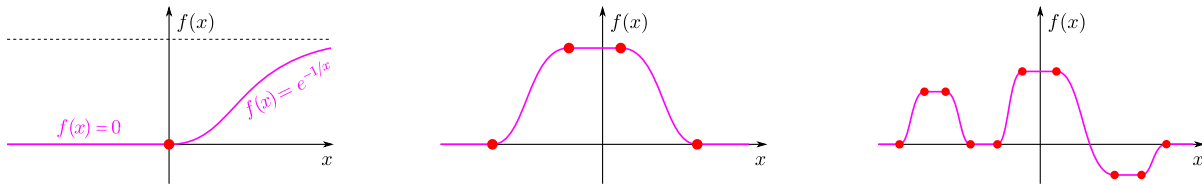
A simaság szempontjából egyedül az  $x=0$  hely kérdéses. Itt balról a függvény végtelenszer differenciálható, és minden deriváltja nulla, jobb oldalról ( $x>0$ -ra) pedig az  $e^{-1/x}$ -et kell deriválgatni:

$$f(x) = e^{-1/x}, \quad f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x}, \quad f''(x) = \left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3}\right) e^{-1/x}, \quad f'''(x) = \left(\frac{6}{x^4} - \frac{6}{x^5} + \frac{1}{x^6}\right) e^{-1/x}, \quad \dots$$

$x>0$ -nál minden derivált az  $e^{-1/x}$ -nek és az  $1/x$  egy polinomjának szorzata, így  $x \rightarrow 0$ -ra ezekben az  $e^{-1/x}$  tényező a végtelenhez tartó  $1/x$  függvényében *exponenciálisan* tart nullához, a maradék

pedig csak *polinom módjára* nő: ezek közül mindig az exponenciális „nyer”, így minden deriváltnak létezik a jobb oldali határértéke is  $x=0$ -ban, és az is nulla. Így  $f(x)$  tényleg sima:  $x=0$ -ban is végtelenszer differenciálható, és minden deriváltja nulla itt. Utóbbi miatt viszont az  $x=0$  körüli Taylor-sora az azonosan nulla függvényt állítja elő. Ezért, mivel ez az  $f(x)$  az  $x=0$  *semmilyen kicsi környezetén sem* konstans 0, az  $x=0$  körül nem fejthető hatványsorba.<sup>47</sup>

Egy ilyen példa már „megnyitja a mélységeket”: *nagyon sok*  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény van, ami sima, de nem analitikus (pl. a látott példát továbbfejlesztve gyárthatunk olyanokat, amelyek konstans értékek között „váltakoznak”, simán, de az „indulási pontokban” nem analitikusan).



25. ábra. Végtelenszer differenciálható, de nem analitikus  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvények (a „nem analitikus pontok” kiemelve): a tárgyalt példa, ill. az ezt továbbfejlesztve kapható újabb lehetőségek.

- Optimistább megközelítés: ha *tudjuk*, hogy egy függvény analitikus, akkor erős következtetéseket tehetünk. Az **analitikus függvények „merevek”**, nem „tekergethetjük” őket ide-oda.

**Állítás:** legyen  $f$  analitikus függvény,  $U \subset \text{Dom} f$  nemüres nyílt részhalmaz. Ha  $f$  az  $U$ -n mindenhol nulla, akkor az egész  $\text{Dom} f$ -en azonosan 0. (4.4)

Azaz ha bármilyen kicsi nyílt („kövér belsejű”) halmazon egy analitikus függvény nulla, akkor ahova csak összefüggően elterjeszkedhetünk, ott is. (Más oldalról: ahol egy nulla-függvény „elstartol” nullától, ott garantáltan nem analitikus; ilyen mutatnak az iménti példaábrák.)

Bizonyítás: legyen  $U'$  az a legbővebb összefüggő nyílt halmaz, ahol  $f \equiv 0$ ; nyilván  $U \subset U' \subset \text{Dom} f$ . Tegyük fel, hogy  $U' \neq \text{Dom} f$ . Ekkor lenne olyan  $z_0 \in \text{Dom} f$ , ami  $U'$ -nek *határpontja*. Az  $f$  a  $z_0$  pontnak egy  $O \not\subset U'$  környezetében is előállna  $z_0$  körüli hatványsorként, de a(z együtthatókat is megadó) deriváltjai  $z_0$ -ban mind nullák lennének, mert  $U'$  belseje felől közelítve nullák a különbségi hányadosok. Emiatt  $f \equiv 0$  lenne  $O$ -n, így  $O \cup U'$  olyan  $U'$ -nél bővebb összefüggő nyílt halmaz lenne, amin  $f \equiv 0$ . Ez ellentmondás, mert  $U'$ -ről feltettük, hogy a legbővebb ilyen. Vagyis  $U' = \text{Dom} f$ .

- Tetézhetjük: nyílt („kövér”)  $U$  részhalmaznál kevesebb is elég. Ugye egy  $z_0$  pont egy  $H$  halmaz *torlódási pontja*, ha a  $z_0$  bármilyen (kicsi) nyílt környezetében  $H$ -nak végtelen sok pontja van.

**Állítás:** ha  $f$  analitikus,  $H \subset \text{Dom} f$  olyan részhalmaz, aminek van torlódási pontja  $\text{Dom} f$  belsejében, és  $f|_H \equiv 0$ , akkor  $f \equiv 0$ . (4.5)

Bizonyítás: az  $f(z)$ -t  $\sum_n a_n (z - z_0)^n$  hatványsor adja meg a  $z_0$  torlódási pont egy  $O$  környezetében. Tegyük fel, hogy van az  $a_n$  együtthatók között nem nulla: jelöljük  $a_N$ -nel a legelső ilyet! (Lehet persze  $N=0$  is.) Az első  $N$  tag nulla: az  $\frac{f(z)}{(z - z_0)^N}$  függvénynek, mivel ez az  $O \setminus \{z_0\}$ -n  $\sum_n a_{n+N} (z - z_0)^n$  alakba írható, van határértéke  $z = z_0$ -ban, méghozzá  $a_N \neq 0$ . Másrészt a  $z_0$ -beli határértéke csakis nulla lehetne, mert  $z_0$ -hoz bármilyen közel is vannak  $H$ -beli pontok, amelyekben  $\frac{f(z)}{(z - z_0)^N}$  nulla. Ez

<sup>47</sup> Megjegyzés: ez az ellenpélda-függvény nemcsak „szőrözésre” jó. A termodinamikában pl. sokféle *eloszlásfüggvény* a  $T$  hőmérséklettől ilyen,  $e^{-\alpha/T}$  módon függ (ahol minden esetben  $\alpha > 0$ ), sőt néha ezt  $T=0$  környékén szeretnénk közelítőleg vizsgálni. Ehhez a (nem működő) szimpla sorfejtés helyett bonyolultabb módszerek kellene majd.



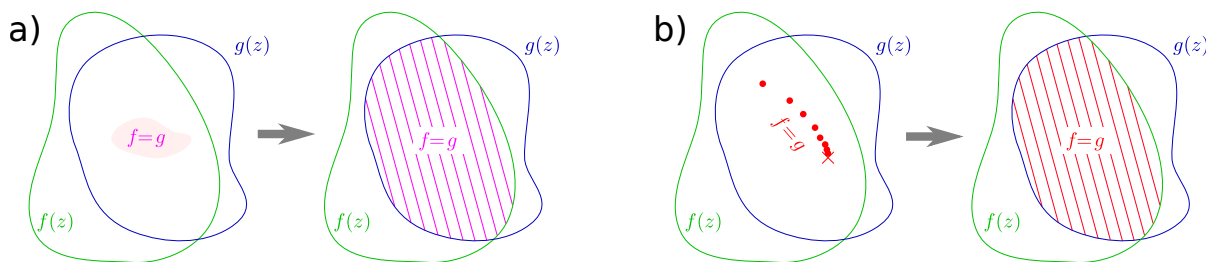
ellentmondás. *Nem lehetséges* tehát, hogy van nemnulla együttható:  $\frac{f(z)}{(z-z_0)^N}$ , így  $f(z)$  is az  $O$  környezetben azonosan nulla. Visszavezetődünk az előző állításra: kész.

Hivatkozni kellett az előző (4.4) állításra; ugyanakkor az eme mostaninak speciális esete is, hiszen egy nyílt  $U \subset \mathbb{C}$  halmaznak minden pontja torlódási pont is. Másik tipikus eset, hogy  $H = \mathbb{R}$ , vagy  $H = I \subset \mathbb{R}$  intervallum; ilyenkor is *van* torlódási pont (minden  $I$ -beli pont az).

• Két analitikus függvény,  $f(z)$  és  $g(z)$  esetén az  $f-g$  különbség is analitikus.<sup>48</sup> Az, hogy  $f=g$  valahol, pontosan azt jelenti, hogy  $f-g$  nulla itt. Átfogalmazhatjuk tehát az előzőeket:

**Állítás:** legyenek  $f$  és  $g$  analitikusak,  $\text{Dom} f \cap \text{Dom} g$  nemüres, nyílt, összefüggő. Legyen a  $H$  halmaz olyan, hogy van torlódási pontja  $\text{Dom} f \cap \text{Dom} g$  belsejében. (Ha  $H$  a  $\text{Dom} f \cap \text{Dom} g$  nyílt részhalmaza, az tehát bőven jó.)  
Ha  $f=g$  teljesül a  $H$  halmazon, akkor  $f=g$  igaz az egész  $\text{Dom} f \cap \text{Dom} g$ -n. (4.6)

Szavakban: ha két analitikus függvény megegyezik legalább az értelmezési tartományaik közös részének egy mondott fajta részhalmazán, akkor mindenütt megegyeznek, ahol csak értelmezettek.



26. ábra. Analitikus függvények egyenlősége következik szűkebb halmazokon (bal oldalon: nyílt halmazon, jobb oldalon: torlódási pontot tartalmazó halmazon) vett egyenlőségből.

• Ezen alapszik az **analitikus elfolytatás** fogalma. Legyen  $f$  analitikus,  $g$  is az, és  $\text{Dom} f \subset \text{Dom} g$ , vagyis  $g$  bővebben értelmezett. Ekkor ha  $g$  megegyezik  $f$ -vel a  $\text{Dom} f$ -en, akkor a bővebb  $\text{Dom} g$  halmazon értelmezett analitikus függvények közül ő az egyetlen ilyen. (Ha lenne másik, mondjuk  $g_2$ , akkor ez megegyezne  $g$ -vel a  $\text{Dom} f$ -en, de emiatt mindenhol máshol is.) Átfogalmazva:

Ha analitikus  $f$  függvényhez találunk egy bővebb halmazon értelmezett  $g$  analitikus függvényt, ami megegyezik  $f$ -fel, ahol csak  $f$  értelmes, akkor az adott bővebb halmazon az ilyen  $g$  egyértelmű. (4.7)

• Ezt a  $g$  függvényt ilyenkor az  $f$ -nek a bővebb halmazra való *analitikus elfolytatásának* hívjuk. Általában nem „szórakozásból” vesszük szűkebbre  $\text{Dom} f$ -et. Tipikus eset, hogy egy  $f$  analitikus függvényt értelmezünk valamilyen formulával (pl. hatványsorral, paraméteres integrállal), ami „természerszerűleg” egy adott halmazon értelmes. *Ha ezután* találunk olyan analitikus  $g$ -t, ami bővebben értelmezett, és (több-kevesebb szenvedéssel) belátjuk, hogy  $g = f$  a szűkebb  $\text{Dom} f$ -en, akkor mondhatjuk, hogy  $f$ -et sikerült „analitikusan elfolytatni”. Noha ekkor  $g$  a bővebb halmazon létezik és egyértelmű, mégis őt a  $\text{Dom} f$ -en kívül általában nem tudjuk megadni az  $f$ -et definiáló eredeti formulával (ami tipikusan csak  $\text{Dom} f$ -en értelmes). Más módon kellhet tehát  $g$ -t „kifejezni”; ez sokszor egy lépésben történik azzal, ahogy egyáltalán „kitaláljuk” a megfelelő  $g$ -t.

<sup>48</sup>Ugyanis minden  $z$  pont környezetének vegyük az  $f$  és a  $g$   $z$ -beli analitikusságának megfelelő környezetei közül a szűkebbet; ezen belül biztos előállítja  $f-g$ -t a két hatványsor különbsége.

• Nézzünk egy egyszerű példát, ami közel hozza ezeket! Tegyük fel, hogy már ismerjük a hatványsorokat; azt, hogy az általuk (a konvergenciakörön belül) előállított függvény mindenhol analitikus is, azt is higgyük el (nemsokára most már tényleg belátjuk). Tekintsük az alábbi ismerős függvényt:

$$f(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \text{és } \text{Dom } f = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \right\}.$$

A konvergenciasugár  $R=1$ : ezért adódott természetesen, hogy az értelmezési tartomány az origó körüli  $R=1$  sugarú körlap legyen. Itt ez az  $f$  analitikus. Ha viszont most valaki megsúgja, hogy ez az  $f(z)$  a körlapon belül kifejezhető, mint  $\frac{1}{1-z}$ , akkor rájöhettünk arra, hogy

$$g(z) = \frac{1}{1-z} \quad \text{az egész } \mathbb{C}\text{-n értelmezhető, kivéve } z=1\text{-et.}$$

Ez a  $g(z)$  analitikus, és a  $|z| < 1$  körlapon megegyezik a hatványsorral értelmezett analitikus  $f(z)$  függvénnyel: ilyen értelemben tehát az így, bővebben értelmezett  $g(z) = \frac{1}{1-z}$  függvény az eredeti  $f(z)$ -nknek az egyértelmű analitikus elfolytatása. A  $g(z)$ -t az eredeti halmazon kívül (pl.  $z=2$ -ben) hiába is próbálnánk az  $f$ -et megadó képlettel (a hatványsorral) kiszámolni: más formula kell(ett). Most esetleg fel sem tűnt a lényeg (mert annyira vérünkben van, hogy az  $\frac{1}{1-z}$  a geometriai sorösszeg); bonyolultabb esetekben viszont éppen ez az ugrás (hogy *meztaláljuk* a bővebben is értelmezhető kifejezést) lehet a nemtriviális lépés. A 6. fejezetben megvizsgáljuk a *gamma-függvényt*, aminek kapcsán egy összetettebb példát látunk erre az eljárásra.

\* \* \*

Láttuk, hogy  $\mathbb{R}$  értelmezési tartományú függvényeknél a végtelenszer differenciálhatóság nem elég az analitikussághoz. Utaltunk már rá; most kimondjuk:  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvények ha (egy nyílt halmazon) egyszer *differenciálhatók*, akkor *analitikusak is*, emiatt végtelenszer is differenciálhatók. (Ezért nem húztuk az időt az iménti példában, hogy belássuk, hogy a megadott  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvényeink analitikusak: differenciálhatók; ez elég.) Az analitikusság tehát az a (korábban pedzegetett, a „simaságnál is kicsit jobb”) tulajdonság, amivel komplex differenciálható függvények rendelkeznek (és emiatt a valós és képzetes részeik, „ $U$  és  $V$ ”, is kell, hogy rendelkezzenek).

A következőkben rátérünk a fejezet egyik fő témájára, a *Cauchy-formulákra*: ezek az alkalmazásokban is fontosak, de elvi eredményekhez is vezetnek: pl. ezeket használva bizonyítható a differenciálható függvények analitikussága. Az alkalmazások szempontjából elég *megjegyezni*, hogy differenciálható függvény analitikus, azaz hatványsorba fejthető, és ezt tudva memorizálhatók a Cauchy-formulák is. Először ezt az utat követjük végig, aztán bizonyítgatunk rendesebben.

## 4.2. Cauchy formulái

• Legyen az  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvény egy összefüggő nyílt halmazon differenciálható. *Tegyük fel*, hogy analitikus is, azaz  $\text{Dom } f$  minden  $z_0$  belső pontjához létezik hatványsor, ami előállítja őt ekörül:

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

$$a_0 = f(z_0), \quad a_1 = f'(z_0), \quad a_2 = \frac{1}{2!} f''(z_0), \quad a_3 = \frac{1}{3!} f'''(z_0), \quad \dots \quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0). \quad (4.8)$$

Ezt fogjuk a  $z_0$ -t megkerülő utakra vett körintegrálokkal összekapcsolni. Eszünkbe juthatnak a  $(z-z_0)^m$  függvények körintegráljai (ld. a 3.3. szakasz vége felé). Készítsük el ezért a következő



függvényeket, melyek a  $z_0$ -t kivéve mindenhol értelmesek és differenciálhatók:

$$\begin{aligned}\frac{f(z)}{z-z_0} &= \frac{a_0}{z-z_0} + a_1 + a_2(z-z_0) + a_3(z-z_0)^2 + a_4(z-z_0)^3 + \dots, \\ \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} &= \frac{a_0}{(z-z_0)^2} + \frac{a_1}{z-z_0} + a_2 + a_3(z-z_0) + a_4(z-z_0)^2 + \dots, \\ \frac{f(z)}{(z-z_0)^3} &= \frac{a_0}{(z-z_0)^3} + \frac{a_1}{(z-z_0)^2} + \frac{a_2}{z-z_0} + a_3 + a_4(z-z_0) + \dots, \\ \text{továbbá} \quad \frac{f(z)}{(z-z_0)^k} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-k} = \dots + \frac{a_{k-1}}{z-z_0} + \dots\end{aligned}$$

Emlékszünk: egy  $z_0$ -t megkerülő útra a  $(z-z_0)^m$  függvények közül (ahol  $m$  bármilyen egész) egyedül az  $m=-1$ -nek megfelelő  $\frac{1}{z-z_0}$ -nak nem nulla a körintegrálja; ennek értéke  $2\pi i$ . Ha tehát a kijelölt,  $z-z_0$  hatványával osztott függvényeinknek egy ilyen, a  $z_0$ -t megkerülő útra vett körintegrálját tekintjük, csak az  $\frac{1}{z-z_0}$ -s tag nem ad nullát. Ezeket emeltük ki pirossal. Ezek alapján tehát:

$$\begin{aligned}\oint^{(z_0+)} dz \frac{f(z)}{z-z_0} &= \underbrace{\oint^{(z_0+)} dz \frac{a_0}{z-z_0}}_{=2\pi i \cdot a_0} + \underbrace{\oint^{(z_0+)} dz a_1}_{=0} + \underbrace{\oint^{(z_0+)} dz a_2(z-z_0)}_{=0} + \underbrace{\oint^{(z_0+)} dz a_3(z-z_0)^2}_{=0} + \dots, \\ \oint^{(z_0+)} dz \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} &= \underbrace{\oint^{(z_0+)} dz \frac{a_0}{(z-z_0)^2}}_{=0} + \underbrace{\oint^{(z_0+)} dz \frac{a_1}{z-z_0}}_{=2\pi i \cdot a_1} + \underbrace{\oint^{(z_0+)} dz a_2}_{=0} + \underbrace{\oint^{(z_0+)} dz a_3(z-z_0)}_{=0} + \dots, \\ \oint^{(z_0+)} dz \frac{f(z)}{(z-z_0)^3} &= \underbrace{\oint^{(z_0+)} dz \frac{a_0}{(z-z_0)^3}}_{=0} + \underbrace{\oint^{(z_0+)} dz \frac{a_1}{(z-z_0)^2}}_{=0} + \underbrace{\oint^{(z_0+)} dz \frac{a_2}{z-z_0}}_{=2\pi i \cdot a_2} + \underbrace{\oint^{(z_0+)} dz a_3}_{=0} + \dots, \\ \text{az általános} \quad \oint^{(z_0+)} dz \frac{f(z)}{(z-z_0)^k} &= \underbrace{\dots}_{=0} + \underbrace{\oint^{(z_0+)} dz \frac{a_{k-1}}{z-z_0}}_{=2\pi i \cdot a_{k-1}} + \underbrace{\dots}_{=0}, \\ \text{tagra pedig:}\end{aligned}$$

ahol tagonként integráltunk (ami esetleg gyanús). Mindenesetre az eredmények ( $2\pi i$ -vel osztva):

$$a_0 = \oint^{(z_0+)} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z)}{z-z_0}, \quad a_1 = \oint^{(z_0+)} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}, \quad a_2 = \oint^{(z_0+)} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}, \quad \dots \quad a_{k-1} = \oint^{(z_0+)} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z)}{(z-z_0)^k}. \quad (4.9)$$

Már csak arra kell emlékeznünk, hogy az  $a_0, a_1, a_2, \dots$  együtthatók értékeit az  $f$ -nek és deriváltjainak a  $z_0$ -ban felvett értékei adják meg, ahogy azt az imént, a (4.8) képletben is felidéztük.

• Ezennel el is érkeztünk a *Cauchy-formulákhoz*. A nulladikat külön felírjuk:

$$\text{Cauchy-formula:} \quad \frac{1}{2\pi i} \oint^{(z_0+)} dz \frac{f(z)}{z-z_0} = f(z_0). \quad (4.10)$$

Szavakban: ha  $f$  egy halmazon differenciálható, akkor az  $\frac{f(z)}{z-z_0}$ -t egy ebben futó olyan zárt görbére integrálva, amely megkerüli  $z_0$ -t, a függvénynek  $z_0$ -ban felvett értékét kapjuk ( $2\pi i$ -vel szorozva). Emiatt komplex differenciálható függvény különféle pontokban felvett értékei szorosan összefüggnek: egy görbén felvett értékek már meghatározzák a görbén belüli pontokban felvett értékeket. Emögött mostani gondolatmenetünkben az analitikus függvények „merevsége” rejlik tehát.

A hatványsor többi együtthatójára, vagyis az  $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$  beazonosítással  $f$  deriváltjainak

$z_0$ -beli értékeire pedig (most a  $k$  indexet  $n+1$ -re cserélve) az alábbi *Cauchy-formulák* adódnak:

$$\text{Cauchy-formulák: } \quad \frac{n!}{2\pi i} \oint dz \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = f^{(n)}(z_0). \quad (4.11)$$

Ha már elhittük az önálló (4.10) Cauchy-formulát, akkor ez utóbbiakat megkaphatjuk abból is közvetlenebbül. A (4.10)-ben a  $z$  szerinti integrál eredménye  $z_0$  függvénye; a *paraméteres integrál differenciálási szabályával* az integrandust  $n$ -szer parciálisan deriválva

$$2\pi i \cdot f^{(n)}(z_0) = \frac{d^n}{dz_0^n} \oint dz \frac{f(z)}{z-z_0} = \oint dz \frac{\partial^n f(z)}{\partial z_0^n (z-z_0)} = \oint dz f(z) \frac{n!}{(z-z_0)^{n+1}}, \quad \text{kész.}$$

Ugyebár  $\frac{\partial}{\partial z_0} \frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{(z-z_0)^2}$ ,  $\frac{\partial}{\partial z_0} \frac{1}{(z-z_0)^2} = \frac{2}{(z-z_0)^3}$ ,  $\frac{\partial}{\partial z_0} \frac{2}{(z-z_0)^3} = \frac{2 \cdot 3}{(z-z_0)^4}$ , stb., az integrandus pedig ilyen egyszerűen függött  $z_0$ -tól (mert  $f(z)$  a  $z_0$  szempontjából konstans), így kaptuk a felírt alakokat.

\* \* \*

• A Cauchy-formulák tehát egy zárt görbén belül előállítják egy differenciálható  $f$  függvénynek és deriváltjainak értékeit, ha  $f$  értékei ismertek a görbén. Ez van annyira meglepő, hogy rendesebb bizonyításokat is igényeljünk. Nem bizonyos még ugye, hogy differenciálható függvény analitikus, vagy hogy tényleg integrálhattunk tagonként a végtelen összegben (amiből fent csak egy-egy nemeltűnő tag maradt). Először jöjjön a (4.10) **Cauchy-formula**; az **állítás**:

$$\text{Ha az } f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ függvény differenciálható egy egyszerűen összefüggő nyílt halmazon, akkor egy benne futó } \gamma \text{ zárt görbére és egy azon belüli } z_0 \text{ pontra} \quad \frac{1}{2\pi i} \oint dz \frac{f(z)}{z-z_0} = f(z_0). \quad (4.12)$$

A **bizonyítás** kihasználja, hogy  $f$  differenciálható a  $z_0$  pontban: emiatt az  $f$  függvényt így írhatjuk:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z-z_0) + \mathcal{O}(z-z_0), \quad \text{és } \mathcal{O}(z-z_0) \text{ olyan függvény, amire igaz, hogy } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\mathcal{O}(z-z_0)}{z-z_0} = 0.$$

Ez alapján az integrálunkra (kiemelve a konstans  $f(z_0)$  és  $f'(z_0)$  értékeket) azt írhatjuk, hogy

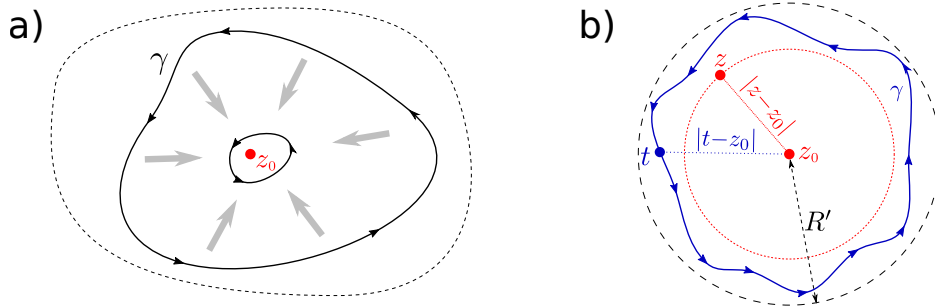
$$\oint dz \frac{f(z)}{z-z_0} = f(z_0) \cdot \underbrace{\oint dz \frac{1}{z-z_0}}_{=2\pi i} + f'(z_0) \cdot \underbrace{\oint dz 1}_{=0} + \underbrace{\oint dz \frac{\mathcal{O}(z-z_0)}{z-z_0}}_{= (*)}.$$

Ha belátnánk, hogy a (\*)-gal jelölt integrál nulla,  $2\pi i$ -vel osztva készen is lennénk. Most ki kell használni, hogy  $f$  differenciálható a halmazban a  $z_0$ -on kívül is *mindenhol*: emiatt ugyanitt az  $\frac{f(z)}{z-z_0}$  függvény is differenciálható, tehát az integrál útfüggetlenségére vonatkozó *Cauchy-tétel* (és a tartományunk egyszerűen összefüggősége!) miatt a  $\gamma$  görbénket „ráhúzzhatjuk” a  $z_0$  pontra. Közben az eredeti zárt vonalintegrál értéke, így (mivel a többi tagot konkrétan kiszámoltuk) a (\*) integrálunk értéke is *ugyanannyi* marad. Viszont a szokásos integrálbecslést alkalmazva

$$\left| \oint_{\gamma} dz \frac{\mathcal{O}(z-z_0)}{z-z_0} \right| \leq \ell(\gamma) \cdot \max_{z \in \gamma} \left| \frac{\mathcal{O}(z-z_0)}{z-z_0} \right|, \quad \text{ahol } \ell(\gamma) \text{ a görbe hosszát jelöli.} \quad (4.13)$$

A maximum a  $\gamma$  görbén véve értendő. Mivel  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\mathcal{O}(z-z_0)}{z-z_0} = 0$ , ha ráhúzzuk  $\gamma$ -t  $z_0$ -ra, ez a maximumérték is nullához tart, továbbá ekkor  $\ell(\gamma) \rightarrow 0$  is igaz. A (\*) integrál tehát egyrészt ugyanannyi marad a görberáhúzás közben, másrészt abszolútértékben (durván, de mégiscsak) felülbecsülhettük egy nullához tartó mennyiséggel. Emiatt tehát a (\*) integrál *tényleg* nulla: készen vagyunk.

*Megjegyzés:* az egyszeres összefüggőség szemléletes értelmében alapján világos, hogy *tényleg* működik ez a „ráhúzás”; ennek részleteivel (ill. az idevágó topológiai kérdéseket áthidaló tárgyalásmóddal) sem most, sem későbbi hasonló esetekben nem foglalkozunk ebben a jegyzetben.<sup>49</sup>



27. ábra. a.) A Cauchy-formula bizonyításához a görbét ráhúzzuk  $z_0$ -ra. b.) Az analitikusság bizonyításához (ld. rögtön) futtathatjuk úgy az utat, hogy a rajta lévő  $t$ -kre  $|t-z_0| > |z-z_0|$  legyen.

• Következő lépés a  $z_0$ -beli analitikusságot belátni. Állítsuk elő ezért a (most már rendesebben bebizonyított) Cauchy-formulával  $f(z)$ -t nemcsak  $z_0$ -ban, hanem egy ettől különböző  $z$ -ben is. *Jelölésváltoztatás:* a  $z_0$  körül vizsgálódunk egy másik  $z$ -ben, úgyhogy az integrálási változót most  $t$ -vel jelöljük. Ugye  $z-z_0$ -ban szeretnénk hatványsort kapni, ezért eszünkbe jut, hogy a Cauchy-formulában majdnem úgy szerepel az igazi  $z$  változó, mint a geometriai sorösszegben:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(t)}{t-z} dt \quad \Rightarrow \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(t)}{t-z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{t-z_0}} dt. \quad (4.14)$$

Utóbbi törtet  $z-z_0$  hatványai szerint haladva esetleg geometriai sorba tudjuk fejteni, így:

$$\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{t-z_0}} = 1 + \frac{z-z_0}{t-z_0} + \left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^2 + \left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^3 + \dots; \quad \text{de ez pontosan akkor igaz, ha } \left|\frac{z-z_0}{t-z_0}\right| < 1.$$

Hogy a feltétel teljesül-e az előkerülő  $t$ -kre, az attól függ, merre fut az út: még csak azt tudjuk, hogy megkerüli  $z$ -t. Tegyük fel most viszont, hogy  $f$  a  $z_0$  pont körül valamilyen  $R'$  sugarú nyílt körlapon mindenhol differenciálható, és hogy a  $z$  ezen a körlapon belül van! Ekkor az integrál változatlanul maradásával átvihetjük olyan görbébe (*futtathatjuk úgy*) az integrációs utat, hogy a rajta lévő  $t$ -kre  $|z-z_0| < |t-z_0|$ , azaz  $\left|\frac{z-z_0}{t-z_0}\right| < 1$  legyen. (Azaz: az út a  $z_0$  körüli  $|z-z_0|$  sugarú zárt körlapon kívül, de az  $R'$  sugarú nyílt körlapon belül fusson: feltevésünk szerint  $|z-z_0| < R'$ , így „elfér” ide, ld. az iménti ábrán). Futtassuk így az utat; így az ekkor  $z_0$ -t *is* meg kell, hogy kerülje. Ekkor beírhatjuk az iménti geometriai sorfejtést, és **ha integrálhatunk tagonként**, akkor

$$\begin{aligned} f(z) &= \oint \frac{dt}{2\pi i} \frac{f(t)}{t-z_0} \cdot \left(1 + \frac{z-z_0}{t-z_0} + \frac{(z-z_0)^2}{(t-z_0)^2} + \frac{(z-z_0)^3}{(t-z_0)^3} + \dots\right) = \underbrace{\oint \frac{dt}{2\pi i} \frac{f(t)}{t-z_0}}_{:=a_0} + \\ &+ (z-z_0) \cdot \underbrace{\oint \frac{dt}{2\pi i} \frac{f(t)}{(t-z_0)^2}}_{:=a_1} + (z-z_0)^2 \cdot \underbrace{\oint \frac{dt}{2\pi i} \frac{f(t)}{(t-z_0)^3}}_{:=a_2} + (z-z_0)^3 \cdot \underbrace{\oint \frac{dt}{2\pi i} \frac{f(t)}{(t-z_0)^4}}_{:=a_3} + \dots \equiv \\ &\equiv a_0 + a_1 \cdot (z-z_0) + a_2 \cdot (z-z_0)^2 + a_3 \cdot (z-z_0)^3 + \dots \end{aligned} \quad (4.15)$$

<sup>49</sup>Aki akar, nézzon utána a *görbék indexfüggvénye* néven futó komplex függvénytanai témakörnek!

• Tisztázni kell(ene), hogy itt *tényleg* integrálhattunk tagonként. Ez egy matematikusi léleknek igen, de az alkalmazások szempontjából nem annyira fontos: a C.2. függelékre hagyjuk. Ezt meghitelezve viszont elmondhatjuk, hogy *bebizonyítottuk*, hogy az  $f(z)$  függvényt  $z_0$  körül *tényleg*  $z-z_0$  szerinti hatványsorba fejthetjük: **komplex differenciálható függvény** *tényleg* **analitikus**. Ránézve az előző (4.15) eredményre az is látszik, hogy az együtthatókat éppen azok az integrálok adják meg, amelyeket a pongyolább (4.9) beazonosításból származtattunk:

$$a_0 = f(z_0) = \oint_{(z_0+)} \frac{dt}{2\pi i} \frac{f(t)}{t-z_0}, \quad \text{továbbá ezt is és az összes deriváltat is összefoglalva:} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \oint_{(z_0+)} \frac{dt}{2\pi i} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}.$$

Ezek *tényleg* a (4.11) Cauchy-formulákhoz vezetnek. (Figyelem: *ezen integrálokban* csak  $z_0$  az izolált szingularitás: az út elég, ha  $z_0$ -t megkerüli;  $z$  ugye „el is tűnt” kézenközön.)

*Megjegyzés:* kétféle képletünk is van tehát egy  $f(z)$  függvény hatványsorának együtthatóira: az  $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$  mellett a Cauchy-formulákkal (integrálokkal) is kifejezhetjük őket. Egyszerűbb esetekben konkrét számoláshoz a deriváltas változat célszerűbb: ilyenkor az integrálképlet „túlkapás”; utóbbiakat elmélyültebb fajta vizsgálatokhoz célszerű alkalmazni.

### 4.3. A Cauchy-formulák néhány további következménye

• Differenciálható  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvény analitikus:  $\text{Dom } f$  egy  $z_0$  belső pontja körül **hatványsorba fejthető**. Most az is közelebb kerül, hogy egy ilyen sornak **mennyi a konvergenciasugara**. Hatványsor a konvergenciakörén *belül* differenciálható függvényt ad meg: olyan tartomány, ahova  $f$  nem folytatható el differenciálhatóan, nem lehet a ( $z_0$  körüli) konvergenciakörön belül, azaz a konvergenciasugár *legfeljebb* annyi, amilyen sugarú körre  $f$  analitikusan elfolytatható. Másrészt amilyen sugarú körre elfolytatható, *azon belül* *tényleg* alkalmazhatjuk a Cauchy-formulák (és így a sorbafejthetőség) imént látott levezetését, így itt *tényleg* konvergens lesz a hatványsor. Összerakva:

Differenciálható  $f$  adott  $z_0$  körüli hatványsorának az **a legnagyobb  $R$  érték** a konvergenciasugara, amilyen sugarú  $z_0$  körüli nyílt körlapra  $f$  elfolytatható analitikusan.

Más oldalról: ha egy hatványsor konvergenciasugara véges  $R$ , és az itt általa előállított függvényt megpróbáljuk analitikusan elfolytatni bővebb tartományra, akkor egy dolog biztos: van *legalább egy pont* az  $R$  sugarú körvonalon, aminek a környezetében nem értelmezhető differenciálható (analitikus) módon az elfolytatás. Az alappélda itt is az  $1 + z + z^2 + z^3 + \dots$  sor (melyre  $R=1$ ): az elfolytatás, az  $\frac{1}{1-z}$  szinte mindenhol differenciálható, de pont a körvonalon  $z=1$ -ben *tényleg* nem.

• Ha pl.  $f$  egészfüggvény, akkor minden pont körül hatványsorba fejthető *végtelen konvergenciasugárral*. Ha  $f$  csak izolált szingularitásokban nem differenciálható (amelyek *nem megszüntethetők*, vagyis  $f$  nem terjeszthető ki rájuk úgy, hogy ott is differenciálható legyen; ld. alább is), akkor  $f$ -nek egy adott (nem szinguláris) pont körüli sorának konvergenciaköre azon legnagyobb nyílt körlap, amit a pontunk köré úgy „felfújhatunk”, hogy épp ne tartalmazzon egy szingularitást se. Ezt így aligha lehetne a konvergenciasugárnak az 1.3. szakaszban látott limsup-os képletéből leszűrni.

**Példa:**  $f(z) = \text{tg}(z)$  differenciálható  $z_0=0$  körül, tehát analitikus. Nehézkes megadni az itteni hatványsorát (ld. e jegyzet *legeslegeslegutolsó képletét*), de a konvergenciasugár biztos  $\frac{\pi}{2}$ : ilyen messze van(nak) a legközelebbi szingularitás(ok), a valós  $\pm \frac{\pi}{2}$  számok. A  $z_0=0$  körüli sorának konvergenciasugara is  $\frac{\pi}{2}$ : itt a legközelebbi szingularitások a képzetes tengelyen  $\pm \frac{i\pi}{2}$ -ben vannak.

- A Cauchy-formula érdekes következménye az ún. **maximum-elv** alábbi legegyszerűbb változata.

**Állítás:** nyílt halmazon differenciálható  $f$  függvény esetén az  $|f|$  abszolútértéknek a halmazon **belül nincs lokális maximumhelye**. (4.16)

*Bizonyítás:* ha  $z_0$  a  $\text{Dom} f$  akármelyik belső pontja, akkor ekörül van egy olyan kis körvonal, ami ő maga is, és minden ennél kisebb sugarú körvonal is teljes egészében  $\text{Dom} f$ -ben van. Ha a  $t$  integrálási változó egy ilyen ( $r$  sugarú) körön fut, akkor  $\left|\frac{1}{t-z_0}\right|$  értéke azonosan  $\frac{1}{r}$ . Ezt tudva az erre a körre mint  $\gamma$  görbére felírt Cauchy-formulában alkalmazhatjuk a szokásos integrálbecslést:

$$|f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} dt \frac{f(t)}{t-z_0} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \max_{t \in \gamma} \left| \frac{f(t)}{t-z_0} \right| \leq \frac{2\pi r}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \cdot \max_{t \in \gamma} |f(t)| = \max_{t \in \gamma} |f(t)|.$$

A kapott egyenlőtlenség viszont nem fér össze azzal, hogy  $f(z_0)$  lokális maximumhely, mivel ha az lenne, akkor lenne olyan körünk, amin már  $|f(t)|$  mindenhol kisebb, mint  $|f(z_0)|$ . Készen vagyunk.

Az állítást másképp is megfogalmazhatjuk: differenciálható  $f$  függvény értelmezési tartományának egy **zárt** (a határát tartalmazó) részhalmazán az  $|f|$  a **maximumát a határon veszi fel**. Pongyolán fogalmazva: ha egy nem konstans differenciálható  $f$  függvényt egyre messzebb elfolytatunk, biztos, hogy az összes „korábban már felvett”  $|f|$ -értéknél nagyobbval is találkozunk.

- Az algebra alaptételének bizonyításához a 2.5. szakaszban kihasználtuk a **Liouville-tételt**: *korlátos egészfüggvény konstans*. Most **bebizonyíthatjuk** ezt. Tegyük fel, hogy  $f$  egészfüggvény. Ekkor akármilyen  $z_0$  pont körül hatványsorba fejthető, a hatványsor konvergenciasugara végtelen (a sor mindenhol előállítja  $f$ -et), az együtthatókat pedig megadják a Cauchy-formulák:

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma}^{(z_0^+)} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}} dt.$$

Mivel  $f$  mindenhol differenciálható, akármilyen ( $z_0$ -t megkerülő) zárt  $\gamma$  görbét használhatunk. Legyen most  $\gamma$  egy  $R$  sugarú,  $z_0$  középső kör (és majd az  $R \rightarrow \infty$  eset lesz érdekes). Ha  $t$  ezen a körön fut, akkor  $\left|\frac{1}{(t-z_0)^{n+1}}\right|$  értéke azonosan  $\frac{1}{R^{n+1}}$ . Az  $a_n$  együtthatót ezen körre vett integrállal előállítva, majd a szokásos integrálbecslést alkalmazva tehát

$$|a_n| = \left| \oint_{\gamma} \frac{dt}{2\pi i} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi R \cdot \max_{t \in \gamma} \left| \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}} \right| = R \cdot \frac{1}{R^{n+1}} \cdot \max_{t \in \gamma} |f(t)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |a_n| \leq \frac{1}{R^n} \cdot \max_{t \in \gamma} |f(t)|. \quad \text{Emiatt ha van olyan } K \text{ pozitív szám, amire } |f| \leq K \text{ mindenhol teljesül, akkor } a_n \leq \frac{K}{R^n}.$$

$R$  akármilyen nagy lehet: ha  $n \neq 0$ , akkor  $a_n = 0$  lehet csak. Csak  $a_0$  nem feltétlenül nulla: kész.

- A látott bizonyítási módszer (az ún. **együtthatóbecslés**) egyéb érdekességeket is nyújt. Például: ha egy egészfüggvény legfeljebb olyan gyorsan növekszik, mint egy polinom, *akkor ő polinom*.

**Állítás:** ha  $f$  egészfüggvény, és léteznek  $N \in \mathbb{N}_0^+$  és  $K \in \mathbb{R}^+$  számok, amikkel  $|f(z)| \leq K \cdot |z|^N$  egy korlátos halmazon kívül mindenhol teljesül, akkor  $f$  egy legfeljebb  $N$ -edfokú polinom. (4.17)

A bizonyítás az előző másolata; a különbség: most érdemes a  $z_0=0$ -t rögtön kiszemelni, és itt az elég nagy körvonalon felvett  $|f(t)|$  értékeket  $K$  helyett  $K \cdot |z|^N = K \cdot R^N$ -nel becsülhetjük felül. Ebből az  $a_{N+1}, a_{N+2}, \dots$  együtthatókra adódik, hogy nullák: tényleg polinom a maradék.

#### 4.4. Izolált szingularitások, Laurent-tétel, reziduomtétel

Sok függvénynek vannak *izolált szingularitásai* (ld. a 2.5. szakaszt): ilyen pontban a függvény nem értelmes, de körülötte egy „kipontozott” körlapon differenciálható. Izolált szingularitásokban a *hatványsorba* fejthetőség helyett az ún. *Laurent-tétel* ill. **Laurent-sorfejtés** tesz rendet.

• Először most is „motiváló módon” közelítünk. Alapötlet: az  $\frac{1}{z-z_0}$ ,  $\frac{1}{(z-z_0)^2}$ ,  $\frac{1}{(z-z_0)^3}$  stb. függvények olyanok, hogy  $z_0$  izolált szingularitásuk. Differenciálható függvény  $a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + \dots$  alakú sorként áll elő; ha a függvényünknek ehelyett izolált szingularitása van  $z_0$ -ban, akkor esetleg az előbbieket szellemében negatív kitevős tagok is szerepelnek. Így próbálkozva:

$$f(z) \stackrel{?}{=} \dots + \frac{c_{-3}}{(z-z_0)^3} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n.$$

Ez a sorfejtés lesz a *Laurent-sor*. Az együtthatók pozitív, nulla és negatív indexűek is lehetnek (ezért is jelöltük másképp őket). Idézzük fel az alapvető hurokintegrálokat: egész  $n \in \mathbb{Z}$  esetén

$$\text{ha } n \neq -1, \text{ akkor } \oint^{(z_0+)} dz (z-z_0)^n = 0, \quad \text{ellenben } \oint^{(z_0+)} dz (z-z_0)^{-1} = 2\pi i.$$

Erre gondolva (mint a Cauchy-formulák bevezetésénél) készítsük el a következő sorokat:

$$\begin{aligned} \dots, \quad (z-z_0)^2 f(z) &= \dots + \frac{c_{-3}}{z-z_0} + c_{-2} + c_{-1}(z-z_0) + c_0(z-z_0)^2 + c_1(z-z_0)^3 + \dots \\ (z-z_0) f(z) &= \dots + \frac{c_{-3}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-2}}{z-z_0} + c_{-1} + c_0(z-z_0) + c_1(z-z_0)^2 + \dots \\ f(z) &= \dots + \frac{c_{-3}}{(z-z_0)^3} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots \\ \frac{f(z)}{z-z_0} &= \dots + \frac{c_{-3}}{(z-z_0)^4} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^3} + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_0}{z-z_0} + c_1 + \dots \\ \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} &= \dots + \frac{c_{-3}}{(z-z_0)^5} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^4} + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)^3} + \frac{c_0}{(z-z_0)^2} + \frac{c_1}{z-z_0} + \dots \\ &\dots \text{és a többi,} \end{aligned}$$

majd **integráljuk** ezeket egy  **$z_0$  körüli zárt görbére!** *Feltéve*, hogy tagonként integrálhatunk, az  $\frac{1}{z-z_0}$ -t tartalmazó (pirossal kiemelt) tagok a megfelelő együttható  $2\pi i$ -szeresét adják, a többi pedig nullát: arra jutunk ( $2\pi i$ -kkel osztva), hogy az együtthatókat ilyen vonalintegrálok adják meg:

$$\begin{aligned} \dots \quad c_{-3} &= \frac{1}{2\pi i} \oint^{(z_0+)} dt f(t) \cdot (t-z_0)^2, & \text{vagy összefoglalva az össze-} \\ c_{-2} &= \frac{1}{2\pi i} \oint^{(z_0+)} dt f(t) \cdot (t-z_0), & \text{set (ahol itt tehát az } n \text{ in-} \\ c_{-1} &= \frac{1}{2\pi i} \oint^{(z_0+)} dt f(t), \quad \text{!!!} & \text{dex pozitív, nulla és nega-} \\ c_0 &= \frac{1}{2\pi i} \oint^{(z_0+)} dt \frac{f(t)}{t-z_0}, & \text{atív egész értékű is lehet):} \\ c_1 &= \frac{1}{2\pi i} \oint^{(z_0+)} dt \frac{f(t)}{(t-z_0)^2}, \quad \dots & \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint^{(z_0+)} dt \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}.$$

Látni fogjuk, hogy akkor működik ez, ha a görbe a  $z_0$ -t kivéve csak olyan pontokat kerül meg, ahol  $f$  differenciálható. Ha pl.  $z_0$ -on kívül van más szinguláris pont is, akkor azt biztosan nem szabad.

• Rendes hatványsornál nem voltak negatív indexű  $c_n$ -ek. A  $c_0, c_1, c_2, \dots$  együtthatókat a Cauchy-formulákkal megegyező alakú integrálok adják most is. **Hatványsor** együtthatóit a **deriváltakkal** is megkaphattuk; **itt ez így esélytelen**, mert a függvényünk első körben nem is értelmes, így nem is differenciálható  $z_0$ -ban. Más módszerekkel kellhet adott esetben a  $c_n$ -eket meghatározni; ekkor majd azt is *tudhatjuk*, hogy ezek a  $c_n$ -ek tényleg ugyanannyik, mint az őket megadó felírt integrálok (amelyek elvi jelentőségűek, konkrétan kiszámítani őket azonban általában reménytelen lenne).

• A *Laurent-tétel* az lesz, hogy adott  $f$  függvény adott  $z_0$  izolált szingularitásában *valóban létezik* és egyértelmű az  $f$  ottani Laurent-sora, ami elő is állítja (=tökéletesen jellemzi) a függvényt a  $z_0$  környékén. **Elnevezések:** adott  $f$  függvény adott  $z_0$  izolált szingularitása esetén  $z_0$  az  $f$ -nek

- **megszüntethető szingularitása**, ha  $f$ -nek  $z_0$  körüli Laurent-sorában a negatív indexű  $c_n$  együtthatók mind nullák:  $c_{-1}=c_{-2}=c_{-3}=\dots=0$ ,
- **$m$ -edrendű pólusa**, ha az itteni Laurent-sorban az  $m$ -edik negatív  $c_{-m} \neq 0$ , de a többi negatívabb indexűek már mind nullák:  $c_{-(m+1)}=c_{-(m+2)}=\dots=0$ , (4.19)
- **lényeges szingularitása**, ha  $f$   $z_0$  körüli Laurent-sorában végtelen sok negatív indexű nem nulla  $c_n$  együttható van.

Más lehetőség nincs is. A talán leggyakoribb és legegyszerűbb az **elsőrendű pólus** esete, amikor  $c_{-1} \neq 0$ , de az ennél kisebbek nullák:  $c_{-2}=c_{-3}=c_{-4}=\dots=0$ . A megszüntethető szingularitást néha *nulladrendű pólusnak* is hívják (bár ez félrevezethet, ld. később, a zérushelyek osztályozásánál).

• Egy  $z_0$  izolált szingularitás körüli Laurent-sort (és így  $z_0$  típusát) feltáró módszerek alapja az, hogy *mivel* az itteni Laurent-sor egyértelmű, ezért ha  $z_0$  környékén sikerül a függvényt egy látott alakú,  $n \in \mathbb{Z}$  indexeken végigfutó sorösszeggel előállítani, akkor az *tényleg* a keresett Laurent-sor. Az alábbi példák mindegyikében csak egy  $z_0$  izolált szingularitás van (lássuk is be!):

$f(z) = \frac{\sin z}{z}$ .	A $\sin z$ hatványsorából $z \neq 0$ esetén $\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots$ : ez a kellő Laurent-sor. $c_n=0$ , ha $n < 0$ : itt $z_0=0$ <b>megszüntethető szingularitás</b> .
$f(z) = \frac{1 - e^{1-z}}{(1-z)^2}$ .	Az $\exp$ hatványsorából $z \neq 1$ -re $\frac{1 - e^{1-z}}{(1-z)^2} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2} + \frac{z-1}{3!} - \frac{(z-1)^2}{4!} + \dots$ , ez a Laurent-sor. $c_{-1}=1$ , de $c_{-n}=0$ , ha $n > 1$ , ezért $z_0=1$ <b>elsőrendű pólus</b> .
$f(z) = \frac{1}{(1+z)^3}$ .	$\frac{1}{(z-(-1))^3}$ alakba írva látszik: ez így, ahogy van, egy egyetlen tagból álló Laurent-sor $z_0=-1$ körül, ami <b>harmadrendű pólus</b> , mert csak $c_{-3} \neq 0$ .
$f(z) = e^{-1/z}$ .	Az $\exp$ hatványsorát rendezve $e^{-1/z} = \dots - \frac{z^{-5}}{5!} + \frac{z^{-4}}{4!} - \frac{z^{-3}}{3!} + \frac{z^{-2}}{2!} - \frac{1}{z} + 1$ , ha $z \neq 0$ : ez a $z_0=0$ körüli Laurent-sor. Végtelen sok negatív indexű $c_{-n}$ nem nulla: $z_0=0$ <b>lényeges szingularitás</b> (amire ez standard példa).

• Jöjjön néhány tudnivaló az izolált szingularitások típusairól; részben most bizonyítás nélkül.

1. **Ha  $z_0$  megszüntethető szingularitás**, akkor az ekörüli Laurent-sor ugyanúgy néz ki, mint egy csak pozitív együtthatójú „rendes” hatványsor:  $f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots$ . Emiatt az ilyen függvényt (mivel véges  $c_0$  határértéke van  $z_0$ -ban) kiterjeszthetjük  $z_0$ -ba is („**megszüntethetjük**” a szingularitást): a kiterjesztésnek ugyanez a sor a *hatványsora*, így ez  $z_0$ -ban is biztos differenciálható. Egy megszüntethető szingularitás tehát olyan, mintha egy szép analitikus függvényt szándékosan kilyukasztottak volna  $z_0$ -ban. A fenti példában  $\frac{\sin z}{z}$  ilyen.
2. **Ha  $z_0$  ( $m$ -edrendű) pólus**, akkor ha  $z \rightarrow z_0$ , akkor  $|f(z_0)| \rightarrow \infty$ , hiszen az itteni Laurent-sorban  $c_{-m}(z-z_0)^{-m}$  az első tag:  $(z-z_0)^m$ -nel szorozva olyan sort kapunk, aminek nulladfokú együttha-

tója  $c_{-m}$ , negatív pedig nincs, így  $z_0$ -ban véges  $c_{-m}$  határértéke van. A  $(z-z_0)^m$ -nel visszaosztva kapott  $f(z)$  pedig végtelenhez tart. Pólusba tehát nem folytatható el a függvény analitikusan.

3. Ha  $z_0$  **lényeges szingularitás**, akkor  $f(z)$ -nek  $z_0$ -ban sem véges, sem végtelen határértéke nincs, „összevisszán viselkedik”  $z \rightarrow z_0$  esetén. Az ún. *nagy Picard-tétel* szerint ilyenkor bármilyen kicsi  $r > 0$  esetén a  $z_0$  körüli  $r$  sugarú kipontozott körlapon  $f$  legfeljebb egy kivétellel minden komplex szám értéket végtelen sokszor felvesz. Ebből következik a történetileg korábbi *Casorati-Weierstrass-tétel* is, miszerint minden  $w \in \mathbb{C}$ -re van olyan  $z_0$ -hoz tartó  $z_n$  sorozat, amire az  $f(z_n)$  függvényértékek  $w$ -hez tartanak: ilyen „határértékként” bármilyen  $w$  számot megkaphatunk.<sup>50</sup>

• Kiemelt szerepe (és erre a szerepre is utaló külön neve) van a Laurent-sor  $c_{-1}$  együtthatójának.

Az  $f$  függvény adott  $z_0$  izolált szingularitásbeli **reziduuma** az ottani Laurent-sorának  $-1$ -es indexű  **$c_{-1}$  együtthatója**:

$$\text{Ha } f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad \text{akkor } \text{Res } f(z) \Big|_{z=z_0} := c_{-1}.$$

Más néha a jelölés; általában egyértelmű, ha erre gondol a költő. A reziduum egy adott izolált szingularitásban értendő: ha  $f$ -nek több ilyenje is van, akkor ezek körül más és más lehet az ő Laurent-sora, tehát a reziduumok is alapvetően mások és mások.

*Reziduum* = „maradék”. Amint már láttuk is, az  $f(z)$ -t egy  $z_0$ -t megkerülő görbére integrálva a Laurent-sorból csak a  $-1$ -es indexű tag „marad” (=ad nem nulla járulékot); még egyszer részletesen:

$$\begin{aligned} \oint^{(z_0+)} dt f(t) &= \oint^{(z_0+)} dt \left\{ \dots + \frac{c_{-2}}{(t-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{t-z_0} + c_0 + c_1(t-z_0) + c_2(t-z_0)^2 + \dots \right\} = \dots + \\ &+ c_{-2} \underbrace{\oint^{(z_0+)} \frac{dt}{(t-z_0)^2}}_{=0} + c_{-1} \underbrace{\oint^{(z_0+)} \frac{dt}{t-z_0}}_{=2\pi i} + c_0 \underbrace{\oint^{(z_0+)} dt}_{=0} + c_1 \underbrace{\oint^{(z_0+)} dt (t-z_0)}_{=0} + c_2 \underbrace{\oint^{(z_0+)} dt (t-z_0)^2}_{=0} + \dots \end{aligned}$$

vagyis tényleg: a függvényünk ilyen zárt görbére vett körintegrálját a  $z_0$ -beli reziduum adja meg:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint^{(z_0+)} dt f(t) = c_{-1} = \text{Res } f(z) \Big|_{z=z_0}.$$

• A görbe itt meg kellett kerülnie a vizsgált  $z_0$  izolált szingularitást, de mint fentebb is mondtuk, más olyan pontot nem szabad megkerülni, ahol  $f(z)$  nem differenciálható. Gyakran előfordul, hogy a vizsgált függvénynek több izolált szingularitása is lehet, és egy integrációs út ezeket valamilyen előírt módon megkerüli. Erre az esetre vonatkozik az eddigiek alapján eléggé kézenfekvő

**Reziduomtétel:** ha a  $\gamma$  önmagát nem metsző zárt görbe olyan nyílt halmazban fut, amiben  $f$  differenciálható véges sok  $z_k$  izolált szingularitást kivéve, és

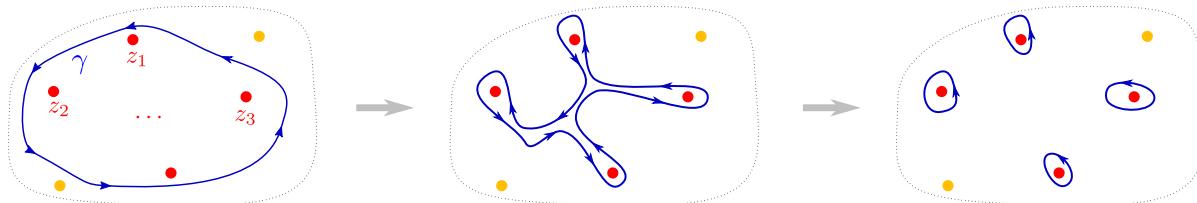
$$\text{a } \gamma \text{ pozitív irányítású, akkor: } \oint_{\gamma} dz f(z) = 2\pi i \cdot \sum_{z_k \in \text{Int } \gamma} \text{Res } f(z) \Big|_{z=z_k}.$$

Szavakban: ilyen zárt görbére vett integrál értékét a megkerült szingularitások reziduumainak

<sup>50</sup>Ez a helyzet az iménti példa  $e^{-1/z}$  függvényével is, aminek  $z_0=0$  lényeges szingularitása. Azzal, hogy ennek mint  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvénynek nincs határértéke  $z_0=0$ -ban, tökéletesen összefér az, hogy  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $x \rightarrow 0$  módon (a pozitív valós tengely mentén) vett határérték 0. Ezt is kihasználtuk a fejezet elején a 4.1. szakaszban, amikor ebből gyártottunk példát sima, de nem analitikus  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényre. Nyilvánvaló a mondottakból, hogy ugyanaz a függvény nem terjeszthető ki úgy, hogy példa lehessen sima de nem analitikus  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvényre (amilyen ugye nincs is).



összegei adják meg ( $2\pi i$ -vel szorozva). Az  $\text{Int}\gamma$  itt a  $\gamma$  görbén belüli részt jelenti: ha vannak olyan izolált szingularitások is máshol, amiket  $\gamma$  nem kerül meg, azok nem adnak járulékot. A bizonyítás lényege: a görbénket a Cauchy-tétel alapján csakis differenciálható tartományokon át mozgatva „szétdarabolhatjuk” olyan görbéké, amelyek egy-egy szingularitást kerülnek meg. Az integrál így az ezekre vettek összege lesz, egy ilyen pedig megad a fenti (4.21) képlet:  $2\pi i$ -vel átszorozva kész.



28. ábra. A reziduomtételhez és bizonyításához: a zárt görbét, ami a szingularitásokat megkerüli, átdarabolhatjuk olyanokba, amelyek egy szingularitást kerülnek meg. Bejelöltem olyanokat is, amelyeket a görbe nem kerül meg: ezek nem szerepelnek az integrál eredményében.

- A reziduomtételt sokszor használjuk; újra kiemelünk néhány körülményt. Sok esetben vannak olyan szingularitások is, amelyeket a kijelölt görbe nem kerül meg: még egyszer hangsúlyozzuk, hogy **csak azon szingularitások** reziduumait kell összeadni, **amelyeket a görbe megkerül!** (Ugyebár *kikötöttük*, hogy ezek csak véges sokan lehessenek.) A felírt alak *pozitív irányítású* görbére igaz (végső soron mert az  $\frac{1}{z-z_0}$  integrálja pozitív irányítású körre  $2\pi i$ ); negatív irányítású görbére vett integrál a pozitív irányításúnak  $-1$ -szerese. **Figyeljünk tehát az irányításra is!**

\* \* \*

- Eddig csak *feltettük*, hogy igaz a Laurent-sorba fejthetőség izolált szingularitás környékén. A jó hír: *tényleg* minden működik úgy, ahogy láttuk. Ehhez érdemes a Laurent-sor létezését precízebben is leülepíteni. Jelölje  $G_r(a)$  az  $a \in \mathbb{C}$  pont körüli  $R$  sugarú nyílt körlapot. A bizonyítandó állítás a

**Laurent-tétel:** ha  $z_0$  az  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvény izolált szingularitása, és  $R > 0$  olyan sugár, hogy  $f$  differenciálható a  $G_R(z_0) \setminus \{z_0\}$  halmazon, akkor ha  $z$  ebben a halmazban van,  $f(z)$  előállítható a következő sorral:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad \text{ahol} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint^{(z_0+)} dt \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}. \quad (4.23)$$

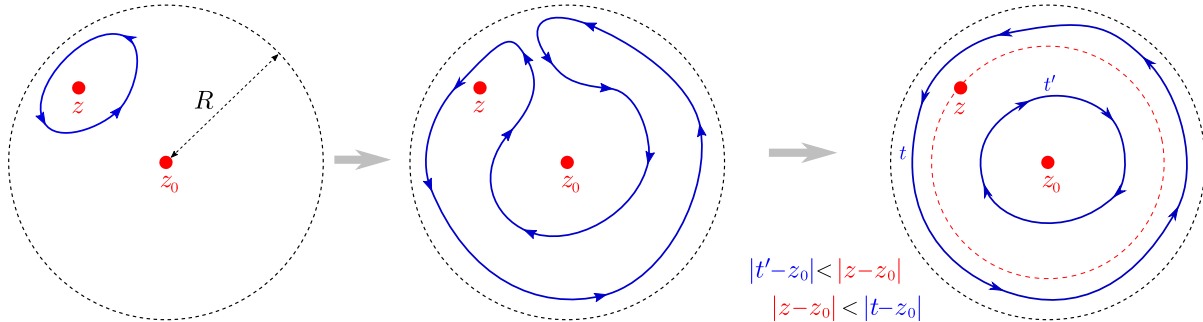
A sor abszolút konvergens és egyenletesen is konvergens minden  $r_1 > 0$  belső és  $r_2 < R$  külső sugarú körgyűrűben (az indexhatárok  $-\infty$ -hez és  $\infty$ -hez tartásában külön). Adott  $f$  és  $z_0$  esetén a  $c_n$  együtthatók egyértelműek.

- A bizonyításhoz állítsuk elő  $f(z)$ -t a Cauchy-formulával egy  $z$ -t igen, de  $z_0$ -t nem megkerülő görbével, majd azt „lassószerűen dobjuk át” két darabban  $z_0$ -t megkerülő görbékbe. A belső, csak  $z_0$ -t megkerülő görbe negatív irányítású lett; pozitív irányításra  $-1$ -gyel szorozva térhetünk át.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint^{(z+)} dt \frac{f(t)}{t-z} = \frac{1}{2\pi i} \oint^{(z+,z_0+)} dt \frac{f(t)}{t-z} - \frac{1}{2\pi i} \oint^{(z_0+)} dt' \frac{f(t')}{t'-z}. \quad (4.24)$$

Mivel  $|z-z_0| < R$ , a külső ( $t$ -vel jelölt integrálási változójú) görbét futtathatjuk a körlapon belül, de a  $z_0$  körüli  $|z-z_0|$  sugarú körön kívül: ekkor  $|t-z_0| > |z-z_0|$  minden  $t$ -re igaz lesz. Hasonlóan, mivel  $|z-z_0| > 0$ , a belső (most  $t'$ -vel jelölt változójú) görbét futtathatjuk a  $|z-z_0|$  sugarú körlapon belül,

hogy  $|t'-z_0| < |z-z_0|$  legyen minden  $t'$ -re. Tegyük is így; ekkor minden  $t$ -re ill.  $t'$ -re  $|\frac{z-z_0}{t-z_0}| < 1$  ill.  $|\frac{t'-z_0}{z-z_0}| < 1$  igazak. Emiatt a fenti integrandusokban (a  $z_0$ -t ügyesen beszúrva) ezen kombinációk szerint geometriai sorba fejthetünk (ahogy korábban a Cauchy-formulák bizonyításánál is tettük).



29. ábra. A Laurent-tétel bizonyításához használt görbeátdobás ill. az utak megszorítása.

A fenti (4.24) kifejezésből így arra jutunk (figyelve a második tag előjelére), hogy

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{(z^+, z_0^+)} dt \frac{f(t)}{t-z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{t-z_0}} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{(z_0^+)} dt' \frac{f(t')}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{t'-z_0}{z-z_0}} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{(z^+, z_0^+)} dt \frac{f(t)}{t-z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z-z_0}{t-z_0} \right)^n + \frac{1}{2\pi i} \oint_{(z_0^+)} dt' \frac{f(t')}{z-z_0} \cdot \sum_{n'=0}^{\infty} \left( \frac{t'-z_0}{z-z_0} \right)^{n'}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

ahol most tömören, szummajellel írtuk a geometriai sort. Most is integrálhatunk tagonként a végtelen összegekben (ezt is a C.2. függelékben bizonyítjuk részletesen): így viszont a tagokból kiemelhetjük a  $z-z_0$  szorzókat, így tényleg  $z-z_0$  hatványai szerint haladó sor(oka)t kapunk:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \cdot \oint_{(z^+, z_0^+)} dt \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{1}{(z-z_0)^{n'+1}} \cdot \oint_{(z_0^+)} dt' f(t') \cdot (t'-z_0)^{n'}.$$

Az első tag együtthatóiban az integrálokban most is észrevehetjük, hogy az *ő szempontjuktól* már nem lényeges, hogy az út megkerülje  $z$ -t, elég, ha  $z_0$ -t megkerüli. Mindkét összegben a pozitív és a negatív hatványokat megfelelően felismerve valóban arra jutottunk, hogy

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n, \quad \text{ahol minden } n \in \mathbb{Z}\text{-re tényleg } c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(z_0^+)} dt \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}.$$

Az együtthatók egyértelműségének bizonyítása lényegében az, ahogyan a szakasz elején bevezettük az őket megadó integrálképleteket: ha  $z_0$  egy környezetében  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ , akkor

$$\oint_{(z_0^+)} dz \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}} = \oint_{(z_0^+)} dz \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^{n-m-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \underbrace{\oint_{(z_0^+)} dz (z-z_0)^{n-m-1}}_{=2\pi i \cdot \delta_{nm}} = \underline{\underline{2\pi i \cdot c_m}}, \quad (4.26)$$

hiszen csak a  $(z-z_0)^{-1}$  integrálja ad nemnulla (hanem  $2\pi i$ ) járulékot, így (a Kronecker-deltával lekötve) csak egy tag marad az összegből. Az együtthatók tehát egyértelműen meghatározottak: akárhogy is találtuk meg őket, tényleg ezekkel a (már többször felírt) integrálokkal egyenlők. A lényeg persze az, hogy itt (4.26)-ban is *tényleg* integrálhattunk tagonként a végtelen összegben: ennek (ill. a további részleteknek: a sor *abszolút* konvergenciájának és a mondott körgyűrűkön való egyenletes konvergenciájának) bizonyítását is a C.2. függelékben olvashatja, akit érdekel.

• A Laurent-tétel iménti levezetése működik bármilyen olyan  $R$  sugarú (kipontozott) körlapon belül, ahova  $f$  differenciálható módon elterjeszthető. Hasonló igaz tehát a Laurent-sor konvergenciájára, mint a Cauchy-formulákat tudva hatványsorára: adott  $z_0$  pont körüli Laurent-sor konvergencia azon legnagyobb  $R$  sugarú kipontozott körlapon, amire  $f$  még analitikusan elfolytatható. Pl. az  $e^{-1/z}$  függvény (mely a  $z_0=0$ -n kívül mindenhol differenciálható) Laurent-sora tényleg mindenhol konvergens. Az  $\frac{1}{\sin z}$  függvénynek a  $z_0=0$  pólus körüli Laurent-sorának konvergenciasugara  $R=\pi$ , mert szingularitások (mégpedig elsőrendű pólusok, ld. alább is) vannak  $n\cdot\pi$ -ben, ahol  $n\in\mathbb{Z}$ .

• **Kitekintés:** ha a vizsgált függvénynek vágásai (is) vannak, akkor ugye azok végpontjai (=az elágazási pontok) *nem izolált szingularitások*. Ezek körül *nem értelmes a Laurent-sor*, és semmi, ami rá épül: pl. a reziduomtétel sem működik a felírt formában. Ha egy zárt görbe pl. egy véges hosszú vágást is megkerül, akkor az ilyenre vett integrált „nem ússzuk meg” reziduumokkal (amik, mint láttuk, az izolált szingularitásokra való „rádarabolásból” jönnek be): kezelni kell a vágást (de más nem) megkerülő körintegrált is. Erre nincs olyan általános recept, mint amilyen az izolált szingularitások körüli körintegrált megadó (4.21) képlet volt, azonban bizonyos esetekben (ld. később) vágásokra is „ráhúzhatjuk” az integrációs utat, egyszerűsítve ezzel a kiszámolandó integrált.

## 4.5. Pólusok és reziduumaik

• Igen sok alkalmazásban a reziduomtételt használjuk; „belépőként” meg kell tudni határozni adott  $f$  függvény adott  $z_0$  izolált szingularitásbeli reziduumát. Mindent megtudhatunk, ha rekonstruáltuk a  $z_0$  körüli Laurent-sort; ez azonban nehézkes is lehet. Jó hír tehát (és a gyakorlatban is fontos), hogy *pólusokban* egyszerűbben is célt érhetünk; ezt vizsgáljuk most. Előfeltétel, hogy (esetleg szintén a teljes Laurent-sor ismerete nélkül) beazonosítsuk, hogy a vizsgált  $z_0$  valóban pólus (és hanyadrendű). Idézzük fel: egy pólus rendje a „legnegatívabb index” értéke, azaz

$$z_0 \text{ } n\text{-edrendű pólus, ha} \quad f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \dots + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots,$$

ott a Laurent-sor ilyen:

vagyis  $c_{-n}\neq 0$ , de a negatívabb indexűek nullák (a többi pedig lehet nulla is, nem is). Speciálisan  $z_0$  elsőrendű pólus, ha ott a Laurent-sor ilyen:  $f(z) = c_{-1}(z-z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots$

• Kézenfekvően **bevezethetjük zérushelyek rendjét** is. Ha az  $f(z)$  függvény a  $z_0$  körül *hatványsorba* fejthető, azaz  $f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$ , akkor ha  $a_0\neq 0$ , akkor  $z_0$  nem is zérushely, ha viszont legalábbis  $a_0=0$ , akkor  $z_0$  legalábbis *egyszeres* zérushely. A hatványsorokat (és deriváltjaikat) ismerve gondoljuk ki, hogy az alábbi megfogalmazások tényleg ekvivalensek:

a  $z_0$ -t az  $f(z)$  függvény  $n$ -szeres zérushelyének mondjuk, ha

$$\begin{array}{lll} f \text{ } z_0 \text{ körüli hatvány-} & \frac{f}{(z-z_0)^n} \text{ véges érték-} & f(z_0)=0, f'(z_0)=0, \\ \text{sorában az első nem-} & \Leftrightarrow \text{hez tart } z_0\text{-ban, de} & \Leftrightarrow \dots, f^{(n-1)}(z_0)=0, \\ \text{nulla tag } a_n(z-z_0)^n. & \frac{f}{(z-z_0)^{n+1}} \text{ már nem,} & \text{de } f^{(n)}(z_0)\neq 0. \end{array}$$

Nem hatványsorral adott függvényre az utolsót kézenfekvő vizsgálni: annyi a  $z_0$  zérushely rendje, ahanyadik  $z_0$ -beli derivált az első nem eltűnő. Egyszeres a zérushely, ha  $f(z_0)=0$ , de  $f'(z_0)\neq 0$ .

**Polinomokra** a zérushely rendjének mostani definíciója **ugyanazt** jelenti, mint a polinom gyökeinek multiplicitásának (azaz az egyszeres, kétszeres, stb. gyökök) már ismert fogalma, hiszen ha  $z_0$  egy polinom  $m$ -szeres gyöke, akkor pont  $(z-z_0)^m$  szerepel a gyöktényező alakban.

- A gyakorlatban legfontosabb eset az, amikor a vizsgálandó  $f$  két (most  $g$ -vel és  $h$ -vel jelölt) függvény hányadosa, amelyek differenciálhatók (azaz analitikusak) egy nyílt tartományon:

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{ahol } h(z)\text{-nek zérushelyei vannak, ott} \\ f(z)\text{-nek izolált szingularitásai lesznek.} \end{array}$$

*Megjegyzés:* lényegében biztos, hogy tényleg *izolált* szingularitásokat kapunk; ha  $h$  zérushelyeinek lenne torlódási pontja a tartományban, akkor az akörüli hatványsort kigondolva, ahogy korábban az analitikus függvények egyértelműségére vonatkozó (4.5) állításnál láttuk, az ilyen  $h$  függvény lényegében azonosan nulla lenne, ahol csak analitikus; ez nem érdekes eset a mostani szempontból.

Az így kapott szingularitások annyiadrendű pólusok, ahányszoros a nevező zérushelye, levonva annyit, ahányszoros zérushelye esetleg a számlálónak van ugyanott (ami ezzel „kompenzálhat”).

Konkrétan:

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Ha egy } z_0 \text{ a } h \text{ nevezőnek } N\text{-szeres, a } g \text{ számlálónak pedig} \\ S\text{-szeres zérushelye, akkor ez a } z_0 \text{ az } f\text{-nek } N-S\text{-edrendű} \\ \text{pólusa (ha } N \geq S\text{), vagy } S-N\text{-szeres zérushelye (ha } S \geq N\text{).} \end{array}$$

Persze a felírt függvény úgy, ahogy van, még  $S \geq N$  esetben sem értelmes  $z_0$ -ban, de ekkor megszüntethető ez a szingularitása: ha megszüntetjük, akkor kapjuk a mondott fajta zérushelyet. Ahogy sejtjük: ahol nincs zérushely, az „nullaszeres zérushelynek” tekintendő, és a nulladrendű pólus (vagy nullaszeres zérushely) véges nemnulla határértékű megszüntethető szingularitást (vagy nem is szingularitást) jelent. Az alábbi indoklás egyúttal megjegyezhetővé is teszi a mondottakat:

ha  $z_0$  a  $h$ -nak  $N$ -szeres zérushelye, akkor  $z_0$  egy (kipontozott) környezetében

$$h(z) = a_N(z-z_0)^N + a_{N+1}(z-z_0)^{N+1} + \dots = (z-z_0)^N [a_N + a_{N+1}(z-z_0) + \dots],$$

ha  $z_0$  a  $g$ -nek  $S$ -szeres zérushelye, akkor egy (esetleg másik) kipontozott környezetben

$$g(z) = b_S(z-z_0)^S + b_{S+1}(z-z_0)^{S+1} + \dots = (z-z_0)^S [b_S + b_{S+1}(z-z_0) + \dots],$$

emiatt a kisebbik kipontozott környezetben biztos igaz, hogy

$$\Rightarrow \quad f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = (z-z_0)^{S-N} \frac{b_S + b_{S+1}(z-z_0) + \dots}{a_N + a_{N+1}(z-z_0) + \dots}.$$

A kiemelés után maradt tört  $z_0$ -beli Laurent-sora pontosan a nulladfokú taggal kezdődik, mert neki  $z_0$ -ban véges (azaz nem nulla, nem végtelen)  $\frac{b_S}{a_N}$  határértéke van. Emiatt  $f$  itteni Laurent-sora a  $(z-z_0)^{S-N}$ -es taggal kezdődik, ami pontosan a mondottakat jelenti  $z_0$ -ra nézvést, akár  $S > N$  (ekkor a szingularitást megszüntetve  $z_0$  zérushely maradt), akár  $N < S$  (ekkor pólust kaptunk).

- Az iménti típusú függvényekkel kapcsolatban be szoktak vezetni egy külön elnevezést:

$$\text{Az } f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ differenciálható függvényt } \mathbf{meromorfnak} \text{ mondjuk, ha } \text{Dom } f \text{ nyílt halmaz izolált szingularitások kivételével, melyek legfeljebb pólusok.} \quad (4.27)$$

A görögös szó jelentése kb. „részben+(szép)alakú”. Az, hogy „legfeljebb pólusok”, úgy értendő, hogy nem lényeges szingularitások. (Szingularitások torlódási pontjai, vágások, elágazási pontok pláne nem megengedettek itt.) Meromorf függvényekre alappéldák olyan törtek, ahol a számláló egészfüggvény és a nevező polinom: ezeknek véges sok pólusuk van (a nevező zérushelyeiben). Ha egy meromorf függvénynek az egész  $\mathbb{C}$ -n végtelen sok pólusa van is,  $\text{Dom } f$  *korlátos zárt* részhalmazán biztosan csak véges sok van: ekkor őt beszorozhatjuk olyan polinommal, aminek pont ugyanezek

a helyeken ugyanolyan rendű zérushelyei vannak; ezzel tehát a mondott részhalmazon mindenhol értelmezett differenciálható függvényt kapunk. Meromorfv függvények tehát korlátos zárt halmazon mindig előállnak egy ott mindenhol differenciálható függvény és egy polinom hányadosaként. Az imént vizsgált  $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$  alakú függvények tehát lényegében éppen a meromorfv függvények.

• Rátérünk arra, hogy ha tudjuk, hogy egy  $f(z)$  függvénynek a  $z_0$  pólusa (és azt is, hogy hanyadrendű), speciálisan pl. ha  $f$  az imént látott  $\frac{g}{h}$  alakú meromorfv függvény, akkor hogyan határozhatjuk meg a  $z_0$ -beli reziduumot. Ez ugye a  $z_0$  körüli Laurent-sor  $c_{-1}$  együtthatója.

Elsőrendű pólusban csak ez az egy negatív indexű tag van, így egy  $z-z_0$ -al való szorzással

$$\text{Elsőrendű pólusban } (z-z_0)f(z) = c_{-1} + c_0(z-z_0) + c_1(z-z_0)^2 + \dots$$

A jobb oldal folytonos függvényt ad meg,  $z \rightarrow z_0$  határértékben a  $z=z_0$ -beli értékét adja, amiben a  $c_{-1}$ -en kívüli többi, legalább egyszer  $z-z_0$ -al szorzódó tag mind nullát ad. Leszűrtük tehát, hogy

$$\text{Ha a } z_0 \text{ (legfeljebb) elsőrendű pólus: } \quad \underline{\underline{\text{Res } f(z) \Big|_{z=z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z-z_0)f(z)]}}. \quad (4.28)$$

Nem írhattuk, hogy *értékeljük ki*  $(z-z_0)f(z)$ -t a  $z_0$  helyen, mert ha  $z_0$  tényleg  $f$  pólusa, akkor  $f$  kifejezése általában önmagában nem értelmes  $z_0$ -ban. A felírt határérték viszont elsőrendű pólusban biztos létezik; konkrét esetben minél nyilvánvalóbb, hogy mennyi a  $(z-z_0)f(z)$  elfolytatásának értéke  $z_0$ -ban, annál nyilvánvalóbb, hogy tényleg ez az érték épp a megkövetelt határérték lesz.

A gondolatmenetből látszik, hogy a (4.28) képlet tényleg csak *legfeljebb* elsőrendű pólusban működhet; magasabbrendű pólusban ill. lényeges szingularitásban nem létezik ez a határérték. Ha viszont működik a képlet, és kiderül, hogy  $c_{-1}=0$ , akkor a szingularitás nem pólus, hanem megszüntethető: csak  $c_0, c_1, \dots$  együtthatók szerepelnek a Laurent-sorban.

• A gyakorlatban **legfontosabb speciális eset** az, amikor mint fent,  $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$  alakban adott, és  $z_0$  **a számlálónak nem** zérushelye, a **nevezőnek pedig egyszeres** zérushelye, azaz  $g(z_0) \neq 0$ , és  $h(z_0)=0$ , de  $h'(z_0) \neq 0$ . **Ekkor** tudhatjuk, hogy  $z_0$  az  $f$ -nek elsőrendű pólusa, és

$$\underline{\underline{\text{Res } f(z) \Big|_{z=z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ (z-z_0) \frac{g(z)}{h(z)} \right] = g(z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z-z_0}{h(z)-h(z_0)} g(z) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}}}, \quad (4.29)$$

hiszen  $h(z_0)$ -t büntetlenül beírhattuk (mert  $\neq 0$ ). Ez a képlet kényelmesen alkalmazható sok esetben.<sup>51</sup> **Figyelem:** tényleg kellett, hogy  $z_0$  a nevező *egyszeres* zérushelye legyen; ha netán alkalmazás közben azt találnánk, hogy  $h'(z_0)=0$ , *akkor rosszul gondoltuk*: nem egyszeres a zérushely.

• Kicsit bonyolultabb hasonló képlet írható fel  $n$ -edrendű pólusokban, ha  $n > 1$ . A trükk: beszorzunk  $z-z_0$  megfelelő ( $n$ -edik) hatványával, hogy létezhessen a  $z \rightarrow z_0$  határérték, majd megfelelő számúszor ( $n-1$ -szer) deriválni kell, hogy pont a kellő  $c_{-1}$ -et „hámozhassuk ki”. Konkrétan: tegyük fel, hogy tudjuk, hogy  $z_0$  az  $f$ -nek legfeljebb  $n$ -edrendű pólusa; ekkor  $z_0$  kipontozott környezetében

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots, \\ \Rightarrow (z-z_0)^n f(z) &= c_{-n} + c_{-n+1}(z-z_0) + \dots + c_{-1}(z-z_0)^{n-1} + c_0(z-z_0)^n + \dots \\ \Rightarrow \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} [(z-z_0)^n f(z)] &= (n-1)! \cdot c_{-1} + \frac{n!}{1!} c_0(z-z_0) + \frac{(n+1)!}{2!} c_1(z-z_0)^2 + \dots \end{aligned} \quad (4.30)$$

<sup>51</sup>Adott  $f = \frac{g}{h}$  esetén a  $g$  és a  $h$  szétválasztása nem egyértelmű. Gondoljuk ki, hogy ugyanazt adja a képlet akkor is, ha  $g$ -t is és  $h$ -t is egy  $z_0$ -ban nem nulla sima  $\chi(z)$ -vel szorzunk, más szóval: „átrakunk egy részt”  $g$ -ből  $h$ -ba.

Tényleg éppen jó így, mert az  $n-1$  darab deriválástól az  $n-1$ -nél kisebb fokú (a  $c_{-2}, \dots, c_{-n}$ -es) tagok kinullázódnak, a  $c_{-1}(z-z_0)^{n-1}$  tag éppen konstans  $(n-1)! \cdot c_{-1}$  lesz, a magasabb fokúak pedig még mindig  $z-z_0$  pozitív hatványait fogják tartalmazni. A kapott kifejezésnek már vehetjük a  $z \rightarrow z_0$  határértékét, amivel  $c_{-1}$ -et, azaz a keresett reziduumot kapjuk. Összefoglalva tehát:

$$\text{Ha a } z_0 \text{ (legfeljebb)} \\ n\text{-edrendű pólus:} \quad \underline{\underline{\text{Res } f(z) \Big|_{z=z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left( \frac{1}{(n-1)!} \left( \frac{d}{dz} \right)^{n-1} [(z-z_0)^n f(z)] \right)}}. \quad (4.31)$$

A mutatott (4.30) levezetés gyorsan rekonstruálható, segít a memorizálásban. A mostani (4.31) képletből persze megkapjuk az elsőrendű pólusra vonatkozó (4.28)-at is az  $n=1$  speciális esetben.

• Ha tudjuk, hogy legfeljebb  $n$ -edrendű pólusról van szó, akkor a Laurent-sor többi együtthatóját is megkaphatjuk az iménti (4.30) átalakításhoz hasonló módszerrel. Ugyanúgy haladva, csak más számúszor deriválva (hogy  $c_{-1}$  helyett egy másik együtthatót hámozzunk ki) ellenőrizzük, hogy

$$\text{Ha } z_0 \text{ legfeljebb } n\text{-edrendű pólus, akkor az ottani Laurent-sor együtthatói:} \quad c_{-m} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left( \frac{1}{(n-m)!} \left( \frac{d}{dz} \right)^{n-m} [(z-z_0)^n f(z)] \right). \quad (4.32)$$

Itt  $m$  legfeljebb annyi lehet, mint  $n$ ; nincs gond az  $(n-m)!$ -sal. A gondolatmenetből látszik, hogy a képlet (noha pólusokra igazán hasznos) érvényes negatív  $m$ -re (pozitív indexű együtthatókra) is, akkor is, ha nem is Laurent-sorról, hanem rendes hatványsorról van szó (azaz  $z_0$  nem is pólus).

• Ha  $f$  racionális törtfüggvény, akkor meromorf véges sok pólussal. Parciális törtekre bontva, a nevező egyik  $z_0$  zérushelyét kiszemelve a *többi zérushelyhez tartozó* parciális törtek  $z_0$  környékén analitikus függvények, melyeknek itteni hatványsorait geometriai sorral megtalálhatjuk. Például:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2+1}, \quad \text{keressük meg a Laurent-sort } z=i \text{ körül!} \\ \Rightarrow \frac{1}{z^2+1} &= \frac{1}{2i} \left[ \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right] = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{z-i} - \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{(z-i)+2i} = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{z-i} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{i}{2}(z-i)} = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2i}}_{=c_{-1}} \frac{1}{z-i} + \underbrace{\frac{1}{4}}_{=c_0} + \underbrace{\frac{1}{4} \frac{i}{2}}_{=c_1} (z-i) + \underbrace{\frac{1}{4} \left( \frac{i}{2} \right)^2}_{=c_2} (z-i)^2 + \underbrace{\frac{1}{4} \left( \frac{i}{2} \right)^3}_{=c_3} (z-i)^3 + \dots \end{aligned}$$

• Ha tehát  $f$  racionális törtfüggvény, akkor  $f$ -nek a nevező egy  $z_0$  zérushelye körüli Laurent-sorának negatív indexű tagjai éppen a parciális törtek közül a  $z_0$ -ra koncentráltak. Ezeknek (a parciális törtekre bontás során ismeretlen) együtthatóit megadja az iménti (4.32) képlet: erre céloztunk korábban az 1.2. szakasz végén. Az egyszeres zérushelyű nevező esetére ott felírt (1.12) képlet éppen az itteni (4.28). A parciális törtekre bontás tehát lényegében a Laurent-sorfejtés alkalmazása.

• Következzék **néhány példa** a szakaszban látottakra. Kérdés: hol vannak a szingularitások, ők mik, és mennyik a reziduumok (ez újdonság a 2.5. szakaszhoz képest). Számoljuk át őket!

$$1. \quad f(z) = \frac{1}{z^2-1}.$$

A nevező másodfokú, és két zérushelye van:  $z=1$  és  $z=-1$ , emiatt (is) mind a kettő egyszeres. (Ez úgy is kiderül, hogy a nevező deriváltja  $2z$ , és ez egyik helyen sem nulla.) A reziduumokra a (4.29) képletet alkalmazhatjuk: ebből  $\text{Res } f(z) \Big|_{z=1} = \frac{1}{2}$ ,  $\text{Res } f(z) \Big|_{z=-1} = -\frac{1}{2}$ .

$$2. \quad f(z) = \frac{e^z-1}{z}.$$

A nevezőnek csak a  $z=0$  zérushelye, és itt a deriváltja (ami a konstans 1) nem nulla, úgyhogy így is látszik, hogy egyszeres zérushely (ki gondolta volna...). Viszont a számláló is nulla itt, de annak deriváltja,  $e^z$  már nem, úgyhogy  $z=0$  a számlálónak is egyszeres zérushelye: a  $z=0$  itt tehát megszüntethető szingularitás (1 határértékkel); a reziduum természetesen nulla.

3.  $f(z) = \frac{z^2}{z^4 - \alpha^4}$ , ahol  $\alpha > 0$  pozitív valós szám.

A nevezőnek négy  $z_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) zérushelye van:  $z_1 = \alpha$ ,  $z_2 = -\alpha$ ,  $z_3 = i\alpha$  és  $z_4 = -i\alpha$ . A nevező deriváltja  $4z^3$ , semelyik  $z_k$ -ban sem nulla: innen (is, és abból is, hogy negyedfokú polinomnak négy zérushelye lett) látszik, hogy mindegyik zérushely egyszeres. A számláló nem nulla egyikben sem: mindegyik  $z_k$  elsőrendű pólus. A (4.29) képlet alapján tehát  $\text{Res } f(z)|_{z_k} = \frac{1}{4z_k}$ .

4.  $f(z) = \frac{z^2 + 2}{z^4 + 5z^2 + 4}$ .

A nevező zérushelyeit kell kitalálni: szorzattá alakítva  $(z^2 + 1)(z^2 + 4)$ , innen látszik, hogy négy darab lesz:  $i$ ,  $-i$ ,  $2i$ ,  $-2i$ . Már a darabszámból is tudhatjuk, hogy egyszeresek, de abból is, hogy a nevező deriváltja,  $4z^3 + 10z$  nem nulla egyikben, sem (hanem rendre:  $6i$ ,  $-6i$ ,  $-12i$ ,  $12i$ ). A számláló értékei pedig rendre:  $1$ ,  $1$ ,  $-2$ ,  $-2$ , ezek sem nullák: elsőrendűek a pólusok. A reziduumok a (4.29) képletből rendre:  $-\frac{i}{6}$ ,  $\frac{i}{6}$ ,  $-\frac{i}{6}$ ,  $\frac{i}{6}$ .

5.  $f(z) = \text{tg } z$ . Első lépés észrevenni, hogy ez is a mostani típusú tört:  $\text{tg } z = \frac{\sin z}{\cos z}$ .

A nevező  $\cos z$  zérushelyei:  $(n + \frac{1}{2})\pi$ , ahol  $n \in \mathbb{Z}$  egész szám lehet. Ezekben a nevező deriváltja (ami  $\sin z$ ) nem nulla (így ezek tényleg a nevező egyszeres zérushelyei), és a számláló (ami most szintén  $\sin z$ ) sem nulla: emiatt ezek a  $\text{tg } z$  elsőrendű pólusai. A reziduumok a törtből így úgy adódnak, hogy a  $\frac{\sin z}{\cos' z}$ -t, azaz  $\frac{\sin z}{-\sin z} = -1$ -et kell itt kiértékelni: mindegyik reziduum  $-1$ .

6.  $f(z) = \text{th } z$ .

$\text{th } z = \frac{\text{sh } z}{\text{ch } z}$ ; a nevező zérushelyei:  $(n + \frac{1}{2})i\pi$ , a nevező deriváltja sem nulla ezekben, és a számláló sem: elsőrendű pólusokról van szó (persze ezt vártuk a  $\text{tg}$  alapján, hiszen szoros a kapcsolat:  $\text{th}(iz) = i \text{tg } z$ ); a reziduumok a  $\frac{\text{sh}}{\text{ch}}$  =  $\frac{\text{sh}}{\text{sh}}$ -t kiértékelve mind 1-nek adódnak.

7.  $f(z) = \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + \alpha^2}$ , ahol  $\omega \in \mathbb{R}$  valós szám és  $\alpha > 0$  valós szám.

A számláló sehol sem nulla, a nevezőnek egyszeres zérushelyei vannak  $i\alpha$ -ban ill.  $-i\alpha$ -ban: ezek így elsőrendű pólusok lesznek, a reziduumok pedig úgy számolhatók ki, mint eddig: az adódik, hogy  $\text{Res } f(z)|_{z=i\alpha} = \frac{-i}{2\alpha} e^{-\omega\alpha}$  ill.  $\text{Res } f(z)|_{z=-i\alpha} = \frac{i}{2\alpha} e^{\omega\alpha}$ .

8.  $f(z) = \frac{\sin(\omega z)}{z^4 + 2\alpha^2 z^2 + \alpha^4}$ , ahol  $\omega \in \mathbb{R}$  valós szám,  $\alpha > 0$  valós szám.

A nevező:  $(z^2 + \alpha^2)^2 = (z - i\alpha)^2 (z + i\alpha)^2$ , azaz itt  $i\alpha$  is és  $-i\alpha$  is a nevező kétszeres zérushelyei; a számláló pedig nem nulla itt: *másodrendű* pólusaink vannak. Emiatt a reziduumokra a (4.29) képlet helyett itt a bonyolultabb (4.31)-et kell használni:  $n=2$ -vel arra jutunk, hogy

$$\text{Res } f(z)|_{z=-i} = \lim_{z \rightarrow -i} \left( (z + i\alpha)^2 f(z) \right)' = \lim_{z \rightarrow -i} \left( \frac{\sin(\omega z)}{(z - i\alpha)^2} \right)' = \dots = \frac{\text{sh}(\omega\alpha) - \omega\alpha \text{ch}(\omega\alpha)}{4\alpha^3},$$

$$\text{Res } f(z)|_{z=i} = \lim_{z \rightarrow i} \left( (z - i\alpha)^2 f(z) \right)' = \lim_{z \rightarrow i} \left( \frac{\sin(\omega z)}{(z + i\alpha)^2} \right)' = \dots = \frac{\text{sh}(\omega\alpha) - \omega\alpha \text{ch}(\omega\alpha)}{4\alpha^3}, \quad \text{ugyanannyi.}$$

## 5. Alkalmazások, további ismeretek

Ebben a fejezetben már alkalmazáscentrikus új ismeretek kerülnek elő: rákanyarodunk a reziduum-tétel alkalmazásaira (integrálok kiszámításához), az analitikus elfolytatás használati lehetőségeire, ill. mindenféle, az eddigi tudásunkkal már megoldható „vegyesfelvágott” feladattípusokra.

### 5.1. Az analitikusság hasznosításai

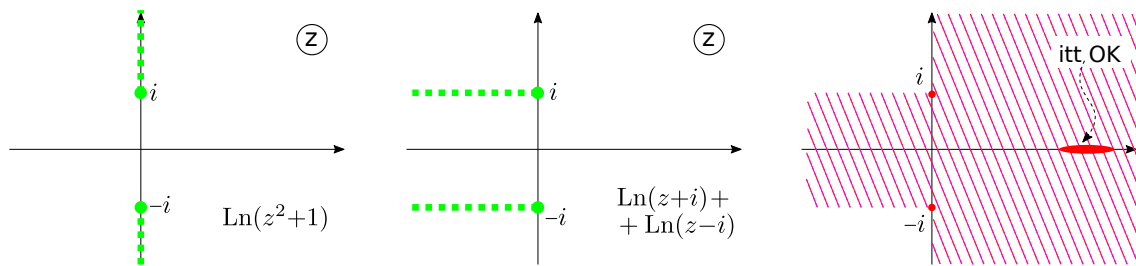
- Az analitikus elfolytatás egyértelműségét tudva a logaritmus- és hatványfüggvények körében sok esetben egyszerűen kideríthetjük, hogy a „problémás” **átalakítások mikor működnek**:

$$\text{Ln}(ab) \stackrel{?}{=} \text{Ln } a + \text{Ln } b, \quad (ab)^c \stackrel{?}{=} a^c b^c.$$

Ugye akkor, ha  $\arg(ab) = \arg a + \arg b$ , azaz nincs  $\pm 2\pi$  különbség („átbukásból”). Ha  $a, b, c$  pl. egy  $z$  változó függvénye, akkor  $z$  különféle értékeire nehézkes lehet ezt ellenőrizni. De ha belátjuk az egyenlőséget a  $z$  változóban egy „egyszerű helyen” egy „kicsi”, de torlódási pontot tartalmazó (pl. egy nyílt) halmazon, akkor ahová *mindkét* oldalt analitikusan elfolytathatjuk (amit sokszor rögtön a felírt függvényalakok „megtesznek” nekünk odáig, ahova úgy eljuthatunk, hogy nem kell pl. vágásokon átmenni), ott fennáll az egyenlőség. **Példa:**  $z^2+1 = (z+i)(z-i)$ , node igaz-e, hogy

$$\text{Ln}(z^2+1) \stackrel{?}{=} \text{Ln}(z+i) + \text{Ln}(z-i), \quad \text{vagyis milyen } z\text{-kre igaz ez?}$$

Ha  $z$  nagy pozitív valós szám, akkor a logaritmusok hasában lévő számok fázisai alig térnek el 0-tól: biztos nincs „átbukás”, igaz az egyenlőség. Vethetünk errefelé olyan halmazt, aminek van torlódási pontja: emiatt ahova innen úgy eljuthatunk, hogy nem megyünk át semelyik oldal vágásain sem, oda analitikusan elfolytatódik mindkét oldal, azaz igaz az egyenlőség.



30. ábra. Az Ln-es kifejezésünk átalakításának analitikus elfolytatással való „lekövetéséhez”: a csíkozott tartományon egyenlő a kétféle alak, mert oda mindkét alak ugyanúgy elterjeszthető.

- Az analitikus elfolytatás lokális egyértelműsége tehát kompenzálhatja a hatványozás és a logaritmus összefüggéseinek kényelmetlenségét. Sokszor pl. komplex vonalintegrálokban akarnánk így átalakítani: ha az út egy pontjának (kicsi, de nyílt) környezetében igaz az átalakítás, és az út mentén mindkét függvényalak analitikus (azaz gyk. az út nem metszi egyiknek a vágásait sem), akkor a kétféle függvény értékei az út mentén megegyeznek: az integrálban megengedett az átalakítás. Példa: legyen  $t$  a változó,  $\alpha, \beta$  nem egész számok,  $z \notin \mathbb{R}$  adott komplex szám, amire  $\Im(z) \neq 0$ , és

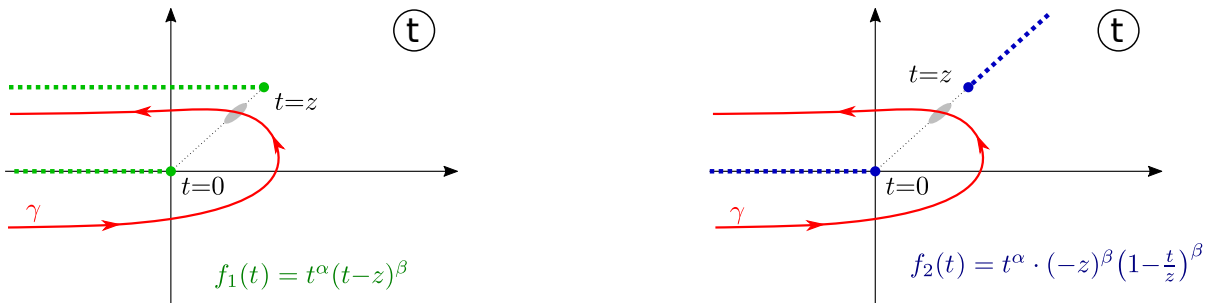
$$f_1(t) := e^t t^\alpha (t-z)^\beta, \quad f_2(t) := e^t t^\alpha \cdot (-z)^\beta \left(1 - \frac{t}{z}\right)^\beta; \quad \text{„majdnem” ugyanazok.}$$

Ugye  $t$  a változó; a nem egész kitevők miatt ahol a hatványalakok negatív valósak, ott lesznek vágások. (Vázoljuk is fel a két függvény „szerkezetét”!) A kérdés: ha  $f_1$ -et ill.  $f_2$ -t egy olyan  $\gamma$  útra



integráljuk, ami  $-\infty$ -ból jön, oda is tér, és elkerüli a  $t \in \mathbb{R}_0^-$  vágást, megegyeznek-e az integrálok. Látni való, hogy  $t=0$  mellett  $t=z$  is elágazási pont mindkét alakban; az utóbbiból induló vágás iránya más itt és ott. Hogy az út az analitikus tartomány(ok)ban haladjon, az kell, hogy az  $f_1(t)$ -re gondolva az út egyik „szára” a két vágás között fusson. (Ez tényleg lehetséges, mert kikötöttük, hogy  $\Im(z) \neq 0$ . Az ábrán  $\Im(z) > 0$ , de a gondolatmenet ugyanígy működne  $\Im(z) < 0$ -ra is).

Az integrálok egyenlőségére a válasz: igen, ha legalább egy „kis” helyen tényleg megegyeznek az integrandusok. Ez pedig a jelölt pont (satírozott) környékén biztos igaz lesz, mert ott  $1 - \frac{t}{z}$  éppen valós, így ott  $(-z)^\beta (1 - \frac{t}{z})^\beta = (t-z)^\beta$  tényleg teljesül. Következtetés: megegyeznek az integrálok, azaz másképp mondva: a látott módon átalakíthatjuk az  $f_1(t)$  integrandust  $f_2(t)$ -vé.



31. ábra. Kétféle módon felírt integrandus vágásai a  $t$  változó függvényében; az adott integrációs útra vett integráljuk egyenlő, mert az integrandusok a (szürkével) jelölt hely környékén biztos megegyeznek, máshova pedig az út mentén elfolytathatók.

- Sokféle, adott függvények közötti **azonosság** is olyan, hogy tartalmaz egy (komplex) változót vagy paramétert, amelynek függvényében differenciálható (azaz: analitikus). Ha az ilyen változó valamilyen (az értelmezési tartományában torlódási pontot tartalmazó) értékeire belátjuk az egyenlőséget, akkor ahol csak értelmes (és differenciálható) mindkét oldal, ott igaz az egyenlőség.

„Ösztönösen” használjuk ezt sokszor; jöjjön egy butácska példa. Ugye  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  igaz minden  $x \in \mathbb{R}$ -re. A  $\sin$ -t és a  $\cos$ -t azonban mint  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvényeket is megismertük. Az analitikus elfolytatásokkal kapcsolatban úgy mondhatjuk: *egyedül az ismert  $f(z) = \sin z$  függvény olyan, hogy komplex értelemben differenciálható, és  $\mathbb{R}$ -re leszűkítve az ismert valós szinuszfüggvényt adja vissza.* A  $\cos$ -ra ugyanilyet mondhatunk. Innen nézve is meggyőződhetünk, hogy az egész  $\mathbb{C}$ -n is igaz a pitagoraszi összefüggés, hiszen a bal oldal (a  $\sin^2 z + \cos^2 z$  függvény) és a jobb oldal (a konstans 1) is komplex differenciálhatóak, tehát ha a szűkebb  $\mathbb{R}$  halmazon (aminek mint  $\mathbb{C}$  részhalmazának nagyon is van torlódási pontja) megegyeznek, akkor a bővebb  $\mathbb{C}$ -n is.

- Az alábbi fejtegetések a **paraméteres integrál differenciálási szabálya** néven futó gondolat-kört hasznosítják. Emlék: a paraméter szerinti differenciálást „bevihetjük” az integráljel alá:

$$F(x) := \int_a^b dt f(t, x) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} F(x) = \int_a^b dt \frac{\partial f(t, x)}{\partial x}, \quad (5.1)$$

Ez könnyen megjegyezhető és természetesnek tűnik. Az „indoklás” lelke ugyebár:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_a^b dt f(t, x) &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{\int_a^b f(t, y) dt - \int_a^b f(t, x) dt}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \int_a^b dt \frac{f(t, y) - f(t, x)}{y - x} \stackrel{?}{=} \\ &\stackrel{?}{=} \int_a^b dt \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(t, y) - f(t, x)}{y - x} = \int_a^b dt \frac{\partial f(t, x)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

A kijelölt lépés a kérdéses (hogy az integrálok határértéke egyenlő-e a határérték integráljával). A pontos megfogalmazáshoz kell egy kis plusz feltétel, ami — noha „általában” nem teljesül — *a gyakorlatban szinte mindig már automatikusan teljesül*, ha a nyilvánvaló feltételek teljesülnek  $f(x, t)$ -re, amelyek ahhoz kellene, hogy egyáltalán értelmes legyen a dolog: hogy  $f(t, x)$  és  $\partial_x f(t, x)$  minden előkerülő  $x$ -re  $t$ -ben integrálhatóak legyenek, ill.  $f(x, t)$  minden  $t$ -re  $x$  szerint differenciálható legyen. A pontosan megfogalmazott **állítás** viszont kifejezetten **kimondja, hogy** a paraméteres integrál eredménye,  $F(x)$  **tényleg differenciálható  $x$  szerint** (és a deriváltjára a fenti képlet igaz). Ez azért jó, mert tipikusan az  $f(t, x)$  a jól kezelhető függvény, és így az integrál eredményéről, amit esetleg egyáltalán nem tudunk egyszerűen kiszámítani, mégis tudhatjuk, hogy differenciálható. Az ide tartozó részleteket (és a szükséges plusz feltételt) a C.4. függelékben olvashatjuk.

• A paraméteres integrál *differenciálhatóságát* és differenciálható komplex függvények analitikusságát összerakva különféle **integrálok eredményeit kiterjeszthetjük** komplex paraméter-értékek közé. Bevezető példa: valós  $\alpha > 0$ -ra teljesen egyszerűen kijön, hogy

$$\text{Valós } \alpha > 0 \text{ esetén} \quad \int_0^{\infty} dt e^{-\alpha t} = \frac{1}{\alpha}. \quad (5.3)$$

Valós  $\alpha$ -ra pontosan akkor létezik az integrál, ha  $\alpha > 0$ , továbbá komplex  $\alpha$ -kra is értelmes lehet: tudjuk, hogy egy  $f$  függvény pontosan akkor integrálható, ha  $|f|$  is az, továbbá (ahol is most  $\alpha \in \mathbb{C}$ , de  $t \in \mathbb{R}$ ) az integrandus abszolútértéke  $|e^{-\alpha t}| = \sqrt{e^{-\alpha t} e^{-\alpha^* t}} = e^{-\frac{1}{2}(\alpha + \alpha^*)t} = e^{-\Re(\alpha)t}$ , emiatt

$$\int_0^{\infty} dt e^{-\alpha t} \text{ pontosan akkor létezik, ha } \int_0^{\infty} dt e^{-\Re(\alpha)t} \text{ is, azaz amikor } \Re(\alpha) > 0.$$

A paraméteres integrállal így előállított függvényről kiderül, hogy ő mint  $\alpha$  függvénye komplex differenciálható, azaz analitikus az  $\Re(\alpha) > 0$  halmazon. Valós  $\alpha > 0$ -ra pedig *igaz* a fenti eredmény, aminek jobb oldala,  $\frac{1}{\alpha}$  is (persze, hogy) analitikus  $\alpha$ -ban, ahol csak értelmes: emiatt (mivel az  $\mathbb{R}^+$  halmaz nagyon is tartalmaz torlódási pontot  $\mathbb{C}$ -ben) a valós  $\alpha$ -ra kiszámolt eredményből

$$\text{Komplex } \alpha \in \mathbb{C}\text{-re is: ha } \Re(\alpha) > 0, \text{ akkor } \int_0^{\infty} dt e^{-\alpha t} = \frac{1}{\alpha}. \quad (5.4)$$

• A Gauss-integrálokat is még a már látottaknál is messzemenőbben kiterjeszthetjük. Ugyebár

$$\text{Valós } \alpha > 0 \text{ és } \beta \in \mathbb{R} \text{ esetben} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\alpha t^2 + \beta t} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\beta^2/4\alpha}.$$

A jobb oldal  $\alpha$  és  $\beta$  függvényében is komplex differenciálható, és leszűrhető a paraméteres integrál differenciálhatóságából, hogy azon  $\alpha$  és  $\beta$  *komplex* értékekre, ahol a bal oldali integrál *értelmes* (lássuk be az előző példa esetéhez hasonlóan, hogy ehhez itt az kell, hogy  $\Re(\alpha) > 0$  legyen), ott ő is  $\alpha$ -ban és  $\beta$ -ban differenciálható függvényt állít elő. Emiatt viszont az integrál eredményét komplex  $\alpha, \beta$  esetén is ugyanez a formula adja meg, hiszen ez az, ami komplex  $\alpha$ -k és  $\beta$ -k megengedett tartományaira analitikus módon elfolytatja a valós esetben levezetett eredményt:

$$\text{Ha } \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \text{ és } \Re(\alpha) > 0, \text{ akkor} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\alpha t^2 + \beta t} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\beta^2/4\alpha}. \quad (5.5)$$

A felírt jobb oldalnak mint  $\alpha$  függvényének  $\alpha \in \mathbb{R}_0^-$ -on vágása van, de az integrál pont nem értelmes ilyen  $\alpha$ -kra, úgyhogy a jobb oldalt az integrál szempontjából sosem kell a vágáson kiértékelni.

A mostani módszerrel tehát még a 3.6. szakaszban látottnál is tovább általánosíthatjuk a Gauss-integrált; egyúttal az ott mondott ugyanilyen jellegű eredményt is egyszerűen visszakaptuk.

## 5.2. Integrálok kiszámítása reziduúmtétellel

A komplex függvénytan *kiemelt alkalmazási területe*, egyben sok eddigi tudásunk összetételét igényli az, hogy bizonyos integrálokat a reziduúmtétellel kezelhetünk (utóbbi most „plusz” a korábbi 3.6. szakaszhoz képest). Ez egyszerű számítást tesz lehetővé sokszor, és olyankor is hasznos lehet, amikor primitív függvényt keresve nem boldogulnánk.

• **Egyszerű példával kezdjük**, amit amúgy is tudhatunk, ismerve az arctg függvény deriváltját:

$$\text{Kérdés: } \mathcal{I}_1 := \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{1+x^2} =? \quad \text{Válasz: } \int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \arctg b - \arctg a \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{1+x^2} = \pi.$$

Ezt a végeredményt vezetjük le reziduúmtétellel is. Ez ebben az egyszerű esetben (pláne elsöre) bonyolultabbnak tűnik, azonban a módszer szinte minden lényeges lépését megismerhetjük így.

Első észrevétel: az integrandust tekinthetjük „szép kis” (most: meromorf)  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvénynek:

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{elsőrendű pólus } z=-i\text{-ben, } \text{Res } f(z)|_{z=-i} = -\frac{1}{2i}, \\ \text{másik ugyanilyen } z=i\text{-ben; } \text{Res } f(z)|_{z=i} = \frac{1}{2i}. \end{array} \quad (5.6)$$

A reziduúmtétel megadja  $f(z)$  vonalintegráljait zárt görbékre: minden olyanra, ami a  $z=i$  pólust (de a másikat nem!) egyszer pozitív irányban megkerüli, ez  $2\pi i \cdot \text{Res } f|_{z=i} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi$ , és minden görbére, ami csak a  $z=-i$  pólust kerüli meg *negatív irányban*,  $-1 \cdot 2\pi i \cdot \text{Res } f(z)|_{z=-i} = -2\pi i \cdot \frac{-1}{2i} = \pi$ .



32. ábra. Az  $\frac{1}{1+x^2}$  integráljának levezetéséhez. A körintegrálokat a reziduúmtétellel tudhatjuk akármilyen (az egyik ill. a másik pólust megkerülő) görbékre; ezek közül a kiemelt, a valós tengelyen futó integrált felfelé ill. lefelé bezáródódó félkörívren vett kiegészítő görbék kellene most.

Következő összetevő:  $|z| \rightarrow \infty$ -re  $\frac{1}{1+z^2}$  elég gyorsan nullához tart minden irányban: úgy, mint  $1/|z|^2$ . Ezt ugye úgy értjük, hogy  $|z^2 \cdot \frac{1}{1+z^2}|$  is konstanshoz tart  $|z| \rightarrow \infty$ -re (most éppen 1-hez). Emiatt van olyan  $K > 0$  szám, hogy ha  $|z|$  egy megfelelő  $R_1$  értéknél már nagyobb, akkor  $|\frac{1}{1+z^2}| \cdot |z|^2 < K$ , azaz  $|\frac{1}{1+z^2}| < K/|z|^2$  teljesül.<sup>52</sup> Így  $\frac{1}{1+z^2}$ -nek egy  $R$  sugarú félkörívren vett integráljáról a szokásos integrálbecsléssel kiderül, hogy nullához tart  $R \rightarrow \infty$  esetén (hiszen ezen mindenhol  $|z|=R$ ):

$$\begin{array}{l} \text{A mostani esetben az } \Im(z) > 0 \text{ és az } \Im(z) < 0 \\ \text{félsíkon futó félkörívek esetén is igaz, hogy} \end{array} \quad \left| \int_{\text{körív}} dz \frac{1}{1+z^2} \right| \leq \underbrace{\pi R}_{=\ell} \cdot \frac{K}{R^2} = \frac{\pi K}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Ha tehát a  $z=i$  pólust megkerülő zárt görbének olyat veszünk, ami a valós  $[-R, R]$  szakaszból és egy felfelé visszatérő  $R$  sugarú félkörívrből áll, akkor a körintegrál eredményét *tudjuk* a reziduúmtételből (ld. fentebb), másrészt az  $R \rightarrow \infty$  esetben a  $[-R, R]$  szakaszra vett integrál a keresett  $\int_{-\infty}^{\infty}$  valós

<sup>52</sup>Nagyobb  $R_1$ -től vizsgálódva  $K$ -nak a határértéket (most: az 1-et) egyre jobban (felülről) megközelítő értéket is választhatunk. Figyelem:  $z$  komplex, ezért *nem igaz, hogy*  $|1+z^2| > |z|^2$ , és emiatt  $|\frac{1}{1+z^2}| < \frac{1}{|z|^2}$  teljesülne. Ezért kellett körülményesebben érvelnünk, hogy az ezutáni becslésben használhassuk ezt az  $1/|z|^2$  szerinti csökkenést.

integrálhoz tart, a félkörívre vett pedig nullához. Így éppen megkapjuk a keresett integrálunkat:

$$\begin{array}{l} \text{Az } \Im(z) > 0 \text{ félsíkon} \\ \text{záródó félkörívből:} \end{array} \quad \pi = \underbrace{\int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^2}}_{\rightarrow \mathcal{I}_1, \text{ ha } R \rightarrow \infty} + \underbrace{\int_{\text{körív}} dz f(z)}_{\rightarrow 0, \text{ ha } R \rightarrow \infty} \Rightarrow \underline{\underline{\mathcal{I}_1 = \pi}}. \quad (5.7)$$

Ugyanerre jutunk most az  $\Im(z) < 0$  félsíkon záródó félkörívből is: a reziduúmtételből kijött, hogy ilyen görbére (mint minden, a  $z = -i$  pólust *negatív irányban* megkerülő görbére) is ugyanennyi,  $\pi$  az integrál. (Figyelem: látható, hogy azért volt jó ez utóbbi esetben negatív irányítást venni, hogy a valós  $[-R, R]$  szakaszra vett integrál a kellő irányban,  $-R$ -től  $R$ -ig fusson, és ne fordítva.)

• **Ugyanígy** kezelhetjük más **racionális törtfüggvények**  $\mathbb{R}$ -re vett integrálját is. Feltételek:

- 1.) *a* nevező legalább kettővel magasabb fokú legyen a számlálónál, különben nem lenne integrálható a függvény, mert csak  $1/x$  módjára csökkenne, vagy nem is csökkenne  $\pm\infty$  felé,
- 2.) *ne* legyen pólus  $\mathbb{R}$ -en, mert annak környékén a függvény  $\mathbb{R}$  mentén is  $\frac{1}{(x-x_0)^n}$  módjára viselkedne, ahol  $n > 0$ : ilyenkor nem létezik az integrál. (Felidézhetjük a 3.2. szakaszt.)

$$\begin{array}{l} \text{Újabb} \\ \text{példa:} \end{array} \quad \mathcal{I}_2 := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+x^2+1} =? \quad \begin{array}{l} f(z) \equiv \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad P(z) = z^2+1, \quad Q(z) = z^4+z^2+1. \\ \text{Ha } x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) \neq 0, \text{ és } Q \text{ kettővel ma-} \\ \text{gasabb fokú, mint } P: \text{ minden rendben.} \end{array} \quad (5.8)$$

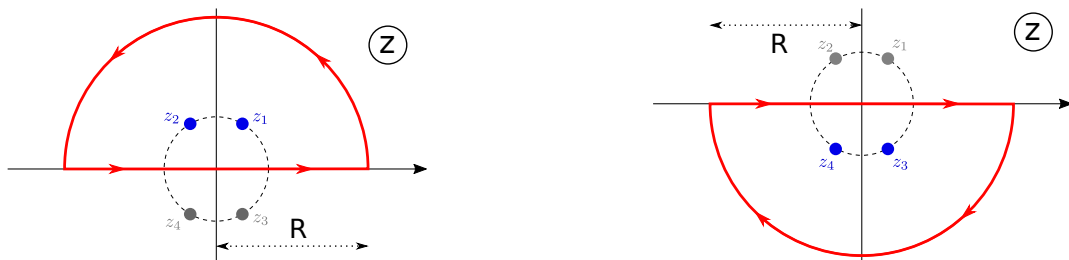
A  $Q(z)$  nevező zérushelyeire  $z^2 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} = e^{\pm 2\pi i/3}$ , ebből megkapjuk őket (az egységkört felvázolva). Egyszeresek; a  $Q'(z) = 4z^3 + 2z$  nem nulla bennük. A reziduúmok így  $\frac{P(z_k)}{Q'(z_k)}$  módon adódnak:

$$\begin{array}{cccc} z_1 = e^{i\pi/3}, & z_2 = e^{2i\pi/3}, & z_3 = e^{-i\pi/3}, & z_4 = e^{-2i\pi/3}. \\ Q'(z_1) = -3 + \sqrt{3}i, & Q'(z_2) = 3 + \sqrt{3}i, & Q'(z_3) = -3 - \sqrt{3}i, & Q'(z_4) = 3 - \sqrt{3}i. \\ \text{Res } f|_{z_1} = -\frac{\sqrt{3}}{6}i, & \text{Res } f|_{z_2} = -\frac{\sqrt{3}}{6}i, & \text{Res } f|_{z_3} = \frac{\sqrt{3}}{6}i, & \text{Res } f|_{z_4} = \frac{\sqrt{3}}{6}i. \end{array}$$

Mint az előbb is, bezárjuk a  $[-R, R]$  szakaszra vett integrált félkörívvel. Akár felfelé, akár lefelé tesszük ezt, az  $R \rightarrow \infty$  esetben az ívre vett integrál nullához tart, mert most is az integrandus minden irányban  $1/|z|^2$  módon csökken, azaz van olyan  $R_1$  és  $K > 0$ , hogy ha  $|z| > R_1$ , akkor

$$|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^2} \quad \xRightarrow{\text{Ha } R > R_1} \quad \left| \int_{\text{körív}} dz f(z) \right| \leq \underbrace{\pi R}_{=\ell} \cdot \frac{K}{R^2} = \frac{\pi K}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \quad (5.9)$$

Figyelem:  $z_1$  és  $z_2$  a felső,  $z_3$  és  $z_4$  az alsó félsíkon van! Elég nagy  $R$  sugarú felfelé záródó félkörgörbe már megkerüli a felső félsíkon lévő pólusokat: ezek most  $z_1$  és  $z_2$ ; hasonlóan, elég nagy lefelé záródó félkörgörbe megkerüli azokat a pólusokat, amikre  $\Im(z) < 0$ : ezek most  $z_3$  és  $z_4$ .



33. ábra. Az újabb példa-integrál kiszámításához: azokat a pólusokat kell figyelembe venni, amelyekre a görbe megkerüli. Most is (mint az előbb is) mindkét irányú görbével dolgozhatunk.

A reziduúmtétellel tehát arra jutunk, hogy a felső félsíkon záródó görbére

$$\oint_{\gamma, \circlearrowleft} dz f(z) = 2\pi i \left( \operatorname{Res} f|_{z_1} + \operatorname{Res} f|_{z_2} \right) = 2\pi i \left( -\frac{\sqrt{3}}{6}i - \frac{\sqrt{3}}{6}i \right) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\pi,$$

másrészt  $R \rightarrow \infty$ -re a  $[-R, R]$ -re vett integráldarab a keresett  $\mathcal{I}_2$ -höz tart, a körívre vett járulék pedig a fentiek szerint nullához, úgyhogy a most írt eredmény éppen a keresett  $\mathcal{I}_2$ -nek bizonyul:

$$\oint_{\gamma} dz f(z) = \int_{-R}^R dz f(z) + \int_{\circlearrowleft} dz f(z). \quad \begin{array}{l} \text{Az első } \mathcal{I}_2\text{-höz, a másik} \\ \text{nullához tart } R \rightarrow \infty\text{-re:} \end{array} \quad \underline{\underline{\mathcal{I}_2 = \frac{2}{3}\sqrt{3}\pi.}} \quad (5.10)$$

A lefelé záródó félkörgörbével is dolgozhattunk volna: ez  $z_3$ -at és  $z_4$ -et kerüli meg *negatív irányban*; utóbbi miatt egy  $-1$  szorzó kerül a reziduúmtétellel kapott eredménybe. A körintegrál eredménye pedig ugyanúgy a keresett integrálunk értéke lesz  $R \rightarrow \infty$  esetén, és így is ugyanaz jön ki:

$$\begin{array}{l} \text{az alsó félsíkon} \\ \text{záródó görbére} \end{array} \quad \oint_{\gamma} dz f(z) = -1 \cdot 2\pi i \left( \operatorname{Res} f|_{z_3} + \operatorname{Res} f|_{z_4} \right) = -2\pi i \left( \frac{\sqrt{3}}{6}i + \frac{\sqrt{3}}{6}i \right) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\pi.$$

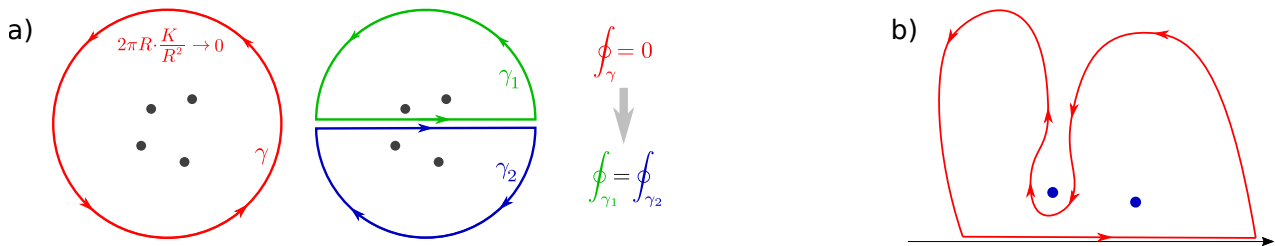
és  $R \rightarrow \infty$ -re ugyebár itt is azt kapjuk, hogy ez éppen  $\mathcal{I}_2$ -vel lesz egyenlő.

- **Gyakorlásképpen még** kiszámíthatjuk pl. a következőket is (hogy leüledjen a módszer):

$$\begin{array}{l} a \in \mathbb{R}^+; \\ \text{állítás:} \end{array} \quad \mathcal{I}_3 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^2}{x^6+a^6} = \frac{\pi}{3a^3}, \quad \mathcal{I}_4 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^8+a^8} = \frac{\pi}{2a^7} \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

- **Néhány megjegyzés** az eddigiekhez:

1. Nem varázslat, hogy a vizsgált racionális törtfüggvények esetében ugyanazt az eredményt adják a felfelé és a lefelé záródó görbék. (Fájdalmas is lenne, ha két helyes módszer különböző eredményekre vezetne.) Ha egy ilyen függvény legalább  $1/|z|^2$  szerint csökken, akkor egy nagy (összes pólusát megkerülő) *egész körívre* biztos nulla az integrálja (mert ezt a kört „felfújhatjuk”, és a szokásos integrálbecslés nem hagy más lehetőséget). Vagyis a kétféle (az egész kört unióként kiadó) félkörgörbére vett integrálok összege nulla: ha az egyik irányítását negatívnak vesszük, a két integrál megegyezik. (Újra kiemeljük, hogy *figyeljünk a félkörgörbéink irányítására!*)
2. Látva, hogy a végeredményeket a megkerült pólusok reziduum-értékei „állítják be”, első ismerkedéskor felmerülhet, hogy nem lehet-e pl. több pólus esetén olyan görbével zárni, ami nem kerüli meg mindegyiket, és így más eredményt levezetni ugyanarra a valós integrálra. Nem: ilyen bezáró görbét nem tudnánk úgy deformálni, hogy rajta *mindenhol* működjön az  $1/|z|^2$ -es becslés, amiből kijönne, hogy a körintegrál értéke a valós integrál eredménye. Valóban: éppen a meg nem került pólusok járuléka hiányozna.



34. ábra. a.) Ha a nagy körintegrál nulla, a lefelé és felfelé záródó félkörök tényleg ugyanannyit adnak. b.) Meg kell kerülni az összes pólust, hogy tényleg a végtelenbe vihessük a visszatérő utat.

3. Az a feltétel, ami miatt létezik az  $\mathbb{R}$ -re vett integrál (legalább kettővel magasabb fokú nevező, mint számláló) ugyanaz, mint ami „lehetővé teszi” a félkörívvel bezárás módszert: a legalább  $1/|z|^2$ -es csökkenés biztosítja az ív járulékának nullához tartását. Az is kellett, hogy ne legyen pólus  $\mathbb{R}$ -en: emiatt lesz az is egyértelmű, hogy melyik pólust kerüljük meg, és melyiket nem.
4. A fentebbi példákban egyszeresek voltak a pólusok (így az  $f = \frac{g}{h} \Rightarrow \text{Res} f = \frac{g}{h'}$  képletet használhattuk); ne ijedjünk meg attól sem, ha valamikor a nevezőnek többszörös zérushelyei (és így többrendű pólusok) lesznek: ekkor is kiszámíthatjuk a reziduumokat (ld. a 4.5. szakaszt).
5. Ha páratlan függvény  $\mathbb{R}$ -re vett integrálját keresnénk, eleve tudhatjuk, hogy az nulla. Valós függvény integrálja  $\mathbb{R}$ -re a „komplexezés” után mégis **valósnak kell, hogy adódjon**, ill. ha az integrandus minden  $x \in \mathbb{R}$ -re pozitív, az integrálja is az; ezek jó önellenőrzési lehetőségek.
6. Az eddigi fajta integrálok Newton-Leibniz-formulával is kiszámíthatók (parciális törtekkel); ez lényegében a most látott módszer eredményeit rekonstruálja, de „áttekinthetlenebb” módon.

\* \* \*

• Jöjjenek olyan **példák**, amelyeknél **nem mindegy**, hogy melyik irányba zárjuk az utat! Az első ilyen (ami azért is érdekes, mert nem lehet zárt alakban kiszámolni Newton-Leibniz-formulával):

$$\begin{array}{l} \text{Legyenek } a, \omega \text{ valós számok,} \\ a > 0, \text{ de } \omega \geq 0 \text{ és } \omega \leq 0 \text{ is lehet.} \end{array} \quad \text{Kérdés:} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{i\omega x}}{x^2 + a^2} = ? \quad (5.11)$$

Az integrandust kiterjesztjük  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvényre:  $f(z) = \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + a^2}$ . Ez egészfüggvények hányadosa, és a nevezőnek van két egyszeres zérushelye  $z = \pm ia$ -ban, emiatt a függvényünk meromorf, és

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + a^2} \Rightarrow \begin{array}{l} z_1 = -ia \text{ elsőrendű pólus, } \text{Res } f|_{-ia} = \frac{g(-ia)}{h'(-ia)} = \frac{e^{-\omega a}}{-2ia}, \\ z_2 = ia \text{ is elsőrendű pólus, } \text{Res } f|_{ia} = \frac{g(ia)}{h'(ia)} = \frac{e^{-\omega a}}{2ia}. \end{array}$$

Hasonló a recept, mint fent: a reziduumtételel tudhatjuk a pólusokat megkerülő utakra vett kör-integrált, másrészt ha az utat ráigazítjuk  $\mathbb{R}$ -re, a maradék járulékot pedig a szokásos becsléssel nullaként beazonosíthatjuk, akkor leszűrhetjük, hogy a reziduumtételeből a keresett,  $\mathbb{R}$ -re vett integrálunkat kaptuk meg. Itt is egy a  $[-R, R]$  szakaszt  $R$  sugarú félkörívvel záró út fog kelleni:

$$\begin{array}{ll} \text{felfelé záródó, így } z_1 = ia \text{-t po-} & \text{lefelé záródó } (z_2 = -ia \text{-t megkerülő} \\ \text{zítív irányban megkerülő félkörre} & \text{negatív irányítású) félkörre pedig} \\ \oint^{(z_1^+)} dz f(z) = 2\pi i \cdot \text{Res } f|_{ia} = \frac{\pi}{a} e^{-\omega a}, & \oint^{(z_2^-)} dz f(z) = -2\pi i \cdot \text{Res } f|_{-ia} = \frac{\pi}{a} e^{\omega a}. \end{array} \quad (5.12)$$

Ha  $\omega \neq 0$ , ezek *nem egyenlők*. Kérdés, hogy melyik esetben (ha egyáltalán valamelyikben) működhet az ív járulékának nullához tartását biztosító becslés. Az  $f(z)$  nevezője  $|z|^2$  módjára növekszik, ami „jó”: a  $\pi R$  félkörhossz szorozva  $K/R^2$ -tel nullához tart (ezt használtuk racionális törtfüggvények között is). A számláló viszont most  $e^{i\omega z}$ : valós  $z \equiv x$ -re  $|e^{i\omega x}| = 1$ , azonban komplex  $z$ -re

$$\text{Ha } z = x + iy, \text{ ahol } x, y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad |e^{i\omega z}| = |e^{i\omega(x+iy)}| = |e^{i\omega x}| \cdot |e^{-\omega y}| = e^{-\omega y}.$$

Ezek alapján tehát  $R \rightarrow \infty$  esetén egyelőre annyit mondhatunk, hogy

$$\left| \oint_{\text{félkörív}} f(z) dz \right| \leq \pi R \cdot \max_{z \in \text{félkörív}} |f(z)| \leq \pi R \cdot \frac{K}{R^2} \cdot \max_{z \in \text{félkörív}} (e^{-\omega y}). \quad (5.13)$$

Lényeges, hogy ahhoz, hogy a nevező  $|z|^2$ -es növekvését kihasználhassuk a  $K/R^2$ -es felülbecsléshez (ami kell a  $\pi R$  ívsugar kompenzálásához), tényleg mindenfelé végtelenbe kell vinni a félkörívet, a

valós tengelytől is eltávolodva. Ekkor viszont az íven előkerülő  $z$ -k között lesznek, amikre  $|y| \propto R$ , azaz  $y \rightarrow \infty$  (ha felfelé fut az ív), vagy  $y \rightarrow -\infty$  (ha lefelé). Az  $e^{-\omega y}$  ilyen  $y$ -okra vagy exponenciálisan növekszik (ami elrontja a  $\frac{\pi K}{R}$  csökkenésének hasznát), vagy exponenciálisan csökken.  $\omega$  előjelen múlik tehát, hogy melyik utat kell választanunk, hogy az (5.13) becslést tovább fűzhessük.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ha } \omega > 0: \\ \text{ha } y \rightarrow +\infty, e^{-\omega y} \text{ csökken; ekkor} \\ \text{ } y > 0 \text{ esetén } e^{-\omega y} \leq 1, \text{ és ez elég.} \\ \\ \text{ha } y \rightarrow -\infty, e^{-\omega y} \text{ nő, és ezt nem} \\ \text{kompenzálja } \frac{K\pi}{R} \text{ csökkenése sem.} \\ \\ \text{Ha } \omega < 0, \text{ fordítva:} \\ \text{ha } y \rightarrow +\infty, e^{-\omega y} \text{ túl gyorsan nő,} \\ \text{ } y < 0 \text{-ra viszont ekkor } e^{-\omega y} \leq 1. \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \omega > 0 \text{ esetén ha felfelé zá-} \\ \text{ródik a félkörív, akkor,} \\ \\ \text{ha } \omega < 0, \text{ akkor pedig ha le-} \\ \text{felé, akkor igaz, hogy} \end{array} \quad (5.14)$$

$$\left| \oint_{\text{félkörív}} f(z) dz \right| \leq \frac{\pi K}{R} \cdot \max_{z \in \text{ív}} (e^{-\omega y}) \leq \frac{\pi K}{R},$$

és  $\frac{\pi K}{R}$  nullához tart, ha  $R \rightarrow \infty$ . A másik esetekben az ívre vett integrálról nem tudjuk biztosítani, hogy nullához tart  $R \rightarrow \infty$ -re. Így a valós  $[-R, R]$  szakaszra vett integrál (mely a keresett  $\int_{-\infty}^{\infty}$  integrálhoz tart) a felfelé záródó görbéből kapott reziduúmtételes eredménnyel, az (5.12) első képletével egyezik meg, ha  $\omega > 0$ , viszont a lefelé záródó görbéből kapott másodikkal, ha  $\omega < 0$ :

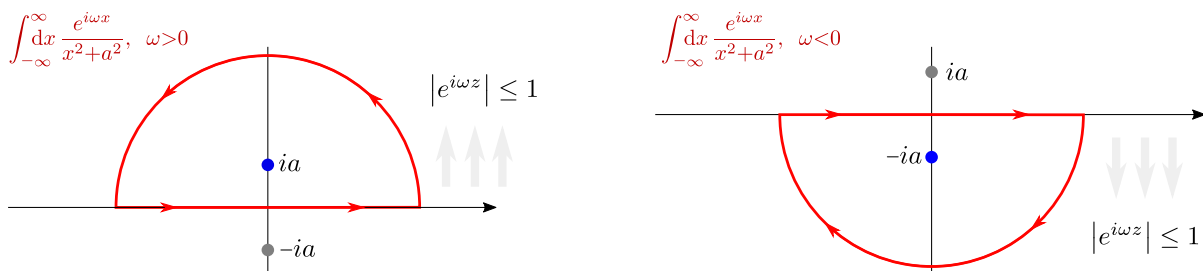
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{i\omega x}}{x^2+a^2} = \oint dz \frac{e^{i\omega z}}{z^2+a^2} = 2\pi i \cdot \text{Res } f|_{z=ia} = \frac{\pi}{a} e^{-\omega a}, \quad \text{ha } \omega > 0, \text{ továbbá}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{i\omega x}}{x^2+a^2} = \oint dz \frac{e^{i\omega z}}{z^2+a^2} = -2\pi i \cdot \text{Res } f|_{z=-ia} = \frac{\pi}{a} e^{\omega a}, \quad \text{ha } \omega < 0.$$

Esetünkben szépen összefoglalhatjuk a kétféle lehetőséget: akár  $\omega > 0$ , akár  $\omega < 0$ , igaz, hogy

$$\text{Ha } \omega \in \mathbb{R}, \text{ akkor } \underline{\underline{\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{i\omega x}}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{a} e^{-|\omega|a}}}. \quad (5.15)$$

Persze külön meg kell nézni az  $\omega=0$  esetet, de ilyenkor  $\frac{1}{x^2+a^2}$  integráljáról van szó, amire racionális törtfüggvények között is  $\frac{\pi}{a}$ -t kaphattunk, ami beleillik az eredményképletbe ( $\omega=0$ -t írva).



35. ábra. Az iménti integrál levezetéséhez:  $\omega > 0$  és  $\omega < 0$  esetében az egyik ill. a másik irányban záródó félkörből kapott eredményt tudjuk beazonosítani, mint a keresett integrálunk eredményét.

• Az előző gondolatmenetet **mindig végig kell vizsgálni**, ha exponenciális növekedés vagy csökkenés között választva dönthetjük el, hogy **melyik irányba zárjuk** az utat, hogy működjön az ív járulékanak nullához tartását bebiztosító becslés. **Még egy példa**, most már nagyobb lépésekkel:

$$\omega \in \mathbb{R}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x e^{-i\omega x}}{x^4+a^4} =? \quad \Rightarrow \quad f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{z e^{-i\omega z}}{z^4+a^4}.$$

Négy elsőrendű pólus ( $z_1, z_2, z_3, z_4$ ) van a nevező zérushelyeiben:

$$\begin{aligned} \text{Az } \Im(z) > 0 \text{ felső félsíkon:} & \begin{cases} z_1 = a \frac{1+i}{\sqrt{2}}, & \text{Res } f(z)|_{z=z_1} = \frac{e^{-i\omega z_1}}{4z_1^2} = \frac{1}{4ia^2} e^{\frac{\omega a}{\sqrt{2}}} e^{-\frac{i\omega a}{\sqrt{2}}}, \\ z_2 = a \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, & \text{Res } f(z)|_{z=z_2} = \frac{e^{-i\omega z_2}}{4z_2^2} = \frac{-1}{4ia^2} e^{\frac{\omega a}{\sqrt{2}}} e^{\frac{i\omega a}{\sqrt{2}}}, \end{cases} \\ \text{Az } \Im(z) < 0 \text{ alsó félsíkon:} & \begin{cases} z_3 = a \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, & \text{Res } f(z)|_{z=z_3} = \frac{e^{-i\omega z_3}}{4z_3^2} = \frac{1}{4ia^2} e^{-\frac{\omega a}{\sqrt{2}}} e^{\frac{i\omega a}{\sqrt{2}}}, \\ z_4 = a \frac{1-i}{\sqrt{2}}, & \text{Res } f(z)|_{z=z_4} = \frac{e^{-i\omega z_4}}{4z_4^2} = \frac{-1}{4ia^2} e^{-\frac{\omega a}{\sqrt{2}}} e^{-\frac{i\omega a}{\sqrt{2}}}. \end{cases} \end{aligned}$$

$f(z)$  „törtfüggvény-része”,  $\frac{z}{z^4+a^4}$  úgy csökken abszolútértékben, mint  $K/|z|^3$ ; ezt kihasználhatjuk a visszatérő  $R$  sugarú félköríven (ahol  $|z|=R$ ). Lefelé ill. felfelé záródó félköríven  $y < 0$  ill.  $y > 0$  (ahol is  $z \equiv x+iy$ ); továbbá  $|e^{-i\omega z}| = e^{\omega y}$ . Így ha  $\omega > 0$ , akkor ez  $y < 0$  (lefelé záródó félkörív) esetén lesz 1-nél kisebb-egyenlő; a másik félsíkon exponenciálisan növekedhet, elrontva a törtfüggvény-rész csökkenését. Ha  $\omega < 0$ , fordítva: a felfelé záródó íven lesz  $e^{\omega y} \leq 1$ .

Ahol az exponenciális tényező is 1-gyel felülbecsülhető, az ívre vett integrál nullához tart  $R \rightarrow \infty$ -nél. Ha tehát  $\omega > 0$ , akkor egy lefelé záródó félkörívet kell venni (ami  $z_3$ -at és  $z_4$ -et kerüli meg), ha pedig  $\omega < 0$ , akkor felfelé záródót (ami  $z_1$ -et és  $z_2$ -t kerüli meg); ekkor a keresett integrál értéke a körintegrállal egyenlő, mert  $R \rightarrow \infty$ -nél csak a valós tengely járuléka marad.<sup>53</sup> Összerakva tehát:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x e^{-i\omega x}}{x^4+a^4} &= \oint_{(z_1^+, z_2^+)} dz \frac{z e^{-i\omega z}}{z^4+a^4} = 2\pi i \left( \text{Res } f|_{z_1} + \text{Res } f|_{z_2} \right) = \frac{\pi}{2a^2} e^{\frac{\omega a}{\sqrt{2}}} \left( e^{\frac{i\omega a}{\sqrt{2}}} - e^{-\frac{i\omega a}{\sqrt{2}}} \right), \quad \text{ha } \omega < 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x e^{-i\omega x}}{x^4+a^4} &= \oint_{(z_3^-, z_4^-)} dz \frac{z e^{-i\omega z}}{z^4+a^4} = -2\pi i \left( \text{Res } f|_{z_3} + \text{Res } f|_{z_4} \right) = \frac{\pi}{2a^2} e^{-\frac{\omega a}{\sqrt{2}}} \left( e^{\frac{i\omega a}{\sqrt{2}}} - e^{-\frac{i\omega a}{\sqrt{2}}} \right), \quad \text{ha } \omega > 0. \end{aligned}$$

Itt is összefoglalhatjuk az eredményt  $\omega > 0$  és  $\omega < 0$  esetére is:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x e^{-i\omega x}}{x^4+a^4} = \frac{i\pi}{a^2} e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}|\omega|} \sin\left(\frac{\omega a}{\sqrt{2}}\right). \quad (5.16)$$

• **Gyakorlásként** hasonló módszerrel levezethetjük pl. a következőt:

$$\text{Állítás: } \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-i\omega x}}{x^6+a^6} = \frac{\pi}{3a^5} \left\{ e^{-\frac{a|\omega|}{2}} \left[ \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega a\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|\omega|a\right) \right] + e^{-a|\omega|} \right\}. \quad (5.17)$$

Keményebb dióként jöjjön egy olyan, ahol többrendű pólusok vannak, így a reziduumokat az erre való bonyolultabb módon lehet kiszámítani (ld. a 4.5. szakaszt); próbálkozzunk meg ezzel is:

$$\text{Állítás: } \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^2 e^{i\omega x}}{(x^2+a^2)^2} = \frac{8\pi}{a} (1 - a|\omega|) e^{-a|\omega|}. \quad (5.18)$$

• A látott fajta,  $e^{\pm i\omega x}$ -es integrálok *Fourier-transzformációk* során kerülnek elő később; vissza is térünk rájuk és néhány tulajdonságukra. Az **Euler-formulával** valós- ill. képzetesrész-képzéssel (valós integrálról van szó!) akkor is ilyenekre juthatunk, ha **trigonometrikus függvények** sze-

<sup>53</sup>Tipikus hibalehetőség, hogy egyszer megjegyez valaki olyasmi mondókákat az ilyen típusú integrálokra, hogy „ha  $\omega$  ilyen, akkor erre zárunk, különben arra...”. Nem; konkrétan a felírt függvényalakot megvizsgálva végig kell mindig gondolni, hogy az exponenciális csökkenés melyik irányú bezárást implikál.



repelnek hasonló kiosztásban. Az előzőeket használó ilyen **példák**:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_5 &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\cos(\omega x)}{x^2+a^2} =? &\Rightarrow & \mathcal{I}_5 = \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{i\omega x}}{x^2+a^2} \right\} = \frac{\pi}{a} e^{-|\omega|a}, \\ \mathcal{I}_6 &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x \sin(\omega x)}{x^4+a^4} =? &\Rightarrow & \mathcal{I}_6 = \operatorname{Im} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x e^{-i\omega x}}{x^4+a^4} \right\} = \frac{\pi}{a^2} e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}|\omega|} \sin\left(\frac{\omega a}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

• **Néhány megjegyzés** az ilyen típusú integrálokhoz:

1. Egy ilyen,  $\cos(\omega x)$ -et vagy  $\sin(\omega x)$ -et tartalmazó integrálnál **hibalehetőség**, ha a  $\cos(\omega z)$  vagy  $\sin(\omega z)$  módon írt  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  integrandust tekintve próbáljuk félkörrel zárni az utat. Polinom-nevezővel így *nem működne* az ív járulékanak felülbecslése, mert a valós tengelytől távolodva  $|\cos(z)|$  és  $|\sin(z)|$  is exponenciálisan nő *erre is, arra is* (ld. pl. a korábbi 2.5. szakasz végén). A helyes út: amit láttunk, visszatérni  $e^{\pm i\omega z}$ -ra; ennél van esélyünk az egyik irányú zárással.
2. Érdeemes figyelni a párosságra-páratlanságra:  $\sin(\omega x)$  páratlan,  $\cos(\omega x)$  páros függvény. Ezeket páros ill. páratlan racionális (és hogy integrálható legyen, legalább  $\sim \frac{1}{x^2}$  módon csökkenő) törtfüggvénnyel szorozva a kapott függvény páratlan, integrálja  $\mathbb{R}$ -re nulla. Továbbá  $\cos(\omega x)$  ill.  $\sin(\omega x)$  az  $e^{i\omega x}$  valós ill. képzetes része:  $e^{i\omega x}$ -nek és páros ill. páratlan függvény szorzatának integrálja emiatt tiszta valós ill. tiszta képzetes lesz, ahogy láttuk is a fenti példákban.
3.  $x \rightarrow -x$  helyettesítéssel („tükrözéssel”) az adódik, hogy  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(-x) dx$ , mivel a határok cserélődnek, és visszacserélve kiesik a  $dx$   $-1$ -gyel szorzódása. Például tudhatjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{i\omega x}}{x^2+a^2} \stackrel{x \rightarrow -x}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-i\omega x}}{x^2+a^2}. \quad \text{Összenézve: az eredmény ugyanannyi } \omega\text{-ra és } -\omega\text{-ra: az eredmény } \omega \text{ páros függvénye.}$$

Fentebb ezt végigszámoltuk  $\omega > 0$ -ra és  $\omega < 0$ -ra is (az út „merrefelé zárhatóságának” gyakorlásaként); most látjuk, hogy elég lett volna pl.  $\omega > 0$ -ra: abból rekonstruálhatjuk a páros  $\omega$ -függésű (5.15) eredményt. Más esetben is sokszor leszűrhetjük így az eredmény  $\omega$ -függésének párosságát-páratlanságát, amit tudva elég lehet csak pl.  $\omega > 0$ -ra konkrétan kiszámolni az integrált.

• Eddig itt szigorúan *integrálható* függvények kerültek elő: pl. racionális törtfüggvényeknél ehhez kellett a legalább kettővel magasabb fokú nevező. Az ebben a szakaszban látott módszerek *improprius integrálokra* (ld. 3.2. szakasz) is működhetnek, azaz amikor csak egy véges szakaszra vett integrál határértékéről beszélhetünk. **Példa:** legyen  $\omega, \alpha \in \mathbb{R}^+$  és tekintsük a következő integrált:

$$\text{Létezik-e } \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x e^{i\omega x}}{x^2+\alpha^2} ? \quad \text{Hát } \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b dx \frac{x e^{i\omega x}}{x^2+\alpha^2}, \quad \text{speciálisan } \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R dx \frac{x e^{i\omega x}}{x^2+\alpha^2} ? \quad (5.19)$$

Az első, a rendes integrál nem létezik, mert akkor az abszolútérték is integrálható lenne, de nem az (mivel  $x \in \mathbb{R}$ -re  $|e^{i\omega x}|=1$ , így az abszolútérték csak  $\sim \frac{1}{x}$  szerint csökken  $\pm\infty$  felé). A második (a határérték) viszont létezik  $\omega \neq 0$ -ra; ezt hívjuk ekkor *improprius integrálnak*.<sup>54</sup>

<sup>54</sup>Ez azon múlik, hogy (az abszolútértékével ellentétben)  $\omega \neq 0$ -ra az  $e^{i\omega x}$ -es integrandus valós és képzetes része is váltakozó előjelű: a kiesések miatt az abszolútérték lassabb csökkenése mellett is létezik most a határérték. (Ilyesmi a helyzet az *improprius integrál* váltakozó lépcsős alappéldájánál is, ld. a 3.2. szakaszt.) Mostani esetünkben egy parciális integrálással „előkezelt” durva integrálbecsléssel láthatjuk be a határérték létezését:  $0 < b_1 < b_2 < \infty$ -re

$$\mathcal{I} = \int_{b_1}^{b_2} dx \frac{x e^{i\omega x}}{x^2+\alpha^2} = \frac{1}{i\omega} \frac{x e^{i\omega x}}{x^2+\alpha^2} \Big|_{b_1}^{b_2} - \int_{b_1}^{b_2} dx \frac{e^{i\omega x}}{i\omega (x^2+\alpha^2)^2} \Rightarrow |\mathcal{I}| \leq \frac{1}{|\omega|} \left[ \frac{b_1}{b_1^2+\alpha^2} + \frac{b_2}{b_2^2+\alpha^2} + \int_{b_1}^{b_2} \frac{dx}{x^2} \right] \leq \frac{2}{|\omega|} \left[ \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} \right],$$

ami elég kicsi, ha  $b_1, b_2$  elég nagy: emiatt (tudva a konvergencia *Cauchy-kritériumait*) létezik az  $\int_a^b$  integrálunk  $b \rightarrow \infty$  határértéke. Ugyanígy beláthatjuk az alsó határ  $a \rightarrow -\infty$  esetének megfelelő határérték létezését is.

Mivel létezik itt a  $\lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty} \int_a^b$  határérték, ez ugyanannyi, mint a harmadik feltett kérdés (a lehetséges  $a, b \rightarrow \pm\infty$  átmenetek egy speciális esete). Kiszámolni ez utóbbit tudjuk: a  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvényre kiterjesztett  $f(z) = \frac{ze^{i\omega z}}{z^2 + \alpha^2}$  integrandusnak egy felfelé záródó, az ottani egy darab  $z_1 = i\alpha$  pólust megkerülő,  $R$  sugarú félkörívre vett integrálja  $\oint_{\gamma} dz f(z) = 2\pi i \operatorname{Res} f|_{z_1} = 2\pi i \frac{e^{-\omega\alpha}}{2} = i\pi e^{-\omega\alpha}$ . Az sugallta a felfelé zárást, hogy  $e^{i\omega z}$  most a felső  $z$ -felsíkon csökken exponenciálisan (mert  $\omega > 0$ ): az következik, hogy belássuk, hogy  $R \rightarrow \infty$ -re az ív járuléka nullához tart. A félkörív  $z(\varphi) = Re^{i\varphi}$ ,  $\varphi \in [0, \pi]$  paraméterezését használva és úgy rendezve, hogy az  $R \rightarrow \infty$  esetre „ráérezhessünk”:

$$\oint_{\text{félkörív}} dz f(z) = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi i R e^{i\varphi} \cdot \frac{R e^{i\varphi} \exp(i\omega R e^{i\varphi})}{R^2 e^{2i\varphi} + \alpha^2} = i \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \frac{e^{i\omega R \cos \varphi} e^{-\omega R \sin \varphi}}{1 + \frac{\alpha^2}{R^2} e^{-2i\varphi}} \quad (5.20)$$

A nevező itt  $\varphi$ -ben nézve egyenletesen 1-hez tart, ha  $R \rightarrow \infty$ ; a számlálóban  $|e^{i\omega R \cos \varphi}| = 1$ , az  $e^{-\omega R \sin \varphi}$  pedig  $\varphi \in ]0, \pi[$  esetén nullához tart  $R \rightarrow \infty$ -re, de nem egyenletesen (ha  $\varphi \approx 0$  vagy  $\varphi \approx \pi$ , akkor nagyon lassan). Az egész integrandus tehát  $\varphi \in ]0, \pi[$ -n pontonként nullához tart, és (adott értéknél nagyobb minden  $R$ -re egyszerre) *majorálható* egy konstans értékkel, ami integrálható  $[0, \pi]$ -re. A *Lebesgue-tétel* alapján tehát (ld. a 3.2. szakaszt) az integrál határértéke egyenlő a határértékfüggvény integráljával, ami nulla (noha az integrandust most *nem* tudtuk nullához tartó konstanssal felülbecsülni, hogy így a szokásos integrálbecslést használhattuk volna).

Beláttuk így, hogy az ív járuléka nullához tart: a megkerült pólus reziduumból tehát

$$\text{Ha } \omega > 0, \text{ akkor } \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R dx \frac{x e^{i\omega x}}{x^2 + \alpha^2} = 2\pi i \cdot \operatorname{Res} \left( \frac{z e^{i\omega z}}{z^2 + \alpha^2} \right) \Big|_{z=i\alpha} = \underline{\underline{i\pi e^{-\omega\alpha}}}. \quad (5.21)$$

• Újabb idevágó alkalmazás: a reziduúmtétellel kombinálva a **tg z**, **ctg z**, **th z**, **cth z** függvények menetét bizonyos „**algebrai**” **sorösszegeket** kényelmesen tudunk kezelni. Példa (itt  $\alpha > 0$  valós):

$$\text{Állítás: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2} = \frac{\pi \operatorname{ch}(\pi\alpha)}{2\alpha \operatorname{sh}(\pi\alpha)} - \frac{1}{2\alpha^2}. \quad (5.22)$$

A módszer lényege: a  $\operatorname{ctg}(\pi z) \equiv \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$  függvényről (a korábbi 2.5. és 4.5. szakaszok végei felé a  $\operatorname{tg} z \equiv \frac{\sin z}{\cos z}$  függvényre látottakat értelemszerűen átírva) a következőket tudhatjuk:

- 1.) csak a  $z = n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  helyeken nem differenciálható; itt elsőrendű pólusai vannak  $\frac{1}{\pi}$  reziduummal,
- 2.) a valós tengelytől távolodva korlátos marad: ha  $z \equiv x + iy$ , és  $y \rightarrow \infty$ , konstans  $\frac{1}{i}$ -hez tart.

Ismerve analitikus függvények „merevségét” talán nem meglepő az, hogy ha egy függvénytől *megköveteljük* ezeket, akkor nincs is nagyon más választásunk, mint éppen ez a  $\operatorname{ctg}(\pi z)$  függvény.<sup>55</sup>

Egy olyan útra vett integrál, ami pozitív irányban megkerüli az összes pólust, az ezekbeli reziduumok (végtelen) összegével fejezhető ki: tekintsünk egy ilyen  $\gamma$  utat ill. a következő függvényt:

$$f(z) = \frac{\operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2 + \alpha^2} \Rightarrow \oint_{\gamma} dz f(z) = 2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Res} f|_{z=n} = 2\pi i \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{n^2 + \alpha^2}. \quad (5.23)$$

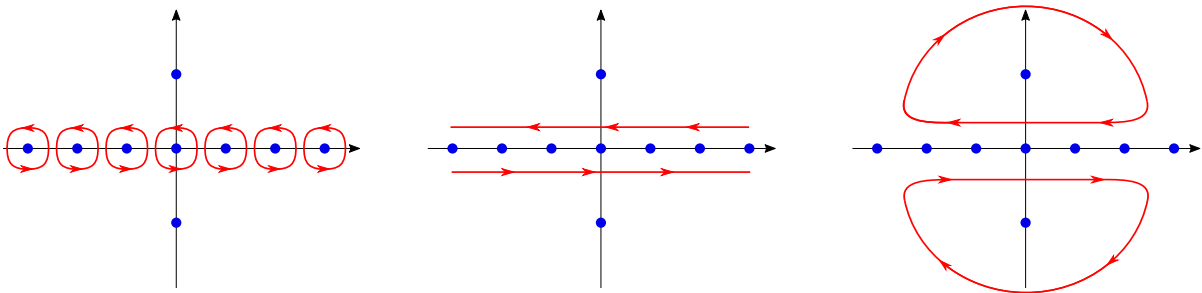
Az  $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ ,  $g(z) = \frac{\cos(\pi z)}{z^2 + \alpha^2}$ ,  $h(z) = \sin(\pi z)$ , és ebből  $h'(z) = \pi \cos(\pi z)$  beazonosítással ez az  $f$  olyan volt, hogy a vizsgált  $z = n$  pólusokban  $g$  sima,  $h$ -nak egyszeres zérushelyei vannak: a reziduumot

<sup>55</sup>Pl. ha megköveteljük (ami  $\operatorname{ctg}(\pi z)$ -re teljesül), hogy valós 1 szerint periodikus legyen, akkor nincs is más ilyen függvény. Egy másik ilyennek és  $\operatorname{ctg}(\pi z)$ -nek a különbségének az  $n \in \mathbb{Z}$  helyek megszüntethető szingularitásai lennének: ezeket megszüntetve egészfüggvényt kapnánk, ami mindenhol korlátos (a valós tengely véges környezetében a periodikusság és a folytonosság miatt, attól távolodva pedig a mondott korlátosság miatt), így tehát Liouville tétele miatt mindenhol konstans lenne, de ez a konstans csak nulla lehet a határozott  $y \rightarrow \infty$ -beli határérték miatt.

$\frac{g}{h}$  módon számolhattuk, így tényleg mejelentek a plusz szorzó,  $\frac{1}{z^2+\alpha^2}$  itteni értékei. Sikerült tehát (majdnem) a keresett sorösszeget egy komplex integrállal kifejezni.

Közben észrevehettük, hogy a felírt  $f(z)$ -nek még a plusz szorzóból származóan  $z=\pm i\alpha$ -ban is pólusai vannak. Az jön most, hogy (rutinosan mondva) „átdobjuk ezekre” az integrációs utat.

Először is a  $z=n$ -eket megkerülő utakat „összeolvaszthatjuk” a valós tengely felett ill. alatt egymással szemben haladó két úttá: hogy tényleg a keresett sorösszeget kapjuk a felírt módon, ezeknek *nem szabad* „megkerülniük” a  $z=\pm i\alpha$  pólusokat. Másodsor is az utat bezárhatjuk két nagy félkörrel, remélve, hogy  $R\rightarrow\infty$ -nél nullához tart a rájuk vett integrál. Valóban, a valós tengelytől legalább véges távolságra (a kapott egyenes utakon vagy azoktól kintebb)  $\text{ctg}(\pi z)$  korlátos,  $\frac{1}{z^2+\alpha^2}$  pedig úgy csökken, mint  $\sim \frac{1}{|z|^2}$ ; a  $(\pi R)$  hosszúságú félköríven  $|z|=R$ , így összerakva a szokásos integrálbecslés azt adja, hogy tényleg,  $R\rightarrow\infty$ -re a félkörökre vett integrál nullához tart.



36. ábra. A tárgyalt sorösszeg levezetéséhez kellő integrációsút-átalakítás.

Az így kapott (két darabból álló) út viszont éppen csakis a „kihagyott”  $\pm i\alpha$  pólusokat kerüli meg, láthatóan fordított, azaz *negatív irányítással*: így tehát az  $f(z)$  imént felírt körintegráljára

$$\oint_{\gamma} dz f(z) = -2\pi i \cdot \text{Res} f \Big|_{i\alpha} - 2\pi i \cdot \text{Res} f \Big|_{-i\alpha} = -2\pi i \left( \frac{\text{ctg}(i\pi\alpha)}{2i\alpha} + \frac{\text{ctg}(-i\pi\alpha)}{-2i\alpha} \right) = \frac{2\pi i \text{ch}(\pi\alpha)}{\alpha \text{sh}(\pi\alpha)}.$$

A reziduumszámolásban itt a  $\text{ctg}(\pi z)$ -t tekinthetjük a sima számlálónak,  $z^2+\alpha^2$ -et pedig az egyszeres zérushelyű nevezőnek; ebből kijön. Idehozva a fentebbi (5.23) képletet arra jutunk, hogy

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+\alpha^2} = \frac{\pi \text{ch}(\pi\alpha)}{\alpha \text{sh}(\pi\alpha)} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\alpha^2} = \frac{\pi \text{ch}(\pi\alpha)}{2\alpha \text{sh}(\pi\alpha)} - \frac{1}{2\alpha^2}, \quad \text{kész.} \quad (5.24)$$

Utoljára levontuk az  $n=0$ -s tagot és feleztünk, hogy megkapjuk a pozitív  $n$ -ekre vett összeget.

- Hasonló módszerrel, a  $\frac{\text{ctg}(\pi z)}{z^4+\alpha^4}$ -nel dolgozva levezethetjük a következőt is (tegyük is meg!):

$$\text{Állítás:} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+\alpha^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}\alpha^3} \cdot \frac{\text{sh}(\sqrt{2}\pi\alpha) + \sin(\sqrt{2}\pi\alpha)}{\text{ch}(\sqrt{2}\pi\alpha) - \cos(\sqrt{2}\pi\alpha)} - \frac{1}{2\alpha^4}. \quad (5.25)$$

Úgy tűnhet, hogy „kiszámoltuk” az (5.22)-ben és (5.25)-ben felírt sorösszegeket; bőven előfordulhat, hogy fordítva, egy numerikus program a  $\text{ctg}$ ,  $\text{cth}$  függvényeket épp ilyen és hasonló végtelen sorösszegeket kombinálva számítja ki konkrétan. Mindenesetre érdekes *átalakításokat* láttunk.

*Megjegyzés:* a levezett (5.22) és (5.25) eredményekben némi szenvedéssel (pl. közös nevezőre hozva, majd a számláló és a nevező sorfejtésével és/vagy l’Hospital-szabállyal) elvégezhetjük az  $\alpha\rightarrow 0$  határátmeneteket. A következő félig-meddig híres jól ismert képletek adódnak:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}. \quad (5.26)$$

### 5.3. Egyszerű típusú vágások

A reziduomtétel ugye abból származott, hogy az integrációs utat (ami akár több izolált szingularitást is megkerül) „rádarabolhatjuk” az egyes izolált szingularitásokra, amelyekből a reziduumaik járulékaik maradnak az eredményben. Egyszerű esetekben ha a vizsgált  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvénynek vágásai (is) vannak, akkor is érdekes átalakításokra nyílik lehetőség, ha az utat a vágásra „ráhúzzuk”.

• Kezdjük **racióális törtfüggvények 0-tól  $\infty$ -ig vett** integráljaival:  $\int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} dx = ?$ , ahol  $P$  és  $Q$  polinomok. Ahhoz, hogy az integrál létezzen, az kell ugye, hogy az integrandus

- 1.) *lokálisan* integrálható legyen  $\mathbb{R}_0^+$ -n, konkrétan: ne legyen itt pólusa ( $\mathbb{R}^-$ -on akár lehet is), és
- 2.) legalább  $\frac{1}{x^2}$  szerint csökkenjen:  $Q(x)$  legalább kettővel magasabb fokú legyen, mint  $P(x)$ .

Ha az integrandus páros függvény, akkor megfelelően a(z előző szakaszbeli módszerrel kiszámolható)  $\int_{-\infty}^\infty$  integrált készen vagyunk. A **komplex logaritmusfüggvény** és vágása azonban nem páros esetben is kiegészít most. Az ötlet: az  $\text{Ln}(-z)$  függvénynek éppen  $\mathbb{R}^+$ -on van vágása, és

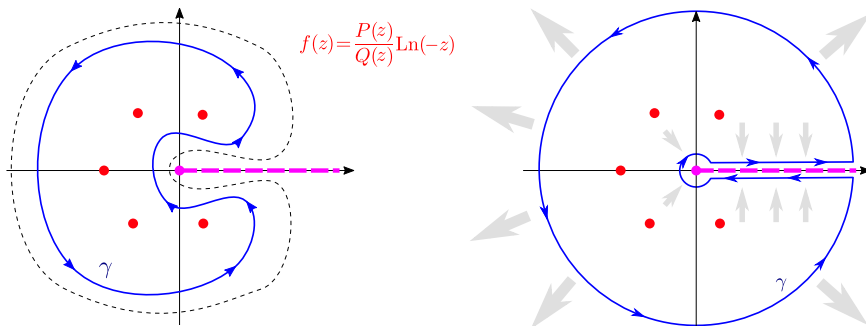
$$\text{Ha } x \in \mathbb{R}^+, \text{ és } \begin{cases} z = x + i\varepsilon, \text{ akkor } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Ln}(-z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Ln}(-x - i\varepsilon) = \ln x - i\pi, \\ z = x - i\varepsilon, \text{ akkor } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Ln}(-z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Ln}(-x + i\varepsilon) = \ln x + i\pi. \end{cases} \quad (5.27)$$

Itt a  $0^+$  azt jelenti, hogy  $\varepsilon$ -nal  $\mathbb{R}^+$  felől tartunk 0-hoz. Ha tehát felülről ill. alulról tartunk  $z$ -vel a pozitív valós  $x$ -hez, akkor  $\text{Ln}(-z)$  valós része mindenképpen  $\ln x$ -hez tart, a képzetes része viszont (a fázismegállapodás miatt) rendre  $-\pi$ -hez ill.  $\pi$ -hez,  $x$ -től *függetlenül*. Ez adja az ötletet: ha

$$\int_0^\infty dx \frac{P(x)}{Q(x)} = ? \quad \Rightarrow \quad \text{tekintsük a következő } \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ függvényt: } f(z) := \frac{P(z)}{Q(z)} \text{Ln}(-z), \quad (5.28)$$

és integráljuk ezt egy olyan pozitív irányítású zárt  $\gamma$  görbére, amin *belül* van  $f(z)$ , azaz  $\frac{P(z)}{Q(z)}$  összes pólusa, de a vágást ízlésesen elkerüli. Ilyen  $\gamma$  görbe bennfoglalható olyan *nyílt* halmazban, amin az  $f(z)$ -nk meromorf (és így használhatjuk a reziduomtételt): az integrál értéke

$$\oint_\gamma dz f(z) = 2\pi i \cdot \sum_j \text{Res } f(z) \Big|_{z=z_j}, \quad \text{ahol } z_j\text{-k a pólusok } (j = 1 \dots N). \quad (5.29)$$



37. ábra. A most tárgyalt integrációs út. Bal oldal: annak illusztrálására, hogy alkalmazhatjuk a reziduomtételt. Jobb oldalon: az út transzformációja, amivel a keresett integrálra jutunk.

Kiderül viszont, hogy ez az eredmény már megadja a kérdéses integrálunkat. Ehhez álljon a  $\gamma$  görbe egy  $R$  sugarú nagy körívből, egy a  $z=0$  elágazási pont körüli  $r$  sugarú kis körívből, valamint a vágás fölött ill. alatt  $\varepsilon$ -nyira lévő szakaszokból, a felsőt  $+\infty$  felé („oda”), az alsót  $+\infty$  felől („vissza”) irányítva. Az  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $r \rightarrow 0$  és  $R \rightarrow \infty$  határátmenetnek kellenek majd: a visszatérő utat végtelenbe visszük, a két szárát pedig ráhúzzuk a vágásra (és az elágazási pontra). Mivel az utat tényleg

differenciálható tartományokon át mozgatjuk, igaz marad a fenti (5.29) eredmény, ugyanakkor

$$\oint_{\gamma} dz f(z) = \int_{\text{„oda”}} dz f(z) + \int_{\text{nagy ív}} dz f(z) + \int_{\text{„vissza”}} dz f(z) + \int_{\text{kis ív}} dz f(z).$$

A szakaszdarabok adják a lényegét. Az ezeken lévő számok  $x+i\varepsilon$  ill.  $x-i\varepsilon$  alakba írhatók, emiatt

$$\begin{aligned} \int_{\text{„oda”}} dz f(z) &= \int_r^R dx \frac{P(x+i\varepsilon)}{Q(x+i\varepsilon)} \operatorname{Ln}(-x-i\varepsilon) &\Rightarrow & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\text{„oda”}} dz f(z) = \int_r^R dx \frac{P(x)}{Q(x)} (\ln x - i\pi), \\ \int_{\text{„vissza”}} dz f(z) &= \int_R^r dx \frac{P(x-i\varepsilon)}{Q(x-i\varepsilon)} \operatorname{Ln}(-x+i\varepsilon) &\Rightarrow & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\text{„vissza”}} dz f(z) = -\int_r^R dx \frac{P(x)}{Q(x)} (\ln x + i\pi); \end{aligned}$$

a másodikonál irányt fordítva. Kihasználtuk az  $\operatorname{Ln}$  látott (5.27) határértékeit, és hogy  $\frac{P(z)}{Q(z)}$  az  $\mathbb{R}^+$  tengely környékén folytonos is: ottani határértéke ottani értékével egyenlő.<sup>56</sup> Összeadva:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\text{„oda”}} dz f(z) + \int_{\text{„vissza”}} dz f(z) \right\} = \int_r^R dx \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot -2\pi i; \quad \text{kiesett } \ln x \text{ (ennek örülünk), lényegében a keresett integrál maradt.}$$

Ezután veszünk  $R \rightarrow \infty$ -t ill.  $r \rightarrow 0$ -t. A szokásos integrálbecslés azt adja, hogy a „maradék”, a körívек járuléka eltűnik itt ekkor (ld. alább; az „újdomságot” az simítja el, hogy a logaritmus ugyan 0 és  $\infty$  felé is végtelenhez tart, de *minden hatványfüggvényénél lassabban*). Így a körintegrálunk, amelynek értéke ugye (5.29),  $r \rightarrow 0$ -t és  $R \rightarrow \infty$ -t véve éppen a keresett integrál  $-2\pi i$ -szerese. Összerakva:

$$\underline{\underline{\int_0^{\infty} dx \frac{P(x)}{Q(x)} = -\sum_j \operatorname{Res} \left( \frac{P(z)}{Q(z)} \operatorname{Ln}(-z) \right) \Big|_{z=z_j}}}, \quad \text{ahol végigfutunk az összes } z_j \text{ póluson (a } Q \text{ zérushelyein).} \quad (5.30)$$

Elsőrendű pólusban az  $\operatorname{Ln}(-z)$  szorzó csak az  $\tilde{o}$  ott felvett értékével szorozza a  $\frac{P(z)}{Q(z)}$  reziduumát.

• **Példák** következnek az iménti képlet alkalmazására; az elsőt kicsit részletesebben kifejtsük:

$$\int_0^{\infty} dx \frac{x}{x^5+a^5} =? \quad \text{a csökkenés elég gyors, nincs pólus } \mathbb{R}_0^+ \text{-on: rendben.}$$

Az  $f(z)$  függvény, amelynek a reziduumai kellenek:

$$f(z) = \frac{z \operatorname{Ln}(-z)}{z^5+a^5} \Rightarrow \operatorname{Res} f \Big|_{z_k} = \frac{z_k \operatorname{Ln}(-z_k)}{5z_k^4}, \quad \text{mert a pólusok itt egyszeresek.}$$

A  $z_k$  pólusok a nevező zérushelyeiben, az  $a$  sugarú körön szabályos ötszög alakban vannak:

$$z_1 = ae^{\frac{1}{5}i\pi}, \quad z_2 = ae^{\frac{3}{5}i\pi}, \quad z_3 = -a, \quad z_4 = ae^{-\frac{3}{5}i\pi}, \quad z_5 = ae^{-\frac{1}{5}i\pi}.$$

**Figyelem!** Vigyázzunk  $\operatorname{Ln}(-z_k)$ -knál a fázis helyes megállapítására (ugye masszívan támaszkodtunk a fázisugrásra az (5.30) képlet levezetésekor is); pl.  $z_1$ -re  $\operatorname{Ln}(-z_1) = \ln a - \frac{4}{5}i\pi$ . Így összeszedve:

$$\int_0^{\infty} dx \frac{x}{x^5+a^5} = -\sum_{k=1}^5 \operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=z_k} = -\sum_{k=1}^5 \frac{z_k \operatorname{Ln}(-z_k)}{5z_k^4} = \frac{1}{5a^5} \sum_{k=1}^5 z_k^2 \operatorname{Ln}(-z_k) =$$

<sup>56</sup> Be kell persze látni, hogy az  $\varepsilon \rightarrow 0$ -val kapott felírt (pontonkénti) határértékfüggvény integrálja megegyezik az integrál határértékével. Kisegít a *Lebesgue-tétel*, ha van *minden szóba jövő*  $\varepsilon$ -ra közös integrálható majoráns. Vezérfonalak: 1.) csak véges sok pólus van, így a legközelebbi is legalább véges messze van a vágástól; indítsuk olyan kicsi  $\varepsilon_0$ -tól az  $\varepsilon \rightarrow 0$  átmenetet, hogy az  $\mathbb{R}^+$  körüli  $2\varepsilon_0$  széles (zárt) sávon már nincs pólus: ekkor  $\left| \frac{P(x \pm i\varepsilon)}{Q(x \pm i\varepsilon)} \right| \leq \frac{K}{1+x^2}$  valamilyen  $K$ -val (mert a tört legalább  $\sim \frac{1}{|z|^2}$  módon csökken, és a pólusoktól biztonságosan messze vagyunk). 2.) minden  $x \in \mathbb{R}^+$  esetén durva becsléssel is  $|\operatorname{Ln}(-x+i\varepsilon)| \leq |\ln \sqrt{x^2+\varepsilon^2}| + \pi$ , hiszen  $|\arg z| \leq \pi$  nyilván igaz; azt is gondoljuk ki, hogy  $\ln \sqrt{x^2+\varepsilon^2}$ -et minden előkerülő  $\varepsilon$  esetén egyszerre felülbecsülhetjük  $c_1 |\ln x| + c_2$ -vel valamilyen  $c_1, c_2$  konstansokkal. 3.)  $\frac{K(c_2+\pi)}{1+x^2}$  is integrálható, és (noha  $x=0$ -ban  $\infty$ -hez tart)  $\left| \frac{Kc_1 \ln |x|}{1+x^2} \right|$  is; készen vagyunk.

$$= \frac{1}{5a^3} \left[ e^{\frac{2}{5}i\pi} (\ln a - \frac{4}{5}i\pi) + e^{\frac{6}{5}i\pi} (\ln a - \frac{2}{5}i\pi) + \ln a + e^{-\frac{6}{5}i\pi} (\ln a + \frac{2}{5}i\pi) + e^{-\frac{2}{5}i\pi} (\ln a + \frac{4}{5}i\pi) \right];$$

közben ügyesen kihasználtuk, hogy most mindig  $z_k^5 = -a^5$ . Az  $\ln a$  gyanús; csoportosítsunk így:

$$\int_0^\infty dx \frac{x}{x^5+a^5} = \frac{\ln a}{5a^3} \left( e^{\frac{2}{5}i\pi} + e^{\frac{6}{5}i\pi} + 1 + e^{-\frac{6}{5}i\pi} + e^{-\frac{2}{5}i\pi} \right) + \frac{i\pi}{5a^3} \left( \frac{2}{5}e^{-\frac{6}{5}i\pi} - \frac{2}{5}e^{\frac{6}{5}i\pi} + \frac{4}{5}e^{-\frac{2}{5}i\pi} - \frac{4}{5}e^{\frac{2}{5}i\pi} \right).$$

Az  $\ln a$ -s első tagban a zárójelben egy szabályos ötszög öt csúcsába mutató komplex számok összege van, ami nulla. A második tagban pedig két sin összege szerepel:

$$\int_0^\infty dx \frac{x}{x^5+a^5} = \frac{2\pi}{25a^3} \left( 2 \sin\left(\frac{6}{5}\pi\right) + 4 \sin\left(\frac{2}{5}\pi\right) \right) = \frac{4\pi}{25a^3} \left( 2 \sin\left(\frac{2}{5}\pi\right) - \sin\left(\frac{1}{5}\pi\right) \right),$$

Ez már „elfogadható” eredmény: látszik, hogy valós pozitív (ahogy kell). A  $\frac{\pi}{5} = 36^\circ$  szög került elő; tudva, hogy  $\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$ , és ebből  $\cos 36^\circ$ -ot és  $\sin 36^\circ$ -ot kifejezve arra jutunk, hogy

$$\int_0^\infty dx \frac{x}{x^5+a^5} = \frac{4\pi}{25a^3} \sin 36^\circ (4 \cos 36^\circ - 1) = \frac{\sqrt{5}\pi}{50a^3} (\sqrt{5}-1)(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-1).$$

• Gyakorlásképpen végigszámolhatjuk az alábbiakat is. Ellenőrizendő ugye, hogy teljesülnek a szakasz elején felidézett feltételek (=létezik az integrál). Ezután csak alkalmazni kell (5.30)-at, esetleg (mint előbb is) trükkösen egyszerűsíteni. Jó önellenőrzési lehetőség, hogy valós függvény valós integrálja tényleg valós, pozitív függvényé pozitív lett-e. Az utolsó példa páros függvény; a korábbi módszerrel is kiszámolható integrál fele adódik most is.<sup>57</sup> Az utolsó előttiben pedig többrendű pólusok vannak, így a reziduumokat bonyolultabb módon kell kiszámítani.

$$\int_0^\infty \frac{x dx}{x^4+a^4} = \frac{\pi}{4a^2}, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{x^3+a^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}a^2}, \quad \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^3+a^3)^3} = \frac{1}{3a^3}, \quad \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{x^6+a^6} = \frac{\pi}{6a^3}.$$

• A logaritmus vágása tehát „kellemesen használható”: a két oldalon felvett függvényértékek különbsége  $2\pi i$ . **Nem egész kitevőjű hatványfüggvények vágásai** is hasonlóan lekezelhetők: emlékezzünk, hogy  $z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$ , ebből gondoljuk ki, hogy a vágást megközelítve arra jutunk, hogy

$$\text{ha } x > 0 \text{ pozitív valós, akkor } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (-x \pm i\varepsilon)^\alpha = x^\alpha \cdot e^{\pm i\pi\alpha}. \quad (5.31)$$

Az  $x \pm i\varepsilon$ -t  $z$ -nek hívva tehát: ha  $z$ -vel az  $\mathbb{R}^-$  féltengelyhez tartunk,  $z^\alpha$  határértéke a pozitív valós alapú  $|z|^\alpha$  megszorozva  $e^{i\pi\alpha}$ -val (felül) ill.  $e^{-i\pi\alpha}$ -val (alul). Ezek csakis  $\alpha \in \mathbb{Z}$  esetén egyenlők; ha viszont  $\alpha \notin \mathbb{Z}$ , akkor  $z^\alpha$ -nak tényleg vágása van  $\mathbb{R}^-$ -on, és meg is kaptuk a két oldali határértéket.

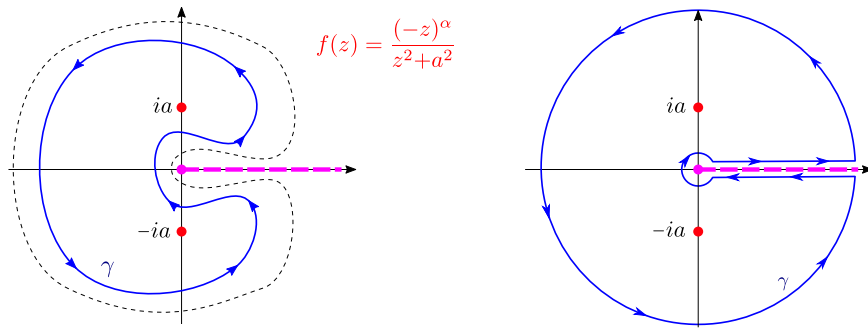
Ha tehát egy integrációs út a vágás egyik oldalán oda, másikon vissza fut, ezen szorzókkal szorzott ugyanolyan valós integrál kerül elő itt és ott. Az alábbi példában ezt tudva boldogulhatunk.

$$\begin{array}{l} \text{Legyen } a > 0 \text{ valós, } \alpha \in \mathbb{C} \\ \text{pedig egyelőre akármilyen;} \end{array} \quad \int_0^\infty dx \frac{x^\alpha}{x^2+a^2} = ? \quad (5.32)$$

Először is: ellenőrizzük, hogy pozitív valós  $x$ -re (amik előkerülnek)  $|x^\alpha| = x^{\Re(\alpha)}$ . A nevező  $x \rightarrow \infty$ -re  $\sim \frac{1}{x^2}$  módjára csökken,  $x=0$ -ban folytonos. Ezek miatt ha  $\Re(\alpha) < -1$ , akkor az integrandus  $x=0$  környékén nem integrálható, ha pedig  $\Re(\alpha) > 1$ , akkor  $x \rightarrow \infty$  felé nem az (nem csökken elég gyorsan). Akkor létezik tehát az integrál, ha  $-1 < \Re(\alpha) < 1$ ; a továbbiakban ezt tesszük fel.

Adódik, hogy az alább felírt  $f(z)$  függvényt tekintsük: ennek  $\mathbb{R}^+$ -on van vágása, és kihozhatjuk belőle a keresett integrált, ha őt az iménti 37. ábrán látott  $\gamma$  útra integráljuk.

<sup>57</sup>Akinek van kedve, végiggondolhatja, hogy ez milyen módon lesz tényleg igaz minden ilyen esetben.



38. ábra. A mostani (hatványfüggvényes) példában ugyanarra az útra van szükség, mint fentebb.

$$f(z) := \frac{(-z)^\alpha}{z^2 + a^2}, \quad \text{és mint fent,} \quad \oint_\gamma dz f(z) = \int_{\text{„oda”}} dz f(z) + \int_{\text{nagy ív}} dz f(z) + \int_{\text{„vissza”}} dz f(z) + \int_{\text{kis ív}} dz f(z).$$

A vágásra ráhúzandó, attól  $\pm\varepsilon$  távolságban menő (az  $r$  kis sugártól az  $R$  nagy sugárig kiterjedő) két szárát itt is úgy paraméterezhetjük, mint fent, és a határértéket is megállapíthatjuk:

$$\begin{aligned} \int_{\text{„oda”}} dz f(z) &=_{z=x+i\varepsilon} \int_r^R dx \frac{(-x-i\varepsilon)^\alpha}{(x+i\varepsilon)^2 + a^2} \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\text{„oda”}} dz f(z) = \int_r^R dx \frac{x^\alpha e^{-i\pi\alpha}}{x^2 + a^2}, \\ \int_{\text{„vissza”}} dz f(z) &=_{z=x-i\varepsilon} \int_R^r dx \frac{(-x+i\varepsilon)^\alpha}{(x-i\varepsilon)^2 + a^2} \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\text{„vissza”}} dz f(z) = -\int_r^R dx \frac{x^\alpha e^{i\pi\alpha}}{x^2 + a^2} \\ \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\text{„oda”}} dz f(z) + \int_{\text{„vissza”}} dz f(z) \right\} &= (e^{-i\pi\alpha} - e^{i\pi\alpha}) \int_r^R dx \frac{x^\alpha}{x^2 + a^2}; \end{aligned}$$

az iménti 56. lábjegyzetben leírthoz hasonló módon itt is belátható Lebesgue-tétellel, hogy itt is a (ráhúzással kapott) függvényhatárérték integrálja egyenlő az integrál határértékével.<sup>58</sup> Azt is beláthatjuk itt (ld. alább is), hogy éppen akkor, ha  $\alpha$  eleget tesz a mondott  $-1 < \Re(\alpha) < 1$  feltételnek, a nagy ívre ill. a kis ívre vett járulékok nullához tartanak.

$$\begin{aligned} \text{Ezek miatt } r \rightarrow 0\text{-t és } R \rightarrow \infty\text{-t} \quad \oint_\gamma dz f(z) &= -2i \sin(\pi\alpha) \int_0^\infty dx \frac{x^\alpha}{x^2 + a^2}, \\ \text{véve (és a szinuszt felismerve)} \end{aligned}$$

másrészt viszont a reziduomtételből (mivel a görbe itt is pólusokat kerül meg, még hozzá most a  $\pm ia$ -ban lévőket, melyek elsőrendűek, így a reziduumokat egyszerűen kiszámíthatjuk)

$$\oint_\gamma \frac{dz}{2\pi i} f(z) = \text{Res } f|_{ia} + \text{Res } f|_{-ia} = \frac{(-ia)^\alpha}{2(ia)} + \frac{(ia)^\alpha}{2(-ia)} = \frac{a^{\alpha-1}}{2i} \left( e^{-\frac{i\pi\alpha}{2}} - e^{\frac{i\pi\alpha}{2}} \right) = -a^{\alpha-1} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right).$$

Közben ki kellett számolni  $i^\alpha$ -t és  $(-i)^\alpha$ -t (ez nem okoz gondot), és az eredményt egyszerűsíteni (ez sem). Az előzőeket is tudva így viszont készen vagyunk: arra jutunk (egyszerűsítve), hogy

$$\int_0^\infty dx \frac{x^\alpha}{x^2 + a^2} = \frac{-2\pi i a^{\alpha-1} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}{-2i \sin(\pi\alpha)} = \frac{\pi a^{\alpha-1}}{2 \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}. \quad (5.33)$$

<sup>58</sup> Itt is (a hasonló témájú 56. lábjegyzetben mondottak miatt) ha elég kicsi  $\varepsilon_0$ -tól (azaz: a vágáshoz elég közelről) indítjuk az  $\varepsilon \rightarrow 0$  ráhúzást, akkor nem zavarunk a pólusok, érvényes a  $\left| \frac{P(x \pm i\varepsilon)}{Q(x \pm i\varepsilon)} \right| \leq \frac{K}{1+x^2}$  becslés. Továbbá  $|(-x \pm i\varepsilon)^\alpha| \leq (\sqrt{x^2 + \varepsilon^2})^{\Re(\alpha)} e^{\pi|\Im(\alpha)|}$  minden előkerülő  $x$ -re és  $\varepsilon$ -ra, mert  $\arg$  nagysága legfeljebb  $\pi$ . Ide kellene minden  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  esetén majoráns: kigodolhatjuk, hogy ha  $\Re(\alpha) < 0$ , akkor  $(\sqrt{x^2 + \varepsilon^2})^{\Re(\alpha)} \leq x^{\Re(\alpha)}$ , ha pedig  $\Re(\alpha) \geq 0$ , akkor  $(\sqrt{x^2 + \varepsilon^2})^{\Re(\alpha)} \leq (\sqrt{x^2 + \varepsilon_0^2})^{\Re(\alpha)}$ . Mindkét esetben az iménti  $\frac{K}{1+x^2}$ -tel szorozva  $x \in [0, \infty]$ -re integrálható függvényt kapunk (ugyebár  $-1 < \Re(\alpha) < 1$  volt). Van tehát integrálható majoráns, a ráhúzás közben jogosan írtunk integrál határértékét határérték integrálja helyett.

A követett módszer értelemszerűen alkalmazható másfajta  $\int_0^\infty dx \frac{P(x)}{Q(x)} x^\alpha$  alakú integrálokra is.

\* \* \*

• A szakaszban eddig látott példákban kihasználtuk az Ln ill. a hatványfüggvény esetében, hogy az elágazási pont körüli kis ill. a visszatérő nagy körívek járuléka eltűnnek  $r \rightarrow 0$  és  $R \rightarrow \infty$  esetén. Most megnézzük ezeket részletesebben; később már elég felidézni az így szerzett „beidegződést”.

Kezdjük az *utóbb látott* esettel, a hatványfüggvényessel! Az integrál  $\int_0^\infty dx \frac{P(x)}{Q(x)} x^\alpha$  típusú: ahhoz, hogy létezzen az integrál, ugye az kellett, hogy  $Q$  kettővel magasabb fokú legyen, mint  $P$ , továbbá  $\Re(\alpha) > -1$  legyen (az  $x=0$  körüli integrálhatóság érdekében), és  $\Re(\alpha) < 1$  legyen (a  $\infty$ -beli elég gyors csökkenés érdekében). Több más „jó” lehetőség is lenne, de azokat visszavezethetjük erre.<sup>59</sup>

A látott számolásban *először* húztuk rá a vágásra az út szárait úgy, hogy  $r$  még véges kicsi és  $R$  véges nagy. *Ezután* vettünk  $r \rightarrow 0$ -t és  $R \rightarrow \infty$ -t, amihez tehát a következőket kell belátni:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^\alpha \quad \Rightarrow \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\text{kis ív}} dz f(z) = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\text{nagy ív}} dz f(z) = 0. \quad (5.34)$$

A nagy ív kerülete legfeljebb  $2\pi R$ , és  $Q$  kettővel magasabb fokú, mint  $P$ : van olyan  $L$  konstans, amivel elég nagy  $|z|$ -től kezdve már  $|\frac{P(z)}{Q(z)}| \leq \frac{L}{|z|^2}$ . Továbbá  $|(-z)^\alpha| = |z|^{\Re(\alpha)}$ . A nagy íven továbbá  $|z|=R$ ; kihasználva, hogy  $\Re(\alpha)-1 < 0$ , tényleg arra jutunk a szokásos integrálbecsléssel, hogy

$$\begin{array}{l} \text{elég nagy} \\ R \text{ esetén} \end{array} \quad \left| \int_{\text{nagy ív}} dz f(z) \right| \leq 2\pi R \frac{L}{R^2} R^{\Re(\alpha)} = 2\pi L \cdot R^{\Re(\alpha)-1} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\text{nagy ív}} dz f(z) = 0.}}$$

A kis ív kerülete pedig legfeljebb  $2\pi r$ , és  $z=0$  környékén  $\frac{P(z)}{Q(z)}$  folytonos: van  $z=0$  környékén felső korlátja, azaz olyan  $L'$ , hogy ha  $|z|$  elég kicsi, akkor  $|\frac{P(z)}{Q(z)}| \leq L'$ . Ezek miatt (kihasználva, hogy a kis íven  $|z|=r$ , és hogy  $\Re(\alpha)+1 > 0$ ), a szokásos integrálbecsléssel tényleg arra jutunk, hogy

$$\begin{array}{l} \text{elég kicsi} \\ r \text{ esetén} \end{array} \quad \left| \int_{\text{kis ív}} dz f(z) \right| \leq 2\pi r \cdot L' \cdot r^{\Re(\alpha)} = 2\pi L' \cdot r^{\Re(\alpha)+1} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\text{kis ív}} dz f(z) = 0.}}$$

Elvarttuk tehát a szálat. Látni való, hogy a ( $z$   $\alpha$ -ra vonatkozó) feltétel, ami az integrálhatóságot biztosította, lényegében ugyanolyan alakban kellett ahhoz, hogy az ívekre vonatkozó becsléseink működjenek. (Pl. ha  $\Re(\alpha) < -1$  lett volna, akkor nemcsak az  $x=0$  körüli integrálhatóság romlott volna el, hanem a kis ív járuléka eltűnését sem tudtuk volna az iménti módon belátni.)

• A (racionális törtfüggvények integráljainak levezetéséhez használt) logaritmusfüggvényes esetben a következő függvényt vizsgáltuk; erre is az iméntiekhez hasonlókat mondhatunk:

$$f(z) := \frac{P(z)}{Q(z)} \text{Ln}(-z);$$

- van olyan  $L'$ , hogy elég kicsi  $|z|$ -re  $|\frac{P(z)}{Q(z)}| \leq L'$ ,
- $Q$  legalább kettővel magasabb fokú  $P$ -nél, így van olyan  $L$ , hogy elég nagy  $|z|$ -re  $|\frac{P(z)}{Q(z)}| \leq \frac{L}{|z|^n}$ , ahol  $n \geq 2$ .

Ebben a logaritmusos esetben is beláthatjuk a nagy ill. kis ívek járulékaiknak nullához tartását, sőt, a hatványfüggvényes esethez képest mintegy „nagyvonalúbbak lehetünk”. Amint tudjuk (és fentebb

<sup>59</sup>Nem egyértelmű a  $P$ , a  $Q$  és az  $x^\alpha$  „szétválasztása”:  $x^\alpha$ -ból egy egész kitevőjű  $x^n$  hatványt beolvaszthatunk  $P$ -be vagy  $Q$ -ba. Ha pl. a kijelölt alakban  $Q$  négyvel magasabb fokú, mint  $P$ , akkor  $x^\alpha$  akkor csökken elég gyorsan  $\infty$  felé, ha  $\Re(\alpha) < 3$ , de ekkor  $\frac{x^2 P(x)}{Q(x)} x^{\alpha-2}$  alakot is írhatunk: ezen számláló kettővel kisebb fokú  $Q$ -nál, és az itt különálló  $x$ -kitevőre tényleg 1-nél kisebb valós rész a feltétel. Elég tehát a mondott esettel foglalkozni.



mondtuk is), az  $\ln x$  végtelenhez tartása  $x=0$ -ban ill.  $x=\infty$ -ben *lassabb minden hatványfüggvénynél*:

$$\begin{array}{llll} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty, & \text{de bármilyen} & \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^\alpha \ln x) = 0, & \text{és persze ön-} & \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0, \\ & \text{kicsi } \alpha > 0 \text{ ki-} & & \text{magában is} & \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty, & \text{tevő esetén} & \lim_{x \rightarrow \infty} (x^{-\alpha} \ln x) = 0, & \text{igaz, hogy} & \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\alpha} = 0. \end{array}$$

Továbblépve: a komplex logaritmus képzetes része abszolútértékben legfeljebb  $\pi$ , emiatt bármilyen  $z$ -re  $|\operatorname{Ln}(z)| \leq |\ln|z|| + \pi$ , és természetesen  $-z$ -re is ugyanez igaz (mert  $|-z|=|z|$ ), ez alapján

$$\text{bármilyen } \alpha > 0 \text{ kitevő esetén} \quad \lim_{z \rightarrow 0} (|z|^\alpha \cdot |\operatorname{Ln}(-z)|) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} (|z|^{-\alpha} \cdot |\operatorname{Ln}(-z)|) = 0.$$

Adott  $0 < \alpha < 1$  esetén van tehát olyan  $K$ , amivel elég nagy  $|z|$ -re már  $|z^{-\alpha} \operatorname{Ln}(-z)| \leq K$ , másrészt van olyan  $K'$  is, amivel elég kicsi  $|z|$ -re már  $|z^\alpha \operatorname{Ln}(-z)| \leq K'$ . A  $|\frac{P(z)}{Q(z)}| \leq \frac{L}{|z|^n}$  ill. a  $|\frac{P(z)}{Q(z)}| \leq L'$  becslések is „elég nagy” ill. „elég kicsi”  $|z|$  értékektől kezdve működnek; az alábbiakban az „elég nagy  $|z| \equiv R$ ” ill. az „elég kicsi  $|z| \equiv r$ ” kitételek a kétféle korlátok közül a szigorúbbat jelentik.

Az ígért „nagyvonalúság”: elég *bármilyen kicsi*  $\alpha > 0$ -t vennünk, és „ennyi kitevőnyit leharapunk”  $\frac{P(z)}{Q(z)}$  csökkenéséből ill.  $z=0$  körüli felső korlátjából, hogy a következő módon érvelhessünk:

$$\text{elég nagy } |z| \text{ esetén: } |f(z)| = \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \cdot |z^\alpha| \cdot |z^{-\alpha} \operatorname{Ln}(-z)| \leq \frac{L}{|z|^n} \cdot |z|^\alpha \cdot K = \frac{KL}{|z|^{n-\alpha}},$$

$$\text{elég kicsi } |z| \text{ esetén: } |f(z)| = \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \cdot |z^{-\alpha}| \cdot |z^\alpha \operatorname{Ln}(-z)| \leq L' \cdot |z|^{-\alpha} \cdot K' = K'L'|z|^{-\alpha},$$

és ezeket a becsléseket már betehetjük a szokásos integrálbecslésbe:

$$\text{elég nagy } R \text{ esetén} \quad \left| \int_{\text{nagy ív}} dz f(z) \right| \leq 2\pi R \frac{KL}{R^{n-\alpha}} = \frac{2\pi KL}{R^{n-\alpha-1}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\text{nagy ív}} dz f(z) = 0,$$

$$\text{elég kicsi } r \text{ esetén} \quad \left| \int_{\text{kis ív}} dz f(z) \right| \leq 2\pi r \cdot K'L'r^{-\alpha} = 2\pi K'L'r^{1-\alpha} \quad \Rightarrow \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\text{kis ív}} dz f(z) = 0.$$

Tényleg akármilyen kicsi  $0 < \alpha < 1$  elég volt; csak az kellett, hogy  $n-\alpha > 1$  ill. hogy  $1-\alpha > 0$  legyen.

\* \* \*

- Rutinnövelésként jöjjön **még egy példa**, mellyel Newton-Leibniz-formulával nem boldogulnánk.

$$\begin{array}{l} \text{Legyenek } a > 0 \text{ és } b > 0 \text{ va-} \\ \text{lós paraméterek; a kérdés:} \end{array} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\ln(x^2+a^2)}{x^2+b^2} =? \quad (5.35)$$

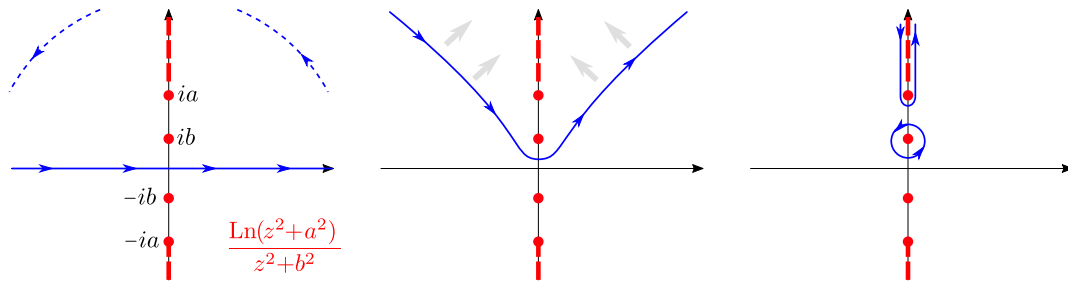
Az integrandus olyan ismert „szép” módon kiterjeszthető komplex differenciálható függvényé, hogy szinte kínálja magát: vizsgáljuk meg őt, hátha a(z egyelőre az  $\mathbb{R}$  tengelyen futó, de már a komplex síkon tekintett) integrációs úttal való trükközéssel kiderül valami érdekes. Legyen tehát

$$f(z) = \frac{\operatorname{Ln}(z^2+a^2)}{z^2+b^2}. \quad z \equiv x \in \mathbb{R}\text{-re } f(x) = \frac{\ln(x^2+a^2)}{x^2+b^2}: \text{ „jó” a kiterjesztés. Ha Ln hasába negatív valós kerül: vágás; ha a nevező polinom nulla: izolált szingularitás.}$$

- A vágások helye: ha  $z^2+a^2=-r$ , ahol  $r \in \mathbb{R}_0^+$ , akkor  $z = \pm i \cdot \sqrt{r+a^2}$ . Azaz: az ilyen  $z$ -k két félegyenesen vannak a képzetes tengelyen:  $ia$ -tól  $i\infty$ -ig (ahogy  $r \in \mathbb{R}_0^+$ -n fut), ill.  $-ia$ -tól  $-i\infty$ -ig.

A nevező zérushelyei  $z_1 = ib$  és  $z_2 = -ib$ . Lehet-e a számláló nulla bennük? Akkor lenne az, ha  $a^2-b^2=1$ , azaz  $a = \sqrt{1+b^2}$  lenne; egyelőre tegyük fel, hogy nem ez a helyzet. Előfordulhat viszont még az is, hogy  $z_1$  és  $z_2$  rajta vannak a már megtalált vágásokon; éppen akkor, ha  $b > a$ .

Ez elbonyolítaná a helyzetet: egyelőre azt is tegyük fel tehát, hogy  $a > b$  (de ugye  $a \neq \sqrt{1+b^2}$ ). Ha viszont ezek teljesülnek  $a$ -ra és  $b$ -re, akkor van két szép vágásunk és két szép elsőrendű pólusunk,  $f(z)$  pedig elég gyorsan csökken a végtelenben: az  $\text{Ln}$  növekedése, mint láttuk, nem igazán „zavar be”; a nélküle érvényes  $\frac{L}{|z|^2}$  szerinti helyett bármilyen kicsi  $\alpha > 0$ -val  $\frac{L}{|z|^{2-\alpha}}$ -val felülbecsülhetjük a végtelenbeli viselkedést. Kínálja magát tehát, hogy az integrációs utat egészítsük ki két nagy negyedkörrel, amelyek „rávezetnek” a vágásra (pl. felfelé; így teszünk most, de ugyanarra az eredményre jutnánk lefelé menéssel is). A nagy ívek nullához tartó (azaz: nulla) járulékot adnak (a szokásos integrálbecslésből láthatóan; a fentebbiekhez hasonló érvelést most már az Olvasóra bízunk): tényleg eldeformálhatjuk az integrációs utat a mondott módon a vágásra ráhúzva.



39. ábra. Útátalakítás a most tárgyalt integrálhoz. Bal oldalon: a végtelenben kiegészíthetjük a (valós tengelyen futó eredeti) utat, ezután (a többi ábrán mutatta) deformálhatjuk úgy az utat, hogy a vágásra simuljon. Közben „fennakad” a póluson: annak reziduuma is járulékot ad.

• Az eredeti integrálunk tehát a pólust megkerülő, a vágás mellett (bal oldalt) lefelé, végül a vágás mellett (jobb oldalt) felfelé futó három darab útintegrál összegével egyenlő. (*Gondoljuk ki a korábbiak alapján, hogy az elágazási pontot megkerülő kis  $r$  sugarú körív járuléka itt is nullához tart  $r \rightarrow 0$ -ra!* Lényeg: mint fent, a logaritmus növekedése lassabb, mint a körkerület csökkenése.) A lefelé ill. a felfelé futó szakaszokat  $z = ia \pm \varepsilon + ix$ ,  $x \in \mathbb{R}_0^+$  módon paraméterezve, nem elfeledkezve a paraméterezésből jövő  $\frac{dz}{dx}$  derivált (konstans  $i$ ) értékéről, majd határcserével összevonva

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) &= \oint dz f(z) + \int_{„le”} dz f(z) + \int_{„fel”} dz f(z) = \\ &= 2\pi i \cdot \text{Res} f|_{ib} + i \int_{-\infty}^r dx f(ia - \varepsilon + x) + i \int_r^{\infty} dx f(ia + \varepsilon + x) = \\ &= 2\pi i \cdot \text{Res} f|_{ib} + i \int_r^{\infty} dx [f(ia + \varepsilon + x) - f(ia - \varepsilon + x)]. \end{aligned} \quad (5.36)$$

• Azért óvatoskodtunk még az alsó határral (hogy  $r \neq 0$ ), hogy a  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Ln}(-x \pm i\varepsilon) = \ln x \pm i\pi$  képlettel (ami ugye pozitív  $x$ -re igaz) egyszerűen kezelhessük a vágásnál a két oldali (azaz: az  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) határértékeket. Ezután majd vehetünk  $r \rightarrow 0$ -t: az elágazási pontot elkerülő kis körív járuléka nulla lesz, úgyhogy lényegében elég lesz  $r=0$ -t írni az iménti második tag integrálási határába.

Az  $\varepsilon \rightarrow 0$  határértékben kihasználjuk, hogy a nevező folytonos a vágáson:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [f(ia + \varepsilon + ix) - f(ia - \varepsilon + ix)] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{\text{Ln}((ia + \varepsilon + ix)^2 + a^2)}{(ia + \varepsilon + ix)^2 + b^2} - \frac{\text{Ln}((ia - \varepsilon + ix)^2 + a^2)}{(ia - \varepsilon + ix)^2 + b^2} \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(ia + ix)^2 + b^2} \cdot \left\{ \text{Ln}[\varepsilon^2 + a^2 - (a+ix)^2 + 2i\varepsilon(a+ix)] - \text{Ln}[\varepsilon^2 + a^2 - (a+ix)^2 - 2i\varepsilon(a+ix)] \right\}. \end{aligned}$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ -ra tehát (mivel itt még  $x > r$  lehet csak, ahol  $r$  határozottan pozitív) tényleg *negatív*ak a lo-

garitmusokban lévő értékek valós részei: még hozzá ugyanannyik. A képzetes részek pedig nullához tartanak a kétféle irányból: leszűrtük tehát (a nevezőt is egyszerűsítve), hogy

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [f(ia+\varepsilon+ix) - f(ia-\varepsilon+ix)] = \frac{-2i\pi}{(a+x)^2-b^2}; \quad \begin{array}{l} \text{törfüggvény maradt, a} \\ \text{logaritmus „megevődött”} \end{array}$$

A fenti (5.36) képletben kiértékelhetjük az  $ib$ -beli reziduumot is: arra jutunk tehát (most már  $r=0$ -t véve, és végül a maradék integrált Newton-Leibniz-formulával kiértékelve), hogy

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\ln(x^2+a^2)}{x^2+b^2} &= 2\pi i \frac{\text{Ln}(a^2-b^2)}{2ib} + i \int_0^{\infty} dx \frac{-2i\pi}{(a+x)^2-b^2} = \frac{\pi}{b} \ln(a^2-b^2) + \\ &+ 2\pi \left[ \frac{1}{2b} \ln \frac{(x+a)-b}{(x+a)+b} \right] \Big|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{\pi}{b} \left( \ln(a^2-b^2) - \ln \frac{a-b}{a+b} \right) = \frac{2\pi}{b} \ln(a+b). \end{aligned} \quad (5.37)$$

• Emlékezzünk:  $a>b$  kellett, alaposan ki is használtuk ezt minden lépésben (a végén az egyszerűsítéseknél is). Utolsó pont: a *kapott eredmény is*, és (a paraméteres integrál differenciálhatóságát megvizsgálva, ld. az 5.1. szakaszt is) *az eredeti integrál is* differenciálható  $a$  és  $b$  függvényében, hacsak  $\Re(a)>0$  és  $\Re(b)>0$ . Emiatt az eddig vizsgált esetre (mint torlódási pontot nagyon is tartalmazó részhalmazra) levezetett eredmény, mivel  $a$ -ban és  $b$ -ben analitikus függvények egyenlőségét állítja, igaz lesz: **minden  $\Re(a)>0$  és  $\Re(b)>0$  esetén is** az iménti (5.37) képlet adja meg az eredményt, nemcsak az eddigi korlátozott esetben (amiben ki tudtuk számolni).<sup>60</sup>

\* \* \*

Remélhetőleg ez és az előző szakasz közel hozta a mindenféle integrálok kiszámítására használható komplex függvénytani trükköket. Végig elkísért az alapvető megnyugtató érzés, miszerint komplex differenciálható függvények analitikusak: „merevek”, „kis részük már meghatározza az egészet”. Sokszor pl. bizonyos módon felírt valós függvényeket kellett kiterjeszteni  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvénnyé: ha ellenőriztük, hogy nem tévedtünk (vagyis az eredeti függvény tényleg a talált kiterjesztés leszűkítése), akkor lényegében „a” jó lehetőséget sikerült megtalálni, és a levezett eredmény így egyértelmű.

## 5.4. Síkbeli elektrosztatika (azaz: Laplace-egyenlet, második felvonás)

• Sokszor találkozunk *Laplace-egyenlettel*. Motiváló példánk most az elektrosztatika ill. a magnetosztatika: itt a fizikai törvények a *Maxwell-egyenletek*, melyek a  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  ill. a  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  vektormezőre (az elektromos ill. a mágneses mezőre) vonatkoznak, és rövid úton Laplace-egyenletre vezetnek:

— Sztatikus (időben változatlan) esetben  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$  az egész térben, emiatt létezik a  $\Phi(\mathbf{r})$  elektromos potenciál, melynek  $\mathbf{E}$  a (negatív) gradiense:  $\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi$ . Ahol nincs töltés, ott  $\mathbf{E}$  forrásmentes: üres térben sztatikus esetben tehát  $\text{div } \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \text{div grad } \Phi = \underline{\underline{\Delta \Phi = 0}}$ .

— Sztatikus esetben, ott, ahol nem folyik áram,  $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ , így bevezethető a  $\Psi(\mathbf{r})$  ún. *mágneses skálárpotenciál*, mellyel  $\mathbf{B} = -\text{grad } \Psi$ . Ez a  $\Psi$  csak egyszeresen összefüggő halmazon értelmezhető folytonosan (ha a tartomány nem ilyen, mert pl. körbeölel egy áramvezetőt, akkor  $\Psi$ -nek vágása lesz). Viszont ahol  $\Psi$  sima, ott (mivel  $\text{div } \mathbf{B}=0$  mindig igaz)  $\text{div grad } \Psi = \underline{\underline{\Delta \Psi = 0}}$ .

• Síkbeli esetben (amikor a harmadik  $z$  iránytól nem függ semmi, azaz az elrendezés „végtelen hosszú”) a Laplace-egyenlet  $\Delta^{(2)}\Psi \equiv (\partial_x^2 + \partial_y^2)\Psi=0$  alakú; a két dimenzióra utaló indexet inentől

<sup>60</sup>Érdekeség: e jegyzet írásakor, 2020-ban a most kiszámolt integrált az internetes WolframAlpha *nem tudja*...

lehagyjuk. Idézzük fel a 2.4. szakaszt: azt találtuk, hogy a valós és képzetes rész értelemszerű jelölésével (és ahol külön kell, ott külön feltételezve az analitikusságot) a következők igazak:

$$\begin{array}{lll} f(z) \equiv U(x, y) + iV(x, y) & \text{Teljesülnek a Cauchy-} & \Rightarrow \quad \nabla U \cdot \nabla V = 0, \text{ és} \\ \text{nyílt halmazon komplex} & \Leftrightarrow \text{-Riemann-egyenletek,} & \text{„}\Leftarrow\text{”} \quad \Delta U = 0, \quad \Delta V = 0. \\ \text{differenciálható függvény} & \partial_x U = \partial_y V, \quad \partial_y U = -\partial_x V & \end{array}$$

Az ilyen  $U, V$  neve: *harmonikus pár*; az utolsó visszakövetkeztetésről ld. a 27. lábjegyzetet is. A kétdimenziós Laplace-egyenletet megoldhatjuk tehát, ha *akármilyen* differenciálható  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvény valós vagy képzetes részét vesszük. Tipikusan azonban még *határfeltételek* is vonatkoznak a keresett megoldásra: akkor válik a mondott ötlet jól használhatóvá, ha módszereket adunk arra, hogy hogyan találhatunk adott határfeltételeket is kielégítő megoldásra vezető  $f(z)$ -t.

• Bevezetőként írjuk fel egy „síkbeli pontszerű töltés” (harmadik irányban végtelen hosszú, egyenes hosszanti sűrűséggel töltött szál) által keltett elektromos teret: az  $\mathbf{E}$  forrására vonatkozó Maxwell-egyenletből ismert módon kijön az eredmény (itt  $\mathbf{r} \equiv (x, y)$  a síkbeli helyvektor,  $r \equiv |\mathbf{r}|$ ):

$$\begin{array}{ll} \text{Ha a szál töl-} & \text{a keltett } \mathbf{E} \text{ sugárirá-} \\ \text{téssűrűsége } \eta: & \text{nyú, } |\mathbf{E}| \text{ } r\text{-től függ:} \end{array} \quad |\mathbf{E}| = \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right);$$

az origót persze a szál helyébe tettük. Síkbeli „pontszerű áram” (a síkra merőleges hosszú egyenes áramvezető) keltette mágneses tér pedig a  $\mathbf{B}$  örvényeire vonatkozó Maxwell-egyenletből jön ki:

$$\begin{array}{ll} \text{Ha a szálban a síkból kifelé } I \text{ áram folyik,} & \\ \text{akkor a } \mathbf{B} \text{ erővonalai jobbkezes körök, és} & \end{array} \quad |\mathbf{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right).$$

Hasonlít a két képlet (pl. a sugárfüggés ugyanaz). Fel is írhatjuk a megfelelő potenciálokat:

$$\begin{array}{ll} \text{ellenőrizzük,} & \mathbf{E} = -\nabla\Phi, & \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\eta}{2\pi\epsilon_0} \ln r = -\frac{\eta}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{x^2+y^2}, \\ \text{hogya a felírt} & & \\ \text{mezőkre} & \mathbf{B} = -\nabla\Psi, & \Psi(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \arctg \frac{y}{x} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \arg(x+iy). \end{array} \quad (5.38)$$

A kipontozott sík nem egyszeresen összefüggő: a felírt  $\Psi$  mágneses skalárpotenciálnak tényleg vágása lett;  $\nabla\Psi$  viszont a vágásra is folytonosan kiterjeszthető. A kapott potenciálok az  $\text{Ln } z$  valós és képzetes részei: a pontszerű töltéshez ill. áramhoz tartozó **komplex potenciál** tehát

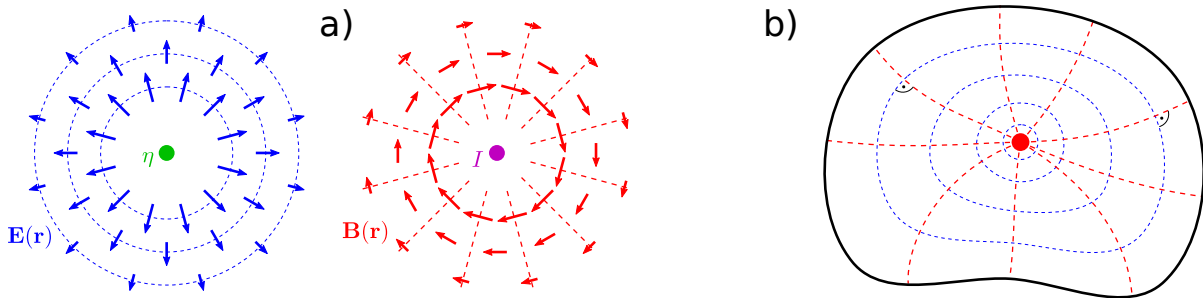
$$\begin{array}{ll} z \equiv x + iy, & \text{Re } \tilde{\Phi}(z) = \ln \sqrt{x^2+y^2} : & \text{ez (a } -\frac{\eta}{2\pi\epsilon_0} \text{ szorzótól eltekintve) az o-} \\ & & \text{rigóbeli síkbeli ponttöltés potenciálja.} \\ \underline{\tilde{\Phi}(z) = \text{Ln } z.} & \text{Im } \tilde{\Phi}(z) = \arg(x+iy) : & \text{ez (a } -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \text{ szorzó híján) az origóbeli á-} \\ & & \text{ram mágneses terének skalárpotenciálja.} \end{array} \quad (5.39)$$

Az  $\text{Ln } z$  helyett  $\text{Ln}(z-z_0)$ -t írva **eltolhatjuk** az egész elrendezést az origóból egy  $z_0$  helyre.

• A látottak miatt úgy gondolkodunk inentől, hogy egy  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  differenciálható  $\tilde{\Phi}(z)$  *komplex potenciál* valós része egy síkbeli elektrosztatikai probléma megoldásának tekinthető.

A tipikus elektrosztatikai feladatfajta: adott alakú (nyílt, összefüggő) tartomány *belsejében* esetleg néhány ponttöltést leszámítva  $\Delta\Phi=0$ , a határhoz tartva pedig  $\Phi$  vegyen fel előre meghatározott értékeket ott. Pl. egy kiterjedt határdarabon  $\Phi=0$ : ezt fizikailag úgy valósíthatjuk meg, hogy ez a darab fémből van, és nulla potenciálú ponthoz csatlakoztatjuk (leföldeljük). Ilyen határt (mivel ő a  $\Phi$  potenciál szintfelülete) az  $\mathbf{E}$  mint a  $\tilde{\Phi}$  gradiense minden pontban merőlegesen metsz.

A magnetosztatikában analóg jellegű a *szupravezetők* szerepe: az ő alaptulajdonságuk, hogy bennük azonosan  $\mathbf{B}=0$ . Mivel  $\mathbf{B}$  forrásmentes, azaz az erővonalai nem „nyelődhetnek el” a határon, adódik, hogy szupravezető külső felületével az ottani  $\mathbf{B}$ -erővonalak párhuzamosak (szemben az elektrosztatikával, ahol fémek felületén az  $\mathbf{E}$ -erővonalak merőlegesek). Egy elektrosztatikai feladat komplex potenciáljának *képzetes része* tehát egy analóg magnetosztatikai feladat megoldása, ahol a töltéseket áramokra és a fém-határokat szupravezetőkre cseréljük. Mivel  $\tilde{\Phi}(z)$  komplex differenciálható (azaz valós és képzetes része ortogonális vonalsereget ad meg), az ilyen  $\mathbf{E}$ -tér és a megfelelő  $\mathbf{B}$ -tér erővonalai pontról pontra merőlegesek.



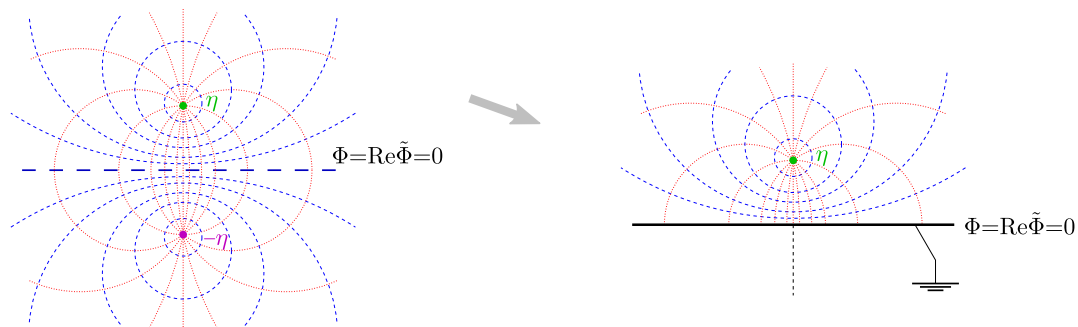
40. ábra. a.) síkbeli ponttöltés elektromos ill. síkra merőleges áram mágneses tere. b.) ponttöltés+fémhatár elektrosztatikai ill. síkra merőleges áram+szupravezető határ magnetosztatikai feladatának szabadkézi szemléltetése; az egyik ill. a másik fajta erővonalak merőlegesek.

• Egyszerű bonyolítás:  $\Phi=0$  egy végtelen egyenesen (melyet tegyünk a valós tengelyre), és adott  $z_0 \equiv x_0 + iy_0$  pontban (amelyet tegyünk a felső félsíkra)  $\eta$  síkbeli ponttöltés; milyen a potenciál ekörül (a felső félsíkon)? A **töltéstükrözés** módszerét használhatjuk: abban a *másik* elrendezésben, amikor nincs határfeltétel, csak az eredeti  $\eta$  töltésünk és még  $\mathbb{R}$ -re tükrözött helyen egy ellentétes előjelű,  $-\eta$  ponttöltés, a potenciál *a felső félsíkon* csak az  $\eta$  töltést tartalmazza, és valós része (ami kell) az  $\mathbb{R}$ -tengelyen nulla: ez a felső félsíkban jó megoldás. *Ez tehát* a megoldás; konkrétan:

$$\text{A } z_0 \text{ } \mathbb{R}\text{-re vett tü-} \quad \tilde{\Phi}(z) = -\frac{\eta}{2\pi\epsilon_0} \text{Ln}(z-z_0) - \frac{-\eta}{2\pi\epsilon_0} \text{Ln}(z-z_0^*) \stackrel{(\text{Re})}{=} -\frac{\eta}{2\pi\epsilon_0} \text{Ln} \frac{z-z_0}{z-z_0^*}. \quad (5.40)$$

körképe  $z_0^*$ , ebből:

Az utolsó átírás a valós részekre igaz, a képzetes rész vágásai kerülnek máshova, de a gradiens (mely azon magnetosztatikai feladat megoldása, amikor az  $\eta$  helyén a síkra merőleges áram folyik ill. az egyenes határ szupravezető) ezekre is egyértelműen kiterjeszhető.



41. ábra. Egyenes fémhatár, töltéstükrözés. Kék:  $\mathbf{E}$  szintfelületei (ill. az analóg szupravezető feladat  $\mathbf{B}$ -vonalai), piros: viszont. *Megjegyzés:*  $\tilde{\Phi}$  képletéből kijön, hogy a vonalak körök. A háromdimenziós ponttöltéses hasonló feladat is megoldható tükrözéssel; ott nem gömbjeink lesznek.

• Már előkerültek bizonyos differenciálható függvények mint **konform leképezések** (ld. a 2.3. szakaszt): ha a ( $z$ -vel jelölt változójú) síkon egy adott alakú tartományhatárt (amin pl. adott a  $\Phi=0$  határfeltétel) egy  $z'=g(z)$  differenciálható függvénnyel a  $z'$  új változóban tekintve („a  $z'$  síkon”) megfelelőbb alakú vonalra képezünk, és (pl. az iméntiek alapján) felírjuk az  $f(z')$  komplex pontenciált a  $z'$  változóban, akkor  $\tilde{\Phi}(z) := f(g(z))$  jó lesz az eredeti feladat megoldására. Ugyanis differenciálható, mert **differenciálható függvények kompozíciója**, így valós része megoldja a Laplace-egyenletet (most használjuk ki, hogy ezt tényleg „rábízhadjuk” a komplex függvény differenciálhatóságára), továbbá  $z' = g(z)$  tényleg pont akkor van a  $z'$ -síkon a határunk képén, amikor  $z$  az eredeti síkon az eredeti határon. Egy-két körülményt még alább tisztázunk.

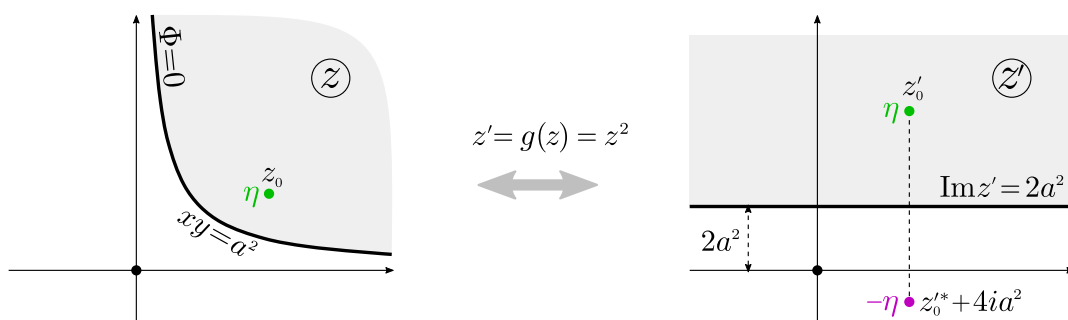
• **Példa:** legyen  $\Phi=0$  egy **egyenlőszárú hiperbola** ívén, a belső részen (ahol  $\Phi(x, y)$ -t keressük) pedig legyen egy  $\eta$  sík-ponttöltés. *Az ötlet:* rajzoljuk a hiperbolát a jobb felső síknegyedre  $xy=a^2$  egyenletűre (ahol  $a>0$ ), a töltés legyen  $z_0 \equiv x_0 + iy_0$ -ban, és emlékezzünk, hogy a  $z'=g(z)=z^2$  függvény az ilyen hiperbolát (ill. a belső részét) „kihajtogatja” vízszintes egyenessé (ill. az afölötti tartományra). Erről ld. a korábbi 6. ábra környékét; emlékeztető:  $\text{Im } z^2 = 2xy$ , ezért ha  $\text{Im } z' = \text{Im } z^2 = 2a^2$ , ami vízszintes egyenes a  $z'$  síkon, akkor az eredeti síkon éppen  $xy=a^2$ .

A  $z'$  síkon tehát a feladat: adott  $z'_0 = g(z_0) = z_0^2$  helyen ponttöltés, az  $\text{Im } z' = 2a^2$  helyzetű vízszintes egyenesen  $\Phi=0$ . Ennek megoldása a mondott egyenesre (nem az  $\mathbb{R}$ -re!) vett töltéstükrözéssel

$$-\frac{\eta}{2\pi\epsilon_0} \text{Ln}(z' - z'_0) - \frac{-\eta}{2\pi\epsilon_0} \text{Ln}(z' - (z'_0)^* + 4ia^2) \stackrel{(\text{Re})}{=} -\frac{\eta}{2\pi\epsilon_0} \text{Ln} \frac{z' - z'_0}{z' - z'_0^* - 4ia^2}, \quad (5.41)$$

ahol ugye az átírás a valós részre igaz, és a képzetes rész gradiense is csak annyiban változik, hogy a máshol lévő vágásokra kell értelemszerűen kiterjeszteni. Beírva, hogy  $z' = g(z) = z^2$ , a következő függvényről állítjuk, hogy valós része (amit számítsunk ki magunk!) az eredeti feladat megoldása:

$$\tilde{\Phi}(z) = \frac{-\eta}{2\pi\epsilon_0} \text{Ln} \frac{z^2 - z_0^2}{z^2 - z_0^{*2} - 4ia^2} \Rightarrow \Phi(x, y) = \frac{-\eta}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \ln \frac{(x^2 - x_0^2 + y^2 - y_0^2)^2 + 4(xy - x_0y_0)^2}{(x^2 - x_0^2 + y^2 - y_0^2)^2 + 4(xy + x_0y_0 - 4a^2)^2}.$$



42. ábra. A hiperbola-határon  $\Phi=0$  határfeltételű feladat iménti megoldásának szemléltetése.

• *Tényleg ez a  $\Phi(x, y)$  a hiperbolás feladatunk megoldása.* Ellenőrizzük, hogy ha  $x$  és  $y$  akármilyen, de  $xy=a^2$ , akkor  $\Phi(x, y)=0$ , ahogy kell. Azt is ellenőrizhetjük (de el is hihetjük a komplex függvények ilyen ismeretségi fokán), hogy a töltések helyét kivéve  $\Delta\Phi=0$ . Az  $\eta$  töltés helyéhez közeledve (azaz  $z \rightarrow z_0$ -ra) a  $\Phi(x, y)$  végtelenhez tart. Ez lenne a helyzet a tükörtöltésnél is, de ez nem fordulhat elő a hiperbola belsejében (amint ez a  $z'$  síkon gondolkodva nyilvánvaló). A kapott  $\Phi(x, y)$  a hiperbola belsejében tehát tényleg csakis a töltés helyén nem oldja meg a Laplace-egyenletet. Itt pedig pont úgy viselkedik, ahogy egy töltés közelében kell: logaritmikusan végtelenhez tart.

- Tisztázzuk ezt a legutóbbi észrevételt! Általában hasonló feladatokban ilyesmi megoldást kapunk:

Egy darab,  $z_0$  pontbeli töltés esetén (de persze értelemszerűen általánosíthatunk több töltésre): 
$$\tilde{\Phi}(z) = \frac{-\eta}{2\pi\epsilon_0} \text{Ln}[g(z)-g(z_0)] + F(z),$$

ahol  $g(z)$  a vizsgált tartományon differenciálható bijekció (ezzel képeztük le a tartományt),  $F$  pedig a tartományunkban *mindenhol* differenciálható; ez pl. a (tartományunkon mozogva biztosan nem „érintett”) tükörtöltés(ek) járuléka. Állítás: a felírt  $\tilde{\Phi}(z)$  *tényleg* annak felel meg, amikor a tartományban éppen egy  $\eta$  sík-ponttöltés van  $z_0$ -ban. Ehhez számítsuk ki  $\tilde{\Phi}(z)$  deriváltját:

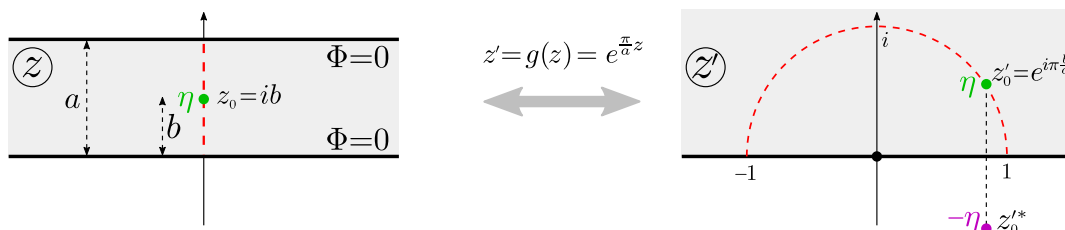
$$\tilde{\Phi}'(z) = \frac{-\eta}{2\pi\epsilon_0} \frac{g'(z)}{g(z)-g(z_0)} + F'(z), \quad \text{ahol } \tilde{\Phi}(z) \text{ differenciálható, azaz a } z_0\text{-t és az abból induló vágást kivéve mindenhol.}$$

Mivel  $g$  a tartományon injektív, csakis  $z=z_0$ -ban igaz, hogy  $g(z)-g(z_0)=0$ , továbbá egy jól meghatározott,  $z_0$ -ból induló, a  $g$ -tól függő alakú vonalon lesz  $g(z)-g(z_0) \in \mathbb{R}^-$ , ami  $\tilde{\Phi}$ -ben az Ln-nek vágása. Azonban látszik, hogy  $\tilde{\Phi}'$  (a  $z_0$ -t kivéve) erre a vágásra is differenciálhatóan kiterjeszthető; terjesszük is ki! Ezután viszont *a  $\tilde{\Phi}'$  derivált csakis a töltés  $z_0$  helyén nem differenciálható.* Ha  $g'(z_0) \neq 0$  (ami szinte mindig igaz), akkor elsőrendű pólus van itt, a reziduum pedig

$$\text{mivel } F \text{ analitikus } z_0\text{-ban is: } \underline{\underline{\text{Res } \tilde{\Phi}'(z) \Big|_{z=z_0}}} = \frac{-\eta}{2\pi\epsilon_0} \frac{g'(z_0)}{g'(z_0)} + \underbrace{0}_{F'\text{-ből}} = \underline{\underline{\frac{-\eta}{2\pi\epsilon_0}}}. \quad (5.42)$$

Ez igaz akkor is, ha  $g(z)=z$ , azaz nem transzformáltuk el a tartományt: *ha* tehát  $\tilde{\Phi}'$  reziduuma  $\frac{-\eta}{2\pi\epsilon_0}$ , *akkor*  $\eta$  töltés van  $z_0$ -ban. Látjuk, hogy ugyanilyen a viselkedés  $z_0$  körül, ha  $g(z)$  akármilyen, a  $z_0$ -ban differenciálható függvény. Az előző hiperbolás megoldásunk tehát *tényleg* jó: a hiperbolán belül csak a töltés helyén nem differenciálható, és ott úgy viselkedik, ahogy egy  $\eta$  töltésnél kell.

- **Következő példa:** vízszintes,  $a$  szélességű sáv, a két szélén  $\Phi=0$ , bent (kényelmesen: az  $y$  tengelyen az  $x$  tengelytől  $b < a$  távolságra) egy  $\eta$  töltés. A feladat megoldható végtelen sok tükrözéssel (ami  $\Phi=0$ -t mindkét élen biztosítja); esetleg visszatérünk erre, most azonban kövessük az eddigi receptet! Az *exponenciális függvény* jó lesz: ha  $x \in \mathbb{R}$ , akkor  $e^x \in \mathbb{R}^+$ , viszont  $e^{x+i\pi} = e^{i\pi} e^x = -e^x \in \mathbb{R}^-$ : az  $e^z$  függvény tehát a valós tengelyt  $\mathbb{R}^+$ -ra, az  $i\pi$ -vel feltölt egyenest  $\mathbb{R}^-$ -ra képezi. A közöttük lévő sávot pedig a felső félsíkra képezi, a sáv *belsejét* injektív módon (gondoljuk végig ezeket újra; ld. a korábbi 9. ábra környékét is).  $e^z$  helyett  $e^{\frac{\pi}{a}z}$ -t tekintve a sáv szélessége  $a$  lesz  $\pi$  helyett.



43. ábra. A sáv-feladat exponenciális függvénnyel „kiterítve”.

Így viszont az előző példához hasonlóan a  $z'$  változóban *egy* töltéstükrözéssel boldogulhatunk:

$$g(z) = e^{\frac{\pi}{a}z}, \quad z_0 = ib. \quad \text{A } z' \text{ síkon a megoldás: } \frac{-\eta}{2\pi\epsilon} \text{Ln} \frac{z'-z'_0}{z'-z'_0*}; \quad \text{ebből}$$

$$\tilde{\Phi}(z) = \frac{-\eta}{2\pi\epsilon} \text{Ln} \frac{e^{\frac{\pi}{a}z} - e^{\frac{i\pi b}{a}}}{e^{\frac{\pi}{a}z} - e^{-\frac{i\pi b}{a}}} \Rightarrow \Phi(x, y) = \dots = \frac{-\eta}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \ln \frac{\text{ch}(\frac{\pi}{a}x) - \cos(\frac{\pi}{a}(y-b))}{\text{ch}(\frac{\pi}{a}x) - \cos(\frac{\pi}{a}(y+b))}. \quad (5.43)$$



- **Még egy példa:**  $\alpha$  középponti szögű ( $\alpha < \pi$ ) ék-tartomány élein  $\Phi=0$ , bent  $z_0$ -ban ponttöltés.

Mi az a  $g(z)$ , ami a tartományunkat a (felső) félsíkra (a „ $\pi$  középponti szögű ékre”) kihajtogatja? A válasz benne van a kérdésben: ismerve a valós kitevőjű hatványozás  $\mathbb{C}$ -beli geometriai jelentését

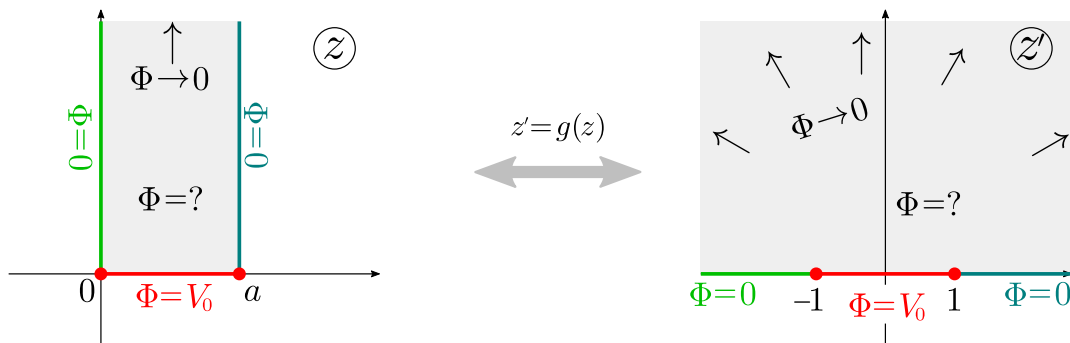
$$g(z) = z^{\pi/\alpha} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\Phi}(z) = \frac{-\eta}{2\pi\epsilon_0} \operatorname{Ln} \frac{g(z)-g(z_0)}{g(z)-(g(z_0))^*} = \frac{-\eta}{2\pi\epsilon_0} \operatorname{Ln} \frac{z^{\pi/\alpha} - z_0^{\pi/\alpha}}{z^{\pi/\alpha} - (z_0^*)^{\pi/\alpha}}. \quad (5.44)$$

Lapozzuk fel a korábbi 11. ábrát: ez mutatja, hogy a mostani  $g(z)$  leképezés hogyan hajtogatja ki az éket úgy, ahogy kell. Aki akarja, kiszámíthatja a most kapott  $\tilde{\Phi}(z)$  potenciál valós részét is.

*Megjegyzés:* ha  $\alpha$  értéke éppen  $\frac{2\pi}{2n}$ , azaz a teljesszög párosadrésze, akkor a feladat megoldható  $2n-1$  darab tükröltéssel is:  $n=1$  (azaz  $\alpha=\pi$ , tehát egyenes határ) esetén tudjuk, hogy egy tükrözéssel; ha viszont pl.  $n=2$  ( $\alpha=90^\circ$ ), akkor összesen 4 darab töltéssel (egy eredeti  $\eta$  és 3 tükröltés ízlésesen szimmetrikusan, váltakozó előjellel). Végiggondolható, hogy az általános  $\alpha$ -ra levezetett eredmény ezekben az esetekben ugyanazt adja, mint amit tükrözésekkel kaphatunk.

- **Utolsó (bonyolultabb) példánkban** tekintsünk egy „függőleges,  $a$  szélességű végtelen hosszú vályút”, azaz a  $0 < x < a$  és  $y > 0$  módon adott halmazt. Kell egy  $g(z)$ , ami ezt leképezi a felső félsíkra; ezt vagy elmondják (ld. alább), vagy rájövünk. *Esetleg itt megállva próbáljuk megtalálni!*

**Most nem ponttöltés**+, „földelt” (azaz: rajta  $\Phi=0$ -t megkövetelt) határ lesz, hanem nincs töltés, de a határfeltétel változatosabb. Kérdés a  $\Phi(x, y)$  potenciál a tartományunkon belül, ha  $\Delta\Phi=0$ , a határon pedig  $\Phi=0$  a két hosszú élen, de  $\Phi=V_0$  konstans érték az alapon, továbbá noha természetesnek tűnik, ki is kötjük, hogy  $y \rightarrow \infty$  esetén (azaz a vályúban egyre messzebb)  $\Phi \rightarrow 0$ .



44. ábra. A tárgyalt „vályús” feladat szemléltetése; a megfelelő  $g(z)$  függvényt alább adjuk meg.

Egy megfelelő  $\tilde{\Phi}(z)$  differenciálható függvényt (komplex potenciált) keresünk. Az ide kellő  $g(z)$ -t leginkább úgy találhatjuk meg, ha *egyszer végiggondoljuk „az összes” egyszerű komplex függvényt:*

A következő függvény a tartományunk belsejét bijektíven leképezi a felső félsíkra (ld. az iménti ábrát is):

$$g(z) = -\cos\left(\frac{\pi}{a}z\right). \quad (5.45)$$

Ellenőrizzük, hogy valóban, ha  $x=0$  és  $y>0$  (bal oldali él) ill.  $x=a$  és  $y>0$  (jobb oldali él), akkor  $z'$  a valós  $[-\infty, -1]$  ill.  $[1, \infty]$  intervallumokat futja be, ha pedig  $y=0$  de  $x \in [0, a]$ , akkor  $z'$  a maradék valós  $[-1, 1]$ -et futja be. A  $-\cos\left(\frac{\pi}{a}(x+iy)\right) = x'+iy'$  egyenlet valós és képzetes részét mint egyenletrendszer adott  $x', y'$  esetén megoldva egyszerűsítéssel arra jutunk, hogy egyértelműen

$$\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{a}y\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{|z'|^2+1} + \sqrt{(|z'|^2+1)^2-4x'^2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) = -\frac{\operatorname{sgn}(x)}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{|z'|^2+1} - \sqrt{(|z'|^2+1)^2-4x'^2},$$

és ebből egyértelmű a tartományunkon belüli  $x, y$ :  $g(z)$  tényleg bijekció ide leszűkítve.



Olyan, a *zárt* (azaz a határát is tartalmazó) felső félsíkon differenciálható  $f(z')$  függvény kell, aminek valós része az  $\mathbb{R}$  tengelyen az ábrán is látható módon 0, ha  $x < -1$  vagy  $x > 1$ , és  $V_0$ , ha  $x \in [-1, 1]$ . Eszünkbe juthat az  $\text{Ln } z$  logaritmus: ennek *képzetes része*, a fázis az  $\mathbb{R}^+$ -on 0, az  $\mathbb{R}^-$  féltengelyen  $\pi$ , és a zárt felső félsíkon differenciálható. (Idézzük fel: a fázisugrás az  $\mathbb{R}^-$  tengelyen túlbukva történik, a tengelyen a fázis még  $\pi$ .) Két ilyen „lépcsőt” szemben összerakva

$$\text{gondoljuk végig, hogy a következő függvény teljesíti az összes követelményünket:} \quad f(z') = \frac{V_0}{i\pi} \left[ \text{Ln}(z'-1) - \text{Ln}(z'+1) \right].$$

Az is kideríthető (ld. pl. a fejezet első 5.1. szakaszát), hogy a *nyílt* felső félsíkon lévő  $z'$ -kre átírhatjuk ezt törtté. Beírva  $z'$  helyébe a fenti  $g(z)$ -t azt kapjuk, hogy a komplex potenciál és valós része

$$\tilde{\Phi}(z) = \frac{V_0}{i\pi} \text{Ln} \frac{g(z)-1}{g(z)+1} = \frac{V_0}{i\pi} \text{Ln} \frac{-1 - \cos\left(\frac{\pi}{a}z\right)}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{a}z\right)} \quad \Rightarrow \quad \Phi(x, y) = \frac{V_0}{\pi} \arg \frac{-1 - \cos\left(\frac{\pi}{a}z\right)}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{a}z\right)}$$

A  $z$ -vel a vályú-tartomány *belsejében* maradvan nem nulla semelyik képzetes rész sem, így egyértelműen kiértékelhetjük a kapott alakot. A  $\text{tg}(2\xi) = \frac{2\text{tg}\xi}{1-\text{tg}^2\xi}$  képletet is tudva az adódik, hogy

$$\Phi(x, y) = \frac{V_0}{\pi} \text{arctg} \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \text{sh}\left(\frac{\pi}{a}y\right)}{\text{sh}^2\left(\frac{\pi}{a}y\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)} \quad \Rightarrow \quad \Phi(x, y) = \frac{2V_0}{\pi} \text{arctg} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)}{\text{sh}\left(\frac{\pi}{a}y\right)}. \quad (5.46)$$

Kipróbálhatjuk, hogy a vályú határaihoz tartva ez a kifejezés helyesen tudja az előírt feltételeket.

\* \* \*

• Az e szakaszban látott módszer sarokköve, hogy egy „kellemetlen” tartományt „kellemesre” leképezünk megfelelő  $g(z)$  függvénnyel. Láttunk példákat, és mindenféle  $g(z)$ -ket kipróbálva továbbiakat is gyárthatunk. Általánosan igaz egy (*Riemann*-tól származtatott) tétel:  $\mathbb{C}$  bármilyen egyszeresen összefüggő nyílt valódi részhalmazához *létezik* azt a felső félsíkra képező differenciálható bijekció. Ez igen „vad” határu halmazokat is megenged; leginkább olyanok érdekesek (mint eddig is), ahol a határ pl. szakaszonként sima. Félig-meddig konkrét formulák is vannak néhány egyszerű, de a látottaknál bonyolultabb esetekre; pl. az ún. *Schwarz-Christoffel-féle leképezés* sokszögekre.

## 5.5. Kiegészítés: az argumentum-elv

Az itt kifejtendő állítás (melynek neve is megvilágítódik alább) vonalintegrállal ad információt függvényeknek egy adott zárt görbén belüli zérushelyeinek ill. pólusainak rendjeiről és számairól.

• Legyen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  olyan, hogy egy adott  $z_0$  körül egy körlapon differenciálható, és a körlapon  $z_0$ -ban és csakis ott zérushelye van, melynek rendje  $s$ . A körlapon tehát  $f$  így áll elő hatványsorral:

$$f(z) = a_s(z-z_0)^s + a_{s+1}(z-z_0)^{s+1} + a_{s+2}(z-z_0)^{s+2} + \dots, \quad \text{ahol } a_s \neq 0,$$

$$\Rightarrow \quad \text{A körlapon } z_0\text{-t kivéve} \quad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{sa_s(z-z_0)^{s-1} + (s+1)a_{s+1}(z-z_0)^s + (s+2)a_{s+2}(z-z_0)^{s+1} + \dots}{a_s(z-z_0)^s + a_{s+1}(z-z_0)^{s+1} + a_{s+2}(z-z_0)^{s+2} + \dots} =$$

$$= \frac{s}{z-z_0} \cdot \frac{1 + \frac{s+1}{s} \frac{a_{s+1}}{a_s}(z-z_0) + \frac{s+2}{s} \frac{a_{s+2}}{a_s}(z-z_0)^2 + \dots}{1 + \frac{a_{s+1}}{a_s}(z-z_0) + \frac{a_{s+2}}{a_s}(z-z_0)^2 + \dots}. \quad (5.47)$$

E legutóbbi alakban a második tört az egész körlapon differenciálható, és  $z_0$ -ban véges 1 határértéke van, emiatt ezen törtfüggvénynek a  $z_0$  körüli Laurent-sora csak nemnegatív indexű tagokat

tartalmaz, és a nulladfokú együttható 1.<sup>61</sup> Emiatt viszont  $\frac{f'}{f}$  Laurent-sora  $z_0$  körül ilyen:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{s}{z-z_0} + C_0 + C_1(z-z_0) + C_2(z-z_0)^2 + \dots \Rightarrow \operatorname{Res} \frac{f'(z)}{f(z)} \Big|_{z=z_0} = s. \quad (5.48)$$

A mondott feltételek mellett tehát  $\frac{f'}{f}$ -nek  $z_0$  elsőrendű pólusa. A többi  $C_0, C_1, C_2, \dots$  együttható most nem is érdekes, de a  $-1$ -ediket egyszerűen a  $z_0$ -nak mint  $f$  zérushelyének rendje adja meg.

• Mi adódik, ha  $z_0$ -ban zérushely helyett pólus van? Sejthető: egy pólus „negatív annyiadrendű zérushely”-nek számít. Konkrétan: legyen most  $f$  olyan, hogy  $z_0$ -ban  $p$ -edrendű pólusa van, de körülötte egy kipontozott körlapon mindenhol differenciálható és sehol sem nulla. Ekkor itt  $f$  előáll Laurent-sorral, amiből ugyanúgy, mint az imént, leszűrhetjük  $\frac{f'}{f}$   $z_0$ -beli reziduumát:

A körlapon  $z_0$ -t kivéve  $f(z) = c_{-p}(z-z_0)^{-p} + c_{-p+1}(z-z_0)^{-p+1} + c_{-p+2}(z-z_0)^{-p+2} + \dots$ , ahol  $c_{-p} \neq 0$ ,

$$\Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(-p)c_{-p}(z-z_0)^{-p-1} + (-p+1)c_{-p+1}(z-z_0)^{-p} + (-p+2)c_{-p+2}(z-z_0)^{-p+1} + \dots}{c_{-p}(z-z_0)^{-p} + c_{-p+1}(z-z_0)^{-p+1} + c_{-p+2}(z-z_0)^{-p+2} + \dots},$$

$$\Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-p}{z-z_0} \cdot \frac{1 + \frac{-p+1}{-p} \frac{c_{-p+1}}{c_{-p}}(z-z_0) + \frac{-p+2}{-p} \frac{c_{-p+2}}{c_{-p}}(z-z_0)^2 + \dots}{1 + \frac{c_{-p+1}}{c_{-p}}(z-z_0) + \frac{c_{-p+2}}{c_{-p}}(z-z_0)^2 + \dots},$$

$$\Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-p}{z-z_0} + C_0 + C_1(z-z_0) + C_2(z-z_0)^2 + \dots \Rightarrow \operatorname{Res} \frac{f'(z)}{f(z)} \Big|_{z=z_0} = -p. \quad (5.49)$$

• A reziduomtételt is elővéve: ha a  $z_0$ -t megkerülő  $\gamma$  zárt görbe olyan, a  $z_0$ -ban kipontozott körlapon fut, ahol  $f$ -nek nincs zérushelye és differenciálható,  $z_0$ -ban pedig zérushelye vagy pólusa van, akkor

Ha  $z_0$  az  $f$   $s$ -edrendű zérushelye:  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(t)}{f(t)} dt = s$ , ha pedig  $p$ -edrendű pólusa:  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(t)}{f(t)} dt = -p$ . (5.50)

Sőt: ha a mondott  $f$  mellett egy másik  $g(z)$  függvény viszont olyan, hogy az egész körlapon ( $z_0$ -ban is) differenciálható (de akár lehetnek zérushelyei is, akár  $z_0$ -ban is), akkor  $g$  a körlapon *hatványsorba* fejthető,  $g(z_0)$  nulladfokú taggal. Emiatt az  $\frac{f'}{f}g$  függvény Laurent-sora a  $-1$ -es indexű taggal kezdődhet, azaz ennek is  $z_0$  legfeljebb elsőrendű pólusa, amiből leszűrhetjük, hogy

ha az  $f(z)$  és a  $g(z)$  a mondott tulajdonságúak, akkor  $\operatorname{Res} \frac{f'}{f}g \Big|_{z_0} = s \cdot g(z_0)$ , ill.  $\operatorname{Res} \frac{f'}{f}g \Big|_{z_0} = -p \cdot g(z_0)$ , (5.51)

vagyis a mondott fajta  $\gamma$  görbére, ha  $z_0$  az  $f$ -nek  $s$ -edrendű zérushelye ill.  $p$ -edrendű pólusa, akkor

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(t)}{f(t)} g(t) dt = s \cdot g(z_0), \quad \text{illetve} \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(t)}{f(t)} g(t) dt = -p \cdot g(z_0). \quad (5.52)$$

• Eddig csak egy ilyen „gyanús”  $z_0$ -t tárgyaltunk. Tegyük most fel, hogy  $f$  meromorf, és  $\gamma$  a  $\operatorname{Dom} f$ -ben futó zárt görbe,  $g$  pedig az egész  $\operatorname{Dom} f$ -en differenciálható. Ekkor egy a  $\gamma$ -t körülvevő, de még  $\operatorname{Dom} f$ -beli korlátos zárt halmazban  $f$ -nek csak véges sok zérushelye és pólusa lehet. Tegyük fel, hogy  $f$  egyik zérushelye sem esik a  $\gamma$ -ra (a pólusok eleve nem eshetnek rá); ekkor a  $\gamma$  görbét a reziduomtétel indoklásánál is látott módon (mivel  $\frac{f'}{f}g$  differenciálható ott, ahol  $f$ -nek sem zérushelye, sem pólusa nincs) „rádarabolhatjuk” az  $f$ -nek a  $\gamma$  által megkerült zérushelyeire ill.

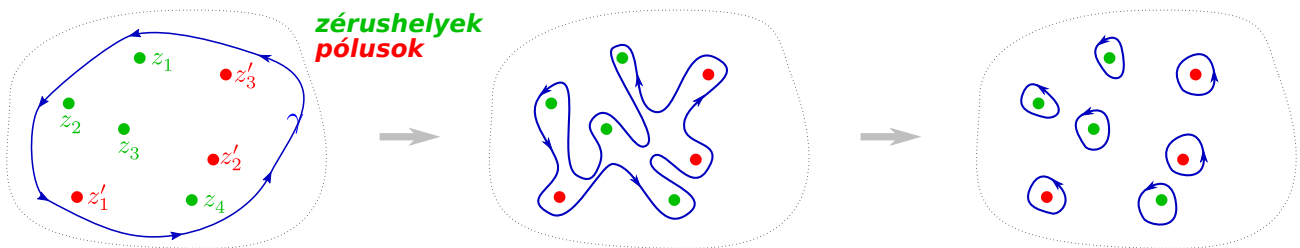
<sup>61</sup>Hasonló gondolatmenetet követtünk a 4.5. szakaszban tört alakú meromorf függvények pólusainak vizsgálatakor.

pólusaira. Az egy darab  $z_0$  esetre vonatkozó eredmények összegeit kapjuk. Eredményünk az

**argumentum-elv:** legyen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  meromorf,  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  pedig  $\text{Dom} f$ -en differenciálható függvény. Legyen  $\gamma$  pozitív irányítású,  $\text{Dom} f$ -ben haladó, önmagát nem metsző zárt görbe, mely nem tartalmazza  $f$  egyik zérushelyét sem. Legyen  $Z := \{z_1, z_2, \dots\}$   $f$  zérushelyeinek halmaza, és a  $z_k$  zérushely rendje  $s_{z_k}$ . (5.53) Ugyanígy,  $P := \{z'_1, z'_2, \dots\}$  az  $f$  pólusainak halmaza; a  $z'_k$  pólus rendje  $p_{z'_k}$ .

$$\text{Állítás: } \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} dt \frac{f'(t)}{f(t)} g(t) = \sum_{z_k \in Z \cap \text{Int } \gamma} s_{z_k} \cdot g(z_k) - \sum_{z'_k \in P \cap \text{Int } \gamma} p_{z'_k} \cdot g(z'_k).$$

Itt is, mint a reziduúmtételnél,  $\text{Int } \gamma$  a  $\gamma$  görbén belüli részt jelenti:  $f$  olyan zérushelyei ill. pólusai, amik  $\gamma$ -n kívül esnek, nem játszanak szerepet. Természetesen fontos a pozitív irányítás is.



45. ábra. Az argumentum-elv levezetése a megkerült zérushelyekre/pólusokra való rádarabolással.

- Speciális esetben, ha  $g(z)=1$ , akkor ugyanazokkal a feltételekkel azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} dt \frac{f'(t)}{f(t)} = \sum_{z_k \in Z \cap \text{Int } \gamma} s_{z_k} - \sum_{z'_k \in P \cap \text{Int } \gamma} p_{z'_k}. \quad (5.54)$$

Az  $\frac{f'}{f}$  ilyen vonalintegrálja tehát a megkerült zérushelyek és pólusok számának különbsége (minden zérushelyet és pólust annyiszor számolva, ahanyadrendű). Ez az alak világítja meg az elnevezés értelmét is. Ahol  $\text{Ln } f$  differenciálható, ott  $(\text{Ln } f)' = \frac{f'}{f}$ : ilyen tartományban futó *nem zárt* görbére  $\int_a^b dt \frac{f'(t)}{f(t)} = \text{Ln } f(a) - \text{Ln } f(b)$ . Az  $f$ -ről feltettük, hogy a görbe környékén differenciálható,  $\text{Ln } f$  azonban  $f$  pólusaiban ill. zérushelyeiben és az ezekből induló vágásokon sem az. A zárt görbe elmetszi a vágásokat, és  $2\pi i$ -t visszaugrik egyszeres zérushely esetén, ami így ennyit „tesz hozzá” a körintegrálhoz (amikor összeragasztanánk az út elejét és végét; ld. az érvelést az alapvető  $\oint dz \frac{1}{z} = 2\pi i$  integrál Newton-Leibniz-formulával való levezetésénél a 3.4. szakasz végén). Többszörös zérushelynél többször  $2\pi i$  ugrás történik a logaritmusban,  $f$  pólusa pedig  $\frac{1}{f}$  azonos rendű zérushelye, és  $\text{Ln } \frac{1}{f} = -\text{Ln } f$ : így érthető, hogy az argumentum-elvvel lényegében tényleg az argumentum ugrásait számoljuk össze, ahogy a görbén végigmenve  $\text{Ln } f$  változását követjük.

- Egyszerűbb esetekben jobban járunk, ha közvetlenül a függvényalak vizsgálatával keressük a zérushelyeket és a pólusokat (és rendjeiket). Olyan függvényekre viszont, amelyek zérushelyeinek/pólusainak helye kevésbé nyilvánvaló, jól jön az argumentum-elv; akár numerikus vizsgálatokhoz (pl. az ún. *Riemann-féle zéta-függvény* esetén, melynek zérushelyeire vonatkozik a híres megoldatlan *Riemann-sejtés*), akár függvényvizsgálat általános eszközeként (bizonyításokhoz).<sup>62</sup>

<sup>62</sup>Utaltunk már rá (az algebra alaptételénél), hogy  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvények zérushelyei kevésbé „kézenfekvőek”, mint  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényeké: utóbbiakra pl. ha folytonos függvényre valahol  $f < 0$ , máshol  $f > 0$ , akkor a két hely között biztos van zérushely, amint ez egy függvénygrafikonról „látszik” is.  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvényeknél inkább úgy kérdezhetünk szemléletesen, hogy a felvett érték valós és képzetes része (mintegy „szerencsésen”) egyszerre nullává válik-e valahol.

## 6. A gamma-függvény

A gamma-függvény az  $n!$  **faktoriális általánosítása**, egyben egy önmaga jogán érdekes (és sokféle előkerülő) speciális függvény, emellett sokféle eddig látott módszernek, koncepciónak a nem túl egyszerű, de nem is túl bonyolult illusztrálására is jó.<sup>63</sup> Néhány *új fogalmat* is bevezetünk itt vele kapcsolatban, amelyek más függvényekre, más helyzetekben is alkalmazhatóak lehetnek.

### 6.1. Definíció, speciális értékek, kapcsolódó integrálok

- Előbb-utóbb szembe jön az alábbi integrál, amit kiszámíthatunk primitív függvénnyel (ld. alább).

$$\text{Állítás:} \quad \int_0^{\infty} dt t^n e^{-t} = n!, \quad \text{ha } n \in \mathbb{N}_0^+ \text{ adott nemnegatív egész.} \quad (6.1)$$

Ezen felbátorodva bevezetjük a következő  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvényt, a  $\Gamma(z)$  jelű **gamma-függvényt** az ún. **Euler-féle integrállal**. Alább belátjuk, hogy ez tényleg pont a kijelölt esetben értelmes.

$$\text{Definíció:} \quad \Gamma(z) := \int_0^{\infty} dt t^{z-1} e^{-t}, \quad \text{minden } z \in \mathbb{C}\text{-re,} \\ \text{amire } \Re(z) > 0. \quad (6.2)$$

Általános  $z$ -re ne akarjuk ezt primitívfüggvény-kereséssel *kiszámítani*; ez a paraméteres integrál *értelmezi* ezt a függvényt. A paraméteres integrál differenciálhatóságát vizsgálva viszont belátható (ld. lentebb), hogy ez a  $\Gamma(z)$  a jobb oldali félsíkon,  $\Re(z) > 0$ -ra **differenciálható** függvény.

- Az alábbi, a faktoriálisokat felidéző tulajdonság a gamma-függvény alapvető jellemzője:

$$\text{Léptető tulajdonság:} \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (6.3)$$

Ezt parciális integrálással vezethetjük le: mivel  $\frac{d}{dt}(e^{-t}t^z) = -e^{-t}t^z + e^{-t}zt^{z-1}$ , írhatjuk, hogy

$$\underline{\underline{\Gamma(z+1)}} = \int_0^{\infty} dt t^z e^{-t} = \int_0^{\infty} dt \frac{d}{dt}(-e^{-t}t^z) + \int_0^{\infty} dt zt^{z-1} e^{-t} = \underbrace{(-e^{-t}t^z)}_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^{\infty} dt e^{-t}t^{z-1} = \underline{\underline{z\Gamma(z)}}.$$

Az aláhúzott rész nulla, mert ha  $\Re(z) > 0$  (ahogy kell), akkor  $t^z$  nem 1-hez vagy  $\infty$ -hez, hanem 0-hoz tart  $t=0$ -ban. Az  $e^{-t}$  pedig *gyorsabban csökken*  $t^z$ -nél minden  $z$ -re:  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t}t^z = 0$  is igaz.

- Érdekes a  $t=x^2$  helyettesítéssel is felírni a definiálót (6.2) integrált:

$$\Gamma(z) = 2 \int_0^{\infty} dt e^{-x^2} x^{2z-1}, \quad \text{hiszen itt } dt = 2x dx, \text{ és } x \in \mathbb{R}^+ \text{ ese-} \\ \text{tén tényleg igaz, hogy } (x^2)^z = x^{2z}. \quad (6.4)$$

Sőt hasonló helyettesítést csinálhatunk  $t=x^\alpha$ -val; ellenőrizzük le a következőt (ahol a kapott „eredmény” tehát lényegében  $\Gamma(z)$  definíciójának átfogalmazása):

$$\text{Ha } \alpha, \gamma \in \mathbb{R}^+, \text{ és} \quad \int_0^{\infty} dx x^\beta e^{-\gamma x^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \gamma^{-\frac{\beta+1}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{\beta+1}{\alpha}\right). \quad (6.5) \\ \beta \in \mathbb{R}, \beta > -1, \text{ akkor}$$

- Közelebb hozza a gamma-függvényt, ha néhány **speciális helyen** felvett értéket megjegyzünk.

$$\text{Állítás:} \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (6.6)$$

<sup>63</sup>A magam részéről sokat foglalkoztam olyan témákkal, ahol a gamma-függvényt rutinszerűen kellett használnom; talán ezért is a „feltétlenül szükségesnél” jóval többet leírok; a fejezet végén már „haladóbb szinten” is; elnézést...

Az első nyilvánvaló az eredeti definícióból, tudva, hogy  $\int_0^\infty e^{-t} dt = 1$ . A második a  $t=x^2$ -tel felírt iménti alternatív (6.4) alakból látható:  $z=\frac{1}{2}$ -t írva oda a Gauss-integrált kapjuk, ami tudvalevően  $\sqrt{\pi}$ . Ezután viszont ezekből indulva a léptető tulajdonságot használhatjuk:

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= 1, & \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}, \\ \Gamma(2) &= 1 \cdot \Gamma(1) = 1, & \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{2}, \\ \Gamma(3) &= 2 \cdot \Gamma(2) = 1 \cdot 2 = 2, & \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) &= \frac{3}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\pi} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2}, \\ \Gamma(4) &= 3 \cdot \Gamma(3) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, & \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) &= \frac{5}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \sqrt{\pi} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2}, \\ &\vdots & &\vdots \\ \Gamma(n+1) &= n!, & \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Egyrészt látjuk, hogy a gamma-függvény tényleg a faktoriálist általánosítja (egszersmind beláttuk az elején felidézett, egész  $n$ -re felírt (6.1) integrált, de azért még visszatérünk rá); másrészt a *félegész* számokban felvett értékeket is kiszámítottuk. Utóbbiakat másképp is összerakhatjuk:

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \frac{(2n-1)!!}{2^n} = \sqrt{\pi} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}. \quad (6.8)$$

A  $!!$  jel a *szemi-faktoriálist* (azaz: „fél-faktoriálist”) jelöli: egy adott természetes számtól lefelé véve az azonos párosságú számok szorzatát. Pl.  $8!! = 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$  és  $9!! = 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$ . Páros számokra nyilván  $(2n)!! = 2^n n!$ , ebből lehet páratlanokra is leszűrni (bebővítvé majd egyszerűsítve a kihagyott páros tényezőkkel), hogy  $(2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ : ebből kaptuk a felírt második alakot.

*Megjegyzés:* ha az eredeti (6.1) definiáló integrálban  $t^{z-1}$  helyett  $t^z$ -t írtak volna annak idején, akkor nem lenne ez a kellemetlenek tűnő 1-gyel eltolás, miszerint  $\Gamma(n+1) = n!$ . Két iskola versengett; mindkét választásnak vannak előnyei, és a tárgyalt alak maradt fenn.

• Az alábbi ún. **Euler-féle béta-integrál** szorosan ide kapcsolódik (levezetését ld. alább):

$$\text{Állítás: ha } \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \text{ és } \Re(\alpha) > 0, \text{ és } \Re(\beta) > 0, \text{ akkor } \int_{-1}^1 dt t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \quad (6.9)$$

Az integrál éppen a megadott esetben létezik (ld. alább is). Fontos **alternatív változatok**:

$$t = \sin^2 \varphi \text{-t helyettesítve: } 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi (\sin \varphi)^{2\alpha-1} (\cos \varphi)^{2\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad (6.10)$$

$$t = \frac{x}{x+1} \text{-et helyettesítve: } \int_0^\infty dx x^{\alpha-1} (x+1)^{-(\alpha+\beta)} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad (6.11)$$

$\alpha$ -ra és  $\beta$ -ra ugyanazokkal a feltételekkel. *Ellenőrizzük ezeket a helyettesítéseket!* Ha ezután még pl. a (6.11)-ben  $x=y^t$ -t helyettesítünk, még durvább alakú, de így kezelhető integrálra jutunk.

Az viszont konkrétan is jól jön, hogy felhasználva  $\Gamma(n+1)$  és  $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$  fentebb megbeszélt értékeit kiszámolhatjuk pl. az alábbiakat mint az iménti (6.10) speciális eseteit: **ellenőrizzük, hogy**

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi (\sin \varphi)^{2n+1} = \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n)! (2n+1)}, \quad \int_0^{\pi/2} d\varphi (\sin \varphi)^{2n} = \pi \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2}, \quad (6.12)$$

és ugyanez igaz **sin helyett cos-ra is**, ami ugye csak annyiban különbözne, hogy  $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2} - \varphi$  helyettesítést végzünk. Ezen (6.12) képletek időnként előkerülnek; elemibben is levezethetők, de jó tudni, hogy a „nagy tűzerejű” képleteinket tényleg alkalmazhatjuk speciális esetekre is.

• Ebben a pontban **levezetjük** az Euler-féle **béta-integrált**: legkézenfekvőbb a trigonometrikus függvényes (6.10) változatot tekinteni. Az ötlet annak általánosítása, ahogyan a Gauss-integrált levezettük: tekintsük a gamma-függvény ehhez hasonlító,  $t=x^2$ -et helyettesített (6.4) felírását, és írjuk fel így a  $\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)$  szorzatot, a kétféle integrálási változót  $x$ -szel és  $y$ -nal jelölve:

$$\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha) = 2 \int_0^\infty dx e^{-x^2} x^{2\beta-1} \cdot 2 \int_0^\infty dy e^{-y^2} y^{2\alpha-1} = (*) \quad (6.13)$$

Az ötlet: az  $x$  és  $y$  szerinti sorrendi kettős integrált felfoghatjuk úgy, mint az  $x$ - $y$  sík jobb felső síknegyedére vett kétdimenziós integrált. Ezt tényleg megtehetjük a Fubini-tétel miatt (mert abszolútértékben is integrálható függvényekről van szó, ld. alább is), és akkor már másfajta koordinátákban is dolgozhatunk. Most is, mint a Gauss-integrálnál, a polárkoordináták jönnek jól:

$$\begin{aligned} (*) &= 4 \int_{x>0, y>0} dx dy e^{-(x^2+y^2)} x^{2\beta-1} y^{2\alpha-1} = 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^\infty dr r e^{-r^2} r^{2\beta-1} (\cos \varphi)^{2\beta-1} r^{2\alpha-1} (\sin \varphi)^{2\alpha-1} = \\ &= 2 \int_0^\infty dr r^{2(\alpha+\beta)-1} e^{-r^2} \cdot 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi (\sin \varphi)^{2\alpha-1} (\cos \varphi)^{2\beta-1} = \\ &\quad \text{az } r\text{-integrálban } \Gamma(\alpha+\beta) \\ (6.4) \text{ felírását felismerve:} &= \Gamma(\alpha+\beta) \cdot 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi (\sin \varphi)^{2\alpha-1} (\cos \varphi)^{2\beta-1}. \end{aligned}$$

Összeolvasva ezt az elejével készen is vagyunk (6.10) levezetésével. Ugye polárkoordinátákban  $x=r \cos \varphi$ ,  $y=r \sin \varphi$  voltak, az integrálásban pedig megjelent az  $r$  szorzó mint Jacobi-determináns.

*Megjegyzés:* nehogy ne vegyük észre, hogy az Euler-féle béta-integrál **szimmetrikus** az  $\alpha \leftrightarrow \beta$  cserére; ez magukon az integrálokon is látszik (az egyszerű  $t \leftrightarrow 1-t$ , vagy  $\varphi \leftrightarrow \frac{\pi}{2}-\varphi$  helyettesítésekkel), nemcsak a gamma-függvénnyel felírt eredményen (ami persze szintén szimmetrikus).

\* \* \*

• A szakasz maradékában **kiegészítésképpen elvarrjuk a szálakat**. Először megvizsgáljuk a kiindulásnak szánt (6.1) integrált, integrálhatóság szempontjából is. Kiszámíthatjuk primitív függvénnyel; a trükk ehhez az, hogy parciális integrálásokkal  $t^n$ -et lépésenként „lebontva”  $e^{-t}$  marad:

$$\int dt t^n e^{-t} = F(t), \quad \text{ahol} \quad F(t) = -e^{-t} \left[ t^n + n t^{n-1} + n(n-1) t^{n-2} + n(n-1)(n-2) t^{n-3} + \dots + n! \right].$$

Ellenőrizzük, hogy ezen  $F(t)$  deriváltja tényleg a kívánt integrandus!<sup>64</sup> Az integrandus nemnegatív: pontosan akkor létezik az  $\int_0^\infty$  integrál, ha minden  $a>0$  és  $b<\infty$  és  $a<b$  esetén létezik az  $\int_a^b$  integrál, és létezik  $a \rightarrow 0$ ,  $b \rightarrow \infty$  határértéke (ld. a 3.2. szakaszt). Most ez lesz a helyzet: létezik az integrálunk. Konkréten:  $e^{-b}$  gyorsabban csökken  $b \rightarrow \infty$ -re a hatványoknál, és  $a=0$ -ban  $F(a)$  folytonos, így

$$\lim_{a \rightarrow 0} F(a) = F(0) = -n!, \quad \lim_{b \rightarrow \infty} F(b) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^\infty dt t^n e^{-t} = \lim_{b \rightarrow \infty} F(b) - \lim_{a \rightarrow 0} F(a) = n!.$$

• Következő: milyen  $z$ -kre létezik a  $\Gamma(z)$ -t definiáló integrál? Először vizsgáljunk valós  $z \equiv \alpha$  értékeket; ekkor az integrandus,  $t^{\alpha-1} e^{-t}$  valós nemnegatív értékű függvény. A 3.2. szakaszban előkerült, hogy integrálható majoráns létezéséből integrálhatóság, nem integrálható függvénnyel való *alul*becslésből pedig nem integrálhatóság következik, és megvizsgáltuk hatványfüggvények integrálhatóságát is. A mostani esetben  $t \rightarrow \infty$  felé az  $e^{-t}$  az érdekes,  $t \rightarrow 0$  környékén a  $t^\alpha$ : ezek

<sup>64</sup>Segítség: a zárójelben minden tag az előző deriváltja; a jobb oldalt szorzatként deriválva pont mindegyik alacsonyabb fokú kiesik, és csak a legmagasabb fokú  $t^n$  marad, ahogy kell.

miatt (is) érdemes két darabra vágni az integrált  $t=1$ -nél. Ezeken felbátorodva pl. így érvelhetünk:

$$\begin{array}{l} \text{Ha } t \in [1, \infty], \text{ akkor van olyan } K > 0 \text{ konstans, amivel} \\ t^{\alpha-1} e^{-t} = \underbrace{e^{-t/2} t^{\alpha-1}}_{\text{korlátos } [1, \infty]\text{-n}} \cdot e^{-t/2} \leq K \cdot e^{-t/2}, \end{array}$$

mert a kijelölt rész  $t=\infty$ -ben 0-hoz tart, véges zárt  $[1, a]$  szakaszon pedig felveszi maximumát, így biztos korlátos. A jobb oldal viszont integrálható  $[1, \infty]$ -re, emiatt  $e^{-t} t^{\alpha-1}$  is az bármilyen  $\alpha \in \mathbb{R}$ -re.

$$\begin{array}{ll} \text{Ha viszont } t \in [0, 1], \text{ akkor} & \text{Ha } \alpha > 0, \text{ akkor } t^{\alpha-1} \text{ integrálható a} \\ \text{egyrészt } t^{\alpha-1} e^{-t} \leq t^{\alpha-1}, & \Rightarrow \text{ [0, 1] szakaszra, így } e^{-t} t^{\alpha-1} \text{ is az.} \\ \text{másrészt } t^{\alpha-1} e^{-t} \geq t^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{e}. & \text{Ha viszont } \alpha \leq 0, \text{ akkor } \frac{1}{e} \cdot t^{\alpha-1} \text{ nem in-} \\ & \text{tegrálható [0, 1]-re, így } e^{-t} t^{\alpha-1} \text{ sem az.} \end{array}$$

Összefoglalva: ha  $\alpha > 0$ , akkor  $e^{-t} t^{\alpha-1}$  integrálható 0-tól 1-ig és 1-től  $\infty$ -ig, vagyis 0-tól  $\infty$ -ig, ha viszont  $\alpha \leq 0$ , akkor  $e^{-t} t^{\alpha-1}$  nem integrálható  $[0, 1]$ -re, tehát 0-tól  $\infty$ -ig sem. A gamma-függvényt definiáló (6.2) integrál tehát **valós  $\alpha$ -t tekintve  $\alpha > 0$  esetén** létezik. **Általános  $z \in \mathbb{C}$ -re pedig** idézzük fel, hogy egy  $f$  függvény pontosan akkor integrálható, ha  $|f|$  is az. Mármost valós  $t > 0$ -ra és  $w \in \mathbb{C}$ -re  $|t^w| = \sqrt{t^w t^{w*}} = \exp\left(\frac{1}{2}(w+w^*) \ln t\right) = t^{\frac{1}{2}(w+w^*)} = t^{\Re(w)}$ , emiatt mostani esetünkben

$$f(t) = t^{z-1} e^{-t} \quad \Rightarrow \quad |f(t)| = e^{-t} t^{\Re(z)-1}, \quad \text{és } \Re(z) \text{ valós.}$$

Láttuk, hogy ez az  $|f(t)|$  pontosan  $\Re(z) > 0$  esetén integrálható: ez érvényes az eredeti  $f(t)$ -re is, vagyis a gamma-függvény (6.2) integrál-definíciója  **$\Re(z) > 0$  esetén értelmes.**

- Az előző pontban felidéztek  $t^\alpha$  típusú hatványfüggvények integrálhatóságát; ebből kideríthetjük, hogy az **Euler-féle béta-integrál** integrandusa,  $t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ , melynek abszolútértéke (valós  $t > 0$ -ra, amiken a  $t$  változó tényleg fut)  $t^{\Re(\alpha)-1}(1-t)^{\Re(\beta)-1}$ , **tényleg  $\Re(\alpha) > 0$  és  $\Re(\beta) > 0$  teljesülése** esetén integrálható a kijelölt  $[0, 1]$  intervallumra.  $\Re(\alpha) \leq 0$  esetén a  $t^{\alpha-1}$  tényező miatt  $t=0$  körül,  $\Re(\beta) < 0$  esetén pedig az  $(1-t)^{\beta-1}$  tényező miatt a  $t=1$  körül „romlana el” az integrálhatóság.

- Utolsó elvarrandó szál:  $\Gamma(z)$  **differenciálhatósága**. Ehhez a paraméteres integrál differenciálhatóságáról szóló, a C.4. függelékben is elővett (C.5) állítást kell tudni.<sup>65</sup> A mostani esetünkben

$$\begin{array}{ll} f(t, z) = e^{-t} t^{z-1}, & \Rightarrow \quad |f(t, z)| = e^{-t} t^{\Re(z)-1}, \text{ integrálható, ha } \Re(z) > 0, \\ \partial_z f(t, z) = e^{-t} t^{z-1} \ln t & \Rightarrow \quad |\partial_z f(t, z)| = e^{-t} t^{\Re(z)-1} |\ln t|, \text{ integrálható, ha } \Re(z) > 0. \end{array}$$

Az  $f(t, z)$  integrálhatóságához, azaz  $\Gamma(z)$  definíciójának értelmességéhez ugye  $\Re(z) > 0$  kell; a deriváltra vonatkozó megállapítás új. A lényege: a logaritmus ilyenkor nem zavar be. Konkrétabban: tudjuk, hogy bármilyen kicsi  $\alpha > 0$ -ra igaz az alábbi; válasszunk rögtön olyat, ami ha egy adott  $z$ -re  $\Re(z) > 0$ , akkor  $0 < \alpha < \Re(z)$  teljesül rá:

$$\begin{array}{ll} \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\alpha} |\ln t| = 0, & \Rightarrow \quad t^{-\alpha} |\ln t| \leq K \text{ (azaz korlátos) } t \in [1, \infty]\text{-re,} \\ \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha |\ln t| = 0, & \Rightarrow \quad t^\alpha |\ln t| \leq K' \text{ (azaz korlátos) } t \in [0, 1]\text{-re.} \\ \Rightarrow \quad e^{-t} t^{\Re(z)-1} |\ln t| = e^{-t} t^{\Re(z)+\alpha-1} \cdot t^{-\alpha} |\ln t| \leq K \cdot e^{-t} t^{\Re(z)+\alpha-1}, \text{ ha } t \in [1, \infty], \text{ és} \\ \Rightarrow \quad e^{-t} t^{\Re(z)-1} |\ln t| = e^{-t} t^{\Re(z)-\alpha-1} \cdot t^\alpha |\ln t| \leq K' \cdot e^{-t} t^{\Re(z)-\alpha-1}, \text{ ha } t \in [0, 1]. \end{array}$$

Az előkerült felsőbecslő függvényalakokról már láttuk, hogy integrálhatók (ennek megfelelően választottuk  $\alpha$ -t az imént): kész, tényleg igaz, amit  $\partial_z f(t, z)$  integrálhatóságáról állítottunk.

<sup>65</sup>Ez a mostani eset egyúttal a tétel egy motiváló alkalmazása is, hiszen  $\Gamma(z)$ -ről szeretnénk tudni, hogy differenciálható, noha sem őt, sem a deriváltját nem igazán tudjuk másképp kifejezni, mint paraméteres integrállal.

A differenciálhatósághoz szemeljünk ki egy  $z_0$ -t, amire  $\Re(z_0) > 0$ . Olyan nemüres  $U$  konvex nyílt környezete és olyan  $g(t)$  integrálható függvény kell, hogy minden  $z \in U$ -ra és minden  $t \in \mathbb{R}^+$ -ra  $|\partial_z f(t, z)| \leq g(t)$ . Egy megoldás: legyenek  $a, b \in \mathbb{R}^+$  olyanok, hogy  $0 < a < \Re(z_0) < b$  (ilyenek vannak), és legyen  $U$  egy függőleges sáv:  $U = \{z \in \mathbb{C} \mid a < \Re(z) < b\}$ . Egy  $z \in U$  esetén ha  $t \in [1, \infty]$ , akkor  $t^{\Re(z)} \leq t^b$ , viszont ha  $t \in ]0, 1]$ , akkor  $t^{\Re(z)} \leq t^a$ . Összerakva: legyen  $g$  a következő függvény:

$$g(t) := \begin{cases} t^{a-1} e^{-t} |\ln t|, & \text{ha } t \in ]0, 1], \\ t^{b-1} e^{-t} |\ln t|, & \text{ha } t \in [1, \infty], \end{cases} \quad \text{ezzel } \forall z \in U\text{-ra és } \forall t \in \mathbb{R}^+\text{-ra } |\partial_z f(t, z)| \leq g(t),$$

és  $g(t)$  integrálható  $\mathbb{R}^+$ -ra (az imént láttuk be).

Teljesül tehát a paraméteres integrál differenciálhatóságáról szóló tétel feltétele  $U$ -n:  $\Gamma(z)$  tehát differenciálható  $z_0$ -ban. Azonban ezt minden  $z_0$ -ra elmondhatjuk, ha  $\Re(z_0) > 0$ : készen vagyunk.

## 6.2. Analitikus elfolytatás, reflexiós összefüggés

• A  $\Gamma(z)$  az eddigiek szerint  $\Re(z) > 0$ -ra értelmes, mert csakis ilyen  $z$ -kre létezik a definiáló integrál. Ezen a halmazon viszont differenciálható, azaz **analitikus**. Megpróbálhatjuk *analitikusan elfolytatni*: keresni egy a  $\Re(z) > 0$  félsíknál bővebben értelmezett  $f(z)$  differenciálható függvényt, ami  $\Re(z) > 0$ -ra megegyezik az eddigi  $\Gamma(z)$ -vel. Ekkor az ilyen  $f$  a bővebb halmazon egyértelmű.

Alább kiderül, hogy a bővebb halmaz a  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$  halmaz lehet, azaz a  $0, -1, -2, -3 \dots$  számokat kivéve az egész  $\mathbb{C}$ . Az ide kiterjesztett függvényt is  $\Gamma(z)$ -vel jelöljük és gamma-függvénynek hívjuk.  $\Gamma(z)$  értelmes lesz tehát sok olyan  $z$ -re is, amelyre  $\Re(z) \leq 0$ , de ilyenekre (pl.  $z = -1 + i$ -re) a felvett értéket nem számíthatnánk ki a nem értelmes eredeti (6.2) integrállal, hanem csak másképp.<sup>66</sup>

• Emlékezzünk: szokásosan  $0! = 1$ , pedig  $0!$  nem értelmes az  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$  definíció alapján. Azonban  $n > 0$  esetén  $n! = \frac{(n+1)!}{n+1}$ , és ezt értelmezhetjük  $n=0$ -ra is: ezért érdemes  $0! = \frac{1!}{1} = 1$  módon *bevezetni*  $0!$ -t. Így a felidézett (és *elvárt*) tulajdonság érvényben marad. Negatív egészek faktoriálisa pedig „végtelen”:  $(-1)! = \frac{0!}{0} = \infty$  lenne; tovább:  $(-2)! = \frac{(-1)!}{-1} = \infty$ , stb.

Ennyi rávezetés után rögzítsünk egy  $m \in \mathbb{N}^+$  pozitív egész számot, és a faktoriális mintájára írjuk fel a  $\Gamma(z)$  hasonlóan érvényes léptető tulajdonságát  $m$  visszalépéssel:

$$\begin{aligned} \text{mivel } \Re(z) > 0\text{-ra} & \Rightarrow \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+m)}{z(z+1)(z+2)\dots(z+m-1)}, \quad \text{hacsak } \Re(z) > 0. \end{aligned} \quad (6.14)$$

A  $\Re(z) > 0$  ahhoz kell itt, hogy a bal oldalon  $\Gamma(z)$  értelmes legyen. Ilyen  $z$ -kre a tört is értelmes: a nevező nem lesz nulla, és  $\Gamma(z+m)$  is értelmes, hiszen nyilván  $\Re(z+m) = m + \Re(z) > 0$  is teljesül.

Most jön a lényeg: a jobb oldalon kapott iménti törtet *önmagában nézve* ő egy  $z$ -ben differenciálható értelmes függvényt ad meg, ha az *őbenne* szereplő  $\Gamma(z+m)$  értelmes, azaz ha  $\Re(z+m) > 0$ , vagyis  $\Re(z) > -m$ ; kivéve persze, ha  $z = 0, -1, -2, \dots, -(m-1)$ , mert ekkor a nevezők valamelyike nullává válna. Semmi nem akadályoz minket tehát abban, hogy az adott  $m \in \mathbb{N}^+$  esetén

$$\begin{aligned} \text{értelmezzük} & \Gamma(z) := \frac{\Gamma(z+m)}{z(z+1)(z+2)\dots(z+m-1)}, \quad \text{hacsak } \Re(z) > -m, \\ \text{így a } \Gamma(z)\text{-t:} & \text{ de } z \notin \mathbb{Z}_0^-, \end{aligned} \quad (6.15)$$

ahol a számlálóbeli  $\Gamma(z+m)$ -et az  $\Re(z)$  felírt megszorítása miatt biztos értelmezi az eredeti (6.2) definiáló integrál. A gondolatmenetből világos, hogy nem „hibáztunk”: ha visszamenőleg még az erősebb  $\Re(z) > 0$  feltételt is megköveteljük, akkor *ez* a gamma-függvény *ugyanaz*, mint az eredeti.

<sup>66</sup>Ugye hasonló volt a helyzet az analitikus elfolytatás alappéldájánál a 4.1. szakaszban: az  $\frac{1}{1-z}$  képlet elfolytatja a  $\sum_n z^n$  sorösszeget a  $|z| < 1$  konvergenciakörrel, de pl.  $z=3$ -ban  $\frac{1}{1-z}$ -t nem számíthatjuk ki a  $\sum_n z^n$  sorösszeggel.



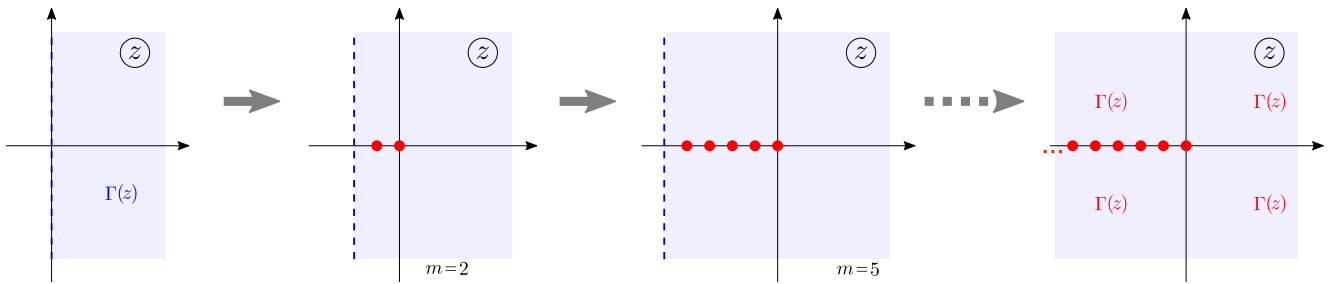
Sőt, ha most  $m$  helyett egy még nagyobb  $m'$ -t veszünk, akkor éppen a  $\Gamma(z+m')$ -ről a  $\Gamma(z+m)$ -re való eredeti lelépegetés érvényessége miatt a  $\Re(z) > -m$  halmazon az  $m'$ -t használó (6.15) típusú lelépegetés is ugyanazt a függvényt definiálja itt, mint az  $m$ -mel felírt (6.15).

• Adott  $m \in \mathbb{N}^+$  esetén  $\Gamma(z)$ -t analitikusan elfolytattuk a  $\Re(z) > 0$  halmazról a bővebb  $\Re(z) > -m$ ,  $z \neq 0, -1, -2, \dots$  halmazra. Node  $m$  akármekkora is lehet: végülis **az egész  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$  halmazra** kiterjeszthettük a gamma-függvényt. Az eddigiek alapján egy  $\Re(z) < 0$  helyen (ha  $z \notin \mathbb{Z}_0^-$ ) úgy számíthatjuk ki  $\Gamma(z)$ -t, hogy veszünk egy olyan  $m$ -et, amire  $\Re(z) + m > 0$ , kiszámítjuk  $\Gamma(z+m)$ -et az eredeti integrállal (ami ekkor értelmes), és lelépegetünk (6.15) módjára  $\Gamma(z)$ -re. A mondottakból világos, hogy mindegy, milyen nagy ilyen  $m$ -et választunk. Az is világos, hogy (éppen mivel lényegében ezt követeltük meg) a **léptető tulajdonság is érvényes marad**:

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1), \quad \text{minden } z \in \mathbb{C}\text{-re, ha } z+1 \notin \mathbb{Z}_0^-. \quad (\text{Ekkor } z \notin \mathbb{Z}_0^- \text{ is teljesül.}) \quad (6.16)$$

$z = -1, -2, \dots$  esetén mindkét oldal értelmetlen lenne,  $z=0$ -ra a bal oldal  $0 \cdot \infty$ , a jobb oldal 1.

Az is látszik a (6.15) definícióból (ahol a jobb oldalon differenciálható függvények hányadosa szerepel, és a nevezőnek jól láthatóan zérushelyei vannak), hogy mi a helyzet a nempozitív egész,  $z = 0, -1, -2, \dots$  helyeken: ezekben a  $z$ -kben a  $\Gamma(z)$ -nek **elsőrendű pólusai vannak**.



46. ábra. Illusztráció a gamma-függvény analitikus elfolytatásának tárgyalt menetéhez.

• A gamma-függvény fontos tulajdonsága (és az analitikus elfolytatást is közelebb hozza) az alábbi

**reflexiós összefüggés:** 
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \quad (6.17)$$

Ha  $\Gamma(z)$  eredeti definíciója, (6.2) lebeg előttünk, akkor ez az összefüggés csakis akkor lehet értelmes (pláne igaz), ha  $\Re(z) > 0$  és  $\Re(1-z) > 0$ , azaz a  $0 < \Re(z) < 1$  sávon. Ilyen  $z$ -kre **be is bizonyíthatjuk**: lényegében a (6.9) béta-integrált kell kiszámolni az  $\alpha=z$ ,  $\beta=1-z$  esetben (azaz itt  $\alpha+\beta=1$ ); ha  $z$  a sávkban van, akkor ez értelmes. Felidézve a  $t = \frac{x}{x+1}$  módon helyettesített (6.11) alakot) is,

azt kell belátni, hogy 
$$\int_0^1 dt t^{z-1}(1-t)^{-z} = \int_0^\infty dx \frac{x^{z-1}}{x+1} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \quad (6.18)$$
 ha  $0 < \Re(z) < 1$ , akkor

Ez utóbbi integrált úgy kezelhetjük, ahogyan korábban az 5.3. szakaszban tettünk hasonló integrálokkal a nem egész kitevőjű hatványfüggvények vágásait használva, pl. az ottani (5.32) integrállal. Kivételesen  $x$ -szel jelöljük a komplex változót is; a következő integrandus kell:

$$f(x) = \frac{(-x)^{z-1}}{x+1}, \quad \text{ennek vágása van } x \in \mathbb{R}_0^+\text{-on, és elsőrendű pólusa } x=-1\text{-ben, a reziduum itt 1.} \quad (6.19)$$

Röviden felidézük az 5.3. szakaszban látott gondolatmenetet. Az  $x$ -síkon kellő  $\gamma$  integrációs út a korábbi 38. ábrán látható: a vágás fölött  $r+i\varepsilon$ -től  $R+i\varepsilon$ -ig,  $R$  sugarú bezáró körív, a vágás

alatt  $R-i\varepsilon$ -től vissza  $r-i\varepsilon$ -ig, majd kis  $r$  sugarú körív  $x=0$  körül. Ezen  $\gamma$ -ra alkalmazhatjuk a reziduumszámítást: az  $x=-1$  pólust kerüli meg,  $\oint_{\gamma} f(x)dx = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i$ . Másrészt  $\varepsilon \rightarrow 0$ -ra a vágás fölött ill. alatt,  $\pm i\varepsilon$ -t véve  $1+(x \pm i\varepsilon) \rightarrow 1+x$ , de  $[-(x \pm i\varepsilon)]^{z-1} \rightarrow x^{z-1}e^{\pm i\pi z}$ , továbbá  $R \rightarrow \infty$ -t véve a nagy ív járuléka nullához tart (kihasználva, hogy  $\Re(z) < 1$ ), és  $r \rightarrow 0$ -t véve a kis ív járuléka is nullához tart (kihasználva, hogy  $\Re(z) > 0$ ). A határátmeneteket elvégezve tehát készen leszünk:

$$2\pi i = \oint_{\gamma} dx f(x) = e^{i\pi z} \int_0^{\infty} dx \frac{x^{z-1}}{x+1} - e^{-i\pi z} \int_0^{\infty} dx \frac{x^{z-1}}{x+1} \Rightarrow \int_0^{\infty} dx \frac{x^{z-1}}{x+1} = \frac{2\pi i}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

• A  $\Gamma(z)$ -t már analitikusan elfolytattuk a  $\mathbb{Z}_0^-$  halmazzal kivéve mindenhol: ezt figyelembe véve a reflexiós összefüggés bal oldala,  $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$  az egész  $\mathbb{C}$ -n analitikus, kivéve az egész számokat (melyek  $\Gamma(z)$  vagy  $\Gamma(1-z)$  pólusai). Láthatólag ugyanez az helyzet a jobb oldallal: a  $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$  függvény is a  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  halmazon analitikus. Beláttuk, hogy ezek megegyeznek a nyílt  $0 < \Re(z) < 1$  sávon: emiatt (ismerve analitikus függvények „merevségét”) mindenhol megegyeznek. A **reflexiós összefüggés is** tehát **minden  $z \in \mathbb{C}$ -re** igaz, hacsak értelmes, vagyis valós egész számokat kivéve mindenhol.

• Leszűrhetjük az eddigiekből a gamma-függvény két fontos egyszerű tulajdonságát:

$$(\Gamma(z))^* = \Gamma(z^*), \quad \text{és } \Gamma(z) \neq 0, \text{ azaz } \Gamma(z)\text{-nek nincs zérushelye.} \quad (6.20)$$

Az első, a konjugáltas (mely persze visszaadja, hogy  $\Gamma(x)$  valós, ha  $x$  is az)  $\Re(z) > 0$  esetén látszik a definiáló (6.2) integrálból ( $z$  helyett  $z^*$ -ot írva tényleg az integrandus, így az eredmény is konjugálódik),  $\Re(z) < 0$  esetén is a fentebbi (6.14) szerinti lelépegetés is megőrzi ezt a tulajdonságot.

Hogy nincs zérushely, az a reflexiós összefüggésből következik:  $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$  sehol sem nulla, így  $\Gamma(z)$  esetleg olyan helyeken lehetne csak nulla, ahol  $\Gamma(1-z)$  nem értelmezett, de ez csakis a  $z = m+1$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$  helyeken, azaz a pozitív egész számokban van, ahol viszont  $\Gamma(z)$  nem nulla (hanem  $m!$ ). Ezt tudva nyugodt szívvel átírhatjuk pl. így a reflexiós összefüggést:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \Rightarrow \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \frac{1}{\Gamma(z)}, \quad \text{határesetben akkor is érvényesnek vehetően, ha } z \in \mathbb{Z}.$$

• A(z immáron mindenhol igaz) léptető tulajdonság, a reflexiós összefüggés és  $\Gamma(z)$  pólusai szépen „összeillenek”; kihasználhatjuk ezt pl. egymás melletti számok szorzatának felírásához:

$$\begin{aligned} \text{ha } \alpha \text{ nem va-} & \quad \alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \dots (\alpha+m-3)(\alpha+m-2)(\alpha+m-1) = \frac{\Gamma(\alpha+m)}{\Gamma(\alpha)} = \\ \text{lós egész, akkor} & \quad \underbrace{\hspace{15em}}_{m \text{ darab tényező}} \\ & = (-1)^m \cdot \underbrace{(1-\alpha-m)(2-\alpha-m)(3-\alpha-m) \dots (-2-\alpha)(-1-\alpha)(-\alpha)}_{\text{minden tényezőt } -1\text{-gyel szoroztunk, és fordított sorrendben írtuk fel}} = (-1)^m \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha-m)}, \end{aligned}$$

az utóbbi szorzatot is lépegetéssel „dekódolva”. A reflexiós összefüggéssel is az derül ki, hogy

$$\frac{\Gamma(\alpha+m)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha+\pi m)} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha-m)}}{\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}} = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha-m)} \underbrace{\frac{\sin(\pi\alpha)}{\sin(\pi\alpha+\pi m)}}_{=(-1)^m} = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha-m)}. \quad (6.21)$$

A két tört közül legalább az egyik akkor is érvényes marad (esetleg a nevezőbe  $\infty$ -t írva  $\Gamma(z)$  pólusai miatt), ha  $\alpha \in \mathbb{Z}$ . Például idézzük fel az általános  $(1-z)^{-\alpha}$  hatványfüggvény hatványsorát, melyet még az 1. fejezet végén írtunk fel: ezt most így is megfogalmazhatjuk:

$$|z| < 1\text{-re} \quad (1-z)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha-n)} \frac{z^n}{n!}. \quad (6.22)$$

Ha  $\alpha=m$  nemnegatív valós ( $m \in \mathbb{N}_0^+$ ), az első alak működik, a másodikban  $\infty$ -k vannak a pólusok miatt. Ha pedig  $\alpha=-m$  nempozitív valós, akkor véges sok tag van (tényleg,  $(1-z)^m$  polinom); az első alak  $\infty$ -ket adna, a másodikon látszik, hogy véges sok tagot kivéve  $\infty$  van a nevezőben.

Az a szokásos értelmezés, hogy negatív egész számra  $(-m-1)! = \infty$ , most a gamma-függvény pólusait tudva nyert értelmet. Ez már elemibben is használható, pl. a binomiális tételnél:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}, \quad (a+b)^n = \sum_{m=0}^n \frac{n!}{(n-m)!m!} a^m b^{n-m} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{n!}{(n-m)!m!} a^m b^{n-m}, \quad (6.23)$$

azaz minden  $m \in \mathbb{Z}$ -re összegzünk, de kihasználjuk, hogy  $m > n$ -re  $(n-m)! = \infty$ , ha pedig  $m < 0$ , akkor  $m! = \infty$ . Bonyolultabb hasonló összegzések esetén is jó lehet tudni, hogy „nem mindig kell figyelni” az összegzés határait: ha a nevezőbe negatív szám faktoriálisa kerül, az a tag nulla.

• Tudva, hogy  $(\Gamma(z))^* = \Gamma(z^*)$ , a reflexiós összefüggéssel és a léptető tulajdonsággal  $\Gamma(z)$  **abszolút-értékét elemi függvényekkel** kifejezhetjük **néhány esetben**. Az alábbi képletek előkerülnek pl. a Coulomb-kölcsönhatással felírt Schrödinger-egyenlet vizsgálatánál. Legyen  $\eta \in \mathbb{R}$  valós, ekkor

$$\left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\eta\right) \right|^2 = \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\eta\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\eta\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\eta\right) \Gamma\left(1 - \left(\frac{1}{2} + i\eta\right)\right) = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + i\pi\eta\right)} = \frac{\pi}{\operatorname{ch}(\pi\eta)}, \quad (6.24)$$

$$\left| \Gamma(i\eta) \right|^2 = \Gamma(i\eta) \Gamma(-i\eta) = \frac{1}{-i\eta} \Gamma(i\eta) \Gamma(1 - i\eta) = \frac{-1}{i\eta} \frac{\pi}{\sin(i\pi\eta)} = \frac{\pi}{\eta \operatorname{sh}(\pi\eta)}, \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} \left| \Gamma(n+i\eta) \right|^2 &= \Gamma(n+i\eta) \times \Gamma(n-i\eta) = \left( \Gamma(i\eta) \cdot \prod_{m=0}^{n-1} (i\eta+m) \right) \times \left( \Gamma(-i\eta) \cdot \prod_{m=0}^{n-1} (-i\eta+m) \right) = \\ &= \left| \Gamma(i\eta) \right|^2 \cdot \prod_{m=0}^{n-1} ((i\eta+m)(-i\eta+m)) = \frac{\pi}{\eta \operatorname{sh}(\pi\eta)} \cdot \prod_{m=0}^{n-1} (\eta^2 + m^2), \quad \text{ha } n \in \mathbb{N}^+. \end{aligned} \quad (6.26)$$

### 6.3. Stirling-formula, következmények

• A nagy számok faktoriálisára vonatkozó alábbi formula sokszor visszaköszön a gyakorlatban:

$$\text{Stirling-formula:} \quad n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad \text{azaz} \quad \Gamma(x+1) \approx \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x, \quad (6.27)$$

ha  $n \in \mathbb{N}^+$ ,  $n \gg 1$ , illetve  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $x \gg 1$ . Ez jellemzi a faktoriális növekedését: az  $n^n$  a lényeg.<sup>67</sup> A felírt „körülbelül egyenlő”-s változat mellett egzaktabb is igaz.

$$\text{Állítás: } x \in \mathbb{R}^+ \text{-ra} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\Gamma(x+1)} \cdot \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x \right\} = 1, \quad (6.28)$$

**sőt C-ben is**, általános  $|z| \rightarrow \infty$  átmenetekre is, ha legalábbis eltávolodunk a pólusoktól:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi z} (z/e)^z}{\Gamma(z+1)} = 1, \quad \begin{array}{l} \text{ha közben } z \text{ az } \mathbb{R}^- \text{ tengelytől} \\ \text{is végtelen messze eltávolodik.} \end{array} \quad (6.29)$$

• A (6.28)–(6.29) képletek így egzakt eredmények, és a gamma-függvény további megismeréséhez is fontosak.<sup>68</sup> Először a körülbelül egyenlős (6.27)-et látjuk be egy önmagában is érdekes (és máshol is hasznos) módszerrel: „csúcsos” függvény **Gauss-közelítésben** való integrálásával.

<sup>67</sup>Itt  $n \rightarrow \infty$ -t szokás gondolni, de már pl.  $6! = 720$ , a fenti formula pedig 710,08-at ad: a relatív eltérés  $\approx 1,4\%$ .

<sup>68</sup>És nem is mindig *növekedést* mondanak: pl. képzetes irányban ( $a \in \mathbb{R}^+$  fix,  $t \in \mathbb{R}^+$  és  $t \rightarrow \infty$ ) az abszolútértékre  $|\Gamma(a+it)| \approx \sqrt{2\pi|a+it|} \cdot |(a+it)^{a+it}| \cdot |e^{-a-it}| = \dots = \sqrt{2\pi} e^{-a} (a^2+t^2)^{\frac{a}{2} + \frac{1}{4}} e^{-t \arctg \frac{t}{a}}$ , amiben az esetleg elég nagy  $a^a$  mellett  $t \rightarrow \infty$ -re már az  $e^{-\arctg \frac{t}{a}} \approx e^{-\frac{\pi}{2}t}$  a lényeges: ilyen értelemben  $\Re(z) > 0$  esetén  $|\Gamma(z)|$  képzetes irányban lényegében *exponenciálisan csökken*. (Figyeljük meg, hogy ez összevág a fenti (6.24)–(6.26) képletekkel is.)

Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  olyan, hogy egy egyértelmű  $t_0$  maximumhelye van, annak környékén elég-szer differenciálható, és csak  $t_0$  környékén különbözik lényegesen nullától. Ekkor  $\int_{-\infty}^{\infty} f$  csak a  $t_0$  környékéről származik. Ha megtaláljuk  $t_0$ -t majd  $f(t_0)$ -t ill.  $f''(t_0)$ -t, eszünkbe juthat, hogy  $f$ -et egy „höz hasonló” Gauss-görbével közelítsük, aminek ugyanott van a maximumhelye és a maximumértéke, és „ugyanolyan széles”, azaz  $t_0$ -ban a második deriváltja is ugyanannyi, mint  $f$ -é:

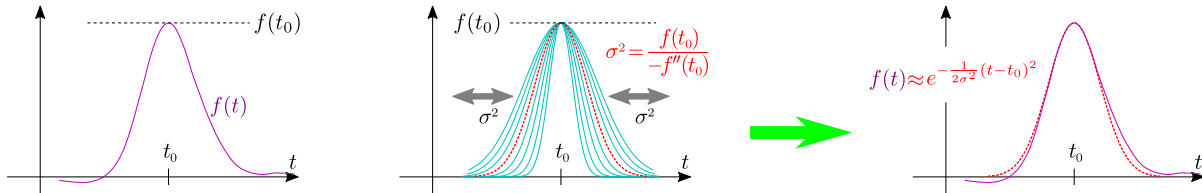
$$f(t) \approx f(t_0)e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t-t_0)^2}, \quad \text{ahol} \quad \sigma^2 = \frac{f(t_0)}{-f''(t_0)}. \quad \text{A mondott feltételek mellett biztos, hogy}$$

ha  $f(t_0) > 0$ , akkor  $f''(t_0) < 0$ : tényleg  $\sigma^2 > 0$ .

Lássuk be, hogy a felírt Gauss-görbe teljesíti a kirótt feltételeket! Őt használva viszont

$$\int_a^b dt f(t) \approx \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t_0)e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t-t_0)^2} = f(t_0)\sqrt{2\pi\sigma^2} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b dt f(t) \approx f(t_0)\sqrt{2\pi\frac{f(t_0)}{-f''(t_0)}}. \quad (6.30)$$

ha  $a, b$  olyanok, hogy  $[a, b]$ -n kívül már „ $f \approx 0$ ” (vagy nem is értelmezett): ezért használhatjuk a Gauss-görbe egész  $\mathbb{R}$ -re vett integrálját (amit tudunk). A kapott képlet  $\int_a^b f$  gaussi közelítése.



47. ábra. Csúcsos függvény integrálása Gauss-közelítésben: a maximumhely és -érték állítja be a közelítő Gauss-görbe csúcshelyét és magasságát, az  $f''$  pedig a Gauss-görbe szélességét.

• Próbáljuk ezt alkalmazni a  $\Gamma(x+1)$ -et definiáló eredeti (6.2) integrálra  $z \equiv x \in \mathbb{R}^+$  valós esetben!

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} dt f(t), \quad \text{ahol} \quad f(t) = t^x e^{-t} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} f'(t) &= t^x e^{-t} \left(1 - \frac{x}{t}\right), \\ f''(t) &= t^x e^{-t} \left(1 - \frac{2x}{t} + \frac{x(x-1)}{t^2}\right). \end{aligned} \quad (6.31)$$

A  $t$  függvényében tehát a  $[0, \infty]$  integrálási tartományon tényleg van egyértelmű  $t_0$  maximumhely:

$$f'(t_0) = 0, \quad \text{ha} \quad t_0 = x \quad \Rightarrow \quad f(t_0) = \frac{x^x}{e^x}, \quad \frac{f(t_0)}{-f''(t_0)} = x. \quad (6.32)$$

Itt tehát  $\sigma = \sqrt{x}$  adódik, de  $t_0 = x$ : a csúcs tényleg „relatív keskenyedik”, ahogy  $x \rightarrow \infty$ . Így viszont

$$\begin{aligned} \text{az iméntiekből gaussi közelítés-} \\ \text{sel ki is jön a Stirling-formula:} \end{aligned} \quad \int_0^{\infty} dt e^{-tx} \approx f(t_0)\sqrt{\frac{2\pi f(t_0)}{-f''(t_0)}} = \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x. \quad (6.33)$$

• **Kiegészítés:** hogy az erősebb, határértékes fogalmazást is belássuk, helyettesítsünk úgy a  $\Gamma(x+1)$ -et megadó integrálban, hogy az új integrandus csúcshelye 0, ottani értéke 1, és „szélessége” is 1 legyen. A iménti  $t_0, f(t_0), f''(t_0)$  értékeken és a közelítő Stirling-formulán felbuzdulva

$$t \equiv x + \sqrt{x} \cdot s \quad \Rightarrow \quad \Gamma(x+1) = \frac{x^x \sqrt{x}}{e^x} \int_{-\sqrt{x}}^{\infty} ds e^{-h(s)}, \quad \text{ahol} \quad h(s) \equiv \sqrt{x}s - x \ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{x}}\right). \quad (6.34)$$

Az így kapott  $h(s)$  hatványsora  $s=0$  körül  $\frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{3\sqrt{x}} + \frac{s^4}{4x} - \dots$ : az integrandus pontonkénti  $x \rightarrow \infty$  határértéke tehát tényleg  $e^{-s^2/2}$  (erre hajtottunk); az alsó határ pedig  $-\infty$ -hez tart, és  $\int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-s^2/2}$  értéke  $\sqrt{2\pi}$ . Ha az  $x \rightarrow \infty$  határátmenet és az integrálás megcserélhető, összerakva készen lennénk.

A *Lebesgue-tétel* szerint ez biztosan teljesül, ha van  $|e^{-h(s)}| = e^{-h(s)}$ -nek  $x$ -től független integrálható majoránsa. Függvényvizsgálattal (akár ábrázolással megsegítve) kiderül, hogy ha  $s > 0$  adott,

akkor  $x$ -et növelve  $h(s)$  nő, így  $e^{-h(s)}$  értéke csökken, ha viszont  $s < 0$ , akkor  $x$ -et növelve  $h(s)$  csökken, azaz  $e^{-h(s)}$  nő (az  $e^{-s^2/2}$  határértékhez tartva), legalábbis olyan  $s$ -et véve, ami az adott  $x$ -nél már értelmes; ehhez  $s > -\sqrt{x}$  kell.<sup>69</sup> Indítsunk pl.  $x=1$ -től az  $x \rightarrow \infty$ -t; ekkor:

$$\begin{aligned} s > 0, x > 1 \text{ esetén } e^{-h(s)} &\leq e^{-h(s)|_{x=1}} = (1+s)e^{-s}; \text{ ez integrálható } s \in \mathbb{R}^+ \text{-ra,} \\ s < 0 \text{-ra és } x > 0 \text{-ra } e^{-h(s)} &\leq e^{-s^2/2}, \text{ ami integrálható } s \text{-ben } \mathbb{R}^- \text{-ra.} \end{aligned} \quad (6.35)$$

Tehát van integrálható majoráns, így a határértékképzést felcserélhetjük az integrálással:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{x} x^x / e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\sqrt{x}}^{\infty} ds e^{-h(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} ds \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-h(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-s^2/2} = \sqrt{2\pi}; \quad \text{kész.} \quad (6.36)$$

A  $\approx$ -t használó (6.27) Stirling-formulát komolyabb eszközökkel sikerült a precíz (6.28) határértékes formába önteni; az ehhez használt  $t \rightarrow s$  helyettesítést a gaussi közelítés sugallta. Bonyolultabb integrálok gaussi közelítését is sokszor „megtámogathatjuk” Lebesgue-tétellel.

\* \* \*

A komplex Stirling-formulára visszatérünk; néhány következmény már a valós esetből is leszűrhető. Az ötlet a „végtelenből visszalépegetés”: minden  $m \in \mathbb{N}^+$  esetén lelépkedhetünk  $\Gamma(x+m+1)$ -ből  $\Gamma(x)$ -re, így  $m \rightarrow \infty$  határértékként is, ahol viszont  $\Gamma(x+m+1)$ -be beírhatjuk a Stirling-formulát:

$$\text{Egyelőre} \quad \Gamma(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x+m+1)}{x(x+1)(x+2) \dots (x+m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi}(x+m)^{x+m+\frac{1}{2}} e^{-x-m}}{x(x+1)(x+2) \dots (x+m)}. \quad (6.37)$$

$z \equiv x \in \mathbb{R}$ -re:

- Beláthatjuk ebből a következő **kétszerező képletet**: minden  $z \in \mathbb{C}$ -re, ahol csak értelmes,

$$\Gamma(2z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma(z + \frac{1}{2}). \quad (6.38)$$

Az motiválhatja ezt, hogy **pozitív egészekre működik**, tudva, hogy  $\Gamma(n) = (n-1)!$ ,  $\Gamma(2n) = (2n-1)!$  és  $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \frac{(2n)!}{2^n n!}$ . Az állítás most az, hogy teljesül **minden z-re** (komplexekre is).

Valós  $x \in \mathbb{R}^+$ -ra írjuk fel  $\Gamma(x)$ ,  $\Gamma(x + \frac{1}{2})$  és  $\Gamma(2x)$  értékeit a visszalépegetős (6.37) alakban, ügyesen kiosztva az  $m$  beírt értékeit (amiknek annyi a szerepük, hogy végtelenhez tartanak):  $\Gamma(x)$ -hez  $m$ -et,  $\Gamma(x + \frac{1}{2})$ -hez  $m-1$ -et,  $\Gamma(2x)$ -hez pedig  $2m$ -et írunk.  $\Gamma(x)$ -re a (6.37) marad, a másik kettő

$$\Gamma(x + \frac{1}{2}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi}(x+m-\frac{1}{2})^{x+m} e^{-x-m+\frac{1}{2}}}{(x+\frac{1}{2})(x+\frac{3}{2}) \dots (x-\frac{1}{2}+m)}, \quad \Gamma(2x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi}(2x+2m)^{2x+2m+\frac{1}{2}} e^{-2x-2m}}{2x(2x+1) \dots (2x+2m)},$$

majd írjuk fel ezekkel a bizonyítandó (6.38) állítás két oldalának hányadosát! Vezessük le magunknak; a lényeg: az  $m$ -ek ötletes elhelyezése miatt a visszalépegetős szorzatok lényegében kiesnek, és ezen túl is sok mindennel egyszerűsíthetünk; arra jutunk, hogy (6.38) két oldalának hányadosa  $\sqrt{e} \lim_{m \rightarrow \infty} (1 - \frac{1/2}{x+m})^{x+m} = \sqrt{e} \cdot e^{-1/2} = 1$ , tudva, hogy  $\lim_{X \rightarrow \infty} (1 + \frac{a}{X})^X = e^a$ .

Valós  $x$ -re tehát beláttuk a kétszerezős formulát. Komplex  $z$ -re a szokásosat mondhatjuk: a felírt (6.38) összefüggés analitikus függvények egyenlőségét állítja, és beláttuk a (torlódási pontot tartalmazó)  $\mathbb{R}^+$  részhalmazon: az összefüggés igaz lesz mindenhol, ahol csak értelmes.<sup>70</sup>

<sup>69</sup>Legyen  $\sigma \equiv \sqrt{x}$  és  $\xi \equiv \frac{s}{\sigma}$ . Deriválva  $h(s)$ -et  $\sigma$  szerint  $\frac{d}{d\sigma} [\sigma s - \sigma^2 \ln(1 + \frac{s}{\sigma})] = \sigma (\frac{\xi^2 + 2\xi}{\xi+1} - 2 \ln(1+\xi)) \equiv \sigma F(\xi)$ . Mivel  $F(0)=0$ , és  $F'(\xi) = \dots = (\frac{\xi}{\xi+1})^2$ , ami  $\xi=0$ -ban 0, máshol pozitív, leszűrhetjük, hogy  $F(\xi) > 0$ , ha  $\xi > 0$ , és  $F(\xi) < 0$ , ha  $\xi < 0$ . Ebből megvan  $\frac{d}{d\sigma} h(s)$  előjele:  $\sigma$  növelésével  $h(s)$  nő, ha  $s > 0$  (ekkor  $\xi > 0$ ), és csökken, ha  $s < 0$  (ilyenkor  $\xi < 0$ ).

<sup>70</sup>Megjegyzés: a Gauss-ról elnevezett *többszörözős formula* is levezethető ugyanezzel a módszerrel:

$$\Gamma(z) \Gamma(z + \frac{1}{m}) \Gamma(z + \frac{2}{m}) \dots \Gamma(z + \frac{m-1}{m}) = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} m^{\frac{1}{2} - mz} \Gamma(mz). \quad (6.39)$$

• A gamma-függvény logaritmusának  $z=1$  körüli **sorfejtését is közelhozza** a végtelenből való visszalépegetés. Irjuk fel  $\ln \Gamma(1+x)$ -re a Stirling-formulás (6.37) képletet ( $m$ -et  $m-1$ -re átjelölve):

$$\ln \Gamma(x+1) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} \ln(2\pi) + (x+m+\frac{1}{2}) \ln(x+m) - (x+m) - \sum_{k=1}^m \ln(x+k) \right\}; \quad (6.40)$$

ezt valós  $x$ -ekre bizonyítottuk, de ez elég. Megelőlegezzük (ld. a C.6. függelékben), hogy itt a határértékképzést megcserélhetjük a deriválással; ezzel viszont azt írhatjuk, hogy

$$\frac{d}{dx} \ln \Gamma(x+1) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2(x+m)} + \ln(x+m) - \sum_{k=1}^m \frac{1}{x+k} \right\} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \ln(x+m) - \sum_{k=1}^m \frac{1}{x+k} \right\}, \quad (6.41)$$

ahol elhagytuk a nullához tartó  $\frac{1}{x+m}$ -et. A maradék két tag  $\infty$ -hez tart, csak a különbségüknek létezik határértéke (részletesebben ezt is ld. a C.6. függelékben). A többedik deriváltak pedig

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \ln \Gamma(x+1) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \frac{1}{(x+k)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2}; \quad \text{ez már létezik így. Tovább lépve:} \\ \frac{d^3}{dx^3} \ln \Gamma(x+1) &= -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^3}, \quad \dots \quad \frac{d^n}{dx^n} \ln \Gamma(x+1) = (-1)^n (n-1)! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^n}. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Tudva, hogy  $\ln \Gamma(1) = \ln 1 = 0$ , és  $x=0$ -ban kiértékelve a kapott képleteket megkapjuk  $\ln \Gamma(z+1)$  hatványsorának együtthatóit, azaz magát a sorfejtést. A definíciókat ld. rögtön; az eredmény:

$$|z| < 1\text{-re} \quad \ln \Gamma(z+1) = -\gamma z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\zeta(n)}{n} (-z)^n. \quad (6.43)$$

Ez a  $z=1$  körüli  $R=1$  sugarú körlapon konvergens, mert  $\ln \Gamma$  ezen differenciálható, de a határán,  $z=0$ -ban van az „első bajos pont”,  $\Gamma(z)$  első pólusa. (A következtetésről ld. a 4.3. szakaszt is).<sup>71</sup>

A  $\Gamma(z)$  hatványsora  $\ln \Gamma(z)$ -éből a (sorával definiált) exp függvényt hattatva adódik:  $\ln \Gamma(z)$  sorának tetszetős együtthatói (a négyzetre, köbre stb. emelés miatt) „keverednek össze”.

• A  $-\gamma$  tehát a gamma-függvény deriváltja 1-ben. A  $\gamma$  neve: **Euler-(Mascheroni)-állandó**:<sup>72</sup>

$$\gamma \equiv -(\ln \Gamma)'(1) = -\Gamma'(1). \quad \text{Utóbbi is igaz, hiszen } \Gamma(1)=1. \quad (6.44)$$

Az  $\ln \Gamma$  deriváltját megadó iménti visszalépegetős (6.41) kifejezésbe  $x=0$ -t írva adódik az egyik, a  $\Gamma(1+z)$  eredeti (6.2) definícióját paraméteres integrálként deriválva pedig a másik kifejezése:

$$\gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \ln m \right], \quad \gamma = -\int_0^{\infty} dt e^{-t} \ln t. \quad \gamma \approx 0,577 \dots \quad (6.45)$$

A többi együtthatóban a  $\zeta(s)$  ún. **Riemann-féle zéta-függvény** került elő. Ezzel a D függelék foglalkozik; most csak a legalapvetőbb (és itt csak  $s \equiv m$  esetben használt) definíciója kell:

$$\zeta(s) := \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}, \quad \text{ha } \Re(s) > 1. \quad (6.46)$$

• **A gamma-függvény** egy (szintén Euler-től származó) határértékes **alternatív definíciója** adódik, ha az eredeti (6.2) definiáló integrálban a felső határt óvatoskodva  $\infty$  helyett  $n$ -nek vesszük, és  $e^{-t}$  helyett  $(1-\frac{t}{n})^n$ -et írunk: az  $n \rightarrow \infty$  határesetben visszakapjuk  $e^{-t}$ -t (ez az  $e$  alapú exponenciális

<sup>71</sup>A deriváltakat most az  $\mathbb{R}$  mentén mozogva számoltuk ki, de mivel  $\ln \Gamma(z)$   $z=1$ -ben *komplex* differenciálható, *tényleg* a kapott értékek a(z egyértelmű) deriváltjai: a kapott *hatványsor maga* komplex  $z$ -kre is érvényes és értelmes.

<sup>72</sup>Érdekeség:  $\gamma$ -ról még az sincs bebizonyítva, hogy egyáltalán irracionális lenne, bár „minden bizonyal” az.

függvény egyik alapvető, definiáló jellegű tulajdonsága), és az  $\infty$  határt is. Tehát:

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \int_0^\infty dt e^{-t} t^{z-1} = \int_0^\infty dt \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \chi_{[0,n]}(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} \right] \stackrel{1.}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n dt \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} \stackrel{2.}{=} \\ &\stackrel{2.}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} n^z \int_0^1 ds s^{z-1} (1-s)^n \stackrel{3.}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} n^z \frac{\Gamma(z)\Gamma(n+1)}{\Gamma(z+n+1)} \stackrel{4.}{\Rightarrow} \Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Az 1. lépésben megcseréltük a határértékképzést az integrállal.<sup>73</sup> A 2. lépésben  $t=ns$ -et helyettesítettünk, a 3. lépésben pedig a 6.1. szakaszban látott (6.9) béta-integrált használtuk; a 4. lépésben a kapott jobb oldalon lépegetős szorzatként írtuk a gamma-függvények hányadosát.

A levezetésben  $\Re(z) > 0$ -t kellett feltenni, de nemsokára belátjuk, hogy a Stirling-formula tényleg komplex esetben is érvényes, így ebből is kideríthetjük (visszatérve az előző 4. lépés elé), hogy

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z \Gamma(z)\Gamma(n+1)}{\Gamma(z+n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi(n+z)} \left(\frac{n+z}{e}\right)^{n+z}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^z \left(1 - \frac{z}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right)^{z+\frac{1}{2}} = 1,$$

amiből látszik, hogy a (6.47) előállítás **minden  $z$  komplex számra is** érvényes. Figyeljük meg, hogy a nevezőből szépen látszanak  $\Gamma(z)$  pólusai a nempozitív egész számokban ( $z \in \mathbb{Z}_0^-$ -ban).

## 6.4. További érdekességek

• Ha az előző (6.47) előállítást összevarrjuk a (6.17) reflexiók összefüggéssel, a szinuszfüggvény érdekes végtelenszorzat-előállítását kapjuk. A  $\Gamma(1-z)$ -t megadó részbe érdemes  $n-1$ -et írni:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\pi z)}{\pi} &= \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}{n!n^z} \cdot \frac{(1-z)(2-z)\dots(n-z)}{(n-1)!(n-1)^{1-z}} = \\ &= z \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+z)(1-z)(2+z)(2-z)\dots(n+z)(n-z)}{(n!)^2} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{z-1}; \end{aligned} \quad (6.48)$$

itt a tényezőkhöz kényelmesen kétszer is beleoszthatunk  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ -nel, az utolsó hatvány pedig 1-hez tart. Az eredményt végtelen szorzatként írhatjuk (még  $z$ -vel átosztva):

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = (1-z^2) \left(1 - \frac{z^2}{2^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{3^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{4^2}\right) \dots = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right). \quad (6.49)$$

Ezt  $z \rightarrow \frac{z}{2}$ -vel átírva a  $\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)$  ilyen felírásában a páros egész számok lesznek a nevezőkben. Tudva, hogy  $\sin(\pi z) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)$ , tényezőnkénti osztással hasonló képletet kaphatunk  $\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)$ -re:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right) = (1-z^2) \left(1 - \frac{z^2}{3^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{5^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{7^2}\right) \dots = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(2k+1)^2}\right). \quad (6.50)$$

• A felírt szorzatokat Euler önmaguk jogán „sejtette meg”: tudva, hogy  $\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$  páros függvény,  $z=0$ -ban 1 (határ)értékű (mai fogalmazással: itteni szingularitását megszüntethetjük ott itt 1-nek definiálva), és zérushelyei a szinuszt ismerve  $z = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ , olyan „végtelenedfokú polinom”-ot keresett, ami a páros  $z^2$ -eket tartalmazza,  $z=0$ -ban 1, és a mondott helyeken nulla. A  $\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$ -re felírt képlet („végtelen gyöktényező alak”) pont ilyen. Ha ezt elfogadjuk bizonyításnak, akkor

<sup>73</sup>Ezt szokásosan a *Lebesgue-tétel* alapozza meg; az integrálható majoráns maga az  $|e^{-t}t^{z-1}|$  függvény, mert az  $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \exp\left\{n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right\}$  alakot írva látszik (amellett, hogy  $n \rightarrow \infty$ -re tényleg  $e^{-t}$ -t kapjuk vissza), hogy mivel  $t > 0$ -ra  $\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) < -\frac{t}{n}$ , ezért az integrandus  $n$  növelésével mindenhol monoton nő  $t > 0$  esetén (a határérték,  $e^{-t}$  felé).

viszont az iménti (6.48) átalakítást megfordítva kijön a gamma-függvény reflexiós összefüggése.

Idézzük most fel  $\sin(\pi z)$  igazi hatványsorát, és (tudva, hogy konvergens sorozatokat/sorokat manipulálunk) a jobb oldalon is „végezzük el a végtelen szorzatot”,  $z^2$ -ben végtelen sort kialakítva:

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = 1 - \frac{\pi^2}{6} z^2 + \frac{\pi^4}{120} z^4 - \dots, \quad \text{a jobb oldal-} \\ \text{ból ugyanez:} = 1 - \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right) z^2 + \\ + \left( \frac{1}{1^2} \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2} \frac{1}{2^2} + \frac{1}{1^2} \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2^2} \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^2} \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{3^2} \frac{1}{3^2} + \dots \right) z^4 - \dots;$$

ebből pedig kijönnek a korábban, az 5.2. szakasz végén is már látott (5.26) összegképletek:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}, \quad \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90}, \quad (6.51)$$

az első a  $z^2$  együtthatójának egyértelműségéből, a másodikhoz a  $z^4$  végtelenösszeg-együtthatóját és a  $z^2$ -esre kapottnak a négyzetét kell ügyesen összetenni, hogy  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$  jelenjen meg. Tovább is léphetünk pl. a  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}$  összegre is, de egyre bonyolultabban; visszatérünk ide a D függelékben.

• *Megjegyzés:* **Weierstrass** precízen kidolgozott egy módszert, amivel meromorf vagy egészfüggvényeket meg lehet adni a most a  $\sin(\pi z)$ -re látotthoz hasonló „**végtelen gyöktényező**” alakban: a zérushelyek ill. az esetleges pólusok rendjei, helyei és a környékükön való viselkedés (pl. a reziduók) már meghatározzák a függvényt (ha  $|z| \rightarrow \infty$ -re egyfajta „rendes” viselkedést írunk elő).<sup>74</sup> Ez a módszer az ismert zérushelyekkel bíró  $\sin(\pi z)$  függvényre az iménti (6.49) szorzatot adja.

Innen nézve a gamma-függvény (a reflexiós összefüggésre is gondolva) „a  $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$  elfelezése”. Néha így *definiálják*  $\Gamma(z)$ -t: ő a Weierstrass-módszer szellemében legtermészetesebb függvény, amelynek  $\mathbb{Z}_0^-$ -on vannak a pólusai; ebből kijön egy (alább másképp levezetett) végtelensorozat-előállítás.<sup>75</sup>

• Hasznos bevezetni a szokásosan  $\psi$ -vel jelölt **digamma-függvényt**,  $\Gamma(z)$  logaritmus deriváltját:

$$\psi(z) := \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \quad \psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z), \text{ ahol csak } \Gamma(z) \notin \mathbb{R}_0^-. \quad (6.52)$$

Ugye  $\Gamma(z)$ -nek zérushelye nincs, elsőrendű pólusai vannak  $z \in \mathbb{Z}_0^-$ -ban: emiatt, ahogy láttuk az argumentum-elves 5.5. szakaszban is, a  $\psi(z)$  digamma-függvény mindenhol differenciálható, kivéve  $z \in \mathbb{Z}_0^-$ -ban, ahol elsőrendű pólusai vannak, mindegyikben határozottan  $-1$  reziduummal.

• Átírhatjuk a gamma-függvényre ismert (6.3) ill. (6.14) léptető tulajdonságot és a (6.17) reflexiós összefüggést  $\psi(z)$ -re is (utóbbiból is látszanak a  $-1$  reziduumú elsőrendű pólusok):

$$\text{Léptetés: } \psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad \text{többre: } \psi(z+m+1) = \psi(z) + \sum_{k=0}^m \frac{1}{z+k}. \quad (6.53)$$

$$\text{Speciálisan: } \psi(1) = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma \quad \Rightarrow \quad \psi(m+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}. \quad (6.54)$$

$$\text{Reflexiós összefüggés: } \psi(z) - \psi(1-z) = -\pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}. \quad (6.55)$$

<sup>74</sup>Ez annak általánosítása, hogy polinomot megadhatunk gyöktényező alakkal, racionális törtfüggvényt parciális törtekkel. Tudva, hogy analitikus függvények „merevek”, „részük meghatározza az egészet”, esetleg hihető, hogy ilyen kevésnek tűnő információ (gyökök, pólusok) is már lényegében egyértelműen jellemez egy analitikus függvényt.

<sup>75</sup>Ha így definiálják a gamma-függvényt, akkor ezt a(z alább látandó) végtelen szorzatot manipulálva kell kideríteni, hogy  $\Gamma(z)$  tulajdonképpen tényleg a faktoriális általánosítása. Számomra ez az út még mindig nem annyira természetes, mint az ebben a fejezetben is követett, az eredeti (6.2) definiáló integrálból kiinduló tárgyalás.



A  $\psi$   $z=1$  körüli sorfejtése az  $\ln \Gamma$ -ra vonatkozó (6.43) deriváltja; az index kellemes átjelölésével

$$\psi(1+z) = -\gamma - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \zeta(n+1) z^n; \quad \text{ugye } m \geq 2\text{-re } \zeta(m) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m}. \quad (6.56)$$

• A  $\Gamma(z)$ -nek és a  $\psi(z)$ -nek a **pólusok környékén** való viselkedését az eddigiekből lépegetéssel és/vagy reflexiós összefüggéssel kapjuk. Két hasznos képlet (itt  $n \in \mathbb{N}_0^+$  és  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{O}(\varepsilon) = 0$ ):

$$\Gamma(-n+\varepsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right\}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(-n+\varepsilon)}{\Gamma(-n+\varepsilon)} = (-1)^{n+1} n!. \quad (6.57)$$

• Az  $\ln \Gamma(1+x)$  deriváltjára felírt (6.41) képlet tulajdonképpen  $\psi(1+x)$ -et adja meg. Ebbe (abból ötletelve, hogy  $x=0$ -t beírva úgyis előkerül) ügyesen beszúrhatjuk a  $\gamma$  Euler-Mascheroni-állandót:

$$\begin{aligned} \psi(1+x) &= -\gamma + \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \ln m \right] + \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \ln(x+m) - \sum_{k=1}^m \frac{1}{x+k} \right\} = \\ &= -\gamma + \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^m \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) + \ln \frac{m+x}{m} \right] = -\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k(k+x)}, \end{aligned} \quad (6.58)$$

ahol az  $\ln$  nullához tartott, és közös nevezőre hoztunk. Itt az  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x > -1$  valós esetre korlátoztunk (erre az esetre vezettük le a (6.41) képletet). A legutolsó összeg viszont minden komplex  $x \equiv z$ -re is létezik (hacsak  $z \notin \mathbb{Z}_0^-$ , amikor az egyik nevező nullává válna), és differenciálható, azaz analitikus függvényt ad meg (ld. a C.6. függelékben is). Emiatt a képlet mindenhol érvényes:

$$\psi(1+z) = -\gamma + z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+z)}, \quad \text{hacsak } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-, \quad (6.59)$$

Ebből (a C.6. függelékben letisztázott módon) tagonkénti integrálással adódik a nemrég emlegetett, a pólusokat szépen mutató **Weierstrass-féle szorzat-előállítás**:

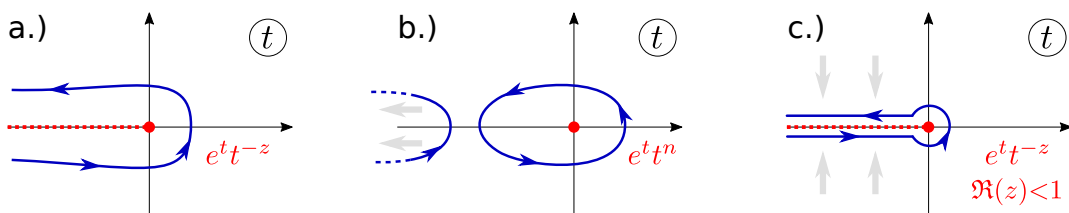
$$\text{Ln } \Gamma(1+z) = -\gamma z + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{z}{k} - \text{Ln} \left( 1 + \frac{z}{k} \right) \right] \quad \Rightarrow \quad \Gamma(1+z) = e^{-\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{z/k}}{1 + \frac{z}{k}}. \quad (6.60)$$

\* \* \*

• A következő képlet önmagában is érdekes, és pl. azt is mutatja rögtön, hogy  $\Gamma(z)$  sehol sem nulla.

Minden  $z \in \mathbb{C}$ -re működik a **Hankel-féle** vonalintegrál: 
$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} dt e^{t^z}. \quad (6.61)$$

Hacsak  $z \notin \mathbb{Z}$ , az integrandusnak mint  $t$  függvényének vágása van  $t \in \mathbb{R}_0^-$ -on: az út ezt kerüli meg  $\Re(t) = -\infty$ -ből jöve és visszamenve. Az integrál létezik (és minden ilyen úttal ugyanannyi, mert azok egymásba mozgathatók):  $\Re(t) \rightarrow -\infty$  felé  $e^t$  integrálható csökkenését  $t^z$  sem ronthatja el.



48. ábra. a.) a Hankel-féle előállításához használandó út. b.)  $z \in \mathbb{Z}$  egész esetén bezárhatjuk az integrációs utat. c.) Általános  $z$ , de  $\Re(z) < 1$  esetén a vágásra húzhatjuk az utat a levezetéshez.

Ha  $z$  valós egész, akkor nincs vágás  $t \in \mathbb{R}^-$ -on, bezárhatjuk az utat  $t=0$  körül (mert a „leszeletelt” darabot  $\Re(t) \rightarrow -\infty$ -be tolhatjuk, így az arra vett járulék biztos nulla). Ha  $z$  nempozitív egész ( $z=-n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0^+$ ), akkor az  $e^{-t}t^n$  integrandus *mindenhol* differenciálható; a Cauchy-tétel szerint

$$z = -n : \oint^{(0+)} dt e^t t^{-z} = \oint^{(0+)} dt e^t t^n = 0; \quad z=-n \text{ tényleg } \Gamma(z) \text{ pólusa.} \quad (6.62)$$

Ha pedig  $z=n+1$  pozitív egész, akkor az  $e^{-t}t^{-n-1}$  integrandusnak  $t=0$ -ban  $n+1$ -edrendű pólusa van, mert a  $t=0$  körüli Laurent-sort közvetlenül az  $e^t$  sorfejtéséből megkaphajtuk:  $e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint^{(0+)} dt \frac{e^t}{t^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \oint^{(0+)} dt \left[ t^{-n-1} + \frac{t^{-n}}{1!} + \frac{t^{-n+1}}{2!} + \dots + \frac{t^{-2}}{(n-1)!} + \frac{t^{-1}}{n!} + \dots \right] = \frac{1}{n!}. \quad (6.63)$$

Rögtön az integrált is kiszámíthattuk a  $-1$ -edik tagból.<sup>76</sup> Ez összevág azzal, hogy  $\frac{1}{\Gamma(n+1)} = \frac{1}{n!}$ . Valós egész  $z$ -kre tehát működik a (6.61) Hankel-féle előállítás (ez segíthet megjegyezni).

• Általános  $z$ -ket tekintve a (6.61)-ben felírt integrál  $z$ -ben differenciálható (=analitikus) függvényt ad meg.<sup>77</sup> A bal oldali  $\frac{1}{\Gamma(z)}$  is analitikus: ha az állítást belátjuk pl. egy nemüres nyílt  $U \subset \mathbb{C}$  halmazon minden  $z \in U$ -ra, akkor mindenhol igaz lesz, mert ha két analitikus függvény egy ilyen  $U$ -n megegyezik, akkor mindenhol is, ahol csak mindketten értelmezettek.

Az  $U$  a  $\Re(z) < 1$  halmaz lesz: ilyen  $z$ -kre a  $t$ -síkon a 48.c. ábra módjára az utat ráhúzhatjuk a vágásra. A vágás alatti félegyenesen  $t=-s-i\varepsilon$ , felette  $t=-s+i\varepsilon$ , és  $s \in \mathbb{R}^+$ -ra  $(-s \pm i\varepsilon)^a \rightarrow s^a e^{\pm i\pi a}$ :

$$\begin{aligned} \int_{\text{lent}} dt e^t t^{-z} &= \int_r^\infty ds e^{-s-i\varepsilon} (-s-i\varepsilon)^{-z} & \Rightarrow & \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\text{lent}} dt e^t t^{-z} = e^{i\pi z} \int_r^\infty ds e^{-s} s^{-z}, \\ \int_{\text{fönt}} dt e^t t^{-z} &= -\int_r^\infty ds e^{-s+i\varepsilon} (-s+i\varepsilon)^{-z} & & \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\text{fönt}} dt e^t t^{-z} = -e^{-i\pi z} \int_r^\infty ds e^{-s} s^{-z}. \end{aligned}$$

Aki akarja, kigondolhatja a Lebesgue-tétellel, hogy valóban az integrálok határértékére is igaz ez (az alapján, ahogy az 5.3. szakaszban tettük ezt hasonló esetekben, pl. az 58. lábjegyzetben). A( $z$   $r$  sugarú) kis íven  $|t^{-z}| = |t|^{-\Re(z)} = r^{-\Re(z)}$ , és  $t=0$  körül egy környezetben  $e^t$  korlátos:  $|e^t| \leq K$ , így

$$\left| \int_{\text{kis ív}} dt e^t t^{-z} \right| \leq 2\pi r \cdot \max_{t \in \text{ív}} |e^t| |t^{-z}| \leq 2\pi K r^{1-\Re(z)}, \quad \text{és ez nullához tart} \\ r \rightarrow 0\text{-nál, ha } \Re(z) < 1.$$

Eme nullához tartásért is kellett, hogy  $\Re(z) < 1$ -re korlátozódjunk; így viszont a ráhúzott integrál:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{(0+)} dt e^t t^{-z} &= \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\text{lent}} dt e^t t^{-z} + \int_{\text{kis ív}} dt e^t t^{-z} + \int_{\text{fönt}} dt e^t t^{-z} \right) = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} (e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}) \int_r^\infty ds e^{-s} s^{-z} = 2i \sin(\pi z) \int_0^\infty ds e^{-s} s^{-z} = 2i \sin(\pi z) \Gamma(1-z) = \frac{2\pi i}{\Gamma(z)}. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Itt felismertük  $\Gamma(1-z)$  eredeti definiáló integrálját (pont jó, hogy most  $\Re(z) < 1$ , így az tényleg működik), és a gamma-függvény (6.17) reflexiós összefüggését is használtuk. Készen vagyunk!

• **Kiegészítés:** előkerülhetnek a **béta-integrálhoz hasonlítható** alábbi vonalintegrálok is:

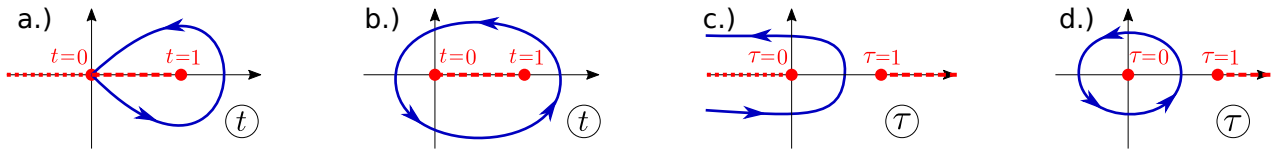
$$\text{Ha } \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \text{ és } \Re(\alpha+\beta) > 0, \text{ akkor } \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{t=0}^{(1+)} dt t^{\alpha+\beta-1} (t-1)^{-\beta} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{t=0}^{(1+)} dt t^{\alpha-1} \left(1-\frac{1}{t}\right)^{-\beta}, \quad (6.65)$$

$$\text{ha } \alpha \equiv n \text{ valós egész, és } \beta \in \mathbb{C} \text{ bármilyen, akkor } \frac{\Gamma(n+\beta)}{n! \Gamma(\beta)} = \frac{1}{2\pi i} \oint^{(0+,1+)} dt t^{n+\beta-1} (t-1)^{-\beta} = \frac{1}{2\pi i} \oint^{(0+,1+)} dt t^{n-1} \left(1-\frac{1}{t}\right)^{-\beta}. \quad (6.66)$$

<sup>76</sup>Kicsit másképp a (hatványsorba fejthetőséghez ugyebár szorosan kapcsolódó) *Cauchy-formulákkal* is dolgozhatunk itt:  $\frac{n!}{2\pi i} \oint^{(0+)} dt e^t t^{-n-1}$  megadja az  $e^t$   $n$ -edik deriváltját  $t=0$ -ban. Ez 1, visszaosztva  $n!$ -sal kész.

<sup>77</sup>Ez is belátható a paraméteres integrál differenciálhatóságáról szóló tétellel; ld. a C.6. függelék végén.

Gyakorlásként levezethetjük ezeket; ugyanaz az ötlet, mint  $\frac{1}{\Gamma(z)}$  iménti (6.61) előállításához: ha  $\Re(\alpha+\beta)>0$ , de  $\Re(\beta)<1$ , ráhúzhatjuk az utat a megkerült vágásra, így a (6.9) béta-integrálra jutunk, és a reflexiós összefüggést tudva készen leszünk. Viszont a (6.65) és (6.66) előállítások bővebb  $\alpha, \beta$ -halmazon értelmesek (és a szokásos analitikusságos érveléssel: igazak is); lényegében azért, mert az út **elkerül** integrálhatóság szempontjából **problémás pontokat**.<sup>78</sup>



49. ábra. a., b.) az iménti (6.65) és (6.66) előállítások, c., d.) a lentebbi (6.67) előállítások.

Kiemelünk néhány további érdekes körülményt.

1. A (6.65) alakban integrálhatóság szempontjából (mivel  $t=1$ -et elkerültük olyan tartományon, ahol az integrandus folytonos) tényleg már csak a  $t=0$  környéki viselkedés kérdéses: ismerve valós hatványfüggvények 0 körüli integrálhatóságát ebből jön a feltétel  $\alpha$ -ra és  $\beta$ -ra.
2. A (6.65)-ben a hatványozás átrendezése nem magától értetődő. Az 5.1. szakaszban ilyen helyzetre látottakat alkalmazva viszont mondhatjuk, hogy most a vágás(ok) mindkét alakban a  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t < 1$  halmazon van(nak), máshol az integrandusok analitikusak, és az átalakítást megtehetjük (a fázis nem bukik át) pl.  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t \gg 1$  esetén, így az átalakítás az út környékén is működik.
3. Figyelemre méltó, hogy (6.65) első alakján a hatványfüggvények vágásaira szokásos beidegződéssel nem látszana, hogy  $\alpha = n$ -re nincs vágás  $t \in \mathbb{R}^-$ -on; ez a második alakon látszik, és ebből adódik az  $\alpha = n$ -re érvényes (6.66) képletbeli integrációs út létjogosultsága (melyben az út nem kell elágazási pontból induljon, elég, ha az egy darab véges vágást akárhogyan megkerüli). Tanulság: néha nem spórolhatjuk ki a vágások meglétének alapos tanulmányozását.
4. A következő előállítás is ide tartozik (ld. az iménti ábra c. és d. részét); ezt is levezethetjük a  $\Re(\alpha+\beta)>0$ ,  $\Re(\beta)<1$  esetben a vágásra húzással és a béta-integrál (6.11) alakjával, ill. az  $\alpha = n$  esetben egyszerűen a függvényderiváltakra vonatkozó Cauchy-formulával:

$$\begin{aligned} \text{Ha } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ olyanok, hogy } \Re(\alpha+\beta)>0: & \quad \text{ha } \alpha \equiv n \text{ egész, de } \beta \in \mathbb{C} \text{ bármi:} \\ \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau=-\infty}^{\infty(0+)} d\tau \tau^{-\alpha-1} (1-\tau)^{-\beta}, & \quad \frac{\Gamma(n+\beta)}{n!\Gamma(\beta)} = \frac{1}{2\pi i} \oint d\tau \tau^{-n-1} (1-\tau)^{-\beta}. \end{aligned} \quad (6.67)$$

Ezek a fenti (6.65)–(6.66) képletekben elvégzett  $t = \frac{1}{\tau}$  változóhelyettesítéssel is megkaphatók (figyelve a helyettesítéskor bekerülő deriváltra); a  $t$ -síkon futó út is épp így került át a  $\tau$ -síkra.

\* \* \*

- Nézzünk rá a (6.27) **Stirling-formulára komplex  $z$  esetén is!** Először tegyük fel, hogy  $|z| \rightarrow \infty$  során  $\Gamma(z+1)$ -et végig előállítja az eredeti (6.2) definiáló integrál! Ez a  $\Re(z) > -1$  esetet jelenti, de először tegyük fel még, hogy valamilyen kicsi  $\varepsilon > 0$ -t véve  $\Re(z) > -1 + \varepsilon$  is igaz végig.

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \Gamma(z+1) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} dt f(t) = ??, \quad \text{ahol } f(t) = t^z e^{-t}, \quad \text{és } \Re(z) > -1 + \varepsilon.$$

<sup>78</sup>Ez a lehetőség a komplex vonalintegrálok alkalmazásának egy kellemes távlata. A gamma-függvény (6.61) Hankel-előállítása is azért működhet minden  $z \in \mathbb{C}$ -re, mert az eredeti (6.2) integrálban problémás  $t=0$ -t elkerüljük.

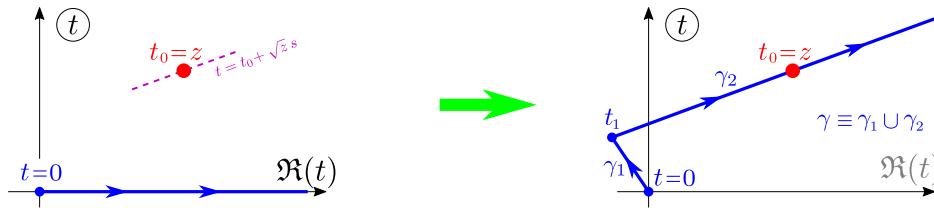
Ha a (valós  $z \equiv x \in \mathbb{R}^+$  esetre bevált) gaussi integrálközelítést akarnánk úzni (ld. a (6.30) egyenletet és környékét), akkor (lényegében az ottani képletekben „ $x$ -et  $z$ -re cserélve”) itt azt kapnánk, hogy

$$\begin{aligned} f(t) = t^z e^{-t}, & \Rightarrow t_0 = z, \text{ valamint} & \text{a } t_0 \text{ hely kör-} & f(t) \approx f(t_0) \exp\left(-\frac{(t-t_0)^2}{2} \frac{-f''(t_0)}{f(t_0)}\right); \\ f'(t_0) = 0 & \Rightarrow \frac{-f''(t_0)}{f(t_0)} = \frac{1}{z}, & \text{nyékén tehát} & \end{aligned}$$

itt is olyan Gauss-függvényt írtunk, aminek maximumhelye, -értéke és ottani második deriváltja illeszkedik a közelítendő integranduséhoz,  $f$ -éhez. Minket az  $\int_0^\infty dt f(t)$  integrál érdekelt; komplex  $z$ -re ezért nemigen mondhatjuk, hogy  $f$  „csúcsos” függvény, hiszen  $t_0$  és  $\frac{f(t_0)}{-f''(t_0)}$  nem valósak.

Az ide való ötlet az ún. **nyeregpont-módszer**, a Gauss-közelítés „komplex általánosítása”. A  $t$  integrálási változót vehetjük komplexnek, ami eddig az  $\mathbb{R}$  tengelyen futott; **deformáljuk az utat** a  $t$ -síkon úgy, hogy az úgy kapott integrandus már jól kezelhető „Gauss-csúcsos” legyen! Az út ehhez át kell, hogy menjen a  $t_0$ -n (amit most *nyeregpontnak* hívunk), méghozzá a „legmeredekebb esés irányában”, azaz úgy, hogy őmentén mozdulva a közelítő Gauss-alak kitevője,  $-\frac{1}{2} \frac{f''(t_0)}{-f(t_0)} (t-t_0)^2$  pont valós negatív legyen (ami ugye amúgy akármilyen  $t-t_0 \in \mathbb{C}$  esetén nem lenne biztos).<sup>79</sup>

• A gamma-függvényes esetben  $t_0 = z$ -n kell átmenjünk, és  $\frac{-f''(t_0)}{f(t_0)} = \frac{1}{z}$  miatt „ $\sqrt{z}$  irányban”, hogy  $t-t_0 = \sqrt{z}s$  legyen, ahol  $s \in \mathbb{R}$ : ekkor a közelítő Gauss-alak kitevőjében  $-\frac{1}{2} \frac{f''(t_0)}{-f(t_0)} (t-t_0)^2 = \frac{-s^2}{2}$  tényleg valós negatív. Az út tehát  $t=0$ -ból indulva először egy (alább  $\gamma_1$ -gyel jelölt) szakaszon el kell menjen valameddig, hogy aztán a megfelelő irányból egy végtelen félegyenesessel (melynek jele itt  $\gamma_2$ ) „ráfordulhasson”  $t_0 = z$ -re. Be kell látni persze, hogy deformálhatjuk így az utat, de ez az  $f(t)$  integrandus  $\Re(t) \rightarrow \infty$  felé való exponenciális csökkenése miatt biztos igaz.<sup>80</sup>



50. ábra. A gamma-függvény nyeregponti közelítéséhez alkalmazandó út (komplex  $z$  esetén).

A vizsgálandó gammafüggvény-érték tehát

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty dt t^z e^{-t} = \int_\gamma dt t^z e^{-t} = \int_{\gamma_1} dt t^z e^{-t} + \int_{\gamma_2} dt t^z e^{-t}. \quad (6.68)$$

A  $\gamma_2$  útdarabot  $t = z + \sqrt{z} \cdot s$  módon paraméterezhetjük (ahol  $s \in \mathbb{R}$ ): a felső határ  $s$ -ben  $\infty$ , az alsó határ jele pedig legyen  $-s_1$ , ahol is tehát  $s_1 > 0$ , és később specifikáljuk, hogy hogyan függjön  $z$ -től.

<sup>79</sup>Nyílt halmazon differenciálható  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvényekre  $|f(t)|$ -nek nincs lokális maximumhelye (ld. a 4.3. szakaszt);  $t_0$  sem az, még ha  $f'(t_0) = 0$  is. Ilyen pontban  $f(t) - f(t_0) \approx \frac{f''(t_0)}{2} (t-t_0)^2$ , és bevezetve a valós és képzetes részeket mint  $f''(t_0) \equiv A + iB$ ,  $t-t_0 \equiv x + iy$ , azt kapjuk, hogy  $f(t) - f(t_0) \approx U_2(x, y) + iV_2(x, y)$ , ahol  $U_2(x, y) = Ax^2 - Ay^2 - 2Bxy$  és  $V_2(x, y) = Bx^2 - By^2 + 2Axy$ . Ismerve az ilyen másodfokú kifejezéseket beláthatjuk, hogy ha csak  $f''(t_0) \neq 0$ , itt  $U_2$ -nek is és  $V_2$ -nek is  $t_0$ -ban (azaz  $x=0, y=0$ -ban) *nyeregpontja* van: bizonyos irányok mentén (előfordulhat, hogy pl.  $\mathbb{R}$  mentén is) ez lokális maximum, de van olyan irány is, ami mentén lokális minimum.

<sup>80</sup>Az  $f(t)$  a  $t \in \mathbb{R}_0^-$  vágáson kívül differenciálható: a  $t=0$ -t elkerülő kis  $r$  sugarú körívől, az  $[r, R]$  szakaszból, egy nagy  $R$  sugarú bezáró körívkívől és az új út ferde félegyenesének egy darabjából álló zárt görbére nulla az integrál, és  $r \rightarrow 0$ -ra és  $R \rightarrow \infty$ -re a körívek járuléka nullához tart (a kis körívre azért, mert  $\Re(z) > -1$  miatt ezen  $|t^z|$  biztos nem nő gyorsabban  $r \rightarrow 0$ -ra, mint ahogy a körívkerület  $r$ -rel arányosan csökken, a nagy körívén pedig működik az exponenciális csökkenéssel felülbecslés, mert azon mindenhol  $\Re(t) > \xi R$  valamilyen fix  $0 < \xi < 1$  számmal.) Az  $\mathbb{R}^+$ -ra vett integrál tehát ugyanannyi, mint az új útra. Hasonlót láttunk a 3.6. szakasz utolsó példájában.

A  $\gamma_2$  útdarab eleje így  $t_1 \equiv z - \sqrt{z}s_1$  lesz; a  $\gamma_1$  útdarabnak  $t=0$ -tól ide kell futnia egyenesen, úgyhogy legcélszerűbb őt az  $u \in [0, 1]$  valós számmal  $t = t_1 u$  módon paraméterezni. Összerakva:

$$\int_{\gamma_2} dt t^z e^{-t} = \sqrt{z} \int_{-s_1}^{\infty} ds e^{-z-\sqrt{z}s} (z+\sqrt{z}s)^z, \quad \int_{\gamma_1} dt t^z e^{-t} = (z-\sqrt{z}s_1) \int_0^1 du e^{-(z-\sqrt{z}s_1)u} [(z-\sqrt{z}s_1)u]^z.$$

Tudva már, hogy mit szeretnénk Stirling-formula címén kapni, így rendezhetjük ezek összegét:

$$\Gamma(z+1) = \sqrt{z} \left( \frac{z}{e} \right)^z \left\{ \int_{-s_1}^{\infty} ds e^{-\sqrt{z}s+z\text{Ln}\left[1+\frac{s}{\sqrt{z}}\right]} + (\sqrt{z}-s_1) \int_0^1 du u^z e^{z(1-u)+\sqrt{z}s_1 u+z\text{Ln}\left(1-\frac{s_1}{\sqrt{z}}\right)} \right\}. \quad (6.69)$$

Közben kiemeltünk (lekövethetjük, hogy a hatványozásokat átírhattuk így;  $\Re(z) > -1$  esetén elég nagy  $|z|$ -re már nincs fázisátbukás), és kitevőben logaritmusként írtuk a  $t^z$ -ből maradt hatványozásokat. Az első tagban a kitevő sora  $-\sqrt{z}s+z\text{Ln}\left(1+\frac{s}{\sqrt{z}}\right) = -\frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3\sqrt{z}} - \frac{s^4}{4z} + \dots$ , így az első integrandus pontonként  $e^{-s^2/2}$ -hez tart, ha  $|z| \rightarrow \infty$ . Így jelenik meg, hogy jól helyettesítettünk, jól futtattuk az utat, működik a nyeregponyi integrálás. Ha  $|z| \rightarrow \infty$  esetén  $s_1 \rightarrow \infty$ , akkor remélhetjük, hogy az első tag a határértékfüggvény integráljához,  $\sqrt{2\pi}$ -hez tart, és hogy a második tag nullához tart. Ha belátjuk ezeket, akkor **lényegében kész** a nyeregponyi integrálással kapott közelítés bizonyítása (ami itt a Stirling-formula  $\Re(z) > -1 + \varepsilon$ -ra). A C.6. függelékben végigvezetjük ezt.

- A Stirling-formulát tehát (a C.6. függelék is átrágván) teljesen beláttuk a következő esetben:

$$\text{Ha végig } \Re(z) > -1 + \varepsilon, \text{ akkor } \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(z+1)} \sqrt{2\pi z} \left( \frac{z}{e} \right)^z = 1.$$

Utolsó lépésként bármilyen  $\Re(z) < 0$ -ra is kiterjeszkedhetünk a reflexiók összefüggéssel:

$$\Gamma(z+1) = \frac{\pi}{\sin(\pi(1+z))} \frac{1}{\Gamma(-z)} \quad \Rightarrow \quad \Re(z) < -\varepsilon \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{-\pi}{\sin(\pi z)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-z-1)^{z+\frac{1}{2}}}{e^{z+1} \Gamma(z+1)} = 1.$$

Tegyük fel, hogy  $\Im(z) > 0$ : ekkor  $(-z-1)^{z+\frac{1}{2}} = ((z+1)e^{-i\pi})^{z+\frac{1}{2}} = (z+1)^{z+\frac{1}{2}} e^{-i\pi(z+\frac{1}{2})}$  a fázisvágásra figyelve. Ebből egyszerűsítéssel (azt is követve, hogy a hatványozásokat tényleg átírhatjuk így)

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(z+1)} \frac{\sqrt{2\pi z}}{1-e^{2i\pi z}} \left( \frac{z}{e} \right)^z \cdot \frac{(1+\frac{1}{z})^z}{e} \sqrt{1+\frac{1}{z}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi z} \left( \frac{z}{e} \right)^z}{\Gamma(z+1)} \frac{1}{1-e^{2i\pi z}} = 1.$$

Ez már itt is majdnem a Stirling-formula; ha feltesszük, hogy  $|z| \rightarrow \infty$  közben  $\Im(z) \rightarrow \infty$  is igaz, akkor kész, mert (emlékezve, hogy most  $\Im(z) > 0$ )  $e^{2i\pi z}$  nullához tart.

Ezután ugyanígy végiggondolhatjuk  $\Im(z) < 0$  esetre is ugyanezt, vagy mondhatjuk, hogy pontosan akkor igaz a Stirling-formula  $z$ -re, ha  $z^*$ -ra is (mert mindkét oldal konjugálódik  $z$  helyett  $z^*$ -ot véve), úgyhogy ha igaz a felső félsíkon, akkor az alsón is. Kész.

\* \* \*

- Még egy gyakorlati megjegyzés a gamma-függvényről: egész ill. félegész értékekben konkrétan láttuk  $\Gamma(z)$  speciális értékeit, a Stirling-formula pedig jó közelítő képlet nagy  $z$ -re. Ha konkrétan numerikusan ki kell számítani  $\Gamma(z)$  vagy  $\psi(z)$  értékeit általános  $z$ -kre, akkor pl. nagy  $m \in \mathbb{N}^+$ -t véve  $z+m$ -ben egyre nagyobb  $m$ -re egyre jobb közelítés a Stirling-formula, majd innen visszalépkedhetünk. Ennél jobb numerikus módszer az ún. **Lánczos-közelítés**; ennek utánanézhethet, aki akar.<sup>81</sup>

<sup>81</sup>Én magam 2020-ban megrökönyödve konstatáltam, hogy sok ismert számítógépes numerikus könyvtár, programcsomag *nem* tartalmaz beépített validált gammafüggvény-számoló rutint (legalábbis komplex számokra).

*Vége.*

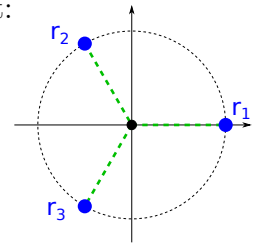
*(Azazhogy jönnek a függelékek...)*

## A. függelék: Valós harmadfokú egyenlet megoldóképlete

• A másodfokú egyenlet megoldóképlete gyökvonást tartalmaz. Hozzászoktunk, hogy a számológép tud gyököt vonni: úgy érezhetjük, hogy a megoldóképlet „jobban megadja” az  $x_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$  számot, mint az, hogy „ $x_1$  legyen az  $x^2-x-1 = 0$  egyenlet nagyobbik gyöke”.<sup>82</sup> Harmadfokú egyenletre is van egyfajta „megoldóképlet”, de még kérdésesebb a használhatósága: összetettebb, köbgyökvonást is tartalmaz, és mint látni fogjuk, az alkalmazása során kibogozhatatlanul elkalandozunk komplex számok közé valós együtthatók esetén is; jobban, mint másodfokú egyenletnél, ahol a megoldóképlet közvetlenül megadja az eredmény valós és (ha van) képzetes részét.

• Idézzük fel rögtön a (komplex) harmadik egységgyököket! A jelölésük most:

$$\begin{aligned} r_1 &= 1, & \text{ez az a három} & & r_1 \in \mathbb{R}, \\ r_2 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, & \text{komplex szám,} & & \text{és } r_2^* = r_3. \\ r_3 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. & \text{amire } r_k^3 &= 1. & \end{aligned}$$



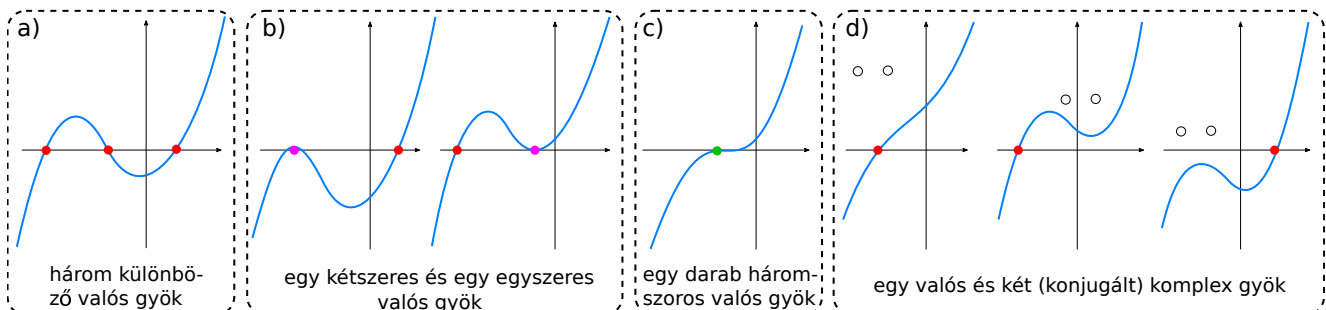
• Térjünk rá ezek után valós együtthatójú harmadfokú egyenlet megoldásainak vizsgálatára:

$$x = ? \quad x^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad \text{ahol } b, c, d \in \mathbb{R}.$$

$x^3$  együtthatója nem lehetett 0 (hogy harmadfokú legyen); ha nem 1, visszaoszthatunk vele, hogy ilyen alakra jussunk. Az algebra alaptétele alapján van három  $x_1, x_2, x_3$  szám, amikkel

$$\begin{aligned} x^3 + bx^2 + cx + d &= & \text{elvégezve itt a szorzást, és a ka-} & & b = -(x_1 + x_2 + x_3), \\ &= (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3), & \text{pott együtthatókat az eredetiek-} & & c = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \\ & & \text{kel összehasonlítva adódik, hogy} & & d = -x_1x_2x_3. \end{aligned}$$

Valóságok az együtthatók: vagy mindhárom gyök valós, vagy egyik valós és kettő komplex (egymás konjugáltjai). Ezen felül  $x_1, x_2, x_3$  közül némelyikek egybeeshetnek. A bal oldal grafikonja egy „harmadfokú parabola”: lehet(nek) lokális szélsőértéke(i), továbbá  $x \rightarrow -\infty$  esetén  $-\infty$ -hez tart,  $x \rightarrow \infty$  esetén pedig  $\infty$ -hez, így vagy egyszer, vagy kétszer, vagy háromszor „találkozik” az  $x$  tengellyel (metszi vagy érinti azt). Ezek a helyek tehát az egyenletünk megoldásai.



51. ábra. Harmadfokú egyenlet bal oldala grafikonjának lehetséges menetei, és ennek megfelelően a gyökök típusának „kiosztásai”. Egy gyök-kiosztáshoz többféle jellegű grafikon is tartozhat.

<sup>82</sup>Adott esetben, amikor numerikusan (azaz: konkrétan tizedesjegyenként, számítógépes programmal) kíváncsiak vagyunk másodfokú egyenletek megoldásaira, bőven lehet, hogy nem is a megoldóképlettel, hanem közvetlenül az egyenlet bal oldalán álló függvényt numerikusan manipulálva jutunk kézenfekvőbben a célhoz.

- Első lépésként eltolhatjuk a változónkat, hogy a másodfokú tag együttthatóját eltüntessük:

$$\begin{array}{ll} \text{ellenőrizzük, hogy az előző} & y^3 + 3py + 2q = 0, \quad \text{ahol} \\ \text{alak ekvivalens azzal, hogy} & \end{array} \quad \begin{array}{l} y := x + \frac{b}{3}, \\ 3p \equiv c - \frac{1}{3}b^2, \\ 2q \equiv \frac{2}{27}b^3 - \frac{1}{3}bc + d. \end{array}$$

Ez az  $y$  új változó és a  $p, q$  ilyen bevezetése lesz kényelmes; a vizsgálandó egyenlet így:

$$y = ? \quad y^3 + 3py + 2q = 0, \quad \text{ahol } p, q \in \mathbb{R} \text{ adott számok.}$$

- Vizsgáljuk meg, hogy különféle  $p, q$  értékek esetén mit mondhatunk a valós gyökök létezéséről! Keressük meg ehhez először ennek a harmadfokú kifejezésnek a lokális szélsőértékeit (ha vannak):

$$\begin{array}{l} f(y) = y^3 + 3py + 2q, \quad f'(y) = 0 \\ \Rightarrow \quad y^2 + p = 0. \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p > 0: \text{ nincs szélsőérték,} \\ p = 0: f' \text{ az } y=0\text{-ban } 0, \text{ de ez nem szélsőérték.} \\ p < 0: y = \pm \sqrt{|p|}\text{-ben két szélsőérték.} \end{cases}$$

1. Ha  $p > 0$ , akkor  $f'$ -nek nincs valós zérushelye: nincs valós szélsőérték (az 51. ábra  $d$ . részének első esete). Ekkor pontosan egy valós gyök van, emiatt két komplex is (egymás konjugáltjai).
2. Ha  $p = 0$ , akkor  $f'(0) = 0$ , de itt sincs szélsőérték (mint az 51. ábra  $c$ . részén, és a nulla deriváltú hely a nullában van). Az egyenletünk alakja ekkor:  $y^3 + 2q = 0$ , ennek egy valós megoldása van:  $-\sqrt[3]{|2q|}$ , és két komplex megoldása:  $-\sqrt[3]{|2q|} \cdot r_2$  és  $-\sqrt[3]{|2q|} \cdot r_3$ , melyek egymás konjugáltjai. (Itt  $r_2$  és  $r_3$  a másik kettő egységgyök.) Ha  $p = 0$  mellett még  $q = 0$ , akkor ez a három megoldás egybeesik: az  $y = 0$  háromszoros valós gyök.
3. Ha  $p < 0$ , két szélsőérték hely van:  $\pm \sqrt{|p|}$ . Az  $f''(y) = 6y$  második derivált előjeléből kiderül, hogy elsőnek,  $-\sqrt{|p|}$ -nél biztos maximum van, utána  $\sqrt{|p|}$ -nél minimum, majd  $f$  tovább növekszik, ld. az 51. ábra  $a.$ ,  $b.$ ,  $d$ . részein. Ezek között úgy dönthetünk, hogy visszahelyettesítjük a szélsőérték helyeket  $f(y)$ -ba; vigyázva, hogy most  $p = -|p|$ :

$$p < 0: \quad f(\pm \sqrt{|p|}) = 2(q \pm |p|^{3/2}). \quad \text{Ezen belül is három lehetőség van tehát:}$$

- i.) Ha  $|q| = |p|^{3/2}$ , azaz  $q^2 + p^3 = 0$ , akkor az egyik szélsőérték helyen  $f(y)$  pont nulla értéket vesz fel: ez a fenti ábra  $b$ . részén jelölt eset: egy egyszeres és egy kétszeres valós gyök van.
- ii.) Ha  $|q| > |p|^{3/2}$ , azaz  $q^2 + p^3 > 0$ , akkor a szélsőértékek ugyanolyan előjelűek: ez az ábra  $d$ . részének második vagy harmadik esete. Egy valós és két komplex gyök van.
- iii.) Végül ha  $|q| < |p|^{3/2}$ , ami azzal egyenértékű, hogy  $q^2 + p^3 < 0$ , akkor a két szélsőérték (a felvett érték!) különböző előjelű. Ez az  $a$ . ábrarészen látott eset: három egyszeres valós gyök.

Bevezetjük harmadfokú egyenlet  $D$  **diszkriminánsát**, ami „perdöntő” szerepet játszik:

$$\begin{array}{ll} p, q \in \mathbb{R}, \quad y = ? & D < 0: \text{ három egyszeres valós gyök.} \\ y^3 + 3py + 2q = 0. & D \equiv q^2 + p^3. \quad D = 0: \text{ valós gyök(ök), legalább kettő egybeesik.} \\ & D > 0: \text{ egy valós és két konjugált komplex gyök.} \end{array} \quad (\text{A.1})$$

Ellenőrizzük, hogy az akármilyen  $p$  és  $q$  esetén kapottakat valóban mind összefoglalhattuk így!

- Rátérhetünk a **megoldóképletre**. A látott egyenlet megoldására **ráhibázni** lehet: pl. ha künkban  $y = A + B$  módon keressük a megoldást, behelyettesítünk és véletlenül ízlésesen kiemelünk:

$$y^3 + 3py + 2q = 0, \quad y := A + B \quad \Rightarrow \quad 3(p + AB)(A + B) + (A^3 + B^3 + 2q) = 0.$$



Itt látszik, hogy ha úgy választjuk  $A$ -t és  $B$ -t, hogy az alábbiak teljesüljenek, az pont jó lesz:

$$\begin{aligned} A^3 + B^3 = -2q, \\ AB = -p \end{aligned} \Rightarrow B = -\frac{p}{A} \stackrel{1.}{\Rightarrow} B^3 = -\frac{p^3}{A^3} \Rightarrow A^3 - \frac{p^3}{A^3} + 2q = 0. \quad (\text{A.2})$$

Egy másodfokú egyenletet kaptunk így  $A^3$ -re. Ezt megoldhatjuk, majd az eredményből  $B^3$ -öt is kifejezhetjük, és  $B^3$  kapott alakját törtet bővítve egyszerűbb alakra hozhatjuk. Arra jutunk, hogy:

$$(A^3)^2 + 2qA^3 - p^3 = 0 \Rightarrow \underline{A^3 = \sqrt{q^2 + p^3} - q} \Leftrightarrow \underline{B^3 = -\sqrt{q^2 + p^3} - q}.$$

• A másodfokú egyenlet másik megoldása az  $A \leftrightarrow B$  cserét adná, de minket csak  $A+B$  érdekel. Vegyük észre: a *négyzetgyök* alatt épp a  $D = q^2 + p^3$  diszkrimináns van. Ha pl. három valós gyök van, akkor láttuk, hogy  $D$  negatív. Mindenképp ki kell tehát lépni komplex számok közé.<sup>83</sup> (Szokásosan  $D \in \mathbb{R}_0^+$ -ra  $\sqrt{D} \in \mathbb{R}_0^+$ , valós negatív  $D \in \mathbb{R}^-$ -ra pedig  $\sqrt{D} = i\sqrt{|D|}$ .)

Komplex számok között az iménti (A.2)-ben az 1. jelű köbre emelés *nem volt* ekvivalens átalakítás, mert attól még, hogy  $A^3 B^3 = -p^3$ , nem biztos, hogy  $AB = -p$ ;  $AB = -p \cdot r_k$  is lehet, hiszen mindhárom  $r_k$ -ra  $r_k^3 = 1$ . Körültekintően meg kell tehát vizsgálni a lehetséges eseteket.

• Ha  $D < 0$  (három valós gyök): ekkor  $A^3$  és  $B^3$  komplexek. A komplex  $1/3$ -adik hatványozás ugye egyértelmű, és a képhalmazában  $\arg z \in ]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ . Emiatt ugye pl.  $(-1)^{1/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = r_2$ . A következő képletekben  $\sqrt[3]{z}$ -t így értjük, ahogy  $\mathbb{C}$ -ben szoktuk. Az  $A$  is és a  $B$  is háromféle lehetne a három egységgyöknek megfelelően. Ugye eddig csak azt használtuk ki, hogy  $-p^3 = A^3 B^3$ ; ahogy mondtuk, a  $-p = AB$  feltétel (és hogy ebben a  $p$  ugye valós!) ennél kicsit több korlátot szab, melyet most figyelembe kell venni. Ezeket végiggondolva a következő lehetőségek maradnak itt:

$$\begin{aligned} A^3 = -q + i\sqrt{|D|}, \\ B^3 = -q - i\sqrt{|D|} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} A = \sqrt[3]{-q + i\sqrt{|D|}} \cdot r_k, \quad (k=1,2,3), \\ B = \sqrt[3]{-q - i\sqrt{|D|}} \cdot r_l, \quad (l=1,2,3). \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Hogy } AB = -p \text{ legyen,} \\ \text{az kell, hogy } r_k = r_l^*. \end{array}$$

Vagyis nem külön-külön akármelyiket választhatjuk:  $A$  háromféle komplex szám lehet, de  $B$  mindenképpen az ő komplex konjugáltja kell, hogy legyen. Összefoglalva:

$$\begin{aligned} y^3 + 3py + 2q = 0, \\ D = q^2 + p^3 < 0 : \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{a három} \\ \text{megoldás:} \end{array} \quad \begin{aligned} y_1 &= \sqrt[3]{-q + i\sqrt{|D|}} + \sqrt[3]{-q - i\sqrt{|D|}}, \\ y_2 &= r_2 \sqrt[3]{-q + i\sqrt{|D|}} + r_3 \sqrt[3]{-q - i\sqrt{|D|}}, \\ y_3 &= r_3 \sqrt[3]{-q + i\sqrt{|D|}} + r_2 \sqrt[3]{-q - i\sqrt{|D|}}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Tényleg mindhárom valós (hiszen  $r_3^* = r_2$ ), de hiába is próbálnánk kifejezni őket csupa „valós számos” műveletekkel. Ehhez meg kellene keresni az  $A$ -ra felírt kifejezésünknek (az  $1/3$ -ik hatvány eredményének) valós részét. Úgy próbálkoznánk, hogy  $A$ -t felírjuk valós és képzetes résszel, majd az így felírt  $A := A_1 + iA_2$  köbét egyenlővé tesszük  $-q + i\sqrt{|D|}$ -vel, és megpróbáljuk ebből  $A_1$ -et kifejezni. Próbáljuk meg; rövid úton éppen az eredeti egyenletünkre jutunk vissza!<sup>84</sup>

<sup>83</sup>Érdekeség, hogy a levezetendő képletek egy részét jóval hamarabb (az 1500-as években) kitalálták *Cardano* és mások, mint hogy a komplex számok általánosan ismertté váltak; sőt egyesek matematikatörténet-értelmezése szerint a harmadfokú egyenletek ilyenét vizsgálata volt az egyik löket a komplex számok bevezetésének irányába.

<sup>84</sup>A *csoportelmélet* egyik korai, Évariste *Galois* nevéhez fűződő koncepcióbevezetése/alkalmazása volt annak megmutatása, hogy nem csak annyi történik most, hogy nem voltunk elég ügyesek. *Tényleg* lehetetlen ilyenkor ezt a három valós gyököt „valós műveletekkel” kifejezni. Ez enyhén összefügg a „szögharmadolás” (közövel-vonalzóval két egyenes bezárt szögének harmadával metsző egyenespár szerkesztésének) lehetetlenségével is.

Hogy **számpéldát** is lássunk: tekintsünk egy harmadfokú polinomot egyszerű adott gyökökkel:

$$\begin{array}{ll}
 y_1=5, & (y-y_1)(y-y_2)(y-y_3) \\
 y_2=-4, & \Rightarrow = (y-5)(y+4)(y+1) \\
 y_3=-1 & = y^3 - 21y - 20.
 \end{array}$$

Visszafelé: a feladat:  
 $y^3 - 21y - 20 = 0, \quad y = ?$

A jelöléseink értékei most:  
 $p = -7, q = -10 \rightarrow D = -243$

(A.4)

A három gyököt a fenti megoldóképlet tehát az alábbi alakban adja (még azzal is szenvedni kell, hogy a valós részeit megbecsülve beazonosítsuk, hogy melyik melyik; ezt most megtettem):

$$\begin{array}{ll}
 y_1 = \sqrt[3]{10+9\sqrt{3}i} + \sqrt[3]{10-9\sqrt{3}i}, & \text{és pl. hogy } y_1=5 \text{ (tényleg annyi),} \\
 y_2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \sqrt[3]{10+9\sqrt{3}i} + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \sqrt[3]{10-9\sqrt{3}i}, & \text{algebrai egyszerűsítéssel nem iga-} \\
 y_3 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \sqrt[3]{10+9\sqrt{3}i} + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \sqrt[3]{10-9\sqrt{3}i}. & \text{zán deríthető ki ebből az alakból.}
 \end{array}$$
(A.5)

• Ha  $D > 0$  (egy valós, két komplex gyök): ekkor  $A^3$  és  $B^3$  valósak. Ideiglenesen úgy értjük **most a köbgyökvonást, ahogy valósban szoktuk**: negatív valós köbgyöke legyen negatív valós, pl.  $\sqrt[3]{-1} = -1$ . Ekkor  $A$  és  $B$  alakja ugyanaz, csak most így értve a köbgyököt, úgymint

$$\begin{array}{ll}
 y^3 + 3py + 2q = 0, & \text{most a köbgyök nega-} \\
 D = q^2 + p^3 > 0. & \Rightarrow \text{atív valósra is valós} \\
 & \text{értéküként értendő:}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 y_1 = \sqrt[3]{-q + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{D}}, \\
 y_2 = r_2 \sqrt[3]{-q + \sqrt{D}} + r_3 \sqrt[3]{-q - \sqrt{D}}, \\
 y_3 = r_3 \sqrt[3]{-q + \sqrt{D}} + r_2 \sqrt[3]{-q - \sqrt{D}}.
 \end{array}$$
(A.6)

Ebből az  $y_1$ -es első (ez valós) az ún. **Cardano-képlet**: ez nem lép ki  $\mathbb{R}$ -ből. Akkor lehet tehát „tisztá valós” műveletekkel kifejezni egy valós gyököt, ha csak egy van, és a másik kettő komplex.

• A  $D=0$  eset akár a  $D<0$ -ból, akár a  $D>0$ -ból megkapható, utóbbiból egyszerűbb talán. Az eredmény: ekkor a két komplex gyök mégis egybeeső lesz és valós, és  $-\frac{1}{2}$ -szer annyi, mint az egy magányos valós. (A három gyök összege ekkor is 0, ahogy kell, mert ugye nincs  $y^2$ -es tag.)

\* \* \*

*Nem algebrai* függvényekkel több lehetőség is adódik pl. a három valós gyök megtalálására valós számok között. Ez az az eset, amikor  $q^2 + p^3 < 0$ , és persze  $p < 0$  is kell ehhez: ekkor például trigonometrikus függvényeket használhatunk. Feltehetjük, hogy  $q > 0$ : ha  $q < 0$ , akkor  $y$  helyett  $-y$ -t tekintve változónak visszavezetődünk a  $q > 0$  esetre. Esetünkben  $|q| < |p|^{3/2}$ , emiatt így alakíthatunk (az adja az ötletet, hogy ha ekkorra már sokat töprengtünk a rokon *szögharmadolási* problémán, akkor felsejlik a háromszoros szög szinuszára vonatkozó  $\sin(3\phi) = 3 \sin \phi - 4 \sin^3 \phi$  azonosság):

$$y^3 + 3py + 2q = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 \left( \frac{y}{2\sqrt{|p|}} \right)^3 - 3 \frac{y}{2\sqrt{|p|}} + \frac{q}{|p|^{3/2}} = 0.$$
(A.7)

Vezessük be tehát az  $y$  ismeretlen helyett a  $\phi$  változót, illetve az előkerült konstans helyett a  $\Phi$  paramétert, amikkel a felírt egyenlet-alakot a következő formába önthetjük:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Új jelölések:} & \text{A } \phi\text{-re adódó egyenlet: } \sin(3\phi) = \sin \Phi. \\
 \sin \Phi := q/|p|^{3/2}, & \Rightarrow \\
 \sin \phi = y/(2\sqrt{|p|}). & \text{Megoldásai: } \phi = \frac{1}{3}\Phi, \quad \phi = \frac{1}{3}\Phi + \frac{2\pi}{3}, \quad \phi = \frac{1}{3}\Phi + \frac{4\pi}{3}.
 \end{array}$$
(A.8)

Ezután az így kapott  $\phi$  értékekből kifejezhetjük az  $y$  értékeit, melyek az egyenletünk megoldásai.

## B. függelék: Sorok, sorozatok, konvergencia

Ez a függelék „matematikuskodás”; tartalmaz néhány olyan ismeretet, ami túlterhelte volna a főszöveget. Tételek, bizonyítások kerülnek itt elő, kicsit ömlesztve, de mind olyanok, amiket tudva remélhetőleg kicsit megalapozottabbnak érezzük majd a matematikai tudásunkat. Az itt előkerült fogalmakra és állításokra érintőlegesen azért hivatkozunk itt-ott a főszövegben is.

Az alapvető motiváció az, hogy körbejárhassuk a *hatványsorokat*, amelyek nagyon fontosak: pl. az elemi függvényeket ( $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\exp$ ,  $\operatorname{sh}$ ,  $\operatorname{ch}$ , stb.) is ilyenekkel definiáltuk. Ehhez sorozatokról, sorokról beszélünk itt kicsit. Bevezetőnek átnézhetjük a tavalyi Vektorszámítás jegyzet 8.1. és 12.2. szakaszait. Most is használjuk a  $\mathbb{K}$  jelölést akár  $\mathbb{C}$ , akár  $\mathbb{R}$  helyett, ha olyat mondunk, ami mindkettőre vonatkozik. Két  $\mathbb{K}$ -beli *pont* (azaz: szám),  $x$  és  $y$  távolsága ugyebár  $d(x, y) = |x - y|$ , de időnként megtartom a  $d(x, y)$  jelölést, ha olyan dolog kerül elő, ami általánosabb alaphalmazokban, az azokban érvényes távolságfogalmat használva is igaz lesz majd.

### B.1. Konvergens sorozatok, Cauchy-féle sorozatok

• Először  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$  függvényekkel, azaz  $\mathbb{K}$  értékű *sorozatokkal* foglalkozunk. Az  $n$ -hez rendelt értéket ilyenkor  $a_n$ -nel jelöljük, ez a sorozat  $n$ -edik *tagja*. Az egyik legfontosabb definíció:

Az  $a_n$  sorozat **határértéke**  $A$ , jelben  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ,  
 ha minden  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ -hoz van olyan  $N_\varepsilon$  küszöbindex,  
 hogy minden  $n$ -re, amire  $n > N_\varepsilon$ , már  $d(A, a_n) < \varepsilon$ .  
 Egy **sorozat konvergens**,  
 ha van határértéke, illetve **(B.1)**  
**divergens**, ha nincs.

Ez, ahogy a  $\forall$  (*minden*) ill. a  $\exists$  (*van, létezik*) kitételek összejönnek itt, a matematikai analízisben az egyik *legbonyolultabb* alapdefiníció; sajnos az egyik *legalapvetőbb* is, enélkül nem sokra megyünk.

Azt, hogy „minden  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ -ra”, szokás úgy mondani, hogy „bármilyen *kicsi*  $\varepsilon > 0$ -ra” legyen igaz a követelmény. Ez egyfelől szófecsérlés (ha minden  $\varepsilon > 0$ -ra igaz, akkor minden kicsi  $\varepsilon$ -ra is), viszont kihangsúlyozza, hogy a kis  $\varepsilon$  értékek lényegesek, rajtuk múlik a dolog. Az  $A$  akkor határérték, ha  $A$ -hoz bármilyen közeli „tűrőhatár” esetén a sorozat tagjai egy index után már belül maradnak.

Különböző számok távolsága nullánál nagyobb. (Ez egy egyszerűnek tűnő dolog, de szerintem *évtizedek* alatt ülepszik le.) Emiatt egy sorozatnak *legfeljebb egy határértéke lehet*: több „jelölt” esetén nem tudhatna *mindegyikhez akármilyen* közelre korlátozódni elég nagy indexek esetén.

• Érdeemes külön meghatározásba foglalni azt, ha egy sorozat tagjainak *egymástól való* eltérése tetszőlegesen kicsi lesz, ha elég messze megyünk:

Egy sorozat **Cauchy-féle**, röviden: *Cauchy-sorozat*, ha minden  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ -ra van  
 olyan  $N_\varepsilon$  küszöbindex, hogy minden  $m > N_\varepsilon$  és  $n > N_\varepsilon$  indexekre  $d(a_m, a_n) < \varepsilon$ . **(B.2)**

Érezhető, hogy ez a tulajdonság elég szorosán kapcsolódik a konvergenciához; első megállapítás:

**Állítás:** minden konvergens sorozat Cauchy-féle. **(B.3)**

Indoklás: ha a tagok *a határértéktől* egyre kevésbé térnek el, akkor *egymástól* is. Rendesebben: ha  $a_n$  konvergens  $A$  határértékkel, akkor adott  $\varepsilon$ -ra létezik  $N_{\varepsilon/2}$  küszöbindex, amire ha  $n > N_{\varepsilon/2}$ , akkor  $d(a_n, A) < \varepsilon/2$ . Ha  $m$  és  $n$  nagyobbak, mint  $N_{\varepsilon/2}$ , akkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján  $d(a_n, a_m) \leq d(a_n, A) + d(a_m, A) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ . Vagyis  $N_{\varepsilon/2}$  jó lesz a Cauchy-tulajdonsághoz megkövetelt küszöbindexnek: eelőtt *bármely két tag* biztosan  $\varepsilon$ -nál kevésbé tér el *egymástól* is.

- Vajon igaz-e visszafelé: ha egy sorozat Cauchy-féle, akkor ő konvergens is-e? Későbbi általánosítások kedvéért egy plusz kört futva érdemes egy külön fogalmat bevezetni erre.

Az alaphalmazra azt mondjuk, hogy **teljes**, ha minden benne futó Cauchy-sorozat konvergens is benne.

*Állítás:*  $\mathbb{R}$  és  $\mathbb{C}$  is **teljes halmazok**, azaz minden  $\mathbb{R}$  vagy  $\mathbb{C}$  értékű Cauchy-sorozatnak van határértéke ( $\mathbb{R}$ -ben ill.  $\mathbb{C}$ -ben). (B.4)

Egy nem teljes halmaz „lyukacsos”. Alappélda: a racionális számok  $\mathbb{Q}$  halmaza (a szokásos távolságfogalommal) nem teljes. Vegyünk ugyanis  $\mathbb{R}$ -ben egy racionális tagokból álló, de irracionális határértékű sorozatot, pl. közelítsük meg tizedestörtekkel a  $\pi$ -t:  $3 \quad 3,1 \quad 3,14 \quad 3,141 \quad 3,1415 \dots$ . Ezen sorozatnak a  $\mathbb{Q}$  halmazban nincs határértéke, de Cauchy-féle (*merthogy  $\mathbb{R}$ -ben konvergens*).

Az  $\mathbb{R}$  teljességének rendes bizonyításához rendesen kellene *definiálnunk a számokat* halmazelméletileg. Az alapgondolat: a  $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  számfogalom-bővítéssel *kitöltöttük a maradék helyeket* a számegyenesen, és így  $\mathbb{Q}$ -t *teljessé tettük*. Azaz: elértük, hogy minden  $\mathbb{Q}$ -beli Cauchy-sorozat tartson valahova (az is, ami  $\mathbb{Q}$ -ban nem konvergens: „tartana valahova, de az, ahova, nincs a  $\mathbb{Q}$ -ban”).

Tudva, hogy  $\mathbb{R}$  teljes, már belátható, hogy  $\mathbb{C}$  teljes.<sup>85</sup> Azt, hogy egy  $\mathbb{K}$  értékű sorozat Cauchy-féle, sokszor könnyebb megállapítani;  $\mathbb{K}$  teljessége miatt tehát ekkor a sorozat konvergens is. Ez (és a hasonlóak) gyűjtőneve: a konvergencia **Cauchy-kritériuma**; látjuk majd a hasznát.

- Valós ( $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ) értékű sorozatokra bevesszük a játékba a  $\pm\infty$  végteleneket is:  $\overline{\mathbb{R}}$ -rel jelöljük az  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  halmazt, az ún. kibővített valós számok halmazát. Kézenfekvően értelmezhetjük azt, hogy egy  $a_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  valós értékű sorozat  $\infty$ -hez tart: ha *bármilyen nagy* számhoz van olyan küszöbindex, amittől kezdve a sorozat összes tagja már annál nagyobb ( $-\infty$ -re pedig fordítva):

Az  $a_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  sorozatra  $\lim_n(a_n) = \infty$ , illetve  $\lim_n(a_n) = -\infty$ , ha minden  $K \in \mathbb{R}^+$ -hoz van olyan  $N_K$ , hogy ha  $n > N_K$ , akkor  $a_n > K$ , illetve  $a_n < -|K|$ . (B.5)

- **Valós értékű sorozatokra** a következő két fogalom is jellemzi az  $n \rightarrow \infty$  esetben való viselkedést:

Az  $a_n$  sorozat **alsó határértéke** (*limesz inferiorja*),  $\underline{\lim} a_n$  azon számok felső határa, amiknél a sorozatnak csak véges sok tagja kisebb.

*Következmény:*

Ha  $x < \underline{\lim} a_n$ , akkor a sorozat véges sok tagja kisebb  $x$ -nél.

Ha  $x > \underline{\lim} a_n$ , akkor a sorozat végtelen sok tagja kisebb  $x$ -nél.

Az  $a_n$  sorozat **felső határértéke** (*limesz superiorja*),  $\overline{\lim} a_n$  azon számok alsó határa, amiknél a sorozatnak csak véges sok tagja nagyobb.

*Következmény:*

Ha  $x > \overline{\lim} a_n$ , akkor a sorozat véges sok tagja nagyobb  $x$ -nél.

Ha  $x < \overline{\lim} a_n$ , akkor a sorozat végtelen sok tagja nagyobb  $x$ -nél.

(B.6)

A definícióban nem mondhattuk, hogy „a legnagyobb” ill. „a legkisebb” megfelelő szám, mert lehet olyan sorozat, hogy az ilyen számoknak nyílt a vége (mint a  $]0,1[$  intervallumnak), és nincs közöttük legnagyobb vagy legkisebb. Alsó és felső határa viszont  $\mathbb{R}$  minden részhalmazának van (esetleg  $\pm\infty$  az):  $\limsup$  és  $\liminf$  tehát minden valós értékű sorozatra létezik, de lehet  $-\infty$  is és  $\infty$  is.

<sup>85</sup>Ha  $z_n$  Cauchy-sorozat  $\mathbb{C}$ -ben, akkor  $\Re(z_n)$  és  $\Im(z_n)$  Cauchy-sorozatok  $\mathbb{R}$ -ben. Ők konvergensek, mert  $\mathbb{R}$  teljes, és a határértékeikből összerakott komplex szám határértéke lesz az eredeti sorozatnak. „Komponensenként” belátható az is, hogy minden véges dimenziós vektortér (a szokásos, skalárszorozatból származó távolságfogalommal) is teljes.

Véges sok tag nem igazán számít a sorozat végtelenben való viselkedéséhez. A  $\limsup$  tehát tényleg „fölről behatárolja” a sorozatot (véges sok tagot kivéve), hasonlóan a  $\liminf$  alulról. (A két definíció nyilván egymás „tükörképe”.) Gondoljuk át a felírt következményeket is; leginkább ezeket használjuk. Pl. rögtön az is adódik belőlük, hogy  $\liminf a_n$  nem nagyobb, mint  $\limsup a_n$ : ellenkező esetben *minden* olyan  $x$ -re, amire  $\liminf a_n > x > \limsup a_n$ , a sorozatnak véges sok tagja lehetne *nem egyenlő*  $x$ -szel, és ez kizárt dolog (már csak két ilyen  $x$ -et elgondolva is).

• Ha  $\limsup a_n = \liminf a_n \equiv A$  (ideiglenesen  $A$ -val jelöljük a közös értéket), akkor bármilyen  $\varepsilon > 0$  esetén  $A + \varepsilon$ -nál a sorozatnak véges sok tagja nagyobb (a  $\limsup$  miatt), és  $A - \varepsilon$ -nál csak véges sok tag kisebb (a  $\liminf$  miatt): az ilyen  $A$  tehát a sorozat határértéke. (Ha  $A = \infty$ , akkor már a  $\liminf$ -es kitételeből is látszik, hogy  $\lim a_n = \infty$ , ha pedig  $A = -\infty$ , akkor a  $\limsup$ -osból, hogy  $\lim a_n = -\infty$ .) A következtetés visszafelé is érvényes. Ha az  $a_n$  sorozat konvergens, akkor  $\limsup a_n$  nem lehet nagyobb, mint  $\lim_n a_n$ , hiszen különben lenne olyan  $x$  szám, ami a kettő között van: mivel ez az  $x$  nagyobb, mint  $\lim_n a_n$ , a sorozatnak legfeljebb véges sok tagja lehetne nagyobb, mint  $x$ , de mivel  $x$  kisebb, mint  $\limsup a_n$ , a sorozatnak végtelen sok tagja kellene, hogy nagyobb legyen, mint  $x$ . Ez ellentmondás. Hasonlóan beláthatjuk, hogy  $\liminf a_n$  nem lehet kisebb, mint  $\lim_n a_n$ . Ha  $\lim a_n = \infty$  vagy  $-\infty$ , még egyszerűbb a következtetés. Összefoglalva

$$\begin{array}{l} \text{Az } a_n \text{ sorozat kon-} \\ \text{vergencia } \overline{\mathbb{R}}\text{-ben} \end{array} \Leftrightarrow \limsup a_n = \liminf a_n, \quad \begin{array}{l} \text{és ekkor } \limsup a_n = \\ = \lim_n a_n = \liminf a_n. \end{array} \quad (\text{B.7})$$

• **Példák:** értelemszerűen kijelölve; gondoljuk végig őket. Ahol a határértéket ( $\lim$ ) adtam meg, ott a sorozat konvergens (vagy „rendesen”, vagy legalábbis  $\overline{\mathbb{R}}$ -ben). Ilyenkor ugye a  $\limsup$  és a  $\liminf$  megegyezik a határértékkel; ezt külön emésztgessük! Ahol a  $\limsup$  és  $\liminf$  értékeit tüntettem fel, ott a sorozat  $\overline{\mathbb{R}}$ -ben nézve sem konvergens. A határérték fogalma tehát „erősebb”.

$$2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \dots \rightarrow \text{konvergens, } \lim a_n = 2.$$

$$2, -1, 2, -1, 2, -1, 2, -1, 2, -1, \dots \rightarrow \limsup a_n = 2, \liminf a_n = -1.$$

$$2, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{8}, \frac{17}{16}, \frac{33}{32}, \frac{65}{64}, \frac{129}{128}, \frac{257}{256}, \frac{513}{512}, \frac{1025}{1024}, \dots \rightarrow \text{konvergens, } \lim a_n = 1.$$

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots \rightarrow \overline{\mathbb{R}}\text{-ben konvergens, } \lim a_n = \infty.$$

$$1, 10, 2, 100, 3, 1000, 4, 10^4, 5, 10^5, 6, 10^6, \dots \rightarrow \overline{\mathbb{R}}\text{-ben konvergens, } \lim a_n = \infty.$$

$$1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, 6, -6, \dots \rightarrow \limsup a_n = \infty, \liminf a_n = -\infty.$$

$$1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{5}, 1, \frac{1}{6}, 1, \frac{1}{7}, 1, \frac{1}{8}, 1, \dots \rightarrow \limsup a_n = 1, \liminf a_n = 0.$$

$$0, \frac{1}{2}, -1, \frac{2}{3}, -2, \frac{3}{4}, -3, \frac{4}{5}, -4, \frac{5}{6}, -5, \frac{6}{7}, \dots \rightarrow \limsup a_n = 1, \liminf a_n = -\infty.$$

• Az 1.3. szakaszban kihasználunk még egy dolgot: legyenek  $d_n$  akármilyen,  $c_n$  pedig konvergens  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  sorozatok, és legyen  $\lim c_n$  véges pozitív szám (fontos, hogy nem is 0, és nem is  $\infty$ ). Ekkor a  $d_n$  sorozatot tagonként a  $c_n$ -ekkel szorozva az  $n \rightarrow \infty$ -beli viselkedés  $\lim c_n$ -nel módosul:

$$\text{Ha } 0 < \lim_n c_n < \infty, \text{ akkor } \Rightarrow \begin{array}{l} \limsup(c_n d_n) = (\lim_n c_n) \cdot (\limsup d_n), \\ \liminf(c_n d_n) = (\lim_n c_n) \cdot (\liminf d_n). \end{array} \quad (\text{B.8})$$

Ebből az is következik (de máshogy is levezethetnénk), hogy ha  $\limsup d_n = \liminf d_n$ , azaz  $d_n$  is

konvergens, akkor a szorzat-sorozat is az, és a határértéke:  $\lim_n(c_n d_n) = \lim_n c_n \cdot \lim_n d_n$ .

Érdeklődőknek leírom a bizonyítást (a  $\limsup$ -osat; a  $\liminf$ -re vonatkozó ennek „tükörképe”; agytornaként végiggondolhatjuk azt is külön). Tehát: mivel  $\lim c_n > 0$ , véges sok tagtól eltekintve  $c_n > 0$  is igaz. Az  $n \rightarrow \infty$  esetben véges sok tag nem számít: vehetjük úgy, hogy minden  $n$ -re  $c_n > 0$ , így értelmes az  $\frac{1}{c_n}$ -ek sorozata, az is konvergens, és  $\lim \frac{1}{c_n} = \frac{1}{\lim c_n}$ . Mármost ha pl.  $\limsup(c_n d_n)$  nagyobb lenne, mint  $(\lim_n c_n) \cdot (\limsup d_n)$ , akkor nézzünk egy közöttük lévő  $x$  számot! Mivel  $\limsup(c_n d_n) > x$ , véges sok tagtól eltekintve  $c_n d_n > x$ , vagyis  $d_n > \frac{x}{c_n}$ , amiből az is következik, hogy véges sok tagtól eltekintve  $d_n \geq \frac{x}{\lim c_n}$ . Ugyanakkor mivel  $\frac{x}{\lim c_n} > \limsup d_n$ , véges sok tagtól eltekintve  $d_n < \frac{x}{\lim c_n}$  lenne. Ellentmondásra jutottunk, így a kiinduló egyenlőtlenség nem igaz; igazat beszélve  $\limsup(c_n d_n) \leq (\lim_n c_n) \cdot (\limsup d_n)$  kell, hogy teljesüljön. Ugyanez igaz viszont, ha  $d_n$  helyett a  $\frac{d_n}{c_n}$  sorozatot,  $c_n$ -ek helyett pedig a  $\frac{1}{c_n}$  sorozatot tekintjük:  $\limsup\left(\frac{1}{c_n} \cdot c_n d_n\right) \leq \left(\lim_n \frac{1}{c_n}\right) \cdot \limsup(c_n d_n)$ , amiből átrendezéssel  $\limsup(c_n d_n) \geq (\lim_n c_n) \cdot (\limsup d_n)$  következik. Készen vagyunk: a két oldal egyenlő, mert  $\geq$  és  $\leq$  is fennáll. Figyeljük meg, hogy alaposan kihasználtuk, hogy  $0 < \lim c_n < \infty$ ; ha ez nem teljesül, nem is feltétlenül igaz a fenti állítás.

## B.2. Sorok, sorösszegek, abszolút összegezhetség

- Ha egy sorozat tagjait összeadogatjuk, a sorozathoz rendelt *sorról* beszélünk.

Az  $a_n$  sorozathoz rendelt **sor**:  $\sum a$ . Ez az a sorozat, amelynek  $n$ -edik tagja épp a sor  $n$ -edik **részletösszege**:  $\sum_{k=0}^n a_k$ .

Az  $a_n$  sorozat **összegezhető**, azaz a  $\sum a$  sor *konvergens*, ha létezik ezen részletösszegek határértéke:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k \right)$ . (B.9)

Ekkor ezen határérték neve a **sor összege**; jelben:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ ,  $\sum_n a_n$ .

**Sorösszege** (sorozat összegezhetségére) is érdemes megfogalmazni a **Cauchy-kritériumot**. Ugyebár  $\mathbb{K}$  teljes: a részletösszegek sorozatára is igaz, hogy éppen akkor konvergens, ha Cauchy-féle is. Utóbbi most azt jelenti, hogy minden  $\varepsilon > 0$ -ra van olyan küszöbindex, hogy a legalább addig vagy tovább vett részletösszegek  $\varepsilon$ -nyinál kevésbé térnek el *egymástól*. Ilyen részletösszegek különbsége persze nem más, mint a csak az egyikben szereplő tagok összege:

$$\sum_{k=0}^m a_k - \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=n+1}^m a_k \Rightarrow a_n \text{ pontosan akkor összegezhető, ha } \forall \varepsilon > 0\text{-ra van } \mathcal{N}_\varepsilon \text{ küszöbindex, hogy ha } m > n > \mathcal{N}_\varepsilon, \text{ akkor } \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon. \quad (\text{B.10})$$

A sorösszege vonatkozó ezen Cauchy-kritérium jelentése tehát: konvergens sor „elég hátsó szelete elég kicsi”. **Speciálisan**: ez azt is jelenti ( $m=n+1$ -et véve), hogy ha  $n \geq \mathcal{N}_\varepsilon$ , akkor  $|a_n| < \varepsilon$ . Utóbbi következtetés szavakban: **összegezhető sorozat nullához tart**. Azaz ha  $a_n$  összegezhető, akkor  $\lim_n a_n = 0$ . Ez egyfelől kézenfekvő: ha egy sorozat nem tart nullához, biztos nem összegezhető. Másrészt azért jó ezt külön megjegyezni.

- Negatív és pozitív, esetleg komplex számok helyett néha könnyebb bánni az abszolútértékekkel, és mindjárt látjuk, hogy az így bevezetett fogalom nagyon hasznos lesz sok dologra. A definíció:

Az  $a_n$  sorozat **abszolút**(értékben) **összegezhető**, más szóval: a belőle képzett sor **abszolút konvergens**, ha az  $|a_n|$  sorozat összegezhető. (B.11)

Ezen fogalom létjogosultságára az alappélda a következő: az  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$  sornak létezik az összege.<sup>86</sup> Abszolútértékezve viszont: az  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$  sor, mely *harmonikus sorösszeg* névre is hallgat, nem létezik. (Hiszen tagonként nézve látszik, hogy nagyobb lenne, mint  $1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}) + \dots$ , de ez utóbbi láthatóan  $\infty$ ).

• Abból tehát, hogy egy sorozat összegezhető, nem következik, hogy abszolút összegezhető is. *For-dítva viszont* jobb a helyzet: ha  $|a_n|$ -ek eléggé gyorsan csökkennek, hogy  $\sum_n |a_n|$  létezen, akkor ugyan lehet, hogy az  $a_n$ -ek  $\mathbb{R}$ -ben vagy  $\mathbb{C}$ -ben „összevissza hintáznak”, mégis kiderül ( $\mathbb{K}$  teljességét tudva), hogy létezik a sorösszegük. Ugyanis ha létezik  $\sum_n |a_n|$ , akkor minden  $\varepsilon > 0$ -ra van olyan  $N_\varepsilon$ , hogy afölötti  $n, m$ -ekre  $\sum_{k=m}^n |a_k| < \varepsilon$ . Viszont  $|\sum_{k=m}^n a_k|$  biztos nem nagyobb, mint  $\sum_{k=m}^n |a_k|$ : emiatt a látott  $m, n$ -ekre  $|\sum_{k=m}^n a_k| < \varepsilon$ . Tehát az  $a_n$ -ek részletösszegeinek sorozata is Cauchy-féle, azaz  $\mathbb{K}$  teljessége miatt konvergens is. Vagyis létezik  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ . Összefoglalva:

$\mathbb{K}$ -beli abszolút konvergens sor konvergens: ha létezik  $\sum_n |a_n|$ , akkor létezik  $\sum_n a_n$ . (B.12)

• Véges sok tag összeadása *kommutatív*. Szeretnénk, ha lehetne (de pesszimistábbak sejthetik: nem mindig lehet) végtelen sorösszegben is a tagokat büntetlenül csereberélni, vagy pl. először egy részsorozat összegét, majd a maradékát kiszámolni. Egy intő példa:

A fenti eredeti sor:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \dots : \quad \text{ez konvergens (és értéke } \ln 2 \text{)}.$$

A páratlan sorszámú tagok:

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \dots : = -\frac{1}{2} \cdot (\text{harmonikus sor}); \text{ az nem összegezhető, ez se.}$$

A páros sorszámú tagok:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \dots : > \frac{1}{2} \cdot (\text{harmonikus sor}), \text{ így ez sem összegezhető.}$$

Az eredeti sor egy ügyes átrendezése:

$$\left[1 - \frac{1}{2}\right] - \frac{1}{4} + \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right] - \frac{1}{8} + \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right] - \frac{1}{12} + \left[\frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right] - \frac{1}{16} + \dots : \quad \text{ennek összege az eredeti fele.}$$

Kiderül, hogy nem abszolút konvergens sorokból *mindig* gyárthatunk ilyen trükkös ellenpéldákat. Ezért **nem abszolút konvergens, de konvergens** sorokat **feltételesen konvergensnek** hívunk, hiszen „átrendezéssel könnyen elronthatjuk” a konvergenciát. Azonban megkímélődünk az ilyenektől **abszolút konvergencia** esetén: ekkor „feltétlen” a konvergencia, „bánhatunk lazán az összeadás sorrendjével”. Ezért is jó, ha egy sor abszolút konvergens is. **Állítás:**

Abszolút konvergens sorok részsorozatai is abszolút összegezhetőek és összegezhetőek, egy rész-sorösszeg és a maradék összege együtt az eredeti sorösszeget adja; a tagokat permutálhatjuk, ugyanaz marad a sorösszeg. (B.13)

A részekre bonthatóság bizonyítását érdeklődőknek tömören leírom; ez a fontosabbik dolog.

Osszuk két csoportba  $a_n$ -eket: legyen  $a'_k$  és  $a''_k$  az egyiknek és a másikkak megfelelő két sorozat; ezekben a másik ill. az egyik csoportba sorolt (a kihagyott) elemeket kinullázzuk. Nyilván  $a_n = a'_n + a''_n$ , hiszen vagy itt, vagy ott nulla áll minden  $n$ -re. Az abszolútértékek nemnegatívak:

<sup>86</sup> Indoklás: így ill. úgy párosítva a tagokat kiderül (nézzük meg!), hogy a *párosadik* részletösszegek mindegyike *kisebb*, mint a későbbi *akármelyik* részletösszegek, viszont a *páratlanadik* részletösszegek *nagyobbak*, mint a későbbi következő *bármelyik* részletösszeg. Továbbá egy párosadik és az azt követő (páratlanadik) részletösszeg különbsége  $\frac{1}{n}$ -nél kisebb az  $n$ -edik tag után. Ezek miatt ha  $\varepsilon > 0$ , akkor küszöbindexnek egy  $1/\varepsilon$ -nál nagyobb egész számot véve biztos, hogy az ez utáni részletösszegek *egymástól* már  $\varepsilon$ -nál kevésbé térnek el. Vagyis a sor Cauchy-féle, így  $\mathbb{R}$  teljessége miatt konvergens is. *Megjegyzés:* később az is kiderül, hogy konkrétan  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = \ln 2$ .

bármilyen  $n$  és  $m$  közötti összegre  $\sum_{k=n}^m |a'_k| < \sum_{k=n}^m |a_k|$  is és  $\sum_{k=n}^m |a''_k| < \sum_{k=n}^m |a_k|$  is igaz. Ezen becslés miatt mivel az eredeti abszolútérték-sorösszeg konvergens, így Cauchy-féle, utóbbi a rész-sorokra is igaz lesz. Tehát azok is abszolút konvergensek, így konvergensek is. Legyen  $\sum_n a'_n = A$ ,  $\sum_n a''_n = B$ : azaz minden  $\varepsilon > 0$ -ra van olyan  $N$  küszöbindex, hogy minden  $n > N$ -re  $|A - \sum_{k=0}^n a'_k| < \frac{\varepsilon}{2}$  is és  $|B - \sum_{k=0}^n a''_k| < \frac{\varepsilon}{2}$  is teljesülnek. Emiatt  $|A+B - \sum_{k=0}^n a_k| = |A - \sum_{k=0}^n a'_k + B - \sum_{k=0}^n a''_k| \leq |A - \sum_{k=0}^n a'_k| + |B - \sum_{k=0}^n a''_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ . Összenézve ennek az elejét és a végét tényleg arra jutunk, hogy az  $a_n$ -ek részletösszeg-sorozata  $A+B$ -hez tart.

• Véges összegeknél **több indexre összegzéskor** is mindegy, milyen sorrendben összegzünk: ha pl.  $k$  és  $l$  1-től 3-ig fut, és  $A_{k,l}$  egy kétindexes mennyiség (azaz most:  $3 \cdot 3 = 9$  darab szám), akkor

$$\begin{array}{l} \text{mindegy} \\ \text{a sorrend:} \end{array} \quad \sum_{k=1}^3 \left( \sum_{l=1}^3 A_{k,l} \right) = \sum_{l=1}^3 \left( \sum_{k=1}^3 A_{k,l} \right), \quad \text{épp ezért „egy-} \\ \text{be” is írhatjuk:} \quad \sum_{k,l} A_{k,l}.$$

Ha nem véges sok (itt kilenc), hanem végtelen sok tag van (mint egy „végtelen nagy mátrix” elemei), akkor *általában* nem biztos, hogy akármilyen sorrendben összegezzük. Azonban (a legfontosabb esetet emeljük most ki) **abszolút konvergencia esetén** itt is **mindegy a sorrend**. Pontosítva: ha a  $k$  indexet egy fix értékénél rögzítjük, akkor az  $l \rightarrow A_{k,l}$  hozzárendelés rendes sorozat:  $l$ -edik tagja  $A_{k,l}$ , és nézhetjük ennek  $l$  szerinti összegezhetségét, majd a ( $k$ -tól függő) eredmények  $k$  szerinti összegezhetségét. **Az állítás a következő:**

$$\text{Ha az egyik sorrendben létezik az abszolútértékek összege:} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{l=0}^{\infty} |A_{k,l}| \right), \quad \text{akkor ebből az alábbi felsoroltak következnek:} \quad (B.14)$$

$$\Rightarrow 1.) \text{ létezik a fordított sorrendű abszolútértékes összeg is: } \sum_{l=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} |A_{k,l}| \right).$$

$$\Rightarrow 2.) \text{ a kétféle ilyen összeg megegyezik: } \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{l=0}^{\infty} |A_{k,l}| \right) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} |A_{k,l}| \right),$$

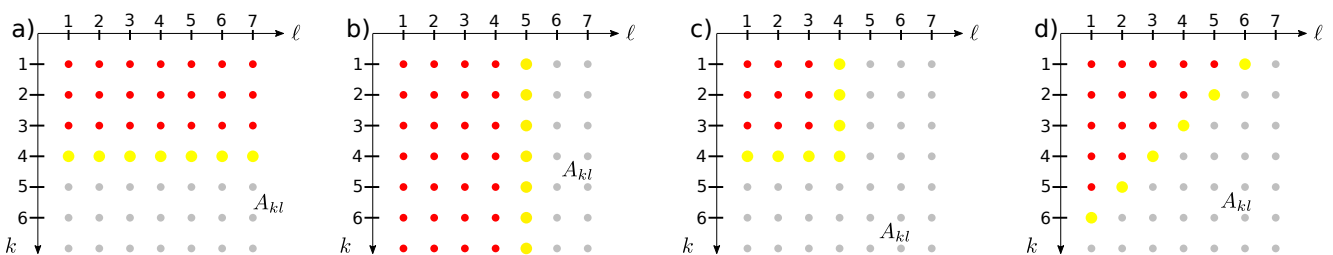
$$\Rightarrow 3.) \text{ abszolútérték nélkül is léteznek: } \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{l=0}^{\infty} A_{k,l} \right), \quad \sum_{l=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} A_{k,l} \right),$$

$$\Rightarrow 4.) \text{ utóbbiak is egyenlők egymással: } \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{l=0}^{\infty} A_{k,l} \right) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} A_{k,l} \right),$$

$$\Rightarrow 5.) |A_{k,l}| \text{-ek és } A_{k,l} \text{-ek összegei } \textit{más végigmenési sorrend-} \\ \textit{nél is ugyanannyik; ezért jelölhetünk „összevontan”}: \quad \sum_{k,l} A_{k,l}, \quad \sum_{k,l} |A_{k,l}|.$$

A kiinduló követelmény tehát az *egyik* sorrendi abszolútértékbeli összegezhetség volt; természetesen a másik sorrendiből is egyenértékűleg kiindulhattunk volna.

Amúgy persze ha  $A_{k,l}$ -ek mind pozitív valóságok, akkor  $|A_{k,l}| = A_{k,l}$ ; egyéb esetben  $\sum_{k,l} A_{k,l}$  nyilván nem ugyanannyi, mint  $\sum_{k,l} |A_{k,l}|$ . A különféle végigmenéseket ez a kis ábra próbálja szemléltetni:



Az ábra a.) része a  $\sum_k \sum_l A_{k,l}$  fajta (először adott  $k$ -nál  $l$  szerint, majd az eredményeket  $k$  szerint való) összegzést szemlélteti, a b.) a fordított  $\sum_l \sum_k A_{k,l}$ -et. A c.) rész a  $\lim_{K \rightarrow \infty} \left( \sum_{k,l=0}^K A_{kl} \right)$



fajta összeget jelképezi, a d.) pedig egy gyakori fajta további sorrendet: először egy adott „háromszögátló” elemeit összegezzük, majd ezeket az összegeket. A fenti állítás azt mondja itt, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{l=0}^{\infty} A_{k,l} \right) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} A_{k,l} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N A_{k,l} = \sum_{p=0}^{\infty} \left( \sum_{q=0}^p A_{p-q,q} \right). \quad (\text{B.15})$$

Szavakban: az összegzőindexeket *átjelölhetjük*, itt pl.  $k$  és  $l$  helyett a  $p$ -t és a  $q$ -t használhatjuk; ezeket a jelölt értékeken futtatva is bejárjuk  $A_{k,l}$  elemeit ( $p$  jelöli ki az átlót,  $q$  azon belül mozog).

• Gyakori speciális eset, amikor  $a_k$  és  $b_k$  adott sorozatok, és  $A_{k,l}$  ezek „szorzata”:  $A_{k,l} = a_k b_l$ . Ekkor  $\sum_k \sum_l |A_{k,l}| = \sum_k \sum_l |a_k| |b_l| = \left( \sum_k |a_k| \right) \cdot \left( \sum_l |b_l| \right)$ . A fenti állítás szerint tehát ha  $a_k$  és  $b_l$  is abszolút összegezhető, akkor az ilyen „szorzatok” akármilyen, az összes  $a_k b_l$  elemszorzaton egyszer végigmenő módon (abszolútértékben is, anélkül is) összegezhető, és az eredmény egyértelmű.

\* \* \*

• A szakasz hátralevő szűk két oldalában leírom a (B.14) állítás **bizonyítását**; *hosszadalmas*, és az állítás tudásához **nem szükséges** végigrágni. A közben előkerülő összegeket képletekkel írom, de aki követni akarja, annak javaslom, hogy rajzolgassa is le, jelölgesse be a látott pöttyözős ábra módjára, hogy mikor milyen tagok milyen összegei szerepelnek. Az „akármilyen sorrendű” összeadások közül a látott két másik (a fenti ábra c. és d. részeinek megfelelő) fajtára fókuszálunk, de látszani fog, hogy a bizonyítás működne másfajta össze-vissza végigmenések esetén is. Vezérfonalak: 1.) *véges összegeket* megcserélhetünk, alulról/fölülről becsülhetünk, ebből kell az összeg határértékére következtetgetni. 2.) Abszolút konvergencia sor konvergencia is. 3.) Ha egy  $a_n$  sorozat felülről korlátos (=valamilyen  $A$  számra igaz, hogy minden  $n$ -re  $a_n \leq A$ ), továbbá  $a_n$  *monoton nő*, akkor konvergencia, és  $\lim_n a_n \leq A$ . Ez részletösszegek sorozatára is vonatkozik! Lehet persze, hogy az  $A$  felső korlát éppen a  $\lim_n a_n$  maga: az, hogy  $\lim_n a_n \leq A$ , ekkor is teljesül, egyenlőségként.

• Kiindulás: minden  $k$ -ra létezik  $\sum_l |A_{k,l}|$ , és létezik  $\sum_k \left( \sum_l |A_{k,l}| \right)$  is. Egy becslés-csomag:

$$\sum_{k=0}^K |A_{k,L}| \leq \sum_{l=0}^L \left( \sum_{k=0}^K |A_{k,l}| \right) = \sum_{k=0}^K \left( \sum_{l=0}^L |A_{k,l}| \right) \leq \sum_{k=0}^K \left( \sum_{l=0}^{\infty} |A_{k,l}| \right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{l=0}^{\infty} |A_{k,l}| \right), \text{ és ez létezik.}$$

A legelső összeg  $K$ -t növelve monoton nő, és a legutolsóval felülbecsülhető: emiatt létezik  $K \rightarrow \infty$  határértéke, vagyis minden  $L$ -re létezik  $\sum_{k=0}^{\infty} |A_{k,L}|$ . A fenti második és ötödik összeg összehasonlítása minden  $K$ -ra igaz, így  $K \rightarrow \infty$ -t véve (az előbbiből tudjuk már, hogy ezt itt *véges sok*  $l$ -re megtehetjük) igaz marad, hogy  $\sum_{l=0}^L \left( \sum_{k=0}^{\infty} |A_{k,l}| \right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{l=0}^{\infty} |A_{k,l}| \right)$ . Itt viszont a bal oldal újfent korlátos, és  $L$ -t növelve monoton nő: létezik  $L \rightarrow \infty$  határértéke, ami az  $\sum_{l=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} |A_{k,l}| \right)$  másik sorrendű összeg, továbbá a becslésből  $\sum_{l=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} |A_{k,l}| \right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{l=0}^{\infty} |A_{k,l}| \right)$  is igaz. Ha tehát létezik  $|A_{k,l}|$ -ek egyik sorrendű összege, akkor a másik is, és *az egyik* kisebb-egyenlő, mint *a másik*. De ez visszafelé is belátható épp ugyanígy: emiatt a kétféle sorrendű összeg egyenlő. A négyzetesen haladó (az ábra c. része szerinti) összeghez:  $\sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^K |A_{kl}|$  is monoton nő  $K$ -val, és (a fenti becsléssor harmadik összegében  $K=L$ -t írva) felülbecsülhető  $\sum_k \left( \sum_l |A_{kl}| \right)$ -l, emiatt tényleg létezik  $\lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^K |A_{kl}|$ . Minden fix  $L$ -re  $\lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^K |A_{kl}| \geq \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L |A_{kl}|$ , emiatt ez  $L \rightarrow \infty$ -t véve is igaz:  $\lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^K |A_{kl}| \geq \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^{\infty} |A_{kl}|$ , de ez utóbbi éppen  $\sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{l=0}^{\infty} |A_{k,l}| \right)$ . Tehát a négyzet alakban haladó összeget,  $\lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^K |A_{kl}|$ -et *alulról is* becsülhetjük a sorrendű összeggel: emiatt ez a határérték tényleg ugyanaz, mint a sorrendű összeg. Végül az átlós-háromszöges (fenti ábra d. része szerinti) összeget felülről is és alulról is becsülhetjük a most látott, négyzet alakban haladó összeggel (egy a háromszög „előtt” ill. „mögött”

haladó, nagyobb ill. kisebb négyzetet rajzolva); tehát az  $|A_{kl}|$ -ek összege így is létezik, és ugyanaz, mint eddig. Az abszolútértékekre kész vagyunk az állítás bizonyításával.

• A Cauchy-kritérium következménye volt, hogy abszolút konvergens sor konvergens is. Most használhatjuk ezt közvetlenül: mivel minden  $k$ -ra létezik  $\sum_{l=0}^{\infty} |A_{k,l}|$ , ezért  $\sum_{l=0}^{\infty} A_{k,l}$  is létezik, és  $|\sum_{l=0}^{\infty} A_{k,l}| \leq \sum_{l=0}^{\infty} |A_{k,l}|$ . Emiatt  $\sum_{k=0}^{\infty} |\sum_{l=0}^{\infty} A_{k,l}|$  is létezik, vagyis  $\sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{l=0}^{\infty} A_{k,l})$  is. Ugyanezt a (most már tudjuk, hogy létező) fordított sorrendű abszolútérték-összegeből kiindulva is elmondhatjuk; következtetés: mindkét sorrendi összeg létezik abszolútérték nélkül is. A háromszöges-átlós fajta is, mert  $\sum_{q=0}^p |A_{p-q,q}| \leq |\sum_{q=0}^p A_{p-q,q}|$ , így  $\sum_{p=0}^{\infty} |\sum_{q=0}^p A_{p-q,q}|$  is létezik, emiatt  $\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^p A_{p-q,q}$  is. A négyzet alakban haladó összeg,  $\lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^K A_{kl}$  létezésének belátásához vissza kell nyúlni a Cauchy-kritériumhoz: mivel létezik  $\lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^K |A_{kl}|$  ezért minden  $\varepsilon > 0$ -ra van olyan  $N_\varepsilon$ , amire minden  $K_1$  és  $K_2$  esetén, amelyek nagyobbak, mint  $N_\varepsilon$ , igaz, hogy  $\sum_{k=K_1}^{K_2} \sum_{l=K_1}^{K_2} |A_{kl}| < \varepsilon$ . Node  $|\sum_{k=K_1}^{K_2} \sum_{l=K_1}^{K_2} A_{kl}| \leq \sum_{k=K_1}^{K_2} \sum_{l=K_1}^{K_2} |A_{kl}|$ , emiatt az ilyen  $K_1, K_2$ -kre  $|\sum_{k=K_1}^{K_2} \sum_{l=K_1}^{K_2} A_{kl}| < \varepsilon$  is igaz, azaz az abszolútértékek nélküli  $K \rightarrow \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^K A_{kl}$  részletösszeg-sorozat is Cauchy-féle, így konvergens. *Beláttuk, hogy  $A_{kl}$ -ek összegei is léteznek.*

• Már csak azt kell belátni, hogy az  $A_{k,l}$ -ek ilyen különféle összegei egymással egyenlők. (Már tudjuk, hogy léteznek, de ennyi kevés lenne: használnunk kell még egyszer az abszolútértékek összegezettségét is.) Kezdjük a kétféle sorrendi összeg egyenlőségével: igaz-e, hogy

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{\infty} A_{kl} \stackrel{?}{=} \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{\infty} A_{kl} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{K \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{\infty} A_{kl} - \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{\infty} A_{kl} \right| \stackrel{?}{=} 0.$$

Az utóbbit úgy írhatjuk (rajzolgassunk, hogy érthető legyen az átalakítás, és az alábbiak is!), hogy

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=N}^{\infty} A_{kl} - \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=N}^{\infty} A_{kl} \right| \stackrel{?}{=} 0. \quad \text{Itt a következő becslést tehetjük:}$$

$$\left| \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=N}^{\infty} A_{kl} - \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=N}^{\infty} A_{kl} \right| \leq \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=N}^{\infty} |A_{kl}| + \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=N}^{\infty} |A_{kl}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=N}^{\infty} |A_{kl}| + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=N}^{\infty} |A_{kl}|,$$

és az utóbbi két tag nullához tart, ha  $N \rightarrow \infty$  (az abszolútértékek sorrendi összegeiben ők a „maradék”). Vagyis az  $A_{kl}$ -ek kétféle sorrendi összegei,  $\sum_k (\sum_l A_{kl})$  és  $\sum_l (\sum_k A_{kl})$  tényleg egyenlők. Hasonló gondolatmenettel a négyzet alakban haladó összegre:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} A_{kl} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{\infty} A_{kl}, \quad \text{mert a különbségük abszolútértékét fölül-}$$

$$\left| \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{\infty} A_{kl} - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} A_{kl} \right| = \left| \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=N}^{\infty} A_{kl} \right| \leq \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=N}^{\infty} |A_{kl}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=N}^{\infty} |A_{kl}|,$$

becsülhetjük valamivel, ami nullához tart:

utóbbi pedig tényleg  $N \rightarrow \infty$  esetben nullához tart, mert ez a sorrendi abszolútérték-összeg „maradék”. Ezzel is kész vagyunk; a háromszögátlók mentén vett összegre is teljesen hasonlóan érvelhetünk. Itt az iménti „négyzetes” összeghez érdemes viszonyítani. A háromszögből a beférő kis négyzetet „harapjuk ki”, és a maradék abszolútértékét egy lépésben igen durván felülbecsüljük, belevéve az összes hátrébbi tag abszolútértékét is, de így is jó lesz:

$$\left| \sum_{p=0}^{2N} \sum_{q=0}^p A_{p-q,q} - \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N A_{kl} \right| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{l=0}^N |A_{k,l}| + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=N+1}^{\infty} |A_{k,l}|,$$

és a jobb oldal itt is nullához tart, mert ez az egész éppen a négyzetes alakban haladó abszolútértékes összeg „maradék”. Így **teljesen készen vagyunk**.

### B.3. Függvénysorozatok, függvénysorok, folytonosság

Most  $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  függvényekkel foglalkozunk (de sok megállapításunk általánosítható). Ha minden  $n \in \mathbb{N}$ -re adott egy ilyen  $f_n : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  függvény, akkor ezek sorozatát kézenfekvő *függvénysorozatnak* hívni. Az  $f_n(x)$  függvénysorozathoz rendelt *függvénysor*,  $\sum f_n$  is értelmes: ez az a függvénysorozat, amelynek  $n$ -edik tagja éppen az  $n$ -edik részletösszeg, azaz a  $\sum_{k=0}^n f_k$  összegfüggvény.

• Az  $f_n$  függvényeket egy  $x \in \mathbb{K}$  helyen kiértékelve (szám)sorozatot kapunk. Ez lehet konvergens vagy nem, attól függően is, hogy mi az  $x$ . Az  $f_n$  függvénysorozat **konvergenciahalmaza**: azon  $x$ -ek halmaza, amikre az  $f_n(x)$  számsorozat konvergens. Továbbá azt mondjuk, hogy

$$\text{Az } f_n \text{ függvénysorozat } \mathbf{pontonként\ konvergens} \text{ a } H \subset \mathbb{K} \text{ halmazon, ha minden } x \in H \text{-ra létezik a } \lim_{n \rightarrow \infty} [f_n(x)] \text{ határérték.} \quad (\text{B.16})$$

Más szóval: ha  $H$  része az  $f_n$  függvénysorozat konvergenciahalmazának. Ekkor értelmezhetünk úgy egy  $f : H \rightarrow \mathbb{K}$  függvényt, hogy az  $f(x)$  érték legyen az ottani határérték,  $\lim_{n \rightarrow \infty} [f_n(x)]$ . Az így összeállított  $f$  határérték-függvény az  $f_n$  sorozat *pontonkénti határértéke*.

Ha függvénysorokat mondunk, akkor itt is összegezhetőséget értünk a konvergencia alatt:

$$\begin{aligned} & \text{A } \sum f_n \text{ függvénysor } \mathbf{pontonként\ konvergens} \text{ } H \subset \mathbb{K} \text{-n, ha } \forall x \in H \text{-ra létezik } \sum_n f_n(x). \\ & \text{A } \sum f_n \text{ } \mathbf{pontonként\ abszolút\ konvergens} \text{ a } H \text{-n, ha } \forall x \in H \text{-ra létezik } \sum_n |f_n(x)|. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

• A pontonkénti konvergencia sokszor még nem elég jó tulajdonság: ugyan ezzel megköveteljük, hogy minden  $x \in H$ -ra az  $f_n(x)$  sorozat konvergens legyen, de még nem tudhatjuk, hogy különböző  $x$ -ekben ezek egymáshoz képest „milyen gyorsan” tartanak a határértékeikhez; lehet, hogy itt-ott nagyon „lemaradnak” a többihez képest. Ezt kiszűrendő kell egy új definíció:

$$\begin{aligned} & \text{Az } f_n \text{ függvénysorozat a } H \text{ halmazon az} \\ & f \text{-hez } \mathbf{egyenletesen\ konvergál}, \text{ ha a „leg-} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in H} [d(f_n(x), f(x))] \right) = 0. \quad (\text{B.18}) \\ & \text{nagyobb eltérés” is nullához tart, azaz ha} \end{aligned}$$

Itt tényleg fontos a  $H$  halmaz megadása: ha egy  $H$ -n  $f_n$  egyenletesen konvergens, akkor a rész-halmazain is, de egy bővebb halmazon nem biztos. Fordítva: ha egy halmazon nincs egyenletes konvergencia, attól még egy szűkebb halmazon lehet.

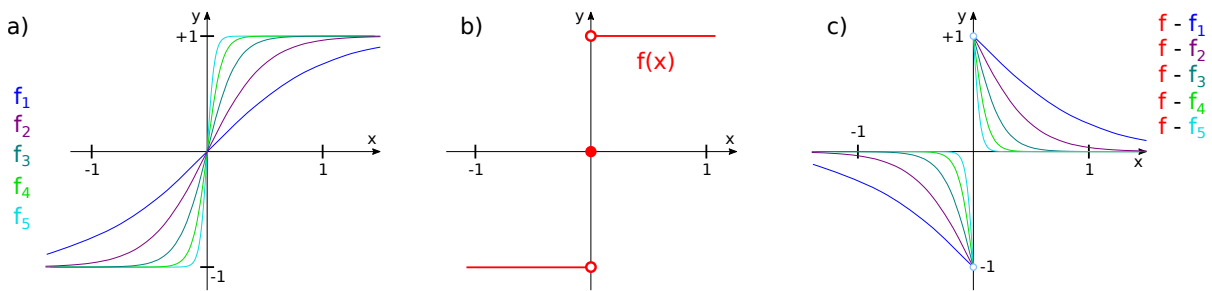
Természetesen **függvénysoroknak** egy  $H$  halmazon való **egyenletes konvergenciája** alatt azt értjük, hogy a részletösszegek sorozata egyenletesen (és nemcsak pontonként) konvergens.

• Ha az  $f_n$  függvénysorozat egyenletesen konvergál  $f$ -hez  $H$ -n, akkor pontonként is. A fogalmak leülepítéséhez nézzünk példát arra, hogy fordítva nem igaz ez. Legyen  $H = \mathbb{R}$ , és tekintsük a tangens hyperbolicus függvényt:  $\text{th}(0) = 0$ , és  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{th}(x) = \pm 1$ . „Zsugorítgassuk ezt össze”, azaz legyen

$$\begin{aligned} f_n(x) = \text{th}(nx). \quad & \begin{array}{l} \text{Fix } x \text{-re } n \rightarrow \infty \text{-t véve} \\ \text{a határértékfüggvény} \\ \text{a következőnek adódik:} \end{array} \quad f(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ 1, & \text{ha } x > 0. \end{cases} \quad (\text{B.19}) \end{aligned}$$

Itt nem egyenletes a konvergencia. A lentebbi 52. ábra segíthet: a határértékfüggvénytől való eltérések maximuma (azaz: szuprémuma) minden  $n$ -re 1; nem tart nullához. Figyeljünk fel arra is, hogy itt a folytonos függvényekből kapott pontonkénti határérték-függvény *nem folytonos!*

Ha viszont  $H$  halmaznak  $\mathbb{R}$  helyett bármilyen olyan *zárt intervallumot* veszünk, ami nem tartalmazza a 0-t (azaz *tényleg* „legalább kicsit” messzebb van 0-tól), azon már egyenletes a konvergencia.



52. ábra. Pontonként, de nem egyenletesen konvergens függvénysorozat: a.) a függvények, b.) a határérték, c.) az attól való eltérés, melynek  $\mathbb{R}$ -en vett szuprémuma minden  $n$ -re 1.

• Fontos *másik* fogalom **adott  $f$  függvény határértéke** egy  $x$  pontban. Ilyenkor  $f$  adott, és kérdés, hogy „hova tart”  $f(y)$ , ha a *függvény változójával*,  $y$ -nal  $x$ -hez tartunk. Az  $f$  határértéke  $x$ -ben  $a$ , ha az  $x$ -en kívül felvett függvényértékeknek  $a$ -tól való legnagyobb eltérése tetszőlegesen kicsivé tehető, ha  $x$ -hez elég közelre korlátozódunk. Pontosabban: adott  $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  függvényre

Ha  $x \in \mathbb{K}$  a  $\text{Dom} f$  torlódási pontja, akkor azt mondjuk, ha minden  $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan  $r_\varepsilon > 0$ , hogy az  $a \in \mathbb{K}$  szám hogy minden olyan  $y \in \text{Dom} f$ -re, amire  $0 < d(y, x) < r_\varepsilon$ , igaz, hogy  $d(f(y), a) < \varepsilon$ . (B.20)

Fontos, hogy határozottan  $>$  és  $<$  van mindenhol. Így a szereplő  $y$  nem egyezhet meg  $x$ -szel, azaz (épp ez a lényeg sokszor!) nem kell, hogy  $f$  az  $x$ -et is (ha  $x \in \text{Dom} f$ ) az  $a$ -hoz „elég közelre” képezze.<sup>87</sup> Az  $r_\varepsilon$  is nullánál *nagyobb* legyen, különben semmitmondó lenne a követelmény. Ezen felül azért jó, hogy  $x$  torlódási pont kell legyen,<sup>88</sup> hogy bármilyen kicsi  $r_\varepsilon$ -t „kipróbálva” legalábbis létezzenek olyan  $y$ -ok, amikre a követelmény vonatkozik. Alapvetően fontos az ún. **átviteli elv**:

Legyen  $x$  a  $\text{Dom} f$  torlódási pontja.  $a$  pontosan akkor határértéke  $f$ -nek  $x$ -ben, ha minden olyan  $x_n$  sorozatra, amire  $x_n \in \text{Dom} f \setminus \{x\}$ , és  $\lim_n x_n = x$ , igaz, hogy  $\lim_n f(x_n) = a$ .

Ez sorozatokra „ülteti át” a függvényhatárérték definícióját.<sup>89</sup> A sorozatokra vonatkozó hasonló megállapítást tudva leszűrhetjük többek között azt is, hogy ha  $f$ -nek  $x$ -ben van  $a$  határértéke, akkor az egyértelmű; jelben:  $a = \lim_{y \rightarrow x} f(y)$ . A függvényhatárérték fogalmát tehát „jól” definiáltuk.

• Ha  $x \in \text{Dom} f$ , akkor  $x$  vagy torlódási pontja, vagy *izolált pontja*  $\text{Dom} f$ -nek. Előbbi esetben azt mondjuk, hogy  $f$  *folytonos*  $x$ -ben, ha ott létezik **határértéke**, és az **egyenlő a függvényértékkel**:  $\lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x)$ . Izolált pontokban definíciószerűen folytonosnak mondjuk  $f$ -et. Összerakva:

Az  $f$  függvény **folytonos  $x$ -ben**, ha  $x \in \text{Dom} f$ , és minden  $\varepsilon > 0$ -ra van olyan  $r_\varepsilon > 0$  szám, amivel minden  $y \in \text{Dom} f$ -re, amire  $d(x, y) < r_\varepsilon$ , igaz, hogy  $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ . (B.21)

Ez a (a függvényhatárértékre építő) pontos megfogalmazás egy matematikatörténeti mérföldkő;

<sup>87</sup>Így pl. ha  $f(0)=2$ , és  $f(x)=0$  egyébként, akkor ennek az  $f$ -nek a határértéke  $x_0=0$ -ban nulla, de az értéke 2.

<sup>88</sup>Az  $x$  egy  $H$  halmaz torlódási pontja, ha  $x$  bármilyen (kicsi) környezetében  $H$ -nak még mindig végtelen sok pontja van. Az nem szükséges itt, hogy  $x \in H$  is legyen: pl. a  $]0, 1[$  nyílt intervallumnak 0 is és 1 is torlódási pontjai.

<sup>89</sup>Bizonyítás: ha  $a$  határértéke  $f$ -nek  $x$ -ben, akkor ha  $x_n$  mondott fajta,  $x$ -hez tartó sorozat, akkor adott  $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan  $N_{r_\varepsilon}$  küszöbindex, amire ha  $n > N_{r_\varepsilon}$ , akkor  $d(x_n, x) < r_\varepsilon$  (és  $r_\varepsilon$  a függvényhatárérték-séghez megkövetelt  $r_\varepsilon$ ): ekkor  $d(f(x_n), a) < \varepsilon$ , azaz tényleg  $\lim_n f(x_n) = a$ . Másrészt ha  $a$  nem  $f$  határértéke  $x$ -ben, akkor (a definíciót tagadva) minden  $\varepsilon > 0$ -re igaz, hogy akármilyen  $r > 0$ -t véve is van olyan  $x_\varepsilon \in \text{Dom} f$ , amire  $0 < d(x_\varepsilon, x) < r$ , de  $d(f(x_\varepsilon), a) \geq \varepsilon$ . Vegyünk egy adott  $\varepsilon > 0$ -t és tekintsünk egy  $\mathbb{R}^+$  (nem nulla!) értékű, de nullához tartó  $b_n$  sorozatot: az előzők szerint (esetleg hivatkozva az ún. *kiválasztási axiómára*) léteznek olyan  $x_n$ -ek, amikre  $0 < d(x_n, x) < b_n$ , de  $d(f(x_n), a) \geq \varepsilon$ . Ezen  $x_n$  sorozatra  $\lim_n x_n = x$ , de  $\lim_n f(x_n) \neq a$ . Az állításunk így tehát visszafelé is igaz.

mellesleg izolált pontokra is működik.<sup>90</sup> Az átviteli elv egyszerűbb itt, mert utóbbiak sem kivételesek:  $f$  folytonos  $x$ -ben  $\Leftrightarrow$  minden  $\text{Dom} f$ -beli,  $x$ -hez tartó  $x_n$  sorozatra  $\lim_n f(x_n) = f(x)$ .

• Egy  $f$  függvényre azt mondjuk, hogy **folytonos egy halmazon**, ha annak minden pontjában az, és hogy **folytonos**, ha  $\text{Dom} f$ -en az. „Érezhető” (ill. átviteli elvvel és sorozatokkal bizonyítható), hogy folytonos függvények összege, szorzata, hányadosa is az, továbbá minden konstans függvény és az  $f(z)=z$  is folytonos. Ezek miatt minden polinom és racionális törtfüggvény folytonos.<sup>91</sup>

Fontos állítás („önmaga farkába harapó kígyó”): a *távolság képzése* folytonos függvény, azaz ha  $y \rightarrow x$ , akkor rögzített  $a$  esetén  $d(y, a) \rightarrow d(x, a)$ . Bizonyítás:  $d(x, a) + d(x, y) \geq d(y, a)$  és  $d(y, a) + d(x, y) \geq d(x, a)$  is igaz, emiatt mindenképpen  $|d(x, a) - d(y, a)| \leq d(x, y)$ . A folytonosság követelményében így adott  $\varepsilon$ -hoz választhatjuk  $r_\varepsilon$ -nak magát  $\varepsilon$ -t: olyan  $y$ -okra, amelyekre  $d(y, x) < \varepsilon$ , az előzőek alapján  $d(y, a)$  és  $d(x, a)$  különbsége is tényleg  $\varepsilon$ -nál kisebb.

• Mi a helyzet egy olyan  $f$  függvény folytonosságával, amit egy  $f_n$  *függvénysorozat* határértéke (vagy függvénysor összege) határoz meg? Ha *egyenletes a konvergencia*, megnyugodhatunk:

Az  $f_n : H \rightarrow \mathbb{K}$  függvénysorozat konvergáljon egyenletesen a  $H$ -n az  $f$  függvényhez.

**1. Állítás:** ha egy  $x$  pontban minden  $f_n$ -nek létezik határértéke,  $a_n := \lim_{y \rightarrow x} f_n(y)$ , akkor  $f$ -nek is van  $x$ -ben határértéke, és ahogy gondolható:  $\lim_{y \rightarrow x} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . (B.22)

**2. Állítás:** ha az  $f_n$ -ek folytonosak egy  $x \in H$ -ban, akkor  $f$  is folytonos  $x$ -ben.

Folytonos függvények sorozatának **egyenletes határértéke** tehát **folytonos**. Csak pontonkénti konvergenciával ez nem mindig igaz, mint a  $\text{th}$  függvényt összehúzás (B.19) példában láttuk. Az 1. állítás szavakban mit sütsz, kis szűcs: egyenletes konvergencia esetén a „határértékfüggvény függvényhatárértéke egyenlő a függvényhatárértékek határértékével”. Bizonyításokat ld. lentebb.

• Az egyenletes konvergencia ezért (és más miatt is) „jobb”, mint a csak pontonkénti. Jó volna, ha *meg is tudnánk állapítani*, hogy egy függvénysorozat egyenletesen konvergens-e. Első lépés a **Cauchy-kritérium „átfogalmazása”**. Legyen  $H \subset \mathbb{K}$  adott halmaz,  $f_n : H \rightarrow \mathbb{K}$  függvénysorozat.

Az  $f_n$  pontosan akkor egyenletesen konvergens  $H$ -n, ha minden  $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan  $\mathcal{N}_\varepsilon$  küszöbindex, hogy minden  $m, n > \mathcal{N}_\varepsilon$ -ra  $\sup_{y \in H} d(f_n(y), f_m(y)) < \varepsilon$ . (B.23)

Ugyanis ha  $f_n$  egyenletesen konvergál ( $f$ -hez), akkor minden  $\varepsilon > 0$ -hoz vegyük  $\mathcal{N}_\varepsilon$ -nak azt a küszöbindexet, aminél nagyobb  $n$ -ekre már  $\sup_{y \in H} d(f_n(y), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$ : ha  $m, n > \mathcal{N}_\varepsilon$ , akkor a háromszög-egyenlőtlenségből  $\sup_y d(f_n(y), f_m(y)) \leq \sup_y d(f_n(y), f(y)) + \sup_y d(f_m(y), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ , vagyis teljesül, amit állítottunk. Fordítva: ha minden  $\varepsilon > 0$ -ra van az állításban megkövetelt módon  $\mathcal{N}_\varepsilon$  küszöbindex, akkor  $m, n > \mathcal{N}_\varepsilon$  esetén minden  $x \in H$ -ra is nyilván  $d(f_m(x), f_n(x)) \leq \varepsilon$ , azaz minden  $x \in H$ -ra az  $f_n(x)$  számsorozat Cauchy-féle, tehát  $\mathbb{K}$  teljessége miatt konvergens: definiálhatjuk az  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  határértékfüggvényt  $H$ -n. Adott  $n$ -re a távolságképzés folytonossága miatt  $d(f(x), f_n(x)) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(f_m(x), f_n(x))$ : ha tehát adott  $\varepsilon > 0$ -ra  $n$  nagyobb, mint  $\mathcal{N}_\varepsilon$ , akkor leszűrhetjük, hogy  $d(f(x), f_n(x)) \leq \varepsilon$ . Ez minden  $x \in H$ -ra igaz, így  $\sup_{x \in H} d(f(x), f_n(x)) \leq \varepsilon$  is igaz,

<sup>90</sup>Ez ekkor a tipikus semmitmondó igaz állítás esete („minden ma élő mamutnak hét lába van”). Ha  $x$   $\text{Dom} f$  izolált pontja, azaz van olyan  $r_x > 0$ , hogy  $x$ -en kívül más  $\text{Dom} f$ -beli pont nincs  $x$ -hez  $r_x$ -nél közelebb, akkor ha  $r_x$ -et vesszük  $r_\varepsilon$ -nak, akkor nem marad  $x$  körül egy másik pont sem, amire ellenőrizni kellene a követelményt.

<sup>91</sup>A folytonosság csak  $\text{Dom} f$ -beli pontokra értelmes. Pl. az  $f(x) = \frac{1}{x}$  függvény, melynek értelmezési tartománya az  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  halmaz (azaz a nullán kívüli valós számok), folytonos függvény! Az ő  $x=0$ -beli „rendellenes” viselkedését úgy kell megfogalmazni, hogy noha ő folytonos, nem terjeszthető ki az egész  $\mathbb{R}$ -re folytonos függvényé.

ha  $n > \mathcal{N}_\varepsilon$ . Ez éppen azt jelenti, hogy az  $f_n$ -ek  $H$ -n egyenletesen is tartanak  $f$ -hez.

• Egy továbbfejlesztés a **függvénysorokra** vonatkozó alábbi kritérium; egyszerűnek tűnhet, de nagyon hasznos tud lenni. Legyenek  $f_n$ -ek a  $H \subset \mathbb{K}$  halmazon értelmezettek és (abszolútértékben) *korlátosak* rajta. Ha a szuprémumok „jól viselkednek”, akkor a függvénysor is.

**Állítás (Weierstrass-kritérium):** ha az összes  $f_n : H \rightarrow \mathbb{K}$  függvényre  $c_n := \sup_{x \in H} \{|f_n(x)|\} < \infty$ , és létezik  $\sum_n c_n$ , akkor a  $\sum_n f_n$  függvénysor (B.24) a  $H$ -n pontonként abszolút konvergencia és egyenletesen is konvergencia.

Bizonyítani a sorösszegekre használt Cauchy-kritériummal, a részletösszegeket a  $c_k$ -kkel felülbecsülve lehet. Bármilyen  $m, n$  indexekre (ahol  $m < n$ ), és bármilyen  $x \in H$ -ra

$$\left| \sum_{k=m}^n f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m}^n |f_k(x)| \leq \sum_{k=m}^n c_k \quad \Rightarrow \quad \sup_{x \in H} \left| \sum_{k=m}^n f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m}^n c_k.$$

A  $c_k$ -k összegezzük, így a részletösszegek sorozata Cauchy-féle: minden  $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan  $\mathcal{N}_\varepsilon$ , hogy ha  $m$  és  $n$  nagyobb, mint  $\mathcal{N}_\varepsilon$ , akkor  $\sum_{k=m}^n c_k < \varepsilon$ . De ilyen  $n, m$ -ekre az első képlet második egyenlőtlensége miatt  $\sum_{k=m}^n |f_k(x)|$  is  $\varepsilon$ -nál kisebb: tehát az  $|f_n(x)|$ -ek részletösszeg-sorozata is Cauchy-féle, azaz konvergencia is. Más szóval: az  $f_n$  sor pontonként abszolút konvergencia. A második, szuprémumos egyenlőtlenségből pedig azt szűrhetjük le, hogy az  $f_n$ -ek részletösszeg-sorozata pont olyan, amire teljesül az, amit az egyenletes konvergencia Cauchy-kritériumában (az előző (B.23) állításban) megköveteltünk. Vagyis a függvénysor  $H$ -n egyenletesen is konvergencia.

• *Kiegészítés:* a (B.22) állítások bizonyításai következnek; az első, majd rá építve a második.

Az  $f_n$ -ek egyenletes konvergenciája miatt az erre megfogalmazott előbbi *Cauchy-kritérium* alapján minden  $\varepsilon > 0$ -ra létezik  $\mathcal{N}_\varepsilon$  küszöbindex, hogy bármilyen ennél nagyobb  $m, n > \mathcal{N}_\varepsilon$  indexekre igaz, hogy  $\sup_{y \in H} [d(f_n(y), f_m(y))] < \varepsilon$ . Mármint ha nézzük az  $y \rightarrow x$  határátmenetet, akkor (mivel  $a_n$  és  $a_m$  az  $f_n$  és az  $f_m$  határértékei  $x$ -ben, és a távolságfüggvény folytonos) ilyen  $n, m$  indexekre  $d(a_n, a_m) < \varepsilon$  is igaz. Vagyis az  $a_n$ -ek sorozata is Cauchy-féle, így  $\mathbb{K}$  teljessége miatt konvergencia.

Legyen tehát  $a$  az  $a_n$ -ek (azaz a  $\lim_{y \rightarrow x} f_n(y)$  értékek) sorozatának határértéke; meg kell még mutatni, hogy  $\lim_{y \rightarrow x} f(y)$  létezik, és ezzel az  $a$ -val egyenlő (azaz hogy ha  $y$  elég közel van  $x$ -hez, akkor  $f(y)$  elég közel lesz  $a$ -hoz). Mivel az  $f_n$ -ek  $f$ -hez egyenletesen konvergálnak, és  $a$  az  $a_n$ -ek határértéke, adott  $\varepsilon > 0$  számhoz biztos létezik  $m$  index, amire két dolog is igaz: egyrészt az  $f_m$ -edik függvény (és mellesleg a későbbiek is) már *sehol* sem tér el  $\frac{\varepsilon}{3}$ -nyinál jobban  $f$ -től:  $d(f(y), f_m(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$  igaz minden  $y \in H$ -ra, másrészt az  $a_m$  (és a későbbiek is) már  $\frac{\varepsilon}{3}$ -nyinál kevésbé térnek el  $a$ -tól:  $d(a_m, a) < \frac{\varepsilon}{3}$ . Végül mivel erre a konkrét  $m$ -re is  $a_m = \lim_{y \rightarrow x} f_m(y)$ , azért van olyan  $r_{\varepsilon/3} > 0$ , hogy ha  $d(y, x) < r_{\varepsilon/3}$ , akkor már  $d(f_m(y), a_m) < \frac{\varepsilon}{3}$ . Ezeket összerakva a háromszög-egyenlőtlenség alapján:

$$\text{Ha } y \text{ olyan, hogy } d(y, x) < r_{\varepsilon/3}, \quad d(f(y), a) \leq \underbrace{d(f(y), f_m(y))}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{d(f_m(y), a_m)}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{d(a_m, a)}_{< \varepsilon/3}.$$

akkor  $d(f(y), a) < \varepsilon$ , mert

Bebizonyítottuk tehát az 1. állítást: az  $a$  érték tényleg az  $f$  határértéke  $x$ -ben. A 2. állításhoz: ha  $x \in H$   $\text{Dom } f$  izolált pontja, akkor itt  $f$  folytonos, ha pedig  $x$  torlódási pont, akkor

$$f(x) \stackrel{1.}{=} \lim_n f_n(x) \stackrel{2.}{=} \lim_n \left( \lim_{y \rightarrow x} f(y) \right) \stackrel{3.}{=} \lim_{y \rightarrow x} \left( \lim_n f_n(y) \right) \stackrel{4.}{=} \lim_{y \rightarrow x} f(y), \quad \text{vagyis } f \text{ folytonos } x\text{-ben.}$$

A lépések voltak: 1.) mert az  $f$  az  $f_n$  függvénysorozatnak pontonkénti határértéke is, 2.) mert minden  $f_n$  folytonos  $x$ -ben, 3.) az első állítást használjuk, 4.) megint:  $f$  pontonkénti határérték.

## B.4. Kiegészítések hatványsorokhoz

• Az 1.3. szakaszban előkerült a **Cauchy-Hadamard-tétel**. Még egyszer: egy  $\sum_n a_n(z-z_0)^n$  hatványsor  $R$  konvergenciasugara:  $1/R = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ , és a hatványsor divergens, ha  $|z-z_0| > R$ , (pontonként) abszolút konvergens, ha  $|z-z_0| < R$ , és ha  $r < R$ , akkor a  $z_0$  körüli  $r$  sugarú körlapon egyenletesen konvergens. A **bizonyítás** azt követi, ahogy megideologizáltuk a geometriai sorral.

1. Ha  $|z-z_0| > R$ , akkor  $|z-z_0| \cdot (\limsup \sqrt[n]{|a_n|}) > 1$ . Az  $a_n$ -ek sorozata szempontjából  $|z-z_0|$  állandó; ezt bevive ilyenkor  $\limsup (\sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|}) > 1$ . Ilyenkor választhatunk egy  $1$  és  $\limsup (\sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|})$  közötti  $q \in \mathbb{R}$  számot: ekkor tehát végtelen sok  $n$ -re igaz (a  $\limsup$  alaptulajdonsága miatt), hogy  $\sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} > q$ , azaz hogy  $|a_n(z-z_0)^n| > q^n$ . Mivel  $q^n$  ilyenkor egyre nagyobb, ahogy  $n$  növekszik (ugyebar  $q > 1$ ), emiatt az  $a_n(z-z_0)^n$ -ek sorozata  $n \rightarrow \infty$ -re nem tarthat nullához, azaz nem is lehet összegezhető. A  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$  sor ilyen  $z$ -kre divergens.
2. Ha  $|z-z_0| < R$ , akkor azt kapjuk, hogy  $\limsup (\sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|}) < 1$ . Itt is „befér” közéljük egy  $q$  szám; legyen tehát  $q$  olyan, hogy  $\limsup (\sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|}) < q$ , de  $q < 1$ . Előbbi miatt az  $\sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|}$  sorozatnak csak véges sok tagja nagyobb  $q$ -nál, azaz véges sok  $n$ -et kivéve  $|a_n(z-z_0)^n| < q^n$ . A  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$  végtelen összeg létezik (mivel  $q < 1$ ), emiatt az  $a_n(z-z_0)^n$ -ek abszolútértékes összege is létezik: a  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$  sor ilyen  $z$ -kre abszolút konvergens.
3. Az előbbieket szerint  $r < R$  esetén létezik  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ . Mivel ha  $|z-z_0| < r$  (azaz az  $r$  sugarú körlapon)  $|a_n(z-z_0)^n| \leq |a_n| r^n$ . Abból, hogy az utóbbiak összegezhetőek, a fentebbi (B.24) *Weierstrass-kritérium* alapján következik, hogy a függvénysor, azaz most  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ , egyenletesen is konvergens a kijelölt halmazon, azaz az  $r < R$  sugarú körlapon.

• Hatványsorok **differenciálhatóságát vizsgálva** az alapkérdés: differenciálható függvények sorozatának határértéke differenciálható-e, és ha igen, a határértékfüggvény deriváltja a deriváltak határértéke-e. *Általában nem*. A következő (sokszor teljesülő) feltételek viszont már elegendők.

**Állítás:** legyen  $H \subset \mathbb{K}$  konvex, korlátos, nyílt halmaz,  $f_n: H \rightarrow \mathbb{K}$  differenciálható függvények, amikre az  $f'_n$ -ek sorozata egyenletesen konvergens  $H$ -n, és legalább egy  $z_0 \in H$ -ban  $f_n(z_0)$  is konvergens. Ekkor az  $f_n$ -ek sorozata az egész  $H$ -n is egyenletesen is konvergens, a határértéke differenciálható, és  $(\lim_n f_n)' = \lim_n f'_n$ . (B.25)

Ilyenkor tehát *megcserélhetjük a deriválást és a határértékképzést*. Figyelem: a deriváltak egyenletes konvergenciája kell (az  $f'_n$ -ekkel néha egyszerűbb is „bánni”; az  $f_n$ -ek konvergenciájáról kevés is elég), az eredeti  $f_n$ -ek egyenletes konvergenciája következmény. Fordítva viszont nem megy.<sup>92</sup>

• E pontban a (B.25) állítást bizonyítjuk. Kell majd a differenciálás elméletében alapvető *általános középértéktétel*: (a  $\mathbb{C}$ -beli szakaszokat is értelem szerűen jelölve) egy  $\phi: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  függvényre

ha  $\phi$  folytonos a zárt  $[z, w]$  szakaszon és differenciálható  $]z, w[$ -n, akkor van olyan  $u \in ]z, w[$ , hogy 
$$|\phi'(u)| \geq \frac{|\phi(w) - \phi(z)|}{|w - z|}. \quad (\text{B.26})$$

Ezt is bizonyítjuk alább; most csak egy *következmény* kell: ha  $\phi$  differenciálható  $[z, w]$ -n, akkor  $|\phi(w) - \phi(z)| \leq |w - z| \cdot \sup_{u \in [z, w]} |\phi'(u)|$ . Térjünk rá (B.25)-re. Az  $f_n(z_0)$  sorozat konvergens, tehát Cauchy-féle, és az  $f'_n$ -ek sorozata egyenletesen konvergens, így rá érvényes a (B.23) Cauchy-

<sup>92</sup>Tudva (itt kicsit „előre”, hiszen a hatványsorok deriválhatósága kell ahhoz, hogy levezessük), hogy  $\exp' = \exp$ , kigondolhatjuk, hogy pl. az  $f_n(x) = \frac{1}{n} e^{inx}$  függvények differenciálhatók, egyenletes határértékük  $f = 0$ , azonban az  $f'_n$  függvénysorozat sehol sem konvergens: nem lehet szó itt tehát határérték és a differenciálás megcseréléséről.

kritérium. Minden  $\varepsilon > 0$ -ra van tehát olyan  $\mathcal{N}'_\varepsilon$  küszöbindex, hogy mindkettő követelménye teljesül:

$$\text{minden } m, n > \mathcal{N}'_\varepsilon\text{-ra} \quad \sup_{u \in H} |f'_n(u) - f'_m(u)| \leq \frac{\varepsilon}{2D}, \quad \text{és} \quad |f_n(z_0) - f_m(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

ahol  $D$  a  $H$  halmaz átmérője (amire  $0 < D < \infty$ , mert  $H$  nyílt és korlátos). Kicsit „csaltunk”: „előre tudjuk”, hogy mi kell majd, ezért a „bármilyen kicsi” számokat itt rögtön „jól” választottuk.

Bármilyen  $z \in H$ -ra  $[z_0, z] \subset H$  (mert  $H$  konvex), és  $|z - z_0| \leq D$ . Alkalmazzuk a középértéktételt az (egész  $H$ -n, tehát minden  $[z_0, z]$  szakaszon is differenciálható)  $f_n - f_m$  függvényre:

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f_m(z) - (f_n(z_0) - f_m(z_0))| &\leq |z - z_0| \cdot \sup_{u \in [z, z_0]} |f'_n(u) - f'_m(u)| \Rightarrow \\ \Rightarrow \sup_{z \in H} |f_n(z) - f_m(z) - (f_n(z_0) - f_m(z_0))| &\leq D \cdot \sup_{u \in H} |f'_n(u) - f'_m(u)|, \end{aligned}$$

hiszen  $|z - z_0|$  legfeljebb  $D$  lehet. Ezeket összetéve tehát ha  $m, n > \mathcal{N}'_\varepsilon$ , akkor

$$\sup_{z \in H} |f_n(z) - f_m(z)| \leq |f_n(z_0) - f_m(z_0)| + \sup_{z \in H} |f_n(z) - f_m(z) - (f_n(z_0) - f_m(z_0))| \leq D \frac{\varepsilon}{2D} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Az  $f_n$ -ekre tehát teljesül a Cauchy-kritérium feltétele: az  $f_n$  függvénysorozat egyenletesen konvergens  $H$ -n. Jelölje a (most már minden  $z \in H$ -ra is biztosan létező) határértékfüggvényt  $f := \lim_n f_n$ . Azt kell belátni, hogy ő tényleg differenciálható, és  $f' = \lim_n f'_n$ . Jelöljük ki egy  $z \in H$ -t, és jelöljük  $\phi_{z,n}(w)$ -vel ill.  $\phi_z(w)$ -vel a  $w \in H$ ,  $w \neq z$  esetén értelmezett megfelelő különbségi hányadosokat:

$$\phi_{z,n}(w) = \frac{f_n(w) - f_n(z)}{w - z}, \quad \phi_z(w) = \frac{f(w) - f(z)}{w - z}.$$

Mivel  $f_n$ -ek differenciálhatók  $z$ -ben, a  $\phi_{z,n}(w)$  függvények  $w \rightarrow z$  függvényhatárértéke  $f'_n(z)$ . Továbbá a  $\phi_{z,n}(w)$  függvények  $w$ -ben pontonként  $\phi_z(w)$ -hez tartanak  $n \rightarrow \infty$ -re. Belátjuk, hogy egyenletesen is: a fentebbi becslésekkel és a középértéktételt használva, a két szuprémum összevonásánál kihasználva, hogy  $H$  konvex, teljesül a Cauchy-kritérium feltétele, mert

$$\begin{aligned} \text{minden } \varepsilon > 0\text{-ra ha} \quad \sup_{w \in H} |\phi_{z,n}(w) - \phi_{z,m}(w)| &= \sup_{w \in H} \frac{1}{|w - z|} |(f_n - f_m)(w) - (f_n - f_m)(z)| = \\ m, n > \mathcal{N}'_\varepsilon, \text{ akkor} \quad &= \sup_{w \in H} \left\{ \sup_{u \in [z, w]} |(f'_n - f'_m)(u)| \right\} = \sup_{u \in H} |f'_n(u) - f'_m(u)| \leq \frac{\varepsilon}{2D}. \end{aligned}$$

Ezzel viszont készen vagyunk, mert a fentebbi (B.22)-beli 1. állítás alapján

$$\text{létezik } f'(z) \equiv \lim_{w \rightarrow z} \phi_z(w), \quad \text{és} \quad f'(z) = \lim_{w \rightarrow z} \left[ \lim_n \phi_{z,n}(w) \right] = \lim_n \left[ \lim_{w \rightarrow z} \phi_{z,n}(w) \right] = \lim_n f'_n(z).$$

Mivel ez minden  $z \in H$ -ra igaz, készen vagyunk az állításunk bizonyításával.

• **A hatványsorok** (differenciálható) polinomok sorozatának határértékei; felvértelve a most bizonyított (B.25) állítással a következőket mondhatjuk. Láttuk a főszevegben az 1.3. szakaszban, hogy a tagonkénti deriváltakból álló hatványsornak és az eredetinek ugyanaz az  $R$  a konvergenciasugara. Egy adott  $r < R$  sugarú nyílt körlap konvex, korlátos, nyílt, a derivált függvénysor egyenletesen konvergens rajta (a Cauchy-Hadamard-tétel erre is vonatkozik), és az eredeti hatványsor is az (bár ide annyi is elég lenne, hogy legalább egy pontban konvergens itt). Így a hatványsorösszeg differenciálható az  $r$  sugarú körlapon, és a deriváltja a derivált sor összege. Ez minden  $r < R$ -re igaz, emiatt az egész  $R$  sugarú nyílt körlapon is. Összefoglalva **lehet tagonként deriválni**:

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{a konvergenciakörön belül} \\ f \text{ differenciálható, és itt} \end{array} \quad f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}. \quad (\text{B.27})$$

Ebből következik (ld. a főszeveg 1.3. szakaszát), hogy végtelenszer is az, és  $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z = z_0)$ .



• További kiegészítésként (néhány még alapvetőbb dologra hivatkozva) bebizonyítjuk a (B.26) általános középértéktételt, miszerint ha  $\phi$  differenciálható  $]z, w[$ -n és folytonos  $[z, w]$ -n, akkor van olyan  $u \in ]z, w[$ , hogy  $|\phi(z) - \phi(w)| \leq |z - w| \cdot |\phi'(u)|$ . Pongyolán:  $\phi$ -nek legalább néhol elég gyorsan kell változnia a szakaszon, hogy „eljuthasson”  $\phi(z)$ -ből  $\phi(w)$ -be; most ezt „kalapáljuk ki”.

Először tegyük fel, hogy bármilyen  $[z_1, w_1] \subset ]z, w[$  rész-szakasz esetén  $\frac{|\phi(w_1) - \phi(z_1)|}{|w_1 - z_1|} < \frac{|\phi(w) - \phi(z)|}{|w - z|}$ . Ekkor a folytonosság miatt fix  $w_1$ -re  $z_1 \rightarrow z$ -t véve ill. fix  $z_1$ -re  $w_1 \rightarrow w$ -t véve is  $\leq$  igaz lenne:

$$\begin{aligned} |\phi(w) - \phi(z)| |z_1 - z| &\geq |\phi(z_1) - \phi(z)| |w - z|, & \text{továbbá az eredeti egyenlőtlenség:} \\ |\phi(w) - \phi(z)| |w - w_1| &\geq |\phi(w) - \phi(w_1)| |w - z|, & |\phi(w) - \phi(z)| |w_1 - z_1| > |\phi(w_1) - \phi(z_1)| |w - z|. \end{aligned}$$

Összeadva, és tudva, hogy  $z_1$  és  $w_1$  a szakaszon vannak, tehát  $|w - w_1| + |w_1 - z_1| + |z_1 - z| = |w - z|$ ,

$$|\phi(w) - \phi(z)| > |\phi(w) - \phi(w_1)| + |\phi(w_1) - \phi(z_1)| + |\phi(z_1) - \phi(z)|$$

adódna, ez viszont kizárt, mert a háromszög-egyenlőtlenség éppen az ellenkezőt biztosítja.

Tehát *van* olyan  $[z_1, w_1] \subset ]z, w[$ , aminek végpontjaira  $\frac{|\phi(w_1) - \phi(z_1)|}{|w_1 - z_1|} \geq \frac{|\phi(w) - \phi(z)|}{|w - z|}$ . Felezzük el  $[z_1, w_1]$ -et a  $v$  ponttal; ekkor  $|\phi(w_1) - \phi(z_1)| \leq |\phi(w_1) - \phi(v)| + |\phi(v) - \phi(z_1)|$ . A jobb oldalon emiatt legalább az egyik tag nem kisebb, mint  $\frac{1}{2} |\phi(w_1) - \phi(z_1)|$ . Amelyikre ez igaz, annak megfelelően  $z_1$ -et és  $v$ -t, vagy  $v$ -t és  $w_1$ -et nevezzük  $z_2$ -nek és  $w_2$ -nek (vagy ha mindkettő jó, válasszunk); ezzel

$$|\phi(w_2) - \phi(z_2)| \geq \frac{1}{2} |\phi(w_1) - \phi(z_1)| \Rightarrow \frac{|\phi(w_2) - \phi(z_2)|}{|w_2 - z_2|} \geq \frac{|\phi(w_1) - \phi(z_1)|}{|w_1 - z_1|} \geq \frac{|\phi(w) - \phi(z)|}{|w - z|}, \quad (\text{B.28})$$

ahol kihasználtuk, hogy  $|w_2 - z_2| = \frac{1}{2} |w_1 - z_1|$ . Ugyanígy okoskodva a  $[z_2, w_2]$  szakasz valamelyik ( $[z_3, w_3]$ -nak nevezendő) zárt felére lesz igaz, hogy  $\frac{|\phi(w_3) - \phi(z_3)|}{|w_3 - z_3|} \geq \frac{|\phi(w) - \phi(z)|}{|w - z|}$ . Továbbmenve:

$$\forall k \in \mathbb{N}^+ \text{-hoz van olyan } [z_k, w_k] \text{ zárt szakasz, hogy } \frac{|\phi(w_k) - \phi(z_k)|}{|w_k - z_k|} \geq \frac{|\phi(w) - \phi(z)|}{|w - z|}. \quad (\text{B.29})$$

$[z_k, w_k] \subset [z_{k-1}, w_{k-1}]$ ,  $|w_k - z_k| = |w_1 - z_1| / 2^k$ , és

A nullához tartó hosszú, egymásba skatulyázott zárt  $[z_k, w_k]$ -knak a beszédes nevű *Cantor-féle közösrész-tétel* alapján van egy közös pontjuk; legyen ez  $u$ : erre tehát  $u \in ]z, w[$ . Feltettük, hogy  $\phi$  differenciálható *itt is*: minden  $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan  $r_\varepsilon > 0$ , hogy  $|\phi(v) - \phi(u) - \phi'(u) \cdot (v - u)| \leq \varepsilon |v - u|$  teljesül minden  $v$ -re, amire  $|v - u| < r_\varepsilon$ . A szakaszvégekre  $\lim_{k \rightarrow \infty} |w_k - u| = \lim_{k \rightarrow \infty} |u - z_k| = 0$ , ezért akármennyi is lett  $r_\varepsilon$ , van olyan  $z_k$  és  $w_k$ , amelyekre  $|w_k - u| < r_\varepsilon$  és  $|u - z_k| < r_\varepsilon$ . Ezeket használva

$$\begin{aligned} |\phi(w_k) - \phi(z_k) - \phi'(u) \cdot (w_k - z_k)| &= |(\phi(w_k) - \phi(u) - \phi'(u) \cdot (w_k - u)) - (\phi(z_k) - \phi(u) - \phi'(u) \cdot (z_k - u))| \leq \\ &\leq |\phi(w_k) - \phi(u) - \phi'(u) \cdot (w_k - u)| + |\phi(z_k) - \phi(u) - \phi'(u) \cdot (z_k - u)| \leq \varepsilon |w_k - u| + \varepsilon |u - z_k| = \varepsilon |w_k - z_k|. \end{aligned}$$

Összeolvasva és háromszög-egyenlőtlenséggel átrendezve

$$|\phi(w_k) - \phi(z_k)| \leq |\phi'(u) \cdot (w_k - z_k)| + \varepsilon |w_k - z_k| \Rightarrow |\phi(w_k) - \phi(z_k)| \leq (|\phi'(u)| + \varepsilon) |w_k - z_k|,$$

amiből osztással, majd kihasználva a fenti (B.29) becslést (az is és előzményei is ezért kellettek):

$$\frac{|\phi(w_k) - \phi(z_k)|}{|w_k - z_k|} \leq \varepsilon + |\phi'(u)| \Rightarrow \frac{|\phi(w) - \phi(z)|}{|w - z|} \leq \varepsilon + |\phi'(u)|.$$

A talált  $u$ -ra tehát minden  $\varepsilon > 0$  esetén igaz ez: emiatt  $\frac{|\phi(w) - \phi(z)|}{|w - z|} \leq |\phi'(u)|$  is igaz; kész.<sup>93</sup>

<sup>93</sup>Megjegyzések: 1.) nem kell, hogy  $\phi'$  folytonos legyen; nem is érvelhetnénk pl. úgy, hogy  $\phi'$  a szakaszon felvenné a maximumát, stb. 2.) úgy tűnhet, hogy csak egy megfelelő  $u$  van a szakaszon, de akár minden felező lépésben lehet, hogy mindkét szakaszfél teljesíti a felülbecslést (és szabadon választhatunk). Általában sok jó  $u$  van; eme alapvető tétel *legalább* egyet állít. 3.) A bizonyítás általánosítható vektortereken értelmezett differenciálható függvényekre.

## C. függelék: Bizonyítások, kiegészítések

### C.1. A Cauchy-tétel Goursat-féle bizonyítása

• A *Cauchy-tétel*: egyszeresen összefüggő nyílt halmazban differenciálható  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvénynek a halmazban futó zárt görbére vett körintegrálja nulla. Szinte minden későbbi eredmény ezen alapult. A 3.5. szakaszban látott bizonyításhoz fel kellett tenni a *folytonos* differenciálhatóságot; a következő úton haladva nincs szükség erre a plusz feltevésre. Az első lépés az ún.

**Goursat-lemma:** ha  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  differenciálható egy a  $T$  zárt háromszöglapot tartalmazó nyílt halmazon, akkor 
$$\oint_{\partial T} dz f(z) = 0. \quad (\text{C.1})$$

•  $T$  *zárt*: a határa,  $\partial T$  is beleértendő, és itt is pozitív irányítást veszünk. Az állításunk standard **bizonyítása** ahhoz hasonlóan alapszik a Cantor-féle közösrész-tételre, ahogy a középértéktétel egy oldallal ezelőtti bizonyítása. Daraboljuk fel  $T$ -t *négy* egybevágó háromszögre (ábra lentebb):

a szembe menő belső oldalak kiejtik egymást, ezért 
$$\oint_{\partial T} dz f(z) = \oint_{1.\text{darab}} dz f(z) + \oint_{2.\text{darab}} dz f(z) + \oint_{3.\text{darab}} dz f(z) + \oint_{4.\text{darab}} dz f(z),$$

$$\Rightarrow \text{emiatt} \quad \left| \oint_{\partial T} dz f(z) \right| \leq \left| \oint_{1.\text{darab}} dz f(z) \right| + \left| \oint_{2.\text{darab}} dz f(z) \right| + \left| \oint_{3.\text{darab}} dz f(z) \right| + \left| \oint_{4.\text{darab}} dz f(z) \right|.$$

Utóbbi miatt a négy darab integrál közül legalább az egyiknek az abszolútértéke biztos nem kisebb, mint az eredeti negyede. Jelöljük  $T_1$ -gyel ezt a (vagy az egyik ilyen) háromszöget; erre tehát

$$\left| \oint_{\partial T} dz f(z) \right| \leq 4 \cdot \left| \oint_{\partial T_1} dz f(z) \right|.$$

Az előzőhöz hasonlóan a  $T_1$ -et is négybe daraboljuk; megint lesz olyan ( $T_2$ -vel jelölt) darab, amelyekre vett integrál abszolútértéke a  $T_1$ -re vettének  $1/4$ -énél nem kisebb. Ugyanígy tovább: minden  $n \in \mathbb{N}^+$ -ra van olyan  $T_n$  háromszögdarab, amire a hasonló becslés igaz, vagyis

$$\left| \oint_{\partial T} dz f(z) \right| \leq 4 \cdot 4 \cdot \left| \oint_{\partial T_2} dz f(z) \right|, \quad \dots \quad \left| \oint_{\partial T} dz f(z) \right| \leq 4^n \cdot \left| \oint_{\partial T_n} dz f(z) \right|.$$

A  $T_n$  háromszögek egymásba skatulyázott, nullához tartó átmérőjű **zárt** halmazok: itt is a *Cantor-féle közösrész-tétel* miatt mondhatjuk, hogy van pontosan egy olyan  $z_0$ , amely mindegyik  $T_n$  háromszögünknek eleme. Feltevésünk szerint  $f$  *itt is* differenciálható („akárhol is” van ez a  $z_0$ ), emiatt

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + (z - z_0) \cdot f'(z_0) + \mathcal{O}(z - z_0), \quad \text{ahol} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\mathcal{O}(z - z_0)}{z - z_0} = 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \oint_{\partial T_n} dz f(z) &= \oint_{\partial T_n} dz f(z_0) + \oint_{\partial T_n} dz f'(z_0) \cdot (z - z_0) + \oint_{\partial T_n} dz \mathcal{O}(z - z_0). \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Az  $f(z_0)$  szám az  $f(z_0) \cdot z$  függvénynek, az  $f'(z_0) \cdot (z - z_0)$  pedig az  $\frac{f'(z_0)}{2}(z - z_0)^2$ -nek a deriváltja: a Newton-Leibniz-formula miatt az első két tag nulla (mert deriválnak integrálja zárt görbére). A harmadik tagban pedig mivel  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\mathcal{O}(z - z_0)}{z - z_0} = 0$ , ezért ha  $\varepsilon > 0$  akármilyen szám, van a  $z_0$ -nak olyan környezete, hogy ha  $z$  ebben van, akkor  $|\mathcal{O}(z - z_0)| \leq \varepsilon \cdot |z - z_0|$ . Továbbá elég nagy  $n$  esetén a  $T_n$  háromszöglap (és az összes későbbi is) biztosan benne van ebben a környezetben. Ha az eredeti  $T$  háromszög átmérője  $d$  és kerülete  $\ell$ , akkor a  $T_n$  átmérője  $d/2^n$ , kerülete pedig  $\ell/2^n$ . Előbbi miatt a  $T_n$ -ben lévő  $z$ -kre  $|z - z_0| \leq d/2^n$  biztosan igaz. Ezeket összetéve az ilyen  $T_n$ -re az iménti (C.2)

utolsó tagjában a szokásos integrálbecslés azt adja, hogy

$$\left| \oint_{\partial T_n} dz \mathcal{O}(z-z_0) \right| \leq \frac{\ell}{2^n} \cdot \max_{z \in \partial T_n} |\mathcal{O}(z-z_0)| \leq \frac{\ell}{2^n} \cdot \varepsilon \cdot \max_{z \in \partial T_n} |z-z_0| \leq \frac{\ell}{2^n} \cdot \varepsilon \cdot \frac{d}{2^n} = \varepsilon \cdot \frac{\ell \cdot d}{4^n}.$$

Ez tehát az egyetlen nem eltűnő tag  $f$ -nek  $\partial T_n$ -re vett integráljából; visszatéve ezt az eredeti  $T$ -re vett integrálra vonatkozó becslésbe a  $4^n$  pont kiesik, így azt kapjuk, hogy

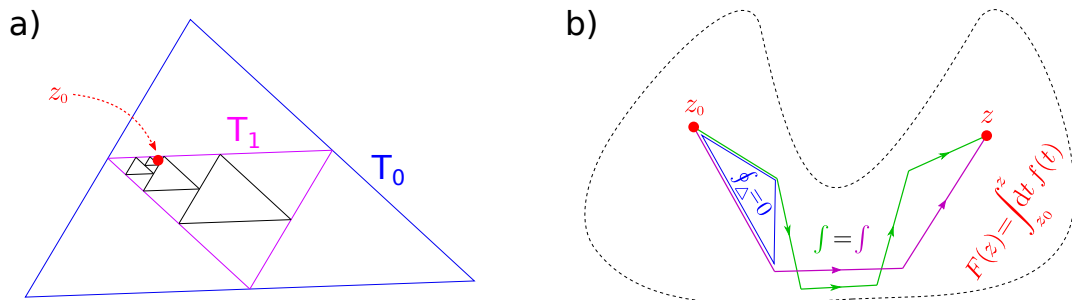
$$\left| \oint_{\partial T} dz f(z) \right| \leq \varepsilon \cdot \ell d. \quad \Rightarrow \quad \text{mivel } \varepsilon \text{ bármilyen kicsi lehet} \quad \Rightarrow \quad \oint_{\partial T} dz f(z) = 0. \quad \text{Kész.}$$

• Az akármilyen görbékre vonatkozó Cauchy-tételhez *töröttvonalakkal* juthatunk el. Ha  $\text{Dom} f$  egyszeresen összefüggő nyílt, akkor adott  $z_0$  és  $z$  esetén *összeköthetjük* őket  $\text{Dom} f$ -beli töröttvonalal, másrészt bármely két ilyen átdarabolhatunk egymásba úgy, hogy a különbség-darabok olyan háromszögvonalak, amelyek teljes lapjukkal együtt  $\text{Dom} f$  belsejében vannak. Ha még  $f$  differenciálható is, akkor ezekre már tudjuk a Goursat-lemmából, hogy  $f$  körintegrálja nulla rájuk: a mondott feltételek mellett emiatt bármely két ( $z_0$ -tól  $z$ -ig futó) töröttvonalra ugyanannyi  $f$  integrálja. A Newton-Leibniz-formulánál látottat töröttvonalakra megszorítva tehát

$$\begin{array}{l} \text{fixáljuk egy } z_0 \in \text{Dom} f \text{ kezdőpontot,} \\ \text{és definiáljuk így az } F(z) \text{ függvényt:} \end{array} \quad F(z) := \int_{\gamma(z_0, z)} dt f(t); \quad \begin{array}{l} \gamma(z_0, z) \text{ egy } \text{Dom} f\text{-beli} \\ \text{töröttvonal } z_0\text{-tól } z\text{-ig.} \end{array}$$

Az imént mondottak miatt ez az  $F(z)$  jól definiált, azaz tényleg akármilyen töröttvonalat megengedhetünk (*rájuk* már tudjuk az integrál útfüggetlenségét). A  $z_0$ -t más  $z_1$ -be is tehetjük: a különbség csak a  $z_0$ -tól  $z_1$ -ig (akármilyen töröttvonalon) vett integrál konstans értéke  $F$ -ben.

Ennek az  $F(z)$ -nek valóban  $f(z)$  a deriváltja; érdemes ezt alaposan végiggondolni. Adott  $z$  és  $z+\Delta z$  esetén a  $z+\Delta z$ -be menő töröttvonal lehet az, amit a  $z$ -be menőhöz még  $\Delta z$ -t hozzá téve kapunk: így  $F(z+\Delta z) = F(z) + \int_z^{z+\Delta z} dt f(t)$ . Az  $f$  folytonos  $z$ -ben (mert differenciálható): minden  $\varepsilon > 0$ -hoz van  $z$ -nek olyan kis környezete, amin belüli  $t$ -kre  $|f(t) - f(z)| < \varepsilon$ . Erre gondolva írhatjuk, hogy  $F(z+\Delta z) - F(z) = \int_z^{z+\Delta z} dt f(z) + \int_z^{z+\Delta z} dt (f(t) - f(z))$ . Az első tag a konstans  $f(z)$  integrálja, értéke  $\Delta z \cdot f(z)$ . Ha pedig  $\Delta z$  olyan kicsi, hogy ennyivel odébb is már a mondott környezetben maradunk, akkor a második tagot abszolútértékben felülbecsülhetjük  $|\Delta z| \cdot \varepsilon$ -nal. Azaz: ha  $\Delta z$  elég kicsi, akkor minden  $\varepsilon > 0$  esetén  $F(z+\Delta z) - F(z) - \Delta z \cdot f(z)$ -t a  $|\Delta z| \cdot \varepsilon$ -nal tudjuk felülbecsülni, így  $F$  tényleg differenciálható  $z$ -ben, és deriváltja  $f(z)$ . Ezek miatt viszont mivel  $f = F'$ , a Newton-Leibniz-formula miatt  $f$ -nek bármilyen a halmazunkban futó zárt görbére (most már nemcsak töröttvonalakra) nulla az integrálja. Készen vagyunk.



53. ábra. a.) a Goursat-lemma bizonyításához b.) töröttvonalakra a Goursat-lemmából tudhatjuk az integrál útfüggetlenségét, amivel definiálhatjuk  $F$ -et úgy, hogy  $F' = f$  legyen.

## C.2. Kiegészítések a Cauchy-formulák és a Laurent-tétel bizonyításához

• Végtelen összeget nem mindig integrálhatunk tagonként. A 4.2. szakasz végén a komplex differenciálható függvények analitikusságának bizonyításánál tisztázatlanul maradt, hogy az ottani 27. ábrán láthatóan a  $z_0$  ponttól megfelelően messze futtatott  $\gamma$  integrációs út esetén a geometriai sorba fejtett integrandust tényleg integrálhatjuk tagonként a (4.15) képlet szerint. Pontosan ugyanez merül fel a Laurent-sor levezetésekor a (4.25) képlet első tagjában. Be kellene tehát látni, hogy

$$\oint_{\gamma} \frac{dt}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} f(t) \frac{(z-z_0)^n}{(t-z_0)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{\gamma} \frac{dt}{2\pi i} f(t) \frac{(z-z_0)^n}{(t-z_0)^{n+1}}, \quad \text{ha } \gamma \text{ olyan, hogy minden } t \in \gamma \text{ esetén } |t-z_0| > |z-z_0|.$$

A második alakból az integrálok alól  $z-z_0$  hatványait kiemelve jutunk végül hatványsorra (vagy a Laurent-sor nemnegatív tagjaira) és az együtthatókat megadó integrálképletekre.

Ha belátjuk, hogy a sorösszegzés itt a  $t$  változóban *egyenletesen konvergens*, akkor a 3.2. szakaszban látott *Lebesgue-tétel* miatt, mivel itt véges szakaszra vett integrálok vannak, igaz lesz, hogy az integrandusok határértékének (azaz itt az összegzésre nézve: végtelen összegének) integrálja tényleg egyenlő lesz a határérték (azaz: a sorösszeg) integráljával, így készen is lennénk.<sup>94</sup> A B.3. függelékben tárgyalt *Weierstrass-kritérium* szerint ha az integrandusok  $t$ -ben vett *szuprémumai* abszolútértékben összegezhetőek, akkor egyenletes a konvergencia. Mármost a  $\gamma$  görbe és a  $|z-z_0|$  sugarú körvonal korlátos zárt halmazok: egyrészt  $|f(t)|$  mint folytonos függvény a  $\gamma$ -n felveszi a maximumát; ennek jele legyen most  $M := \max_{t \in \gamma} |f(t)|$ . Másrészt a síkon diszjunkt *korlátos zárt* halmazok távolsága nullánál *nagyobb*.<sup>95</sup> Emiatt „be lehet szorítani” közéjük  $r_1$  és  $r_2$  sugarakat: ezekre tehát minden  $t$ -re igaz, hogy  $|t-z_0| > r_1 > r_2 > |z-z_0|$ . Emiatt tehát  $\sup_{t \in \gamma} \frac{1}{|t-z_0|} \leq \frac{1}{r_1}$ , amivel úgy alakíthatjuk az abszolútértékek szuprémumainak összegét, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{t \in \gamma} \left| f(t) \frac{(z-z_0)^n}{(t-z_0)^{n+1}} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} M \cdot \sup_{t \in \gamma} \frac{|z-z_0|^n}{|t-z_0|^{n+1}} \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z-z_0|^n}{r_1^{n+1}} < \frac{M}{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_2^n}{r_1^n} = \frac{M}{r_2-r_1} < \infty,$$

hiszen a legutolsó geometriai sor összegezhető volt. Teljesül tehát a Weierstrass-kritérium feltétele, így az eredeti integrandusok sorösszege tényleg egyenletesen konvergens, így a Lebesgue-tétel alapján tényleg felcserélhetjük az összegzést és az integrálást. *Készen vagyunk!*

A Laurent-tételt levezető (4.25) képlet második tagjában pedig „fordítva”: be kell látni, hogy

$$\oint_{\gamma'} \frac{dt'}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} f(t') \frac{(t'-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{\gamma'} \frac{dt'}{2\pi i} f(t') \frac{(t'-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}, \quad \text{ha } \gamma' \text{ olyan, hogy minden } t' \in \gamma' \text{ esetén } |t'-z_0| < |z-z_0|.$$

Itt a  $\gamma'$  és a  $|z-z_0|$  sugarú kör közé a  $|t'-z_0| < r_2 < r_1 < |z-z_0|$  módon szűrjük be  $r_1$ -et és  $r_2$ -t, amikkel a Weierstrass-kritérium feltételét a látott módon ellenőrizve belátjuk a  $t'$ -ben vett egyenletes konvergenciát, majd a Lebesgue-tételt tudva az integrálás és az összegzés kicserélhetőségét.

• A Laurent-sor létezését tehát (a 4.4. szakaszban látottakkal együtt) teljesen bebizonyítottuk; a tétel néhány részlete van csak hátra. A sor *abszolút* konvergenciájához be kell látni, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n (z-z_0)^n| < \infty, \quad \text{ill.} \quad \sum_{n=-\infty}^0 |c_n (z-z_0)^n| < \infty, \quad \text{ahol} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint^{(z_0+)} dt \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}.$$

<sup>94</sup>Mivel komplex integrált (paraméterezve) átírhatunk valós integrálra, teljes lelki nyugalommal használhatjuk komplex vonalintegrálokra is a (korábban csak valós integrálokra megtárgyalt) Lebesgue-tételt és következményeit.

<sup>95</sup>Kihívás: mutassunk a síkon két diszjunkt korlátos nyílt, ill. két diszjunkt zárt nem korlátos halmazt, amelyek távolsága nulla, azaz nincs olyan pozitív szám, hogy semelyik pontjaik sincsenek ennél közelebb egymáshoz!

A  $c_n$ -ek értéke szempontjából mindegy, hogy hol fut a  $c_n$ -ek kifejezésében a  $z_0$ -t megkerülő integrációs út, azonban azt bizonyos módon megválasztva az *integrálbecslés* hatékonyabb lehet, mint másképp. Vegyünk  $\gamma$  útnak egy  $z_0$  körüli  $R$  sugarú körvonalat: ezen  $|t-z_0|=R$ , amiből

$$|c_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{\gamma} dt \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \max_{t \in \gamma} |f(t)| \cdot \frac{1}{R^{n+1}} \cdot 2\pi R \Rightarrow |c_n| \leq \frac{\max_{t \in \gamma} |f(t)|}{R^n}.$$

Ez így minden  $n \in \mathbb{Z}$  index esetén igaz. Az  $n \geq 0$  esetben rögzítsük  $R$ -et úgy, hogy  $R > |z-z_0|$  legyen: ezt megtehetjük, mert biztos, hogy  $f$  még egy  $|z-z_0|$ -nál (akárcsak kicsivel is, de) nagyobb sugarú  $z_0$  középpontú kipontozott körlapon is differenciálható. Ebből arra jutunk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n (z-z_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot |z-z_0|^n \leq \max_{t \in \gamma} |f(t)| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{|z-z_0|}{R} \right)^n = \frac{\max_{t \in \gamma} |f(t)|}{1 - \frac{|z-z_0|}{R}} < \infty,$$

hiszen itt  $\frac{|z-z_0|}{R} < 1$  volt igaz. A sor negatív részéhez pedig az integrációs  $\gamma'$  körvonal sugara legyen olyan  $R'$ , amire  $R' < |z-z_0|$ ; ezt is megtehetjük. Ezzel (az összegzőindexet most úgy jelölve, hogy  $-n$  fusson végig, és  $n$  nullától  $\infty$ -ig menjen, és tudva, hogy most  $\frac{R'}{|z-z_0|} < 1$ ):

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_{-n} (z-z_0)^{-n}| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_{-n}| \cdot |z-z_0|^{-n} \leq \max_{t' \in \gamma'} |f(t')| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{R'}{|z-z_0|} \right)^n = \frac{\max_{t' \in \gamma'} |f(t')|}{1 - \frac{R'}{|z-z_0|}} < \infty.$$

*Kész:* a sor negatív és pozitív részéről is (az együtthatóbecslés alapján tudottan konvergens geometriai sorral felülbecsülve) beláttuk, hogy a szóba jövő  $z$ -k esetén abszolút konvergens is.

• A Laurent-sor  $z$ -ben való egyenletes konvergenciája egy most  $\mathcal{G}$ -vel jelölt,  $r_1$  belső és  $r_2$  külső sugarú körgyűrűn (itt  $0 < r_1 < r_2 < R$ , ahol  $R$  olyan sugár, hogy  $f$  az ilyen sugarú körlapon belül még mindenhol differenciálható) a Weierstrass-kritériumból következik:

$$\begin{aligned} \text{mivel } r_2 \text{ a külső sugár, } n \geq 0\text{-ra } \sup_{z \in \mathcal{G}} |c_n| |z-z_0|^n &\leq |c_n| r_2^n, \\ \text{és mivel } r_1 \text{ a belső sugár, } n \geq 0\text{-ra } \sup_{z \in \mathcal{G}} |c_{-n}| |z-z_0|^{-n} &\leq |c_{-n}| r_1^{-n}, \end{aligned}$$

és éppen az előbb belátott abszolút konvergencia alapján tudhatjuk, hogy a felülről becsülő mennyiségek összegezhetőek a pozitív ill. a negatív  $n$ -eken való összegzésben. Teljesül tehát a Weierstrass-kritérium feltétele: egyenletes a konvergencia  $\mathcal{G}$ -n. (Persze ugye  $r_1$ -et akármilyen kicsi nem nullának,  $r_2$ -t pedig akármilyen nagy, de a lehetséges legnagyobb  $R$ -nél kisebb értékűnek vehetjük.)

Tudva a Laurent-sor ilyen egyenletes konvergenciáját, ha a sort (akár  $(z-z_0)^m$ -mel megszorozva, minden  $m \in \mathbb{Z}$  esetre) integráljuk egy a  $z_0$ -t megkerülő korlátos zárt görbén, akkor a Lebesgue-tétel következménye alapján tényleg integrálhatunk tagonként. Vagyis jogos ez a lépés, amikor az együtthatók egyértelműségét ilyen „ráintegrálással” láttuk be; ld. a (4.26) egyenletet.

### C.3. A „varázsformula” bizonyítása és további részletei

• A 2.4. szakaszban láttuk a (2.21) „varázsformulát”, amely megadja az  $f(z)$  komplex differenciálható függvényt, ha ismert annak  $U(x, y)$  valós része. Felidézzük: ha az  $U(x, y)$  függvény (mindjárt pontosítva) „élég sima”, és  $(x_0, y_0)$ -ban értelmes, akkor a  $z_0 \equiv x_0 + iy_0$  jelöléssel

$$f(x+iy) = U(x, y) + iV(x, y) \Leftrightarrow f(z) = 2 \cdot U\left(x = \frac{z+z_0^*}{2}, y = \frac{z-z_0^*}{2i}\right) - U(x_0, y_0). \quad (\text{C.3})$$

*Rájönni* erre érdekes szellemi kaland lehetett; mi most csak *belátjuk* (és helyrerázzuk) ezt: első lépésként konkrétan ellenőrizzük  $z_0$  középpontú *monomokra*, tehát az ilyen függvényekre:  $c_0$ ,

$c_1(z-z_0)$ ,  $c_2(z-z_0)^2$ , stb., ahol most  $c_0 \equiv a_0+ib_0$ ,  $c_1 \equiv a_1+ib_1$ ,  $c_2 \equiv a_2+ib_2$ , azaz akármelyikük egy-egy adott komplex szám. Jelöljük ideiglenesen  $\tilde{f}$ -vel azt, amit a bizonyítandó (C.3) varázssformula állít elő a legyártott  $U$ -ból. *Ellenőrizzük le  $z=x+iy-t$ ,  $z_0=x_0+iy_0-t$ ,  $c_n=a_n+ib_n$ -et beírva, hogy*

$$\begin{aligned} f_0(z) = c_0 & \Rightarrow U_0(x, y) = a_0 \\ & \Rightarrow \tilde{f}_0(z) = \dots = a_0. \\ f_1(z) = c_1(z-z_0) & \Rightarrow U_1(x, y) = a_1(x-x_0) - b_1(y-y_0) \\ & \Rightarrow \tilde{f}_1(z) = \dots = (a_1+ib_1)(z-z_0). \\ f_2(z) = c_2(z-z_0)^2 & \Rightarrow U_2(x, y) = a_2(x-x_0)^2 - a_2(y-y_0)^2 - 2b_2(x-x_0)(y-y_0) \\ & \Rightarrow \tilde{f}_2(z) = \dots = (a_2+ib_2)(z-z_0)^2. \end{aligned}$$

• Úgy tűnik, hogy működik (ugye ellenőriztük?): a  $\tilde{f}$ -ok ugyanazok lettek, mint az  $f$ -ek (az  $f_0$ -beli plusz képzetes állandótól eltekintve). Általános  $n>0$  kitevőre a binomiális tételt használhatjuk; rögtön a páros ill. páratlan tagokat különvéve írjuk fel, mert ez kell a valós rész megkereséséhez:

$$\begin{aligned} f_n(z) = c_n(z-z_0)^n & \Rightarrow f_n(x+iy) = (a_n+ib_n) \sum_p \binom{n}{2p} (x-x_0)^{n-2p} i^{2p} (y-y_0)^{2p} + \\ & + (a_n+ib_n) \sum_p \binom{n}{2p+1} (x-x_0)^{n-2p-1} i^{2p+1} (y-y_0)^{2p+1}. \end{aligned}$$

Az első szummás összeg valós, a második képzetes, mert  $i^{2p} = (-1)^p$ ; ebből arra jutunk, hogy

$$U_n(x, y) = a_n \sum_p \binom{n}{2p} (x-x_0)^{n-2p} (-1)^p (y-y_0)^{2p} - b_n \sum_p \binom{n}{2p+1} (x-x_0)^{n-2p-1} (-1)^p (y-y_0)^{2p+1}.$$

Most visszahelyettesíthetünk úgy, ahogy a varázssformulában kell. Sejtve már, hogy működik a dolog, kényelmesen alakíthatunk visszafelé: pl. újra beírhatjuk, hogy  $(-1)^p = i^{2p}$ , illetve észrevehetjük, hogy  $\frac{z+z_0^*}{2} - x_0 = \frac{z-z_0}{2}$  és hogy  $\frac{z-z_0^*}{2i} - y_0 = \frac{z-z_0}{2i}$ . Ezeket rögtön beírva és egy  $i-t$   $b_n$  mellé beszúrva, és kihasználva, hogy  $U_n(x_0, y_0) = 0$ , ha (mint feltettük)  $n>0$ , arra jutunk, hogy

$$\begin{aligned} \tilde{f}_n(z) &= 2a_n \sum_p \binom{n}{2p} i^{2p} \left(\frac{z-z_0}{2}\right)^{n-2p} \left(\frac{z-z_0}{2i}\right)^{2p} + 2ib_n \sum_p \binom{n}{2p+1} i^{2p+1} \left(\frac{z-z_0}{2}\right)^{n-2p-1} \left(\frac{z-z_0}{2i}\right)^{2p+1} = \\ &= 2\left(\frac{z-z_0}{2}\right)^n \cdot \left[ a_n \sum_p \binom{n}{2p} + ib_n \sum_p \binom{n}{2p+1} \right] = 2\left(\frac{z-z_0}{2}\right)^n \cdot \left[ a_n \cdot \frac{1}{2}2^n + ib_n \cdot \frac{1}{2}2^n \right] = (a_n+ib_n)(z-z_0)^n. \end{aligned}$$

A binomiális együtthatók összegeit úgy kezelhettük, hogy tudjuk, hogy  $(1-1)^n=0$ , és  $(1+1)^n=2^n$ : ezeket a binomiális tétellel kiírva, majd összeadva és kivonva (és felezve) valóban csak a párosadik ill. a páratlanadik együtthatók összegei maradnak, és megkapjuk mindkettőre az  $\frac{1}{2}2^n$  értéket.

•  $c_n(z-z_0)^n$  alakú **monomokra** tehát működik a formula. *Tudjuk* viszont, hogy ha egy  $f$  függvény egy  $z_0$  környékén differenciálható, akkor hatványsorba is fejthető. Az iméntiek miatt a hatványsor bármelyik részletösszegére  $\tilde{f}(z)=f(z)$ , így a konvergenciakörön belül a **végtelen sorösszetre is igaz ez: készen vagyunk**. Az is tisztázódott, hogy olyan  $U(x, y)$  függvények jönnek szóba, amikre  $\Delta U = \partial_x^2 U + \partial_y^2 U = 0$ , továbbá *analitikusak*, azaz  $x_0, y_0$  körül „dupla hatványsorba” fejthetők:

$$U(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{n,m} (x-x_0)^n (y-y_0)^m, \quad \text{amellett, hogy } \Delta U = 0. \quad (\text{C.4})$$

Némi szenvedéssel belátható, hogy erre a sorra  $\Delta U=0$ -t kikötve pont olyan feltételeket kapunk az egyelőre tetszőleges  $c_{n,m}$ -ekre, amik miatt  $U$  tényleg a fent  $U_n(x, y)$ -nel jelölt függvényeknek (a  $c_n(z-z_0)^n$  monomok valós részeinek) sorösszege, azaz egy komplex hatványsor valós része lesz.

•  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  hatványfüggvényt, így ilyenek sorösszegét (hatványsort) kiterjeszthetünk  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvényre: ilyenkor egyértelmű, hogy mit jelent, hogy  $U$  változói helyébe komplex változókat írunk. Más kérdés, hogy az  $U(x, y)$  noha hatványsorba *fejthető*  $(x_0, y_0)$  körül, mégis lehet, hogy nem hatványsor *alakjában* adott, hanem olyan képlettel, ami az  $(x_0, y_0)$  körüli hatványsor konvergenciakörén kívül is értelmes (azaz analitikusan elfolytatja a hatványsorösszeget.) Ilyen függvényre lehet, hogy (pl. az elemi függvényeknek a hatványsoraikon „felülemelkedett” átalakításaival) a varázsfórmula olyan eredményt ad, ami szintén nem  $z_0$  körüli hatványsor, hanem  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvények között is analitikusan elfolytatja azt. Ilyenkor igazán „varázslatos” a dolog; ez történt pl. a 2.4. szakaszban a  $\frac{\cos z}{\sin z}$  visszafejtésekor is a (2.22) egyenlet környékén. Nem tűnt fel, hogy az akármilyen  $z_0$  körüli hatványsorokkal dolgozunk, mert minden függvény rögtön „elfolytatott” formában szerepelt.

Eredendően nem analitikus  $U(x, y)$  függvények nyilván szóba sem jönnek: vagy nyilvánvalóan értelmetlen bennük  $x$  ill.  $y$  helyébe komplex számokat írni, vagy „csak” nem terjeszthetők ki értelmesen  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ -ről  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ -re, de eleve nem is lehetnek semmilyen differenciálható  $f(z)$  valós részei.

### C.4. Paraméteres integrál differenciálhatósága

• Legyen az  $f(t, z)$  kétváltozós függvény olyan, hogy  $z$  lehet valós vagy komplex, és  $f$  értelmes  $z$ -ben legalábbis egy konvex nyílt  $U \subset \mathbb{R}$  vagy  $U \subset \mathbb{C}$  halmazon,  $t$  pedig most valós, és  $f$  értelmes minden  $z \in U$  esetén  $t$ -ben legalábbis egy  $t \in [a, b]$  szakaszon ( $a, b$  lehet  $\pm\infty$  is). Ha teljesül, hogy

1.)  $f(t, z)$  differenciálható  $z$  szerint  $U$ -n majdnem minden  $t \in [a, b]$ -re,<sup>96</sup> és

2.)  $f(t, z)$  integrálható a  $t$  változó szerint  $[a, b]$ -re minden  $z \in U$  esetén,

akkor felmerül a kérdés, hogy az  $F(z) := \int_a^b dt f(t, z)$  módon értelmezett függvény (a paraméteres integrál eredménye) differenciálható-e, és igaz-e, hogy  $F'(z) = \int_a^b dt \partial_z f(t, z)$ .

• Attól, hogy  $f(t, z)$  integrálható  $t$ -ben, még lehet, hogy  $\partial_z f(t, z)$  nem az.<sup>97</sup> Kiderül, hogy csak  $\partial_z f(t, z)$  integrálhatóságát kikötni nem elég, de egy jól használható plusz feltétel visszavezeti a kérdést a *Lebesgue-tételre* (ld. 3.2. szakaszt). Nevezetesen tegyük fel, hogy teljesül a következő:

3.) Létezik olyan, az  $[a, b]$  szakaszra integrálható  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, hogy majdnem minden  $t \in [a, b]$ -re és minden  $z \in U$ -ra  $|\partial_z f(t, z)| \leq g(t)$  teljesül.

Szavakban:  $\partial_z f(t, z)$ -nek létezzen minden  $z \in U$ -ra vonatkozó közös  $g(t)$  integrálható majoránsa. (Mindazonáltal ha az  $F(z)$  eredmény-függvény egy adott  $z_0$ -beli differenciálhatóságát vizsgáljuk, az  $U$ -t akármilyen szűk nyílt halmazra vehetjük  $z_0$  körül.) A gyakorlati esetekben „általában” teljesül ez a 3. feltétel, ha  $\partial_z f(t, z)$  integrálható, de a pontosan megfogalmazott tétel a következő:

**Állítás:** ha  $f(t, z)$ -re fennállnak a mondott 1., 2., 3. feltételek, akkor

— a  $\partial_z f(t, z)$  integrálható  $t$ -ben a vizsgált  $[a, b]$  szakaszra minden  $z \in U$  esetén,

—  $F(z) \equiv \int_a^b dt f(t, z)$  differenciálható  $U$ -n, és „bedifferenciálhatunk az integrálba”: (C.5)

$$F'(z) = \frac{d}{dz} \int_a^b dt f(t, z) = \int_a^b dt \frac{\partial}{\partial z} f(t, z).$$

A tétel (értelemszerűen átfogalmazva) általánosítható minden ismert integráltípusra, és  $\mathbb{R}$  vagy  $\mathbb{C}$  helyett véges dimenziós  $\mathbb{V}$  vektortérbeli deriválás-műveletekre (pl. gradiensre, divergenciára) is.

<sup>96</sup>„Majdnem minden  $t$ -re” = „legfeljebb egy nulla mértékű halmazt kivéve” (ami ugye nem számít az integrálásban).

<sup>97</sup>Példa: legyen  $x \in ]0, 1[$  valós, és  $f(t, x) = \sin(x/t^2)$ . Ez minden ilyen  $x$ -re integrálható  $t$ -ben 0-tól 1-ig, differenciálható is  $x$  szerint, de az  $x$  szerinti deriváltja nem integrálható  $t$ -ben 0-tól 1-ig. Gondoljuk végig ezeket!

• A tétel alkalmazására jó példa a gamma-függvény,  $\Gamma(z)$  esete (ezt ld. a 6.1. szakaszban); vagy megnézhetjük az 5.1. szakasz végén látott egyszerű integrálokat is. Ezek közül az első:

A következő integrál eredménye a  $z$  szerint differenciálható, ahol csak létezik:

$$\int_0^\infty dt e^{-zt}.$$

A mostani beazonosítás:

$$\begin{aligned} f(t, z) = e^{-zt} &\Rightarrow |f(t, z)| = e^{-\Re(z) \cdot t}, \\ \partial_z f(t, z) = -te^{-zt} &\Rightarrow |\partial_z f(t, z)| = te^{-\Re(z) \cdot t}. \end{aligned}$$

$\int_0^\infty dt f(t, z)$  pontosan akkor létezik, ha  $\int_0^\infty dt |f(t, z)|$  is, ez pedig akkor van most, ha  $\Re(z) > 0$ . Egy ezt kielégítő  $z_0$  esetén lehet  $U$  pl. a  $\Re(z) > a$  tartomány, ahol  $0 < a < \Re(z_0)$ : ez az  $U$  konvex, nyílt, tartalmazza  $z_0$ -t, és minden  $z \in U$ -ra igaz, hogy  $|\partial_z f(t, z)| = te^{-\Re(z) \cdot t} \leq te^{-at}$ . Utóbbi jó lesz  $g(t)$ -nek, mert  $|\partial_z f(t, z)|$  integrálható majoránsa minden  $z \in U$ -ra egyszerre. Az integrál eredménye tehát differenciálható az  $U$ -n, vagyis  $z_0$ -ban is. Ez minden  $z_0$ -ra igaz, ha  $\Re(z_0) > 0$ : kész.

Másik példa volt a Gauss-integrál az 5.1. szakaszban:  $\alpha$  és  $\beta$  a (komplex) paraméterek, és

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty dt e^{-\alpha t^2 + \beta t} & \quad f(t, \alpha, \beta) := e^{-\alpha t^2 + \beta t} & \Rightarrow & \quad |f(t, \alpha, \beta)| = e^{-\Re(\alpha) \cdot t^2 + \Re(\beta) \cdot t}, \\ \text{differenciálható-e} & \quad \partial_\alpha f(t, \alpha, \beta) = -t^2 e^{-\alpha t^2 + \beta t} & \Rightarrow & \quad |\partial_\alpha f(t, \alpha, \beta)| = t^2 e^{-\Re(\alpha) \cdot t^2 + \Re(\beta) \cdot t}, \\ \alpha \text{ ill. } \beta \text{ szerint?} & \quad \partial_\beta f(t, \alpha, \beta) = te^{-\alpha t^2 + \beta t} & \Rightarrow & \quad |\partial_\beta f(t, \alpha, \beta)| = |t| e^{-\Re(\alpha) \cdot t^2 + \Re(\beta) \cdot t}. \end{aligned}$$

Az integrálhatósághoz  $\Re(\alpha) > 0$  kell. A  $g(t)$  megtalálása viszonylag triviális; felírjuk, milyen  $U$  halmazokkal dolgozhatunk. Először  $\alpha$ -ban vizsgálódunk: adott (a feltételt kielégítő)  $\alpha_0$  (és akármilyen fix  $\beta$ ) esetén legyen pl.  $U$  az  $\alpha$ -ban a  $\Re(\alpha) > \frac{\Re(\alpha_0)}{2}$  tartomány (ezen hasonlóan találunk integrálható majoránst, mint a fentebbi példában). A  $\beta$ -ban gondolkodva adott  $\beta_0$  (és adott  $\alpha$  fix érték) esetén  $\beta$ -ban egy fix véges valós szélességű,  $\beta_0$ -t tartalmazó sávot választhatunk  $U$ -nak.

• Ebben a pontban a (C.5) állításunk bizonyítása következik a teljesség kedvéért. Jelölés:  $D(t, z) \equiv \partial_z f(t, z)$ . A paraméteres integrál eredményére ( $F$ -re) egy kiszemelt  $z$  pontban

$$\frac{F(w) - F(z)}{w - z} = \int_a^b dt \frac{f(t, w) - f(t, z)}{w - z}; \quad w \rightarrow z \text{-re a } D(t, z) \text{-hez tart az integrandus, de csak ennyi még nem elég.}$$

Az előző függelékszakaszban már előkerült és bizonyított *általános középértéktétel* kell (ld. a (B.26) egyenletet környékét), sőt most is csak az a változat, hogy ha  $\phi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  differenciálható a  $[z, w]$  zárt szakaszon, akkor  $|\phi(w) - \phi(z)| \leq |w - z| \cdot \sup_{u \in [z, w]} |\phi'(u)|$ . Ezt és a 3.) feltételünket összerakhatjuk az  $f(t, z)$ -re (ami a konvex  $U$  belsejében lévő zárt  $[z, w]$  szakaszon is differenciálható):

$$\left| \frac{f(t, w) - f(t, z)}{w - z} - D(t, z) \right| \leq \left| \frac{f(t, w) - f(t, z)}{w - z} \right| + |D(t, z)| \leq \max_{u \in [z, w]} |D(t, u)| + g(t) \leq 2g(t)$$

minden szóba jövő  $t$ -re, mivel  $g(t) \geq |D(t, z)|$ . De  $g(t)$  integrálhatósága maga után vonja a bal oldali kifejezés integrálhatóságát, és mivel a  $2g(t)$  integrálható majoráns egyszerre minden  $w$ -re, a *Lebesgue-tétel* miatt a bal oldali kifejezés integráljának  $w \rightarrow z$  határértéke *létezik*, és annyi, mint a határértékfüggvény integrálja (=nulla, mert a különbségi hányados határértéke  $D \equiv \partial_z f$ ):

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow z} \int_a^b dt \left[ \frac{f(t, w) - f(t, z)}{w - z} - D(t, z) \right] &= \int_a^b dt \lim_{w \rightarrow z} \left[ \frac{f(t, w) - f(t, z)}{w - z} - D(t, z) \right] = 0, \\ \Rightarrow \underline{\underline{\int_a^b dt D(t, z)}} &= \lim_{w \rightarrow z} \int_a^b dt \frac{f(t, w) - f(t, z)}{w - z} = \lim_{w \rightarrow z} \frac{F(w) - F(z)}{w - z} = \underline{\underline{\frac{dF}{dz}}}. \end{aligned}$$

Az integrál-határérték *létezéséből* tehát következett  $F(z)$  differenciálhatósága, és a deriváltra állított dolog is: hogy „bedifferenciálhatunk” az integráljel alá.



## C.5. Hatványsorok viselkedése a konvergenciakör határán

• Véges (nem nulla, nem végtelen)  $R$  konvergenciasugarú hatványsor összegfüggvénye sokszor elfolytatható analitikusan. Egy dolog biztos (ld. a 4.3. szakaszt): a kör határán van legalább egy pont, aminek semmilyen (kicsi) nyílt környezetére sem lehet analitikusan elfolytatni.

Ezen túlmenően viszont annak, hogy hogyan viselkedik az összegfüggvény analitikus elfolytatása a konvergenciakör határán, alapból nem sok köze van ahhoz, hogy egy a határon lévő  $z$ -t beírva maga a sor konvergens-e; a Cauchy-Hadamard-tétel „bölcse hallgat” erről. Következzék néhány lehetőség; mindegyik esetben  $R=1$  (amit az 1.–5. példákban rutinfeladvány belátni).

Kiindulási hatványsor:	A konvergenciakörének határán:	lehetséges analitikus elfolytatás:	Az elfolytatás a kör határán:
1.) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$	semmilyen $ z =1$ esetén nem konvergens	$\frac{1}{1-z}$	$z=1$ -ben pólus, máshol analitikus.
2.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$	$z=1$ -ben divergens, más $ z =1$ -re feltételesen konvergens.	$-\text{Ln}(1-z)$	$z=1$ elágazási pont, máshol analitikus.
3.) $\sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^n z^n$	semmilyen $ z =1$ esetén nem konvergens	$\frac{z}{(1+z)^2}$	$z=-1$ -ben pólus, máshol analitikus.
4.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$	minden $ z =1$ esetén abszolút konvergens	$1 + \frac{1-z}{z} \text{Ln}(1-z)$	$z=1$ elágazási pont, máshol analitikus.
5.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$	$z=1$ -ben divergens, más $ z =1$ -re feltételesen konvergens.	$\text{Arth } z \equiv \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{1+z}{1-z}$	$z=\pm 1$ elágazási pontok, máshol analitikus.
6.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n \cdot \Pi_n}, (*)$	minden $ z =1$ esetén abszolút konvergens	<i>nem folytatható el analitikusan sehova.</i>	$ z =1$ -re értelmes, de nem differenciálható.

A 6. példában  $\Pi_n$  az  $n$  legnagyobb páratlan osztója; a definiált függvényről (a későbbi tanulmányokban előkerülő *Fourier-sorokat* is használva) belátható, hogy a  $|z|=1$  körvonalra elfolytatva ott sehol nem differenciálható függvényt kapnánk, vagyis: nem lehet elfolytatni.<sup>98</sup> A többi példában viszont a megadott elfolytatások tényleg a felírt sorokat adják  $|z|<1$ -re; ezek ismert egyszerű sorok.

Ami a konvergenciatulajdonságokat illeti: az 1. és 3. példákban  $|z|=1$ -re a tagok *sorozata* nem tart nullához, úgyhogy ilyen  $z$ -kre a sor biztosan nem konvergens. A 4. példában viszont  $|z|=1$  esetén a tagok abszolútértéke  $\frac{1}{n(n+1)}$ , ami összegezhető: a sor abszolút konvergens ilyen  $z$ -kre. Figyelemre méltó itt az is, hogy a körhatáron  $z=1$  az egyetlen pont, ahol az elfolytatás nem analitikus (elágazási pontja van), de itt is véges a sorösszeg és az előállított függvény határértéke is (és ezek ugyanannyik). A 2. és az 5. példában  $z=1$ -et beírva a sor divergens (mivel a *harmonikus sor* divergens; ld. pl. a B.2. függelékszakaszt), továbbá a tagok abszolútértékei ugyanezek minden  $|z|=1$  esetén is, úgyhogy ilyen  $z$ -kre ezek a sorok biztos nem abszolút konvergenssek.

• A 2. és az 5. példákban azt is állítottuk viszont, hogy ha  $|z|=1$ , de  $z \neq 1$ , akkor a kapott sor (noha nem abszolút, de) konvergens; ezekben és más hasonló (az együtthatókban „ilyenmi  $\frac{1}{n}$ -eket tartalmazó”) esetekben ezt integrálással és a geometriai sort ismerve lehet belátni.

Jelöljük ki a körhatáron egy  $z$ -t, amire tehát  $|z|=1$ , de  $z \neq 1$ : legyen  $z = e^{i\varphi}$ , ahol  $\varphi \in [-\pi, \pi]$ , de  $\varphi \neq 0$ . A 2. és 5. példákban adott sorok véges részletösszegeit biztosan felírhatjuk a deriváltjuknak

<sup>98</sup>Ez a felírt utolsó 6. példa saját gyártmány; *nem olvastam sehol.*

a  $z_0=0$  középponttól  $z$ -ig futó akármilyen úton, pl. az egyenes szakaszon vett integráljaként, (a kényelmesebb érvelés kedvéért) rögtön paraméterezve a  $t \in [0, z] \Leftrightarrow t=e^{i\varphi}u, u \in [0, 1]$  módon:

$$\sum_{n=1}^N \frac{z^n}{n} = \int_0^z dt \sum_{n=0}^{N-1} t^n = e^{i\varphi} \int_0^1 du \frac{1-(ue^{i\varphi})^N}{1-ue^{i\varphi}}, \quad \sum_{n=0}^N \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^z dt \sum_{n=0}^N t^{2n} = e^{i\varphi} \int_0^1 du \frac{1-(ue^{i\varphi})^{2N+2}}{1-u^2e^{2i\varphi}},$$

hiszen  $\frac{1}{n}z^n = \int_0^z dt t^{n-1}$ . Kérdés: *létezik-e* ezeknek  $N \rightarrow \infty$  határértéke. Fontos itt, hogy  $z \neq 1$ : gondoljuk ki (rajzzal), hogy biztosan van olyan  $K > 0$  szám, amivel minden a  $[0, z]$  szakaszon lévő  $t$ -nkre  $|1-t| \geq K$ . Továbbá  $|1-t^N| \leq 2$  és  $|1-t^{2N}| \leq 2$  is teljesül: az integrandusaink abszolútértékét felülbecsülhetjük az integrálható  $\frac{2}{K}$ -val. A *Lebesgue-tétel* miatt az integrálok határértékei (így a sorösszegeink is) **léteznek**, és egyenlők a határértékfüggvény integráljával:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \int_0^z dt \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \int_0^z \frac{dt}{1-t} = -\text{Ln}(1-z), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^z dt \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} = \int_0^z \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{1+z}{1-z}.$$

Tehát  $|z|=1, z \neq 1$  esetén is tényleg léteznek a fentebbi 2. és 5. sorösszegek, és épp annyit adnak, mint a megadott analitikus elfolytatásuk ugyanabban a (konvergenciahatáron lévő)  $z$  pontban.

• Két jól ismert esetben „learathatjuk” az imént bebizonyítottakat vagy teljesen hasonlókat:

<p>Legyen <math>f(z) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} - \dots</math>,  ennek konvergenciasugara <math>R=1</math>, és  ha <math> z  &lt; 1</math>, akkor <math>f(z) = \text{arctg } z</math>.  Igaz-e, hogy mivel <math>\text{arctg } 1 = \frac{\pi}{4}</math>, ezért</p> $\frac{\pi}{4} \stackrel{?}{=} 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$	<p>Másik: <math>g(z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \dots</math>,  ennek konvergenciasugara is <math>R=1</math>,  és ha <math> z  &lt; 1</math>, akkor <math>g(z) = \ln(1+z)</math>. (C.6)  Állítólag <math>z=1</math>-re is igaz, hogy</p> $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \stackrel{?}{=} \ln 2.$
--	---

Az iménti (integrálás) gondolatmenetet ezekre a sorokra alkalmazva beláthatjuk, hogy ezek a (konvergenciahatáron lévő  $z$ -re vett) sorösszegek tényleg *léteznek*, és „mellesleg” éppen annyik, mint a hatványsorral definiált függvények ottani (határ)értékei: igazak a megpendített egyenlőségek.

• Egy másmilyen eset, amikor valahonnan *tudjuk*, hogy egy adott hatványsorba a konvergenciahatáron lévő  $z_1$ -et írva a kapott összeg *létezik*, de azt még nem, hogy az egyenlő-e a konvergenciakörön *belül* definiált összegfüggvény  $z_1$ -beli határértékével. Ez általános esetben nem következne az eddigiekből, de egy *Niels Henrik Abel*-től származó tétel éppen ilyet mond:

**Állítás:** legyen a  $z_0$  középső hatványsor konvergenciasugara  $R > 0, R < \infty$ , és  $z_1$  olyan, hogy  $|z_1 - z_0| = R$ , és *létezik a sorösszeg  $z_1$ -ben*. Ha  $z$ -vel  $z_1$ -hez tartunk a körön belülről úgy, hogy a  $z_1 - z_0$  és a  $z_1 - z$  szakaszok bezárt szöge véges messze marad  $90^\circ$ -tól, akkor a sorösszegfüggvény  $z_1$ -beli határértéke a  $z_1$ -beli sorösszeg. (C.7)

A  $z_1$ -hez közelítés útjáról nem engedjük meg tehát, hogy „hozzásimuljon” a körhatárhoz;<sup>99</sup> a sugárirány pl. messzemenően jó. Ezzel a tétellel gondolkodva tehát a fenti (C.6)-beli számsorokról a következőket mondhatjuk. Ellenőrizni kell, hogy a számsorok konvergensek: azok (de nem abszolút); az  $\ln$ -esről ld. a 86. lábjegyzetet; az ottani gondolatmenet az  $\text{arctg}$ -osra is működik. Ezek után viszont (pl. az  $\text{arctg}$ -osra végigmondva): mivel valós  $|x| < 1$ -re  $\text{arctg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$ , másrészt az  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$  sorösszeg *létezik*, ezért ha  $x$ -szel 1-hez tartunk  $x < 1$  felől, akkor  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \lim_{x \rightarrow 1} \text{arctg } x = \text{arctg } 1 = \frac{\pi}{4}$ , mert  $\text{arctg}$  folytonos  $x=1$ -ben; kész.

<sup>99</sup>Azért tűnik ez rögtön jó ötletnek, mert ugye ha a sor konvergencia  $z_1$ -ben, akkor is bizonytalan, hogy a konvergenciakör határán hol konvergencia még: a legjobb a többi ponttól minél inkább „függetlennek” maradni.

• **Kiegészítés:** következzen a (C.7) tétel bizonyítása. Elég a  $z_0=0$  esettel foglalkozni: mindig „eltolhatjuk” az egészet  $z_0=0$ -ba. Ha a  $\sum_n a_n z^n$  hatványsor konvergenciasugara  $R$ , akkor az  $a'_n = a_n R^n$ -eket véve a  $\sum_n a'_n z^n$  hatványsor konvergenciasugara 1, és az állítás pontosan akkor igaz az utóbbi esetben, amikor az előbbiben. Végül elég a  $z_1=1$  esettel foglalkozni: ha  $z_1$  máshol van a konvergenciakör (most már: az egységkör) határán, akkor ez ugyanaz, mintha a  $\sum_n a'_n z_1^n z^n$  sort tekintenénk, és  $z$ -vel 1-hez tartanánk. Összefoglalva: elég a  $z_0=0$ ,  $R=1$  és  $z_1=1$  esetre bizonyítani, ebből már következik általánosan. Utoljára az  $a_0$ -ból levonhatjuk  $\sum_n a_n$ -et, majd utólag  $a_0$ -on keresztül „visszaadhatjuk”  $\sum_n a_n$ -et. Az állítás tehát: a mondott ráközelítés-korlátozással

$$\text{ha a } \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ sorra } R=1, \text{ és } \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0, \text{ akkor } \lim_{z \rightarrow 1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) = 0.$$

Ha a  $z$ -vel 1-hez tartás módjára igaz a bizonyítandó (C.7) állításban tett kikötés, akkor

$$\begin{array}{l} \text{létezik olyan} \\ K \in \mathbb{R}^+, \text{ amire} \end{array} \quad \frac{|1-z|}{1-|z|} < K \quad \begin{array}{l} \text{a határátmenet során} \\ \text{szóba jövő összes } z\text{-re.} \end{array} \quad (\text{C.8})$$

Gondoljunk ezt végig (rajzzal)!<sup>100</sup> Tekintsük ezek után a következő átalakítást: egy véges  $N$  számra

$$\begin{aligned} \text{legyen } s_n &\equiv \sum_{n=0}^N a_n, & \text{ezzel } a_n &= s_n - s_{n-1}, & \text{ ezt a hatványsor részletösszegébe írva} \\ \sum_{n=1}^N a_n z^n &= s_0 + (s_1 - s_0)z + (s_2 - s_1)z^2 + \dots + (s_N - s_{N-1})z^N = \\ &= s_0(1-z) + s_1 z(1-z) + \dots + s_{N-1} z^{N-1}(1-z) + s_N z^N = (1-z) \sum_{n=0}^{N-1} s_n z^n + s_N z^N. \end{aligned}$$

Hogy  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$ , az éppen azt jelenti, hogy  $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N = 0$ , emiatt  $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N z^N = 0$  is igaz minden rögzített  $|z| < 1$  (azaz a konvergenciakörön belüli  $z$ ) esetén. Emiatt az előző egyenlőségből

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n \quad \text{minden } |z| < 1 \text{ esetén.}$$

Legyen  $N_\varepsilon$  egy adott  $\varepsilon > 0$  számhoz tartozó küszöbindex az  $s_n$ -ek nullához tartó sorozatában, azaz amire minden  $n > N_\varepsilon$ -ra  $|s_n| < \varepsilon$ . Ekkor az  $N_\varepsilon$ -től végtelenig vett  $s$ -es összeget felülbecsülhetjük:

$$\left| \sum_{n=N_\varepsilon}^{\infty} s_n z^n \right| \leq \sum_{n=N_\varepsilon}^{\infty} |s_n| |z|^n \leq \varepsilon \sum_{n=N_\varepsilon}^{\infty} |z|^n = \varepsilon \frac{|z|^{N_\varepsilon}}{1-|z|} \leq \frac{\varepsilon}{1-|z|},$$

és a hatványsor  $z$ -beli értékét az alábbi módon írhatjuk, két részre bontva az összegzést  $N_\varepsilon$ -nál:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = (1-z) \sum_{n=0}^{N_\varepsilon-1} s_n z^n + (1-z) \sum_{n=N_\varepsilon}^{\infty} s_n z^n \quad \Rightarrow \quad \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right| \leq |1-z| \cdot \left| \sum_{n=0}^{N_\varepsilon-1} s_n z^n \right| + \varepsilon \frac{|1-z|}{1-|z|}.$$

Adott  $\varepsilon > 0$  esetén az első tagban az  $N_\varepsilon$  tagú összeg polinom, ami folytonos: abszolútértéke a zárt egységkörlapon felveszi  $M_\varepsilon$  maximumértékét. A második tagban a fenti (C.8) becslést használva

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right| \leq |1-z| \cdot M_\varepsilon + K\varepsilon.$$

Ha ezek után  $z$ -vel olyan közel megyünk 1-hez, hogy  $|1-z| < K\varepsilon/M_\varepsilon$ , akkor azt kapjuk, hogy minden ilyen  $z$ -re már  $\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right| \leq 2K\varepsilon$ , ahol ugye  $K \in \mathbb{R}^+$  fix. Mivel ezt minden  $\varepsilon > 0$ -ra eljátszhatjuk, éppen arra jutunk, hogy a vizsgált fajta határértékre  $\lim_{z \rightarrow 1} \sum_n a_n z^n = 0$ , ami a bizonyítandó volt.

<sup>100</sup>Kis  $|1-z|$ -k esetén ez a  $K$  körülbelül az  $1/\cos \alpha$  értékek felső határa, ahol  $\alpha$  az  $1-z$  és a 0-ból 1-be menő szakasz szöge; a ráközelítés útjára tett korlátozás pont azt adja, hogy ezen felső határ véges (és nem tart végtelenhez).

### C.6. Kiegészítések a gamma-függvény tárgyalásához

- A 6.3. szakaszban a Stirling-formulával a végtelenből visszalépegetve azt találtuk, hogy

$$\ln \Gamma(x+1) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} \ln(2\pi) + (x+m+\frac{1}{2}) \ln(x+m) - (x+m) - \sum_{k=1}^m \ln(x+k) \right\}.$$

Alább a  $H \equiv [x_0, x_1] \subset \mathbb{R}$  intervallumra korlátozódunk valamilyen adott  $-1 < x_0 < 0$  és adott  $x_1 < \infty$  értéket véve.<sup>101</sup>  $x \in H$  esetén a felírt határérték tényleg létezik (ez a Stirling-formulás közelítés lényege). Azt akarjuk itt tisztázni, hogy jogos-e inentől kezdve a deriválást és a határértékképzést felcserélni; mindenesetre az első deriváltra azt kaptuk („bederiválva” a határértékbe), hogy

$$\frac{d}{dx} \ln \Gamma(x+1) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \ln(x+m) - \sum_{k=1}^m \frac{1}{x+k} \right\} \Rightarrow \gamma \equiv -\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \ln m \right\}.$$

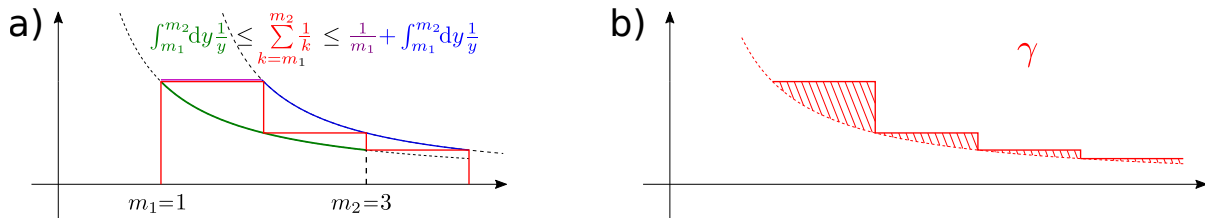
Az így definiált  $\gamma$  tényleg létezik, mert az őt meghatározó sorozat adott  $m_1$  és  $m_2$  indexű tagjaira

$$\gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} a_m, \quad \text{ahol} \quad a_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \ln m \quad \Rightarrow \quad a_{m_2} - a_{m_1} = \sum_{k=m_1}^{m_2} \frac{1}{k} - \ln \frac{m_2}{m_1},$$

és felvázolva az  $f(y) = \frac{1}{y}$  függvénygrafikont könnyű látni, hogy

$$\int_{m_1}^{m_2} \frac{1}{y} dy \leq \sum_{k=m_1}^{m_2} \frac{1}{k} \leq \frac{1}{m_1} + \int_{m_1}^{m_2} \frac{1}{y} dy, \quad \text{azaz konkrétan} \quad \ln \frac{m_2}{m_1} \leq \sum_{k=m_1}^{m_2} \frac{1}{k} \leq \frac{1}{m_1} + \ln \frac{m_2}{m_1}.$$

Vagyis  $0 < a_{m_2} - a_{m_1} < \frac{1}{m_1}$ , ami miatt az  $a_m$ -ek sorozata Cauchy-sorozat: elég nagy  $\mathcal{N}_\varepsilon$ -től kezdve már minden  $m_1, m_2 > \mathcal{N}_\varepsilon$ -ra  $|a_{m_2} - a_{m_1}| \leq \varepsilon$ . Emiatt az  $a_m$  sorozat konvergens is, azaz létezik a  $\gamma$ -val kijelölt határérték. Őt is vizualizálhatjuk az  $\frac{1}{y}$  függvénygrafikonon, tudva, hogy  $\ln m = \int_0^m dy \frac{1}{y}$ .



54. ábra. a.) a  $\gamma$  létezésének levezetéséhez használt becsléshez segédlet; itt az ábrázoláshoz  $m_1=1$ -et véve. b.) a  $\gamma$  értéke egyenlő a bevonalkázott területek (végtelen) összegével.

- A többedik deriváltakra azt kapnánk ugye a határérték mögé bederiválva, hogy

$$\frac{d^2}{dx^2} \ln \Gamma(x+1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2}, \quad \dots \Rightarrow \quad \frac{d^n}{dx^n} \ln \Gamma(x+1) = (-1)^n (n-1)! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^n}.$$

Ezen sorösszegek  $H$ -n egyenletes konvergenciáját szeretnénk tudni; a *Weierstrass-kritérium* (ld. B.3. függelék szakasz vége felé) fog kelleni. Megállapíthatjuk, hogy a  $H$  halmazunkban lévő  $x$ -ekre

$$x \in H\text{-ra ha } k \geq 1, \text{ akkor} \quad \frac{1}{|(x+k)^n|} \leq \frac{1}{|x_0+k|^n} \leq \begin{cases} \frac{1}{|x_0|^n}, & \text{ha } k=1, \\ \frac{1}{(k-1)^n}, & \text{ha } k>1, \end{cases} \quad \text{és utóbbi értékek összegezhethők } k\text{-ban } n \geq 2 \text{ esetén.}$$

<sup>101</sup> $x_0 < 0$  azért kell, hogy  $x=0$  is a  $H$  belsejében legyen, azaz az  $x=0$ -beli deriváltakat is kiértékelhessük (a sorfejtéshez),  $x_0 > -1$  pedig azért, hogy  $\Gamma(x+1)$ -nek  $x=-1$ -beli pólusától biztonságosan messze maradjunk. Az  $x_1$  végesége csak azért kell, mert a használandó (??) tételben korlátos halmaz szerepel. Azonban mivel  $x_1$  akármekkora lehet,  $x_0$  pedig  $-1$ -hez akármilyen közel lehet, végülis az egész  $]-1, \infty]$  intervallumon „rendben lesz” a differenciálhatóság.

A Weierstrass-kritérium miatt tehát az imént  $n \geq 2$ -re  $\frac{d^n}{dx^n} \Gamma(x+1)$ -re felírt sorok egyenletesen is konvergensek  $H$ -n. Ebből már következik (ld. az erről szóló (B.25) tételt a B.4. szakaszban), hogy mivel az  $n$ -edik deriváltfüggvényt megadó sor egyenletesen konvergens, és az  $n-1$ -edik is legalább egy pontban konvergens (a többedikre már tudjuk azt is, hogy egyenletesen is az az egész  $H$ -n, de az első deriváltat megadó sorozatra még csak azt, hogy az  $x=0$ -ban biztos  $-\gamma$ -hoz tart), ezért az  $n-1$ -edik deriváltfüggvény is egyenletesen is konvergens  $H$ -n (még egyszer: ez most csak az első deriváltat megadó sorozatra újdonság), és az is igaz, hogy a deriválást valóban megcserélhetjük a határértékképzéssel. Ezt akartuk belátni: minden rendben van, amikor a gamma-függvény sorfejtését a Stirling-formulás visszalépegetős (határértékes) képlet deriválgatásával készítettük el.

\* \* \*

• Tisztába tesszük a gamma-függvény Weierstrass-előállításának főszövegbeli levezetésénél elmaradt indoklásokat is (ld. a 6.4. szakaszban a (6.59) egyenlet környékén). A kiindulási képlet:

$$\psi(1+z) = (\ln \Gamma(1+z))' = -\gamma + z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+z)}, \quad \text{hacsak } z \notin \mathbb{Z}_0^-. \quad (\text{C.9})$$

Ha  $z \in \mathbb{Z}_0^-$ , akkor valamelyik nevező nulla. Ha viszont  $z \notin \mathbb{Z}_0^-$ , akkor mindegyik tag véges, és mondhatjuk pl., hogy fix  $z$ -re véges sok  $k$ -t kivéve  $k \geq 2|z|$ , így  $|k+z| \geq \frac{k}{2}$ , még a  $z$  helyzete szempontjából „legrosszabb”  $z \in \mathbb{R}^-$  esetben is. Emiatt tehát véges sok tagot kivéve  $\frac{1}{|k(k+z)|} \leq \frac{2}{k^2}$ ; ezek összegezhetőek, így a (C.9) sor is abszolút konvergens.

• Nyitva maradt a 6.4. szakaszban az is, hogy ez a (C.9) sorösszeg differenciálható függvényt ad meg.<sup>102</sup> A határértékfüggvények differenciálhatóságára vonatkozó (B.25) tételt használnánk: egy adott  $z_0 \notin \mathbb{Z}_0^-$  pont körül ki kell jelölni egy (kicsi, de) konvex korlátos nyílt halmazt, és ezen belátni a vizsgált sor deriváltjának egyenletes konvergenciáját. Minden megengedett  $z_0 \notin \mathbb{Z}_0^-$  pont körül van olyan  $r > 0$  sugarú  $G_r(z_0)$  nyílt körlap, és lezártja,  $B_r(z_0)$ , amikre  $0 < r < 1$ , és ráadásul  $B_r(z_0)$  sem tartalmaz  $\mathbb{Z}_0^-$ -beli számot (ez a  $\mathbb{Z}_0^-$  halmaz környékén plusz feltétel  $0 < r < 1$ -hez képest).

A vizsgált sor tagonkénti deriváltja  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+z)^2}$ ; minden  $z \in G_r(z_0)$  esetén pl. mondhatjuk, hogy ha  $\frac{k}{2} > |z_0| + r$ , akkor  $|k+z| \geq \frac{k}{2}$ .

Véges sok tagtól eltekintve tehát  $\sup_{z \in G_r(z_0)} \frac{1}{|k+z|^2} \leq \frac{4}{k^2}$ , és a kihagyott véges sok tag szuprénuma is véges (ehhez kellett, hogy  $B_r(z_0)$  is elkerülje a problémás nempozitív egészeket). A tagok  $G_r(z_0)$ -n vett szuprénumai tehát összegezhetőek: a már többször használt (B.24) Weierstrass-kritérium miatt a függvényt sorunk (a  $\psi(1+z)$  sorának tagonkénti deriváltja) egyenletesen is konvergens  $G_r(z_0)$ -n. Emellett  $\psi(1+z)$  sora maga is konvergens pl.  $z_0$ -ban, így a (B.25) tételből már következik, hogy a  $\psi(1+z)$ -t megadó sor összegfüggvénye  $G_r(z_0)$ -n differenciálható, deriváltja a tagonkénti derivált sor, és hogy maga a  $\psi(1+z)$ -t megadó sor is egyenletesen konvergens  $G_r(z_0)$ -n.

• Most jön az, hogy primitív függvényt keresünk a  $\psi(1+z)$ -t megadó (C.9) sorhoz:

$$\int dz \frac{z}{k(k+z)} = \int dz \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+z} \right) = \frac{z}{k} - \text{Ln}(k+z) + C_k, \quad (\text{C.10})$$

ahol kiírtuk a  $C_k$  (akár a  $k$ -tól függő) integrációs konstans: úgy kell a  $C_k$ -kat megválasztani, hogy ezeket a tagokat  $k$ -ban összegezhessük (ahogy végül szeretnénk). Ugye fix  $z$ -re sem a  $\frac{z}{k}$ -k, sem

<sup>102</sup>Azért fontos ez, mert ezt a (C.9) sort, mely az ottani (6.59), ott valós  $z \equiv x \in \mathbb{R}$ -re vezettük le a Stirling-formulából, és a differenciálhatóságból következő analitikusság alapján mondtuk, hogy minden  $z$ -re érvényes.

$\text{Ln}(z+k)$ -k nem összegezhethők; némi ráérzéssel kiderül, hogy ha  $C_k = C_0 + \text{Ln } k$ -t írunk, az jó lesz:

$$C_k = C_0 + \text{Ln } k \quad \Rightarrow \quad \int dz \frac{z}{k(k+z)} = C_0 + \frac{z}{k} - \text{Ln} \left(1 + \frac{z}{k}\right), \quad (\text{C.11})$$

ahol  $C_0$  még valamilyen „globális” (azaz  $k$ -tól is független) konstans érték lehet. Állítás: ezek fix  $z$ -re tényleg összegezhethők  $k$ -ban, hacsak  $z \neq -k$  valamilyen  $k \in \mathbb{N}_0^+$ -ra, azaz hacsak  $z \notin \mathbb{Z}_0^-$ . Ez azért tűnik igaznak (és egyúttal segítheti visszamenőleg a  $C_k$  választására való „ráérzést”), mert hatványsorral gondolkodva  $\frac{z}{k} - \text{Ln} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \approx \frac{z^2}{2k^2}$ , és utóbbiak összegezhethők. Rendesen végiggondolva rendes bizonyítást kapunk: véges sok  $k$ -tól eltekintve  $\frac{|z|}{k} < \alpha$ , ahol  $\alpha < 1$ . Tényleg használhatjuk tehát a hatványsort, és durva becslésekkel is haladhatunk:  $\left| \frac{z}{k} - \text{Ln} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \right| = \left| \frac{z^2}{2k^2} - \frac{z^3}{3k^3} + \frac{z^4}{4k^4} - \frac{z^5}{5k^5} + \dots \right| \leq \frac{|z|^2}{2k^2} \cdot \left| 1 - \frac{2z}{3k} \right| + \frac{|z|^4}{4k^4} \cdot \left| 1 - \frac{4z}{5k} \right| + \frac{|z|^6}{6k^6} \cdot \left| 1 - \frac{6z}{7k} \right| + \dots = (*)$ ; itt mindenhol  $\left| 1 - \frac{n}{n+1} \frac{z}{k} \right| \leq 2$ , azaz  $(*) \leq \frac{|z|^2}{2k^2} (2 + 2 \frac{|z|^2}{2k^2} + 2 \frac{|z|^4}{3k^4} + \dots) \leq \frac{|z|^2}{k^2} (1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \dots) = \frac{|z|^2}{k^2} \frac{1}{1 - \alpha^2}$ , és ezek összegezhethők  $k$ -ban. Így tehát  $\frac{z}{k} - \text{Ln} \left(1 + \frac{z}{k}\right)$ -k is tényleg összegezhethők.

A primitívfüggvény-kereséssel kapott sor tehát minden megengedett  $z_0$ -ban összegezhető, a derivált soráról pedig már fentebb beláttuk, hogy az ott kijelölt  $G_r(z_0)$  körlapon egyenletesen konvergens: így itt is a függvénysorozatok differenciálhatóságáról szóló (B.25) tétel miatt a primitív függvények sorösszege tényleg egyenletesen konvergens  $G_r(z_0)$ -n, összege differenciálható, és deriváltja tényleg az, amiből kiindultunk. Természetesen  $z_0$ -t akárhova tehetjük: végülis mindenhol igaz az összes differenciálhatóságra tett következtetésünk. Valóban igaz tehát, hogy

$$(\ln \Gamma(1+z))' = -\gamma + z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+z)} \quad \Rightarrow \quad \ln \Gamma(1+z) = -\gamma z + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{z}{k} - \text{Ln} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \right), \quad (\text{C.12})$$

amint állítottuk a főszöveg (6.60) egyenletében (és aztán  $\text{Ln } \Gamma(1+z)$ -ből megkaptuk  $\Gamma(1+z)$ -t exponenciálissal). Még annyi, hogy  $C_0=0$  kellett, hogy egyetlen adott helyen, pl.  $z=0$ -ban  $\text{Ln } \Gamma(1+z)$  primitív függvényként kapott kifejezése tényleg a tudott  $\text{Ln } \Gamma(1) = \ln 1 = 0$  értéket vegye fel.

\* \* \*

• A komplex  $z$ -kre is érvényes Stirling-formula nyeregponthoz vezető integrálásos levezetésénél a 6.4. szakaszban odáig jutottunk, hogy az ottani (6.69) képlet szerint ha  $s_1 \in \mathbb{R}^+$ , és  $\Re(z) > -1 + \varepsilon$ , akkor

$$\Gamma(z+1) = \sqrt{z} \left( \frac{z}{e} \right)^z (\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2), \quad (\text{C.13})$$

ahol a kijelölt (már paraméterezett) integrálok ezek voltak:

$$\mathcal{I}_1 \equiv \int_{-s_1}^{\infty} ds e^{-\sqrt{z}s + z \text{Ln} \left[ 1 + \frac{s}{\sqrt{z}} \right]}, \quad \mathcal{I}_2 \equiv (\sqrt{z} - s_1) \int_0^1 du u^z e^{z(1-u) + \sqrt{z}s_1 u + z \text{Ln} \left( 1 - \frac{s_1}{\sqrt{z}} \right)}. \quad (\text{C.14})$$

Az  $s_1$  alsó integrálási határ még akármilyen lehetett; azt reméltük/reméljük a 6.4. szakaszban, hogy ha  $|z| \rightarrow \infty$  közben  $s_1 \rightarrow \infty$ , akkor  $\mathcal{I}_1$  a pontonkénti  $e^{-s^2/2}$  határértékfüggvény integrálját,  $\sqrt{2\pi}$ -t adja, a második  $\mathcal{I}_2$  integrál pedig nullához tart. Itt befejezzük a bizonyítás ide tartozó, a főszövegben lejegyzett maradékát; ez egyrészt „iszappakolás”, másrészt izgalmas gondolkodtató munka.<sup>103</sup>

A  $\sqrt{z}$  kerül előtérbe: érdemes őt  $re^{i\varphi}$  módon írni, ahol tehát  $r \in \mathbb{R}^+$ , és  $|z| \rightarrow \infty$  egyenértékű azzal, hogy  $r \rightarrow \infty$ . Az  $s_1$  határ többféle választása is jó lehet;  $s_1 = \sqrt{|z|} \equiv r$  lesz kellemes. (Így tényleg  $s_1 \rightarrow \infty$ , ha  $|z| \rightarrow \infty$ .) Ha igaz, hogy végig  $\Re(z) > -1 + \varepsilon$ , akkor a gyökvonást (mint „legyező-

<sup>103</sup>Nekem is az volt (itt jegyzetírás közben). Nem is azért írtam le, mintha meg kellene tanulni (pláne, hogy bizonyára másképp is lehetne csinálni), hanem hogy legyen támpontja annak, aki esetleg érdeklődve nekiáll.

félbehajtást”) a  $\mathbb{C}$  síkon geometriailag követve leszűrhetjük, hogy bármilyen kicsi  $\delta > 0$  esetén elég nagy  $r$ -től kezdve már  $|\varphi| < \frac{\pi}{4} + \delta$ , ezért elég ilyen  $\varphi$ -ket nézni. Ezen belül is a  $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4} + \delta]$  esettel (a felső félsíkon lévő  $z$ -kkel) kezdjük. Fontos lesz, hogy ezen  $\varphi$ -kre  $\cos \varphi$  monoton csökken, és a  $\mathcal{C} \equiv \cos(\frac{\pi}{4} + \delta)$  érték egynél kisebb pozitív:  $0 < \mathcal{C} < 1$ .

Az  $\mathcal{I}_1$  integrálban ha találunk az integrandushoz integrálható majoránst egyszerre minden  $r$ -re és minden szóba jövő  $\varphi$ -re (hiszen  $\varphi$  akárhogyan változhat a megengedett tartományán belül, miközben  $r \rightarrow \infty$ ), akkor a *Lebesgue-tétel* szerint  $\mathcal{I}_1$  határértéke tényleg a pontonkénti  $e^{-s^2/2}$  határértékfüggvény integrálja,  $\sqrt{2\pi}$ . Az integrandus abszolútértéke ebben a tagban

$$\left| e^{-\sqrt{z}s + z \operatorname{Ln}\left[1 + \frac{s}{\sqrt{z}}\right]} \right| = e^{-h(s, \varphi, r)}, \quad \text{ahol (a } \xi \equiv \frac{s}{r} \text{ jelölést használva)}$$

$$h(s, \varphi, r) = r^2 \left[ \xi \cos \varphi - \frac{1}{2} \cos(2\varphi) \ln(1 + 2\xi \cos \varphi + \xi^2) - \sin(2\varphi) \operatorname{arctg} \frac{\xi \sin \varphi}{1 + \xi \cos \varphi} \right]. \quad (\text{C.15})$$

Ha (kínunkban) a deriváltakat vizsgáljuk, akkor az  $s$  szerintiből kiderül, hogy

$$h(s, \varphi, r) = r \int_0^s dt t \frac{r + t \cos \varphi}{r^2 + 2rt \cos \varphi + t^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial h}{\partial \varphi} = r \sin \varphi \int_0^s dt \frac{t^2(r^2 - t^2)}{(r^2 + 2rt \cos \varphi + t^2)^2}. \quad (\text{C.16})$$

Ezen első alakban már kényelmesen becsülgethetünk; itt is (mint a valós  $z \equiv x$  korábbi esetében is) érdemes külön nézni az  $s > 0$  és az  $s < 0$  tartományokat. A  $\varphi$ -ben legpesszimistább lehetőséggel is

$$s > 0 \text{ esetén} \quad h(s, \varphi, r) \geq r \int_0^s dt t \frac{r\mathcal{C} + t\mathcal{C}}{r^2 + 2rt + t^2} = \mathcal{C} [rs - r^2 \ln(1 + \frac{s}{r})] \equiv \mathcal{C} \cdot H(s, r), \quad (\text{C.17})$$

eme  $H(s, r)$ -ről pedig belátható, hogy fix  $s$ -re  $r$ -t növelve monoton nő.<sup>104</sup> Így tehát

$$\begin{aligned} &\text{ha } r \rightarrow \infty\text{-t pl. } r=1\text{-től indítjuk, akkor minden előkerülő } \varphi \text{ és } r \text{ esetén} \\ &s > 0\text{-ra } h(s, \varphi, r) \geq \mathcal{C}H(s, r=1) \quad \Rightarrow \quad e^{-h(s, \varphi, r)} \leq e^{-\mathcal{C}H(s, r=1)} = (1+s)^{\mathcal{C}} e^{-\mathcal{C}s}, \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

és utóbbi integrálható  $s \in \mathbb{R}^+$ -ra: itt készen vagyunk.  $s < 0$ -ra pedig (fix  $r$  esetén  $-r \leq s \leq 0$  lehet!) az iménti (C.16) felírás második alakjában az integrandus a  $\varphi$  és  $t$  tartományaiból beláthatóan pozitív, de a felső határ a kisebb: így ekkor  $\frac{dh}{d\varphi} \leq 0$ , azaz  $h(s, \varphi, r)$  csökken, ha  $\varphi$  nő. Vagyis  $\varphi$ -be  $\frac{\pi}{4} + \delta$ -t ( $\cos \varphi$  helyett  $\mathcal{C}$ -t) írva becsülhetünk, majd pedig az alapján, hogy  $|s| \leq r$  és  $t \leq |s|$ , tehát  $t \leq r$ :

$$\begin{aligned} \text{ha } s < 0, \text{ akkor} \quad h(s, \varphi, r) &\geq r \int_0^s dt t \frac{r + t\mathcal{C}}{r^2 + 2\mathcal{C}rt + t^2} \stackrel{t \rightarrow -t}{=} r \int_0^{|s|} dt t \frac{r - t\mathcal{C}}{r^2 - 2\mathcal{C}rt + t^2} \geq \\ &\geq r \int_0^{|s|} dt t \frac{r - r\mathcal{C}}{r^2 + t^2} \geq \int_0^{|s|} dt t \frac{r^2(1 - \mathcal{C})}{2r^2} = \frac{1 - \mathcal{C}}{4} s^2 \quad \Rightarrow \quad e^{-h(s, \varphi, r)} \leq e^{-\frac{1 - \mathcal{C}}{4} s^2} \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

minden előkerülő  $r$ -re és  $\varphi$ -re; a legutóbbi függvényalak pedig integrálható  $s \in \mathbb{R}^-$ -ra.

• Találtunk tehát  $\mathcal{I}_1$ -hez az egész  $s \in \mathbb{R}$ -en megfelelő integrálható majoránst (két darabban): ezzel a taggal tehát készen vagyunk,  $\mathcal{I}_1$ -ből valóban a szükséges  $\sqrt{2\pi}$  származik.  $\mathcal{I}_2$  vizsgálatához továbbra is  $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4} + \delta]$ ; beírva  $s_1 = r$ -et és  $\sqrt{z} = r e^{i\varphi}$ -t az  $\mathcal{I}_2$  kifejezésébe az derül ki, hogy

$$\begin{aligned} \left| e^{z(1-u) + \sqrt{z}s_1 u + z \operatorname{Ln}\left(1 - \frac{s_1}{\sqrt{z}}\right)} \right| &= e^{r^2 \left[ \cos \varphi - (1-u)(\cos \varphi - \cos(2\varphi)) + \frac{1}{2} \cos(2\varphi) \ln(2(1 - \cos \varphi)) - \sin(2\varphi) \operatorname{arctg} \frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi} \right]} \leq \\ &\leq e^{r^2 \left[ \cos \varphi + \frac{1}{2} \cos(2\varphi) \ln(2(1 - \cos \varphi)) - \sin(2\varphi) \operatorname{arctg} \frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi} \right]}, \quad \text{mert most } \cos(2\varphi) \leq \cos \varphi. \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

<sup>104</sup>Mert hogy  $\frac{\partial H}{\partial r} = 2r \ln(1 + \frac{s}{r}) + \frac{s^2 + 2rs}{r+s}$ , ami  $s=0$ -ban nulla, és  $\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial H}{\partial r} \right) = \left( \frac{s}{s+r} \right)^2 \geq 0$ , úgyhogy  $s > 0$ -ra  $\frac{\partial H}{\partial r} \geq 0$ .

Az itt kapott kitevő éppen  $-h(s=-r, \varphi, r)$  az előző pontbeli jelöléssel: megállapítottuk ott, hogy ilyen  $s < 0$ -k esetében ez a kitevő  $\varphi$  függvényében monoton nő, azaz a legpesszimistább becslés az, amikor  $\varphi = \frac{\pi}{4} + \delta$ -t írunk. Viszont még ilyen  $\varphi$ -t beírva is negatív a kitevő.<sup>105</sup>

$$\text{Van tehát olyan } \lambda > 0, \text{ amivel minden előkerülő } \varphi\text{-re} \quad (C.21)$$

$$e^{r^2[\cos \varphi + \frac{1}{2} \cos(2\varphi) \ln(2(1 - \cos \varphi)) - \frac{\pi - \varphi}{2} \sin(2\varphi)]} \leq e^{-\lambda r^2}.$$

Emiatt (még az előtte lévő szorzóval együtt is) az  $\mathcal{I}_2$  integrandusa  $u$ -ban egyenletesen is nullához tart, akármilyen  $\varphi$ -ket érintve is tart  $z$  végtelenhez. Még az kell, hogy mivel  $u \in [0, 1]$ ,  $|u^z| \leq u^{\varepsilon-1}$  végig igaz, és utóbbi függvény integrálható (ezért kellett a  $\Re(z) > -1 + \varepsilon$  kikötés): az előbb kapott exponenciális tényezőt felülbecslő bármilyen konstanssal szorozva  $u^{\varepsilon-1}$  jó integrálható majoránsnak. Így újfent a *Lebesgue-tétel* miatt  $\mathcal{I}_2$  is jól viselkedik: tényleg nullához tart.

- Teljesen beláttuk tehát a Stirling-formulát a következő esetben:

$$\text{Ha végig } \Re(z) > -1 + \varepsilon, \text{ és } \Im(z) \geq 0, \text{ akkor } \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(z+1)} \sqrt{2\pi z} \left(\frac{z}{e}\right)^z = 1. \quad (C.22)$$

Viszont a bal oldali függvényalak olyan, hogy ha  $z$  helyébe  $z^*$ -ot írunk, a függvényérték is konjugáltra változik: ha igaz a felírt határérték az  $\Im(z) \geq 0$  esetben, akkor muszáj, hogy igaz legyen konjugált  $z$ -kre is, azaz az  $\Im(z) \leq 0$  esetben is. Következtetés: a képletünk igaz  $\Im(z) \leq 0$ ,  $\Re(z) > -1 + \varepsilon$  esetén is. Innen továbbléphetünk  $\Re(z) < 0$ -ra a reflexiók összefüggéssel (ld. a 6.4. szakasz végét).

\* \* \*

- Az  $\frac{1}{\Gamma(z)}$  Hankel-féle vonalintegrál-képletét (ld. a 6.4. szakaszban a (6.61) egyenletet és a 48. ábrát) beláttuk ott a  $\Re(z) < 1$  esetre, más  $z$ -kre pedig a szokásos analitikussági érveléssel terjesztettük ki.

Csak az maradt elvarratlanul, hogy az ott felírt vonalintegrál,  $\mathcal{F}(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} dt e^t t^{-z}$  tényleg  $z$ -ben differenciálható függvényt ad meg.

Ez a vonalintegrál ugye már jól meghatározott úgy is, hogy az útról csak „globális” jellemzőket rögzítünk (most azt, hogy: kerülje meg a  $t \in \mathbb{R}_0^-$  vágást pozitív irányban  $t=0$ -hoz nem túl közel menve,  $\Re(t) = -\infty$ -ből jöve és oda is térve). A paraméteres integrál differenciálhatóságáról szóló (C.5) tétel alkalmazásához viszont érdemes specifikálni az utat: ezt megtehetjük, erre (is) jó a vonalintegrálok útfüggetlensége. Legkellemesebb talán a „vágásra ráhúzott” utat használni, ahogy a főszövegben is tettünk  $\Re(z) < 1$ -nél. A lényeg: ha a  $t=0$  elágazási pontra *nem* húzódunk rá, hanem meghagyjuk a véges  $r$  sugarú,  $t = r e^{i\varphi}$  módon paraméterezhető ívet, akkor minden  $z$ -re értelmes marad az integrál. Legyen tehát ez az út-specifikáció; beírva mindent és elvégezve a vágás száraitra való „ $\varepsilon \rightarrow 0$ ” ráhúzást valamint az egyszerűsítéseket a főszövegbeli tárgyaláshoz hasonlóan

$$\mathcal{F}(z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \int_r^\infty ds s^{-z} e^{-s} + \frac{r^{-z}}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi d\varphi e^{-iz\varphi} e^{r e^{i\varphi}} \equiv \mathcal{F}_{\text{vágás}}(z) + \mathcal{F}_{\text{ív}}(z). \quad (C.23)$$

Akármilyen  $z$ -t véve akörül egy kis környezet kell: minden ilyenén a második,  $\mathcal{F}_{\text{ív}}$ -beli integrál integrandusa abszolútértékben teljes mértékben korlátos, és véges szakaszra integrálunk: ebben teljesül a paraméteres integrál differenciálhatóságának feltétele. Az első  $\mathcal{F}_{\text{vágás}}$  integráljában pedig pont ugyanúgy érvelhetünk, mint ahogy már a gamma-függvényt definiáló legeredetibb (6.2) integrál eredményének differenciálhatóságát beláttuk a 6.1. szakasz végén.

<sup>105</sup>Életemben először itt igaziból nem ezzel a „rendes” függvényvizsgálattal kezdtem, hanem programmal ábrázoltam, ahonnan a „a vak is látja” a következtetést.



## D. függelék: a Riemann-féle zéta-függvény

A Riemann-féle zéta-függvénnyel már találkoztunk a gamma-függvény sorfejtésénél a 6.3. szakaszban. A fizikában is előkerül időnként, a matematikában pedig lényegében egy külön tudományág (az *analitikus számelmélet*) foglalkozik vele. Itt egy ismerkedő „rárepülés” következik.

### D.1. Definiáló sorok, integrálok

- Az elsődleges **definíció** (melyet  $\text{Ln } \Gamma(1+z)$  sorához valós egész  $s \equiv m > 1$ -re használtunk):<sup>106</sup>

$$\zeta(s) := \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \text{ha } s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1. \quad (\text{D.1})$$

Ugye  $|n^s| = n^{\Re(s)}$ . Emiatt ha  $\Re(s) \leq 0$ , akkor az  $\frac{1}{n^s}$ -ek *sorozata* nem tart nullához, így a (D.1) sor sem lehet összegezhető. Ha viszont  $\alpha \equiv \Re(s) > 1$ , akkor a  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$  létezik, mert  $f(x) = x^{-\alpha}$  ilyenkor 1-től  $\infty$ -ig integrálható és itt majorálja az  $n^{-\alpha}$  módon csökkenő „lépcsős függvényt”, melynek  $\int_0^{\infty}$  integrálja  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ . A felírt sor tehát abszolútértékben is összegezhető, ha  $\Re(s) > 1$ .

$s=1$ -ben a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  *harmonikus sort* kapnánk, ami divergens, ld. a B.2. szakaszt. Valós  $s \in \mathbb{R}$ ,  $0 < s < 1$  esetén is divergens a sor, hiszen ilyenkor tagonként  $\frac{1}{n^s} = \left| \frac{1}{n^s} \right| \geq \frac{1}{n}$ . Akármilyen  $s \in \mathbb{C}$ ,  $0 < \Re(s) \leq 1$  esetén ezek szerint a (D.1) sor nem lehet abszolút konvergens (mert akkor  $\frac{1}{n^{\Re(s)}}$  is összegezhető volna, de épp most láttuk, hogy ilyenkor nem az). A (D.1) sor *feltételesen konvergens* még lehetne, ha  $0 < \Re(s) \leq 1$ , és  $s \notin \mathbb{R}$  (az  $n^{-s}$ -ek az abszolútérték lassabb csökkenése mellett is komplex  $s$ -ekre „feltekeredhetnének”, létezne összegük), de látni fogjuk, hogy *nem* ez a helyzet.

Összefoglalva: a (D.1) sor **abszolút konvergens, ha  $\Re(s) > 1$ , és divergens, ha  $\Re(s) \leq 1$ .**

- $2^s$ -nel osztva *páros*, majd az eredetiből kivonva *páratlan* számokat használó összegeket is írhatunk:

$$2^{-s}\zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \dots \Rightarrow (1 - 2^{-s})\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \dots, \quad (\text{D.2})$$

ahol a tagonkénti kivonás létjogosultsága ugye az abszolút konvergencián múlik (ld. a (B.13) tételt). Továbbmenve: az eredeti sorból *kétszer* kivonva a páros tagokat **váltakozó előjelű sort** kapunk.

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}. \quad (\text{D.3})$$

Abszolút konvergenciáról itt ugyanazt mondhatjuk, mint a (D.1) sorra (hiszen a tagok abszolútértékei ugyanazok): ez a (D.3) sor **abszolút konvergens, ha  $\Re(s) > 1$ , és divergens, ha  $\Re(s) \leq 0$** , és biztosan nem abszolút konvergens, ha  $0 < \Re(s) \leq 1$ . Itt azonban az derül ki (ld. alább), hogy ez a (D.3) váltakozó előjelű sorösszeg **(feltételesen) konvergens a  $0 < \Re(s) \leq 1$  sávon**.

- Elfogadva egyelőre a  $0 < \Re(s) \leq 1$  esetre mondott konvergenciát arra jutunk, hogy érvényes az

$$\text{alternatív definíció: } \zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}, \quad \text{ha } \Re(s) > 0, \text{ és } s \neq 1. \quad (\text{D.4})$$

Kiemeltük  $s=1$ -et: már láttuk, hogy  $s=1$ -ben az első (D.1) sorösszeg a (divergens) harmonikus sorösszeg; ez a váltakozó előjelű (D.3) sorösszeg pedig  $\ln 2$ -t ad  $s=1$ -ben (ahogy a C.5. szakaszban is láttuk), de az  $1 - 2^{1-s}$  nevező értéke  $s=1$ -ben 0, úgyhogy ez a (D.4) definíció sem értelmes  $s=1$ -re. Ki is derül alább, hogy **elsőrendű pólus van  $s=1$ -ben**.

<sup>106</sup>Ezen  $\zeta(s)$  komplex változóját  $z$  helyett szokásosan  $s$ -sel jelölik (*Riemann-ig* visszamenő hagyomány alapján).

A váltakozó előjelű (D.4) definíciós képletben az  $1-2^{1-s}$  nevező komplex  $s$ -eket is megengedve nemcsak  $s=1$ -ben nulla, hanem az  $\exp$  függvény periodikussága miatt  $s_n = 1 + n \cdot \frac{2\pi i}{\ln 2}$ -ben is, ahol  $n \in \mathbb{Z}$ . A következő szakaszban azonban belátjuk, hogy  $\zeta(s)$  jól definiált (véges) értéket vesz fel (és differenciálható) minden  $s_n$ -ben, ha  $n \neq 0$ : eszerint ezen  $s_n$ -ekben a (D.4)-beli váltakozó sorösszeg nulla.<sup>107</sup> A (D.4) képletben ezért tényleg csak az  $s=1$  hely (és a  $\Re(s) < 0$  félsík) nem értelmes.

• Érdekes néhány fajta integrált bevenni a játékba. Már láttuk, hogy egyelőre  $\Re(s) \leq 0$  szóba sem jön; egyelőre tehát **kössük ki, hogy  $\Re(s) > 0$** . Egy ötlet: a gamma-függvényt is felidézve

$$n \in \mathbb{N}^+ \text{ esetén arra jutunk, hogy } \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{-nt} = \Gamma(s) \cdot \frac{1}{n^s}, \quad (\text{D.5})$$

és az  $\frac{1}{n^s}$  ilyen felírását beírhatjuk a (D.1) ill. a (D.3) sorokba, majd egyszerűsíthetünk:

$$\Gamma(s) \left[ \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots \right] \stackrel{?!}{=} \int_0^\infty dt t^{s-1} (e^{-t} + e^{-2t} + e^{-3t} + e^{-4t} + \dots) = \int_0^\infty dt t^{s-1} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}, \quad (\text{D.6})$$

$$\Gamma(s) \left[ \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \dots \right] \stackrel{?!}{=} \int_0^\infty dt t^{s-1} (e^{-t} - e^{-2t} + e^{-3t} - e^{-4t} + \dots) = \int_0^\infty dt t^{s-1} \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}. \quad (\text{D.7})$$

hiszen az integrandusban  $e^{-t}$  szempontjából geometriai sorokat kaptunk. Az alábbi (tényleg pont a kijelölt esetekben létező, ld. rögtön) **integrál-előállítások** adódtak tehát:<sup>108</sup>

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}, \quad \text{ha } \Re(s) > 1, \text{ illetve} \quad (\text{D.8})$$

$$(1-2^{1-s})\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt \frac{t^{s-1}}{e^t + 1}, \quad \text{ha } \Re(s) > 0 \quad (\text{és } s=1\text{-ben a bal oldal } 0\infty). \quad (\text{D.9})$$

• Az integrandusok abszolútértékei  $\frac{t^{\alpha-1}}{e^t-1}$  ill.  $\frac{t^{\alpha-1}}{e^t+1}$ , ahol  $\alpha \equiv \Re(s)$ : ezek  $t \rightarrow \infty$  felé exponenciálisan csökkennek; minden  $s \in \mathbb{C}$  esetén integrálhatók  $t$ -ben pl.  $[1, \infty]$ -re. A  $t=0$  környéke problémás.

A második (D.9) integrálban a nevezős rész folytonos  $t=0$  körül, azaz pl.  $t \in [0, 1]$ -en, így vannak olyan  $A_2 > 0$  és  $B_2 > 0$  konstansok, amikkel  $t \in [0, 1]$ -en mindenhol  $A_2 \leq \frac{1}{e^t+1} \leq B_2$ . Az integrandust  $[0, 1]$ -en tehát alulbecsülhetjük  $A_2 t^{\alpha-1}$ -gyel, és felülbecsülhetjük  $B_2 t^{\alpha-1}$ -gyel. Ezek miatt (ismerve hatványfüggvények integrálhatóságát) pontosan  $\alpha > 0$  esetén létezik a második (D.9) integrál.

Az első (D.8) integrálban az  $e^t - 1$  nevező  $t \approx 0$ -nál  $\approx t$ ; pontosabban:  $\frac{t}{e^t-1}$   $t=0$ -ban véges 1 határértékű, úgyhogy ha őt  $t=0$ -ban 1-nek értelmezzük, akkor  $\frac{t}{e^t-1}$  folytonos  $t \in [0, 1]$ -en; órá igaz, hogy  $t \in [0, 1]$ -en  $0 < A_1 \leq \frac{t}{e^t-1} \leq B_1$ . Az első integrandus abszolútértékét  $t^{\alpha-2} \frac{t}{e^t-1}$  alakba írva tehát az előbb látotthoz hasonlóan belátható, hogy a (D.8) integrál pontosan  $\alpha > 1$  esetén létezik.

• A (D.6) ill. (D.7) átalakításokban a  $?!$  lépésben beírtuk  $\frac{1}{n^s}$  azelőtti (D.5) előállítását és megcseréltük az összegzést az integrálással. Utóbbi indoklásához ugye kell egy integrálható majoráns minden véges részletösszeg abszolútértékéhez egyszerre. Az első (D.6) esetben (mivel a részletösszegek sorozata itt abszolútértékben monoton nő) itt ez maga a sorösszeg, (D.8) integrandusa. A második (D.7) esetben pedig az első tag,  $t^{\alpha-1} e^{-t}$  jó: semelyik véges részletösszeg-integrandus nem lesz ennél abszolútértékben nagyobb  $t \in [0, \infty]$ -n. A *Lebesgue-tételt* tudva tehát tényleg indokolt az összegzés és az integrálás megcserélése. Sőt az is következmény, hogy a második (D.9) integrállal ekvivalens váltakozó (D.3) sorösszeg *tényleg konvergens* (de ugye csak feltételeesen)  $0 < \Re(s) \leq 1$ -re.

<sup>107</sup>Érdekes viszont, hogy ezt közvetlenül a (D.3) sorösszezből belátni csak a XX. század közepe táján sikerült.

<sup>108</sup>Ilyen integrálok kerülnek elő a statisztikus fizikában *elfajult Bose- ill. Fermi-gázok* vizsgálatakor.

• **Kiegészítés:** az nem világos még, hogy az eredeti (D.1) sor nem konvergens  $0 < \Re(s) \leq 1$ ,  $s \notin \mathbb{R}$ -re (attól még lehetne az, hogy a vele *máshol* ekvivalens (D.8) integrál itt nem létezik). Legyen tehát most  $0 < \Re(s) \leq 1$ ,  $s \notin \mathbb{R}$ , speciálisan:  $s \neq 1$ . Integrálokat vizsgálunk, de csak részben támaszkodhatunk a Lebesgue-tételre.<sup>109</sup> Írjunk fel az  $\frac{1}{n^s}$  (D.5) kifejezésével egy *véges* részletösszeget. Sejthető, hogy a  $t^{s-1}$   $t=0$  körüli integrálhatósága kap szerepet; „errefelé evezünk”:

$$\Gamma(s) \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} = \int_0^\infty dt t^{s-1} \frac{1-e^{-Nt}}{e^t-1} = \int_0^\alpha dt t^{s-1} \frac{1-e^{-Nt}}{e^t-1} + \int_\alpha^\infty dt t^{s-1} \frac{1-e^{-Nt}}{e^t-1} \quad \text{valamilyen} \quad \alpha > 0\text{-val.} \quad (\text{D.10})$$

Az  $\int_\alpha^\infty$  darabnak létezik  $N \rightarrow \infty$  határértéke, mert a pontonkénti határérték abszolútértéke,  $\frac{t^{\Re(s)-1}}{e^t-1}$  *integrálható majoráns a  $t \in [\alpha, \infty]$  szakaszon*. A maradékban  $\frac{t}{e^t-1}$ -et érdemes „leszedni”: ennek 1 a határértéke  $t=0$ -ban, és lineárisan indul: van olyan  $K > 0$ , hogy  $t \in [0, \alpha]$ -n  $|\frac{t}{e^t-1} - 1| \leq Kt$ . Emiatt

$$\int_0^\alpha dt t^{s-1} \frac{1-e^{-Nt}}{e^t-1} = \int_0^\alpha dt t^{s-2} (1-e^{-Nt}) \left[ \frac{t}{e^t-1} - 1 \right] + \int_0^\alpha dt t^{s-2} (1-e^{-Nt}). \quad (\text{D.11})$$

$0 < \Re(s) \leq 1$ -re az itteni első tagnak is van  $N \rightarrow \infty$  határértéke, mert  $t \in [0, \alpha]$ -ra  $|1-e^{-Nt}| < 1$ , így  $|t^{s-2}(1-e^{-Nt})(\frac{t}{e^t-1}-1)| \leq t^{\Re(s)-2} \cdot Kt = Kt^{\Re(s)-1}$ , és ez most integrálható majoráns. Az aláhúzott tag maradt kérdés: ebben már „tisztábban látszik”, hogy tényleg a  $t^{s-2}$  integrálhatóságán múlik a dolog. Több módon is lehet innentől haladni; a kedvencem egy plusz integrál bevezetése:

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha dt t^{s-2} (1-e^{-Nt}) &= \int_0^\alpha dt t^{s-2} \int_0^t dy N e^{-Ny} = \int_0^\alpha dt \int_0^t dy t^{s-2} N e^{-Ny} \stackrel{1.}{=} \int_0^\alpha dy \int_y^\alpha dt t^{s-2} N e^{-Ny} = \\ &= \int_0^\alpha dy N e^{-Ny} \int_y^\alpha dt t^{s-2} \stackrel{2.}{=} \int_0^\alpha dy \frac{\alpha^{s-1} - y^{s-1}}{s-1} N e^{-Ny} \stackrel{3.}{=} \alpha^{s-1} \frac{1-e^{-N\alpha}}{s-1} - \frac{1}{N^{s-1}} \int_0^{N\alpha} dx \frac{x^{s-1} e^{-x}}{s-1}. \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

A trükkös lépés az 1.-gyel jelölt: miután bevezettünk az  $y$ -integrált  $1-e^{-Nt}$ -t előállítására, a  $t-s$  változóban kettős integrált ismertünk fel, amit átírtunk a másik sorrendbe.<sup>110</sup> A 2. kijelölt lépésben elvégeztük a  $t$ -integrált, a 3.-ban pedig a maradék  $y$ -integrálból az egyiket, a másikban pedig  $y = x/N$ -et helyettesítettünk. A kapott eredmény első tagjának van  $N \rightarrow \infty$  határértéke,  $\frac{\alpha^{s-1}}{s-1}$ , és a második *integrálnak* is, méghozzá  $\frac{\Gamma(s)}{s-1}$ . Utóbbi tag előtt van a „lényeg”:  $\frac{1}{N^{s-1}}$ . *Sikerült nyakoncsípni:* ennek pontosan csakis  $\Re(s) > 1$  esetén van (nulla) határértéke;  $\Re(s) < 1$  esetén  $|\frac{1}{N^{s-1}}| \rightarrow \infty$ , ha  $N \rightarrow \infty$ , az  $\Re(s) = 1$ ,  $\Im(s) \neq 0$  esetben pedig  $|\frac{1}{N^{s-1}}| = 1$ , de  $N^{s-1}$  a komplex síkon „köröz”, nincs határértéke. Készen vagyunk: az eredeti (D.1) sor feltételesen sem konvergens  $0 < \Re(s) \leq 1$  esetén.

## D.2. Analitikus elfolytatás, reflexiós összefüggés

• Vegyük szemügyre még egyszer a (D.8)–(D.9) valós integrál-előállításokat:

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty dt \frac{t^{s-1}}{e^t-1}, \quad \text{ha } \Re(s) > 1, \text{ illetve} \quad (\text{D.13})$$

$$(1-2^{1-s})\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty dt \frac{t^{s-1}}{e^t+1}, \quad \text{ha } \Re(s) > 0 \text{ és } s \neq 1. \quad (\text{D.14})$$

<sup>109</sup>Ugye ha van integrálható majoráns, akkor az integrálok határértéke létezik és egyenlő a határértékfüggvény integráljával. Viszont ha nincs integrálható majoráns, attól még létezhet az integrálok határértéke (ha nem is egyenlő a határértékfüggvény integráljával). Nem úszuk meg tehát itt, hogy alaposabban vizsgáljuk az integráljainkat.

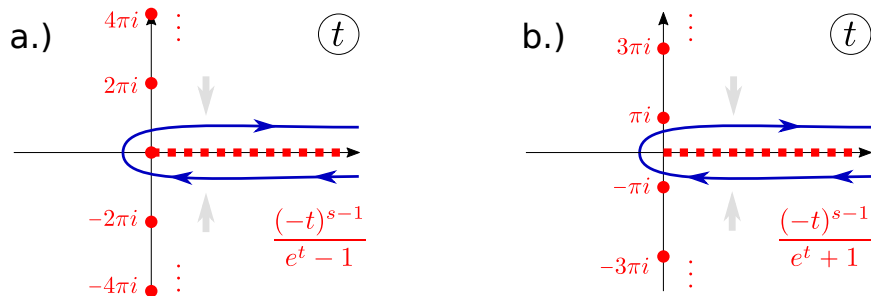
<sup>110</sup>Az integrálás tartománya itt a  $t-y$  síkon egy háromszög: gondoljuk ki, hogy tényleg a felírt módon jelölhetjük ki a határokat a kétféle sorrendben. Kell persze a *Fubini-tétel*: itt véges  $N$ -re létezik maga a kétdimenziós integrál is (mert az eredeti sorrendi integrál abszolútértékben is létezik), így tényleg áttérhetünk a másik sorrendi integrálra.

Az  $s$ -re tett megszorítások itt ugye csakis a  $t=0$  körüli integrálhatóságon múltak. Áthidalhatjuk ezt, ha **komplex integrálokra** térünk át, amelyek elkerülik a problémás  $t=0$  pontot.

**Állítás:** 
$$\frac{\zeta(s)}{\Gamma(1-s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^{(0-)} dt \frac{(-t)^{s-1}}{e^t - 1}, \quad \text{ha } \Re(s) > 1, \quad (\text{D.15})$$

illetve 
$$(1-2^{1-s}) \frac{\zeta(s)}{\Gamma(1-s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^{(0-)} dt \frac{(-t)^{s-1}}{e^t + 1}, \quad \text{ha } \Re(s) > 0 \text{ és } s \neq 1. \quad (\text{D.16})$$

Legyen először  $s \notin \mathbb{Z}$ : ekkor a felírt integrandusoknak a (most már komplex)  $t$  változó függvényében vágásai vannak  $t \in \mathbb{R}_0^+$ -on; az út ezt elkerüli *negatív* irányban,  $\Re(t) = \infty$ -ből jöve és visszamenve. Viszont *pólusok is vannak* ott, ahol  $e^t = 1$  ill.  $e^t = -1$ : az első integrálban ezek a  $t = n \cdot 2\pi i$  helyek (kivéve  $t=0$ -t, ami elágazási pont), a másodikban pedig az  $i\pi + n \cdot 2\pi i$  helyek (itt is  $n \in \mathbb{Z}$ ). Ezek mind elsőrendű pólusok. Gondolhatjuk, hogy a (D.15)–(D.16) integrálok a vágásra húzással vezethetők vissza a valós (D.13)–(D.14) integrálokra: az útnak ehhez egyik pólust sem szabad megkerülnie.



55. ábra. a.) ill. b.): illusztráció a (D.15) ill. (D.16) komplex integrál-előállításához.

A vágásra ugye úgy húzzuk rá az utat, hogy a fölötte ill. alatta  $\varepsilon$ -nyival futó szakaszokat  $t = x \pm i\varepsilon$  módon paraméterezzük, a  $t=0$  pontot pedig egy  $r$  sugarú körívdarabbal kerüljük el: hamar kiderül, hogy éppen az  $s$ -re írt feltételek teljesülése esetén, (D.15)-nél  $\Re(s) > 1$ -re, (D.16)-nál  $\Re(s) > 0$ -ra fog a kis ív járuléka nullához tartani  $r \rightarrow 0$ -nál. Tudva szokásosan, hogy  $x \in \mathbb{R}^+$  esetén  $\varepsilon \rightarrow 0$ -ra  $(-x \mp i\varepsilon)^{s-1} = x^{s-1} e^{\mp i\pi(s-1)} = -x^{s-1} e^{\mp i\pi s}$ , arra jutunk, hogy a megfelelő  $s$ -ekre

$$\int_{\infty}^{(0-)} dt \frac{(-t)^{s-1}}{e^t - 1} = (e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}) \int_0^{\infty} dx \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}, \quad \text{és} \quad \int_{\infty}^{(0-)} dt \frac{(-t)^{s-1}}{e^t + 1} = (e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}) \int_0^{\infty} dx \frac{x^{s-1}}{e^x + 1}.$$

Felidézve, hogy  $e^{i\pi s} - e^{-i\pi s} = 2i \sin(\pi s)$ , és hogy  $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$ , összerakva kiderül, hogy a (D.15) ill. (D.16) integrálfelírások tényleg a valós (D.13)-mal ill. (D.14)-gyel ekvivalensek.

• Ha *nem* húzzuk rá az utakat  $t=0$ -ra, akkor a (D.15) ill. (D.16) **komplex integrálok minden  $s \in \mathbb{C}$ -re léteznek** (hiszen ekkor a  $t=0$  környéke nem zavar be;  $\Re(t) \rightarrow \infty$  felé a nevezőbeli  $e^t$ -k biztosítják az integrálhatóságot  $t^{s-1}$  mellett is); sőt  $s$ -ben differenciálható függvényt állítanak elő (ami belátható ahhoz hasonlóan, ahogy a gamma-függvény Hankel-féle előállításáról a C.6. függelék szakaszban.) A (D.15) ill. (D.16) integrálok tehát megadják  $\zeta(s)$  **analitikus elfolytatását**: a korábbi sorok és valós integrálok  $\Re(s) > 1$ -re ill.  $\Re(s) > 0$ -ra működtek, de most  $\zeta(s)$  a  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  halmazon értelmes differenciálható függvénné lépett elő (és ezt a kiterjesztést is  $\zeta(s)$ -sel jelöljük).

Tehát minden  $s \in \mathbb{C}$  esetén 
$$\frac{\zeta(s)}{\Gamma(1-s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^{(0-)} dt \frac{(-t)^{s-1}}{e^t - 1}, \quad (\text{D.17})$$

és ugyanekkor az is igaz, hogy 
$$\frac{\zeta(s)}{\Gamma(1-s)} = \frac{1}{1-2^{1-s}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^{(0-)} dt \frac{(-t)^{s-1}}{e^t + 1}. \quad (\text{D.18})$$

**Megjegyzések:**

1. Már korábban is láttuk, hogy a váltakozó előjelű (D.4) definíció bővebb halmazon ( $\Re(s) > 0$ -n,  $s=1$ -et kivéve) működött, mint az eredeti (D.1) sor (csak  $\Re(s) > 1$ -re): a (D.4)-gyel tehát lényegében az analitikus elfolytatás egy lépése történt az eredeti (D.1) definícióhoz képest.
  2. Mivel (mint mondtuk) a felírt *integrálok* minden  $s$ -re értelmesek, csak ott lehet gond  $\zeta(s)$ -sel, ahol  $\Gamma(1-s)$ -nek (elsőrendű) pólusai vannak: ezek az  $s = 1, 2, 3, 4, \dots$  stb. pozitív egész számok. Azonban  $s = 2, 3, 4, \dots$  esetén  $\zeta(s)$  már a legeredetibb (D.1) sor-definíció szerint is értelmes volt: eszerint tudhatjuk pl., hogy  $s = 2, 3, 4, \dots$ -re a (D.17)-beli interál nullát kell, hogy adjon. (Ezt nemsokára másképp is belátjuk; amúgy már akár nyilvánvaló is lehet most is.)
  3. Az is látszik, hogy **tényleg csakis  $s=1$ -ben** nem értelmes  $\zeta(s)$  : **elsőrendű pólusa van** itt  $\Gamma(1-s)$  miatt. Hogy itt *tényleg pólus van* (azaz  $s=1$ -ben nem nulla a (D.17)-beli integrál), az a váltakozó előjelű soros (D.4) definícióból is látszik. Megkapjuk onnan a reziduumot is: a nevező deriváltja  $\frac{d}{ds}(1-2^{1-s})|_{s=1} = 2^{1-s} \ln 2|_{s=1} = \ln 2$ , a sorösszeg pedig  $s=1$ -ben (ld. pl. a C.5. szakaszban)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \ln 2$ . Tehát  $\text{Res } \zeta(s)|_{s=1} = \frac{\ln 2}{\ln 2} = 1$ .
  4. Azt is látjuk most, amit a váltakozó előjeles (D.4) sor után „ígértünk”:  $\zeta(s)$  értelmes az itt is előkerült  $1-2^{1-s}$  nevező  $s=1$ -en kívüli komplex zérushelyeiben, az  $1 + n \cdot \frac{2\pi i}{\ln 2}$  helyeken is.
  5. Figyelem: nehogy összekeverjük  $\zeta(s)$  most kapott „szerkezetét” (meromorf, egy elsőrendű pólus  $s=1$ -ben) azzal, ahogyan az őt előállító (iménti jelölésben  $t$ -függő) integrandusok viselkednek!
- $\zeta(s)$  tehát értelmes az egész  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  halmazon, de  $\Re(s) \leq 0$ -ra egyelőre csak a (D.17)–(D.18) vonal-integráljaink vannak. Közelhozza  $\zeta(s)$  analitikus kiterjesztését az ezekből levezethető Riemann-féle

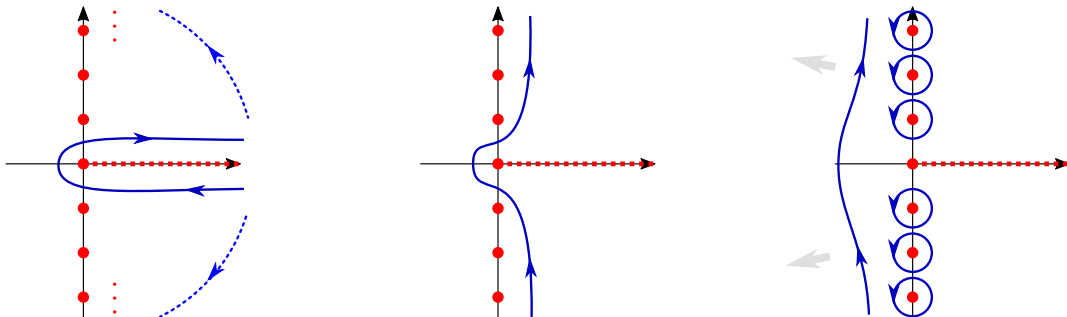
$$\text{reflexiós képlet: } \zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s} \cos\left(\frac{\pi}{2}s\right) \Gamma(s) \zeta(s), \quad \forall s \in \mathbb{C}\text{-re.} \quad (\text{D.19})$$

Ez „szimmetrikus”: nem ad újat az  $s \leftrightarrow 1-s$  cserével; ez még jobban látszik, ha a gamma-függvény (6.38) kétszerezős képletét és (6.17) reflexiós összefüggését ügyesen alkalmazva ilyen alakba írjuk:

$$\text{szimmetrikus(abb) alak: } \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \pi^{-(1-s)/2} \zeta(1-s) = \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-s/2} \zeta(s). \quad (\text{D.20})$$

Mindkét alakban  $s=0$ -ban vagy  $s=1$ -ben az egyik oldalnak megszüntethető szingularitása van.

- A (D.17) vagy a (D.18) előállítás is jó a levezetéshez; vegyük mondjuk (D.17)-et, azaz vizsgáljuk az  $\int_{\infty}^{(0-)} dt \frac{t^{s-1}}{e^t-1}$  vonalintegrált. A fenti 55. ábra talán sugallja az ötletet: „dobjuk át” az utat a meg nem került pólusokra!<sup>111</sup> Érdeemes több lépésben kigondolni; az alábbi ábra szerint:



56. ábra. A  $\zeta(s)$  iménti (D.19) reflexiós összefüggésének levezetéséhez használandó út-átalakítás.

<sup>111</sup>Hasonlót csináltunk az 5.2. szakasz legutolsó (ctg-es) példájában. Annak tehát, aki ezt a jegyzetet eddig végigszenvedte, ez a mostani talán nem égbekiáltó új ötlet már. *Riemann* idejében (1859-ben) azonban az volt...

Először úgy deformáljuk az utat, hogy hozzásimuljon a pólusokhoz (a képzetes  $t$ -tengelyhez). Ezt akkor tehetjük meg, ha az így bekerült (határesetben  $R \rightarrow \infty$  sugarú, pontozva jelölt) negyedkör-ívekre nulla az integrál. Ennek tisztázásához ellenőrizzük, hogy az integrandus abszolútértéke

$$\begin{aligned} & \text{ha } t \in \mathbb{C}, \text{ ill.} \\ & s \in \mathbb{C}, \text{ akkor} \end{aligned} \quad \left| \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} \right| = \frac{|t|^{\Re(s)-1} e^{-\arg t \Im(s)}}{\sqrt{e^{2\Re(t)} - 2e^{\Re(t)} \cos(\Im(t)) + 1}} \underbrace{\leq}_{\text{az íveken}} R^{\Re(s)-1} \frac{e^{\frac{\pi}{2}|\Im(s)|}}{e^{\Re(t)} - 1}. \quad (\text{D.21})$$

A negyedkörök vége a  $t$ -síkon a képzetes tengely mellé kerülne:  $\Im(t)$  így itt mindenféle értéket felvehet  $R \rightarrow \infty$  során; a „legrosszabb”  $\cos(\Im(t))=1$  eset is megvalósulhat, ezért csak ezzel becsülhettünk. A nevezővel együtt viszont így akkor kezelhető a tört, ha  $\Re(t)$  egyelőre határozottan pozitív marad:  $\Re(t) > \alpha$  valamilyen  $\alpha > 0$ -val minden (egyre nagyobb) ív végén (azaz az egész átmozgatott út távolabbi részein). Az  $|\arg t|$  így az ív-végeknél legfeljebb  $\frac{\pi}{2}$ , ezt is betettük. Ezekkel

$$\left| \int_{\text{ív}} dt \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} \right| \leq \frac{\pi}{2} R \cdot R^{\Re(s)-1} \frac{e^{\frac{\pi}{2}|\Im(s)|}}{e^\alpha - 1} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}|\Im(s)|}}{e^\alpha - 1} R^{\Re(s)}, \quad \begin{aligned} & \text{ez tényleg nullához tart} \\ & R \rightarrow \infty\text{-nél, ha } \Re(s) < 0. \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

Érdeemes tehát  $\Re(s) < 0$ -t feltennünk: ekkor átmozgathatjuk az utat. Jön a pólusokra rádobás: ezek helye  $t_n = n \cdot 2\pi i$ , ahol  $n \in \mathbb{Z}$  és  $n \neq 0$ , a reziduumaik pedig (mivel a nevező deriváltja nem nulla bennük, azaz elsőrendűek)  $\text{Res} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} \Big|_{t_n} = t_n^{s-1} e^{-t_n} = (n \cdot 2\pi i)^{s-1}$ . A pólusokra rádobott utak járuléka tehát (a két részletet,  $n < 0$ -t és  $n > 0$ -t összevonva):

$$\begin{aligned} \sum_{t_n} \oint dt \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} &= 2\pi i \cdot \left[ \sum_{n=-1}^{-\infty} + \sum_{n=1}^{\infty} \right] \text{Res} \left( \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} \right) \Big|_{t_n} = 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (2\pi n i)^{s-1} + (-2\pi n i)^{s-1} \right] = \\ &= 2\pi i (2\pi)^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} \left[ i^{s-1} + (-i)^{s-1} \right] = (2\pi)^s \cdot 2i \sin\left(\frac{\pi}{2}s\right) \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1}. \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

Ez utóbbi összeg  $\zeta(s)$  legeredetibb definíciója alapján pont akkor létezik, ha  $\Re(s) < 0$ , pont ahogy most feltettük! Emiatt mondhatjuk, hogy a kapott járulékokat (mindet) levonva a képzetes tengely mellé simított utunkéból lényegében tényleg az történt, hogy az utat „átbugyborékolattuk a pólusok hálóján.” Az átvitt utat viszont elvihatjuk  $\Re(t) \rightarrow -\infty$  felé, amerre az integrandus abszolútértéke  $\Re(s) < 0$  miatt csökken; az átjutott út járuléka így nulla, az eredeti integrálunkból csak a pólusok kapott járulékai maradtak. Összerakva a  $\zeta(s)$  tényleges előállítását  $\Re(s) < 0$  esetén tehát

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{\infty}^{(0-)} dt \frac{(-t)^{s-1}}{e^t - 1} = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} (2\pi)^s 2i \sin\left(\frac{\pi}{2}s\right) \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} = \frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{-s}} \frac{\sin(\pi s)}{\pi} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}s\right)}{\sin(\pi s)} \zeta(1-s);$$

$\Gamma(s)$  reflexiós összefüggésével kész is lesz a kívánt (D.19) bizonyítása. Nem baj, hogy  $\Re(s) < 0$  kellett: ez elég bő halmaz; a (D.19) analitikus függvények egyenlőségét állítja: mindenhol működik.

### D.3. Speciális értékek, zérushelyek

A (D.19) reflexiós képlet még egyszer:  $\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s} \cos\left(\frac{\pi}{2}s\right) \Gamma(s) \zeta(s)$ ; vigyázat, *használjuk*.

- A reflexiós képlet  $s = \frac{1}{2}$ -re  $\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = \zeta\left(\frac{1}{2}\right)$ -t ad: semmitmondó. Mindenestre a (D.4) definíció alapján

$$\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}-1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots\right) \approx -1,4603; \quad \text{ez ennyi, és kész.} \quad (\text{D.24})$$

A fizikában találkozunk időnként az alábbi értékekkel is:

$$\zeta\left(\frac{3}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \dots \approx 2,6124, \quad \zeta(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots \approx 1,2021. \quad (\text{D.25})$$

A  $\zeta(3)$ -nak külön neve van: *Apéry-állandó* (arról, aki bebizonyította, hogy ez irracionális). A  $\zeta(\frac{3}{2})$  pl. a *Bose-Einstein-kondenzáció*, a  $\zeta(3)$  pl. a hőmérsékleti sugárzás tárgyalásánál kerül elő.

• Láttuk, hogy  $\zeta(s)$ -nek elsőrendű pólus van  $s=1$ -ben 1 reziduummal, máshol pedig differenciálható: emiatt  $s=1$  körül  $\infty$  konvergenciasugarú Laurent-sorba fejthető; így szokták ezt írni:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \gamma_n (s-1)^n, \quad \text{az előkerült } \gamma_n\text{-ek az ún. Stieltjes-állandók.} \quad (D.26)$$

Belátható, hogy  $\gamma_0 \equiv \gamma$ , a gamma-függvénynél megismert *Euler-Mascheroni-állandó* (ld. a 6.3. szakaszban). Az  $\frac{1}{s-1}$ -et kétoldali határértékkel („főértékkel”) kiejtve tehát  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\zeta(1-\varepsilon) + \zeta(1+\varepsilon)}{2} = \gamma$ .

• Próbáljuk meg kiszámítani  $\zeta(0)$ -t; ehhez  $s=1$ -et kellene írni a reflexiós képletbe. Ebben itt  $\cos(\frac{\pi}{2}s)$ -nek egyszeres zérushelye van, azaz  $s=1$  körül a deriváltból  $\cos(\frac{\pi}{2}s) \approx -\frac{\pi}{2}(s-1)$ ; ezt  $\zeta(s)$   $s=1$  körüli Laurent-sorával (a lényeg: 1 a reziduum) összetéve megszüntethetjük a reflexiós képlet jobb oldalán a szingularitást, véges  $-\frac{1}{2}$  értéket kapva. Így leszűrtük tehát, hogy

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}. \quad \text{Néha ezt találják mondani: „1+1+1+1+1+... =” } \zeta(0) = -\frac{1}{2}. \quad (D.27)$$

Az, hogy  $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ , érvényes és igaz, nincs belekötnivaló. A csupa 1-ből álló sor persze nem létezik;  $\zeta(s)$  eredeti (D.1) definíciójának „abuzálásával”,  $s=0$ -t beírva keletkezett. Ha majd valamikor (a fizikában előfordul ilyen!) *nagyon* szeretnénk a nem értelmes  $1+1+1+1+...$  összeghez értelmes értéket rendelni, akkor ez a látott  $-\frac{1}{2}$  egy lehetőség: a  $\zeta(s)$ -et *máshol* megadó (D.1) sorösszegfüggvényt analitikusan elfolytattuk  $s=0$ -ba is, és az elfolytatásnak itt értelmes  $-\frac{1}{2}$  értéke lett. Ezen „módszer” neve: *zétafüggvény-regularizáció*, „sajnos” tényleg előkerül a fizikában.<sup>112</sup>

• **Kitekintés:** a zéta-függvény az alábbi képlet miatt **összekapcsolódik a prímszámokkal:**<sup>113</sup>

$$\Re(s) > 1 \text{ esetén } \zeta(s) = \frac{1}{1-\frac{1}{2^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{7^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{11^s}} \cdot \dots = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-p_m^{-s}}, \quad (D.28)$$

$$\text{logaritmussal: } \text{Ln } \zeta(s) = - \sum_{m=1}^{\infty} \text{Ln}(1-p_m^{-s}); \quad \text{itt } p_m \text{ az } m\text{-edik prímszám.} \quad (D.29)$$

Utóbbi tényleg (abszolút) konvergens, azaz: értelmes  $\Re(s) > 1$ -re.<sup>114</sup> Emiatt (az Ln és az Exp folytonosságát tudva) az első (D.28) is értelmes. Ennek jobb oldalán geometriai sorösszegek vannak:

$$\prod_{p \text{ prím}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \left[ 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{(2^2)^s} + \frac{1}{(2^3)^s} \dots \right] \cdot \left[ 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{(3^2)^s} + \frac{1}{(3^3)^s} \dots \right] \cdot \left[ 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{(5^2)^s} + \frac{1}{(5^3)^s} \dots \right] \cdot \left[ 1 + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{(7^2)^s} + \frac{1}{(7^3)^s} \dots \right] \cdot \left[ 1 + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{(11^2)^s} + \frac{1}{(11^3)^s} \dots \right] \cdot \left[ 1 + \frac{1}{13^s} + \frac{1}{(13^2)^s} + \frac{1}{(13^3)^s} \dots \right] \cdot \dots$$

<sup>112</sup>Olyasmi ez, mintha azt játszanánk, hogy mivel a  $|z| < 1$ -re értelmes  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  függvény analitikus elfolytatása  $\frac{1}{1-z}$ , és pl.  $z=2$ -ben utóbbi értéke  $\frac{1}{1-2} = -1$ , azt íránk, hogy  $1+2+4+8+16+32+\dots = -1$ .

<sup>113</sup>Ezt a képletet (valós  $s > 1$ -re) már Euler felismerte. A zéta-függvény eddig látott tárgyalása jórészt Riemann érdeme; ő alapozta meg azt is a (D.28) képletből kiindulva, hogy a(z analitikusan elfolytatott)  $\zeta(s)$  zérushelyei a prímszámok eloszlásához kapcsolódnak. A zéta-függvény tehát „híd” a komplex függvények és a számelmélet között.

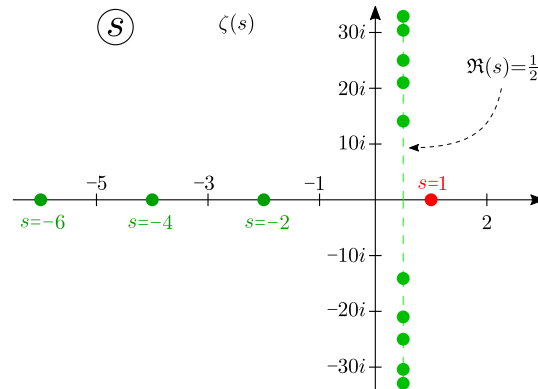
<sup>114</sup>Ellenőrizzük, hogy az  $\alpha \equiv \Re(s)$ ,  $t \equiv \Im(s)$  jelöléssel  $|\text{Ln}(1-p_m^{-s})| = \left| \frac{1}{2} \ln(1+p_m^{-2\alpha} - 2p_m^{-\alpha} \cos(t \ln p_m)) \right|$ , és hogy emiatt  $|\text{Ln}(1-p_m^{-s})| \leq |\ln(1-p_m^{-\alpha})|$ , még az adott  $\alpha$ -nál  $t$ -ben „legrosszabb” esetben is, amikor is a  $\cos$  értéke 1. Mivel legalábbis  $p_m^{-\alpha} \leq \frac{1}{2}$ , az ln menetéből leszűrhetjük, hogy van olyan  $K > 0$ , amivel  $|\ln(1-p_m^{-\alpha})| \leq K p_m^{-\alpha}$ . Továbbá legalábbis  $K p_m^{-\alpha} \leq K m^{-\alpha}$  is igaz, és utóbbiak  $\alpha > 1$  esetén  $m$ -ben összegezhetőek (éppen a  $\zeta(s)$ -et megadó eredeti sorra gondolva). Összerakva az elejét és a végét:  $\text{Ln}(1-p_m^{-s})$ -ek abszolútértékben összegezhetőek, ha  $\Re(s) > 1$ .

Az abszolút konvergencia miatt tagonként szorozgathatunk. Minden kapott taghoz minden itt írt zárójelből pontosan egy tag választódik (majd összeszoródnak), pl. rendre az első, a második, a harmadik, a második, majd onnantól az első tagokat választva  $1 \cdot \frac{1}{3^s} \frac{1}{(5^2)^s} \frac{1}{7^s} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots = \frac{1}{(3 \cdot 5 \cdot 7)^s}$ -et kapunk. A lényeg: a *számelmélet alaptétele* szerint minden  $n \in \mathbb{N}^+$  szám pontosan egyféle módon felírható prímtényezők szorzataként, így (gondoljuk ki) a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ -ből pont minden  $\frac{1}{n^s}$ -et egyszer és csak egyszer tényleg megkapunk itt az összesorzásból. *Beláttuk tehát a (D.28) képletet.*

• Abból, hogy a prímszamos logaritmusos (D.29) képlet minden  $\Re(s) > 1$ -re értelmes, az is következik, hogy  $\Re(s) > 1$  esetén  $\zeta(s) \neq 0$ . A reflexiós képlettel átléphetünk a  $\Re(s) > 1$  nyílt félsíkról a  $\Re(s) < 0$  félsíkra: utóbbi halmazon pontosan akkor kapunk zérushelyet, ha a reflexiós képletbeli  $\cos$  nulla. Konkrétan: a páros negatív egész számokban. Ezek az ún. „triviális” zérushelyek:

$$\zeta(s) = 0, \quad \text{ha } s = -2, -4, -6, -8, \dots, \text{ azaz } \zeta(-2n) = 0, \quad \text{ha } n \in \mathbb{N}^+. \quad (\text{D.30})$$

Fontos volt persze (mivel  $s = 2n+1$ -ből léphettünk át  $1-s = -2n$ -re), hogy  $n \in \mathbb{N}^+$ -ra  $\zeta(2n+1)$  értelmes és véges.  $n=0$ -ra ugye ez nem igaz;  $\zeta(0)$  nem is nulla (hanem  $-\frac{1}{2}$ ; ld. fentebb).



57. ábra. Triviális és nemtriviális zérushelyek, valamint az  $s=1$ -beli pólus, függőlegesen torzítva.

• A többiek, azaz a  $\zeta(s)$  ún. **nemtriviális zérushelyei** tehát biztosan a  $0 \leq \Re(s) \leq 1$  sávon (a *kritikus sávon*) fekszenek. *Van végtelen sok* ilyen zérushely; róluk szól a 160 éve eldöntetlen (és az egyik legnehezebb matematikai problémának tartott) **Riemann-sejtés**, miszerint az összes ilyen zérushely valós része  $\frac{1}{2}$ , azaz mindegyik a  $\Re(s) = \frac{1}{2}$  *kritikus vonalon* van. Az eddig numerikusan felderített (több milliárd) nem triviális zérushelyre mindre igaz ez, de ez nem elég.<sup>115</sup>

• Már láttuk az 5.2. szakasz végén ill. a  $\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$ -vel kapcsolatban a 6.4. szakaszban a talán **legfontosabb speciális értékeket** (ezek előkerülnek a *hőmérsékleti sugárzás* vizsgálatakor):

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90}. \quad (\text{D.31})$$

• A reflexiós képletbe  $s=2$ -t írva megkapjuk az alábbi speciális értéket is:

$$\zeta(-1) = 2(2\pi)^{-2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2\right) \Gamma(2) \zeta(2) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\zeta(-1) = -\frac{1}{12}}}. \quad (\text{D.32})$$

<sup>115</sup>Zérushelyeket az  $s$ -síkon általában (a kritikus sávon is) numerikusan az *argumentum-elvvel* lehet keresni (ld. 5.5. szakaszt). Másrészt a reflexiós képlet (D.20) szimmetrikus változatából (tudva, hogy  $\zeta(s^*) = (\zeta(s))^*$ , és ugyanilyen igaz  $\Gamma(\frac{s}{2})$ -re és  $\pi^{-s/2}$ -re) kiderül, hogy a  $\Gamma(\frac{s}{2})\pi^{-s/2}\zeta(s)$  függvény (amely pontosan ott nulla, ahol  $\zeta(s)$  is az) *valós értékű*, ha  $\Re(s) = \frac{1}{2}$ . Így ezen függvény előjelváltását numerikusan vizsgálva zérushelyeket kereshetünk a kritikus vonalon. *Megjegyzés:* a Riemann-sejtés messzemenő számelméleti következményeket is hordoz; annyit már láttunk, hogy  $\zeta(s)$ -nek legalábbis *valami* köze van a prímszámokhoz.



Ha  $\zeta(s)$  eredeti (D.1) sorába lazán  $-1$ -et írunk, akkor a fentebb  $\zeta(0)$ -nál, a (D.27) egyenlet után mondott „zétafüggvény-regularizációs” értelemben itt „ $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = -\frac{1}{12}$ ” adódik.

• Általánosan is érdekesek lehetnek az  $s \equiv n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  **egész számokban** felvett értékek. Ilyenkor a (D.17) ill. (D.18) **komplex integrálokban** az integrandusban  $(-t)^{s-1} = (-t)^{n-1}$ : nincs vágás,, csak (esetleg) pólus  $t=0$ -ban, tehát ilyenkor (hasonlóan a gamma-függvény (6.61) Hankel-féle előállításához) **bezárhatjuk az utakat**  $t=0$  körül. Kigobozva az előjeleket az adódik, hogy

$$n \in \mathbb{Z} \text{ esetén} \quad \frac{\zeta(n)}{\Gamma(1-n)} = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \oint dt \frac{t^{n-1}}{e^t - 1} = \frac{1}{1-2^{1-n}} \frac{(-1)^n}{2\pi i} \oint dt \frac{t^{n-1}}{e^t + 1}. \quad (\text{D.33})$$

1. Ha  $n=1$ , a második integrál nulla (mert az integrandus mindenhol differenciálható), az  $1-2^{1-n}$  nevező is nulla,  $\Gamma(0)$  pólusos, de  $\zeta(1)$  is. Az első integrál  $\frac{1}{e^t-1}$   $t=0$ -beli reziduumból kigondolhatóan  $\frac{\zeta(1)}{\Gamma(0)} = -1$ -et adna:  $\frac{\zeta(s)}{\Gamma(1-s)}$ -nek  $s=1$ -ben megszüntethető szingularitása van; ha megszüntetjük,  $-1$  lesz az érték. (Idézzük fel, hogy  $\text{Res } \Gamma(z)|_0 = 1$ , azaz  $\text{Res } \Gamma(1-s)|_0 = -1$ , és  $\text{Res } \zeta(s)|_1 = 1$ ; utóbbiak hányadosa tényleg  $-1$ .) Mindenesetre tudjuk, hogy  $\zeta(s)$  pólusos  $s=1$ -ben.
2. Ha  $n = 2, 3, 4, \dots$ , akkor mindkét integrandus mindenhol differenciálható: a felírt integrálok nullák (ezt ígértük korábban is). Ilyenkor  $\zeta(n)$  értékei véges számok, a nevezőbeli  $\Gamma(1-n)$  pedig  $\infty$ : ilyen  $0 = 0$  értelemben igazak ekkor a felírt képleteink.
3. Végül  $n = -m$ ,  $m \in \mathbb{N}_0^+$  esetén  $\Gamma(1+m) = m!$ . Rögtön a hagyományosnak számító alakokat írjuk:

$$\frac{(m+1)\zeta(-m)}{(-1)^m} = \frac{(m+1)!}{2\pi i} \oint dt t^{-m-2} \frac{t}{e^t - 1} = \frac{-1}{2^{m+1}-1} \frac{(m+1)!}{2\pi i} \oint dt t^{-m-2} \frac{t}{e^t + 1}. \quad (\text{D.34})$$

• Eme legutóbbi esetben felismerhetjük (a *Cauchy-féle integrálformulákat* tudva, ld. 4.2. szakaszt), hogy itt  $m+1$ -edik deriváltak  $t=0$ -beli értékei jöttek ki.  $m \in \mathbb{N}_0^+$  esetén tehát

$$\zeta(-m) = \frac{(-1)^m}{m+1} B_{m+1}, \quad \text{ahol} \quad B_n \equiv \left[ \frac{d^n}{dt^n} \frac{t}{e^t - 1} \right] \Big|_{t=0} = \frac{-1}{2^n - 1} \left[ \frac{d^n}{dt^n} \frac{t}{e^t + 1} \right] \Big|_{t=0}. \quad (\text{D.35})$$

Ezen  $B_n$ -ek az ún. **Bernoulli-számok**: jól definiált racionális számok; sok jó tulajdonságuk van. Önmagában nem nyilvánvaló, de az eddigiekből az, hogy a kétféle felírt definíciójuk ekvivalens. *Tudva*, hogy  $\zeta(-2n) = 0$ , látható, hogy  $B_3 = B_5 = B_7 = B_9 = \dots = 0$ . Néhány többi érték:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad \dots \quad (\text{D.36})$$

A reflexiós képlettel,  $m \rightarrow 1-2n$ -t írva a páros pozitív egészekre általánosan azt kapjuk, hogy

$$n \in \mathbb{N}^+ \text{-ra} \quad \zeta(2n) = \frac{(-1)^{n+1} (2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}. \quad (\text{D.37})$$

Speciális esetként kiadódnak  $\zeta(0)$ ,  $\zeta(-1)$ ,  $\zeta(2)$ ,  $\zeta(4)$  értékei; továbblépve pl.  $\zeta(6)$  is  $\pi^6$  és egy racionális szám szorzata. A  $\zeta(3)$ ,  $\zeta(5)$ , stb. értékekkel így „nem tudunk elbánni”.

• *Utolsó* pont: haladóbb gyakorlásként levezethetjük a **tangensfüggvény „egész” hatványsorát**  $z=0$  körül, nemcsak az első néhány tagot. A módszer: az együtthatókat a Cauchy-integrálformulával felírva átdobjuk az utat a  $\text{tg } z$  „sorban” lévő pólusaira;  $\zeta(s)$ -szerű sorösszegre jutunk. Az eredmény:

$$\text{tg } z = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (1-2^{-2n}) \zeta(2n) \left( \frac{2z}{\pi} \right)^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} (2^{2n} - 1)}{(-1)^{n+1} (2n)!} B_{2n} z^{2n-1} = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} + \dots \quad (\text{D.38})$$

Az, hogy a konvergenciasugar  $\frac{\pi}{2}$ , harmonizál azzal az egyszerű ténnyel, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta(n) = 1$ .