Fourier-transzformáció, függvényterek — vázlatok —

Nagy Márton

2021.

Fülszöveg

• A „Matematikai módszerek a fizikában" tantárgy egyes részei a *Vektorszámítás* jegyzetbe kerültek, a *Komplex függvénytan (bevezetés)* címűbe került (ki gondolta volna. . .) a komplex függvénytani rész (és még *nagyon sok* plusz megalapozás, érdekesség). Nagyban építünk ezen jegyzetekre; hivatkozom is bőven rájuk.[1] E mostani jegyzetbe kerül a maradék nagy része: Fourier-sorok és –transzformáció, differenciálegyenletek, disztribúciók, Hilbert-terek. Nem igazán sikerült kisebb egységekre darabolnom: egy nagy falat szorosan összefüggő anyagról van szó.

• A mostani témakörben már nem úszunk meg elvontabb matematikai fogalmakat sem. Több mindent leírtam, mint ami szigorúan az alkalmazásokhoz kell; próbáltam úgy tagolni ill. összefoglalókkal tarkítani a tárgyalást, hogy kiemelődjön a lényeg. Nehéz volt (vagy nem is sikerült?) egyensúlyt találnom a precíz kifejtés és az alkalmazáscentrikus fizikus gondolkodásmód között.

1. ábra. „Mondd még egyszer, hogy *nem létezik az integrál*! Mondd ezt még egyszer, ha mered. . . !"

• A korábbi jegyzetfélékben van jónéhány olyan alapozó fejezet/szakasz, amelyek tartalma esetleg az órán nem is mindig hangzik el, de most esetleg érdemes lehet átöblögetni:

1. Alapvetően fontos, hogy jóban legyünk a *vektorterek* és a *lineáris leképezések, operátorok* fogalmaival; ne csak geometriai szemlélet, hanem a matematikai definíciók és azokból következő állítások alapján is; ld. pl. a *Vektorszámítás* jegyzet 3.2. szakaszát ill. 5., 6., 7. fejezeteit.
2. A *topológia* egyes alapvető fogalmait (*metrika* azaz: távolságfogalom, *nyílt, zárt halmazok*, belső, határ–, torlódási pontok, stb.) elővesszük a *Vektorszámítás* jegyzet 12.2. szakaszában.
3. A *Komplex függvénytan* jegyzet B. függeléke a *konvergencia, folytonosság* témaköréről szól; próbáltam úgy vezetni a mostani tárgyalást, hogy ezek itt is csak kiegészítésképpen kelljenek.
4. Az *integrálfogalom* egyes tulajdonságai (integrálok létezése, becslése, függvényhatárértékekkel való kapcsolata, a *Lebesgue-tétel*) a *Komplex függvénytan* jegyzet 3.2. szakaszába kerültek.

• Egy függvényre azt mondjuk, hogy *integrálható*, ha létezik a $\mathrm{Dom}f$-re vett integrálja. $\mathrm{Dom}f=\mathbb{R}$ esetén tehát önmagában azt, hogy „f integrálható", úgy értjük, hogy létezik $\int_{-\infty}^{\infty} f$ (és pl. nem úgy, hogy létezik primitív függvénye). Ha f integrálható ($\mathbb{R}$-re), akkor minden véges szakaszra is integrálható; fordítva persze nem működik ez a következtetés. Ha valamikor egyszerre kerül elő véges szakaszokra és az egész $\mathbb{R}$-re vett integrálhatóság, akkor mindig pontosan körülírjuk ezeket.

• Az első fejezet részben ismétlés, de hasznosnak gondoltam ide: korábban (pl. a „Vektorszámítás" órán ill. jegyzetben) megismertük a **vektortér** fogalmát; ezt vesszük újra elő, az azóta megszerzett rutint felidézve és elmélyítve. A többi fejezet részben enélkül is olvasható talán.

[1] Nem is ismétlem el, amit azon jegyzetek „Fülszöveg"-eiben írtam; ami azokból általános, az ide is vonatkozik.

Tartalomjegyzék

Fülszöveg **2**

Tartalomjegyzék **3**

1. Bevezető kitekintés: vektorterek **4**

2. Fourier-sorok, Fourier-transzformáció **10**
2.1. Periodikus függvények Fourier-sorai 10
2.2. További részletek, példák 15
2.3. A $T \to \infty$ határátmenet: Fourier-transzformáció 21
2.4. Fourier-transzformáció: alaptulajdonságok 24
2.5. Fourier-transzformáció: példák 27

3. Disztribúciók **36**
3.1. Motiváció, alapvető definíciók 36
3.2. Disztribúció-műveletek 41
3.3. Dirac-delta 47
3.4. Általánosítás többdimenziós értelmezési tartományra 51
3.5. Néhány további példa-számolás 51

A. függelék: Kiegészítések **52**
A.1. Fourier-sorok néhány konvergenciatulajdonsága 52
A.2. $\mathcal{D}(\mathbb{R})$-beli alapfüggvények néhány tulajdonsága 55
A.3. Schwartz-függvények és Fourier-transzformáltjaik 57
A.4. Disztribúciók folytonosság-fogalmai 60

1. Bevezető kitekintés: vektorterek

• A matematika *axiomatikus* felépítésében a *halmaz* és a *halmazhoz tartozás* definiálatlan alapfogalmaiból és néhány ezekre vonatkozó egyszerű(nek tűnő, de végső soron mindent csontvázában tartalmazó), indoklás nélkül elfogadott *axiómából* („alapigazságból”) célszerű kiindulni.[2] A matematikai fogalmak pedig olyan halmazok lesznek, amiken valamilyen „struktúrát” definiálunk. Ilyen struktúra pl. az, ha valamilyen szempontból „hasznos”-nak gondolt tulajdonságú *műveletek* létezését követeljük meg a halmazhoz.[3] Az egyik ilyen lehetőség a *vektortér* fogalma.

• **Definíció:** legyen $\mathbb{K}$ a valós vagy komplex számhalmaz (szám*test*); $\mathbb{K}\equiv\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{K}\equiv\mathbb{C}$. Ha adott
— egy $\mathbb{V}$ nemüres halmaz (melynek elemeit ilyen összefüggésben *vektoroknak* hívhatjuk),
— egy *összeadás* nevű művelet, ami minden $x\in\mathbb{V}$ és $y\in\mathbb{V}$ esetén előállít egy $x+y$ jelű $\mathbb{V}$-beli elemet,
— végül egy *számmalszorzás* nevű művelet, ami minden $\lambda\in\mathbb{K}$ és $x\in\mathbb{V}$ esetén előállít egy $\lambda\cdot x$ (vagy λx) jelű $\mathbb{V}$-beli elemet, és ezen műveletekre teljesülnek a következő tulajdonságok:

A1: bármilyen $x,y,z\in\mathbb{V}$ esetén $x+(y+z)=(x+y)+z$,
A2: bármilyen $x,y\in\mathbb{V}$ esetén $x+y=y+x$,
A3: létezik $0\in\mathbb{V}$ (*nullvektor* vagy „$\mathbb{V}$ nulla-eleme”), amivel minden $x\in\mathbb{V}$-re $x+0=x$,
A4: minden $x\in\mathbb{V}$-hez létezik $-x$, amire $(-x)+x=0$, ahol $0\in\mathbb{V}$ az előbbi nullvektor,
(*megjegyzés:* az eddigiekből következik, hogy a 0 és minden x-hez $-x$ egyértelmű)
M: minden $x\in\mathbb{V}$ esetén $1\cdot x=x$ (itt 1 a $\mathbb{K}$ számhalmazbeli 1, mint szám);
AM: minden $x,y\in\mathbb{V}$ és minden $\lambda\in\mathbb{K}$ esetén $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$,
MM': minden $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ és minden $x\in\mathbb{V}$ esetén $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$,
MA': minden $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ és minden $x\in\mathbb{V}$ esetén $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$,

akkor a $\mathbb{V}$-t ezen két művelettel mint „vektortér-műveletekkel” ellátva **vektortérnek** nevezzük.[4] Mondhatnánk, hogy *a* $(\mathbb{V},+,\cdot)$ *hármas* a vektortér, ahol $\mathbb{V}$ a halmaz, $+$ és $\cdot$ pedig a megfelelő $\mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{V}$ összeadásművelet és $\mathbb{K}\times\mathbb{V}\to\mathbb{V}$ számmalszorzás-művelet: utóbbiak a definíció elhagyhatatlan részei. Mégis maradunk a látott (kicsit pongyolább) fogalmazásnál; jobb lesz így.

Ha $\mathbb{M}\subset\mathbb{V}$ olyan részhalmaz, amiből nem vezetnek ki a vektortér-műveletek (minden $x,y\in\mathbb{M}$ és minden $\lambda\in\mathbb{K}$ esetén $\lambda x\in\mathbb{M}$ és $x+y\in\mathbb{M}$), akkor $\mathbb{M}$-et ($\mathbb{V}$-beli, lineáris) **altérnek** hívjuk.

• Az „irányított szakaszok összessége” nem halmazelméleti fogalom, ezért nem jó példának vektortérre *mint matematikai struktúrára.* (Pont fordítva: ez a „tapasztalati fogalom” vezette a kezet az iménti rendes matematikai definícióhoz.) „Halmazos” **példák**/konstrukciók viszont a következők:

A.) Maga a $\mathbb{K}$ halmaz vektortér önmaga mint számhalmaz fölött (azaz $\mathbb{R}$ valós, $\mathbb{C}$ komplex vektortér), ha a $+$ és $\cdot$ szám-műveleteket tekintjük a $+$ és $\cdot$ vektortér-műveleteknek, mert az *A1–MA'* tulajdonságok tényleg teljesülnek, ha a „vektorok” helyébe is (megfelelő $\mathbb{K}$-beli) számokat írunk.

[2]Ennek felismeréséhez természetesen hosszú (a kőkorszaktól a 19. századig tartó) út vezetett. Magukat a *számokat* is bizonyos *halmazokként* kell értelmezni (és *ezek* halmazai lesznek $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ill. $\mathbb{C}$), a szám-műveleteket pedig a halmazműveletekből (unió, metszet, stb.) kiindulva. Ha viszont ezt egyszer megtesszük, akkor már a számok és minden tulajdonságaik tényleg az axiómákra épülnek: nem kell többet a számokra magukra halmazokként gondolni, elég, ha tudjuk, hogy az ismert fajta számhalmazok tényleg rendelkezésre állnak.

[3]A *műveletek* hozzárendelési utasítások, azaz *függvények*; a függvények az indulási és érkezési halmaz közötti speciális típusú (ún. függvényszerű) *relációk*, két halmaz közötti reláció pedig tulajdonképpen a Descartes-szorzatuk egy részhalmaza (a „relációban lévő” párok halmaza). Megnyugodhatunk tehát: tényleg „minden dolog” halmaz.

[4]Ugye „$\mathbb{K}$ test feletti” vektortérnek; $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ esetén *valós*, $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ esetén *komplex* vektortérről beszélünk. Legtöbbször egyértelmű, hogy valós vagy komplex vektortérre gondolunk, amikor egy halmazra azt mondjuk, hogy vektortér.

B.) Ha I bármilyen indexhalmaz és minden $i{\in}I$-hez adottak az ugyanazon $\mathbb{K}$ feletti (de akár nem megegyező) $\mathbb{V}_i$ **vektorterek**, akkor a $\mathbb{V}_i$-k **Descartes-szorzata**, $\mathsf{X}_{i\in I}\,\mathbb{V}_i$ (de ideiglenesen $\boldsymbol{V}$-vel jelöljük) vektortér ugyanazon $\mathbb{K}$ fölött a **komponensenkénti műveletekkel**. Ha $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ a $\boldsymbol{V}$ elemei, az azt jelenti, hogy az $i{\in}I$ indexű „komponenseik”, $\boldsymbol{x}_i$ ill. $\boldsymbol{y}_i$ a megfelelő $\mathbb{V}_i$ elemei. Legyen tehát

minden $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}$ esetén $\boldsymbol{x}{+}\boldsymbol{y}$ a $\boldsymbol{V}$ azon eleme, amire $(\boldsymbol{x}{+}\boldsymbol{y})_i = \boldsymbol{x}_i{+}\boldsymbol{y}_i$,
minden $\boldsymbol{x}{\in}\boldsymbol{V}$ és $\lambda{\in}\mathbb{K}$ esetén $\lambda\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{V}$ azon eleme, amire $(\lambda\boldsymbol{x})_i = \lambda\boldsymbol{x}_i$.
(Ugyebár itt $\boldsymbol{x}_i{+}\boldsymbol{y}_i$ ill. $\lambda\boldsymbol{x}_i$ az egyes $\mathbb{V}_i$-kben értendő.)

Egyszer érdemes végiggondolni, hogy ezen **műveletekre tényleg teljesülnek** az *A1–MA'* tulajdonságok, ha (mint feltettük) a $\mathbb{V}_i$-kbeli műveletekre teljesülnek. Egyszerű lépésekben kell haladni: alább a „v” jelű egyenlőségekben a $\mathbb{V}_i$-beli műveletek megfelelő tulajdonságait, a „d” jelűekben pedig a $\mathsf{X}_{i\in I}\,\mathbb{V}_i$-beli műveletek definícióit használjuk. A „nehézség” inkább az, hogy tudjuk, hogy mit akarunk, és hogy rájöjjünk, hogy (a definícióink mentén) nyilván a komponenseket kell nézni.

A1: ha $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ akármilyen $\boldsymbol{V}$-beli elemek, akkor $(\boldsymbol{x}{+}\boldsymbol{y}){+}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}{+}(\boldsymbol{y}{+}\boldsymbol{z})$, hiszen
$$\big((\boldsymbol{x}{+}\boldsymbol{y}){+}\boldsymbol{z}\big)_i \overset{d}{=} \boldsymbol{x}_i{+}(\boldsymbol{y}{+}\boldsymbol{z})_i \overset{d}{=} \boldsymbol{x}_i{+}(\boldsymbol{y}_i{+}\boldsymbol{z}_i) \overset{v}{=} (\boldsymbol{x}_i{+}\boldsymbol{y}_i){+}\boldsymbol{z}_i \overset{d}{=} (\boldsymbol{x}{+}\boldsymbol{y})_i{+}\boldsymbol{z}_i \overset{d}{=} \big(\boldsymbol{x}{+}(\boldsymbol{y}{+}\boldsymbol{z})\big)_i,$$

A2: ha $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}$, akkor $\boldsymbol{x}{+}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}{+}\boldsymbol{x}$, hiszen $(\boldsymbol{x}{+}\boldsymbol{y})_i \overset{d}{=} \boldsymbol{x}_i{+}\boldsymbol{y}_i \overset{v}{=} \boldsymbol{y}_i{+}\boldsymbol{x}_i \overset{d}{=} (\boldsymbol{y}{+}\boldsymbol{x})_i$,

A3: $\boldsymbol{V}$ nulla-eleme, $\boldsymbol{0}$ az, aminek minden i-edik komponense a megfelelő $\mathbb{V}_i$-beli nullaelem: $(\boldsymbol{0})_i = 0{\in}\mathbb{V}_i$. Erre teljesül a követelmény: minden $\boldsymbol{x}{\in}\boldsymbol{V}$ esetén $\boldsymbol{x}{+}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}$, mert
$$(\boldsymbol{x}{+}\boldsymbol{0})_i \overset{d}{=} \boldsymbol{x}_i{+}\boldsymbol{0}_i \overset{d}{=} \boldsymbol{x}_i + 0{\in}\mathbb{V}_i \overset{v}{=} \boldsymbol{x}_i \overset{d}{=} (\ \boldsymbol{x}\ )_i,$$

A4: egy $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ ellentettje, $-\boldsymbol{x}$ az, aminek i-edik komponense az eredeti komponens $\mathbb{V}_i$-beli ellentettje: $(-\boldsymbol{x})_i = -\boldsymbol{x}_i$. Erre teljesül a követelmény: $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, hiszen
$$(\boldsymbol{x}{+}(-\boldsymbol{x}))_i \overset{d}{=} \boldsymbol{x}_i{+}(-\boldsymbol{x})_i \overset{d}{=} \boldsymbol{x}_i{+}(-\boldsymbol{x}_i) \overset{v}{=} 0{\in}\mathbb{V}_i \overset{d}{=} (\ \boldsymbol{0}\ )_i,$$

M: minden $\boldsymbol{x}{\in}\boldsymbol{V}$ esetén $1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, hiszen $(1 \cdot \boldsymbol{x})_i \overset{d}{=} 1 \cdot \boldsymbol{x}_i \overset{v}{=} \boldsymbol{x}_i \overset{d}{=} (\ \boldsymbol{x}\ )_i$,

AM: minden $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}{\in}\boldsymbol{V}$ és minden $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén $\lambda(\boldsymbol{x}{+}\boldsymbol{y}) = \lambda\boldsymbol{x}{+}\lambda\boldsymbol{y}$, hiszen
$$\big(\lambda(\boldsymbol{x}{+}\boldsymbol{y})\big)_i \overset{d}{=} \lambda(\boldsymbol{x}{+}\boldsymbol{y})_i \overset{d}{=} \lambda(\boldsymbol{x}_i{+}\boldsymbol{y}_i) \overset{v}{=} \lambda\boldsymbol{x}_i{+}\lambda\boldsymbol{y}_i \overset{d}{=} (\lambda\boldsymbol{x})_i{+}(\lambda\boldsymbol{y})_i \overset{d}{=} (\lambda\boldsymbol{x}{+}\lambda\boldsymbol{y})_i,$$

MM': minden $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ és $\boldsymbol{x}{\in}\boldsymbol{V}$ esetén $(\alpha\beta)\boldsymbol{x} = \alpha(\beta\boldsymbol{x})$, hiszen
$$\big((\alpha\beta)\boldsymbol{x}\big)_i \overset{d}{=} (\alpha\beta)\boldsymbol{x}_i \overset{v}{=} \alpha(\beta\boldsymbol{x}_i) \overset{d}{=} \alpha(\beta\boldsymbol{x})_i \overset{d}{=} \big(\alpha(\beta\boldsymbol{x})\big)_i,$$

MA': minden $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ és $\boldsymbol{x}{\in}\boldsymbol{V}$ esetén $(\alpha{+}\beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}{+}\beta\boldsymbol{y}$, hiszen
$$\big((\alpha{+}\beta)\boldsymbol{x}\big)_i \overset{d}{=} (\alpha{+}\beta)\boldsymbol{x}_i \overset{v}{=} \alpha\boldsymbol{x}_i{+}\beta\boldsymbol{x}_i \overset{d}{=} (\alpha\boldsymbol{x})_i{+}(\beta\boldsymbol{x})_i \overset{d}{=} (\alpha\boldsymbol{x}{+}\beta\boldsymbol{x})_i.$$

C.) Ha $\mathbb{V}$ vektortér és $\mathbb{M}\subset\mathbb{V}$ lineáris **altér**, akkor $\mathbb{M}$-et **„önmaga jogán”** vektortérnek tekinthetjük a $\mathbb{V}$ vektortér-műveleteivel ellátva, hiszen ekkor a műveleteire nyilván teljesülnek az *A1–MA'* tulajdonságok, ha az eredeti $\mathbb{V}$-hez teljesültek. Sokszor jutunk így „ismert” vektorterekből „újabbakhoz”: belátjuk, hogy egy $\mathbb{M}$ részhalmaz „zárt” a $\mathbb{V}$-beli vektortér-műveletekre nézve.

• Az előző pontban látott lehetőségek a (matematikai ill. fizikai) gyakorlatban előkerülő vektorterek *igen nagy részét* (és a fejezet végén elővett *faktortér*-fogalmat is hozzávéve szinte azt mondhatjuk, hogy *az összeset*) lefedik. Ahhoz, hogy lássuk, hogyan, nézzünk speciális(abb) eseteket.

1.) $\mathbb{R}$ valós, $\mathbb{C}$ komplex vektortér. Ha a Descartes-szorzatos fenti konstrukcióban I egy véges N elemű halmaz, és mindegyik $\mathbb{V}_i$ az $\mathbb{R}$ vagy mindegyik $\mathbb{V}_i$ a $\mathbb{C}$, máris megkapjuk a szám-N-esek vektortereit, $\mathbb{R}^N$-et (ami valós vektortér) és $\mathbb{C}^N$-et (ami komplex vektortér); összefoglalóan: $\mathbb{K}^N$-et. A komponensenkénti műveletek itt ugyanazt jelentik, mint amit számoszlopok komponensenkénti összeadásaként ill. számmalszorzásaként megszoktunk; *mivel már megtettük fent általánosan*, nem kell újra ellenőrizni, hogy ezek a műveletek teljesítik a vektortérséghez elvárt tulajdonságokat.

2.) A Descartes-szorzatos konstrukcióban az I indexhalmaz lehet „nagyon végtelen" halmaz is; ilyen esetben elsőre esetleg az sem világos, hogy mit jelent maga a Descartes-szorzat; *micsodák* az elemei. Segít, ha rájövünk, hogy a szám-N-esek (amelyek egy „tisztességes" N-szeres Descartes-szorzat elemei) tekinthetők *függvényeknek* is: minden adott szám-N-es értelmezési tartománya az $X \equiv \{1, 2, 3, \ldots, N\}$ halmaz, egy X-beli számhoz rendelt értéke pedig az olyan indexű komponens.

Ez közelhozza azt, hogy ha I akármilyen indexhalmaz, és minden $i{\in}I$-re adottak az A_i halmazok (még nem is feltétlenül vektorterek), akkor az $\times_{i\in I} A_i$ Descartes-szorzat elemei olyan *függvények*, amelyekre az igaz, hogy minden $i{\in}I$ „indexhez" A_i-beli elemet rendelnek. Ha a Descartes-szorzat egy (f-fel jelölt) elemére ilyen függvényként gondolunk, akkor természetesebb az $f(i)$ jelölés, ha ténylegesen mint a Descartes-szorzat elemére, akkor természetesebben hat az f_i jelölés; ugyanazt jelentik ezek tehát: az i indexhez tartozó, más szóval az i-ben felvett értéket, mely A_i eleme.

A $\mathbb{K}^N$ jelölés nyomán az sem meglepő, hogy ha minden $i{\in}I$-re $A_i{=}A$ ugyanaz, akkor a Descartes-szorzatot A^I-ként jelöljük: ez tehát az olyan függvények halmaza, amelyek minden $i{\in}I$ esetén ugyanabban az A-ban vesznek fel értéket: A^I tehát más szóval az $I{\to}A$ függvények halmaza.

Rátérve vektorterekre: ha $\mathbb{V}$ bármilyen vektortér ($\mathbb{K}$ fölött) és X bármilyen nemüres halmaz, akkor **az** $f\colon X \to \mathbb{V}$ **függvények halmaza,** jelben ugye: $\mathbb{V}^X$ **vektortér** ugyanazon $\mathbb{K}$ fölött. Ez a vektorterek Descartes-szorzatának speciális esete, ha X az indexhalmaz (melyet fent I-vel jelöltünk), és mindegyik „Descartes-szorzandó" $\mathbb{V}_i$ vektortér ugyanaz a mondott $\mathbb{V}$. Ilyen $X \to \mathbb{V}$ függvények esetén (mivel függvényekre gondolva inkább egy adott x helyen *felvett értékről*, és nem az x-hez tartozó komponensről beszélünk) a bevezetett műveleteket *pontonkénti műveleteknek* hívjuk: bármilyen $f, g \in \mathbb{V}^X$ (azaz: $f\colon X{\to}\mathbb{V}$ és $g\colon X{\to}\mathbb{V}$ függvények) és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén tehát

$$
\begin{aligned}
&f{+}g \text{ az az } X{\to}\mathbb{V} \text{ függvény, amire } (f{+}g)(x) = f(x){+}g(x) \text{ minden } x{\in}X\text{-re,}\\
&\lambda f \text{ az az } X \to \mathbb{V} \text{ függvény, amire } (\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x) \text{ minden } x{\in}X\text{-re.}
\end{aligned}
$$

Ne feledjük: mivel már a legáltalánosabb Descartes-szorzatos esetre egyszer végignéztük, most sem kell külön belátni, de igaz, hogy ezek a műveletek teljesítik az *A1–MA'* tulajdonságokat.

3.) Lehet pl. $X{\equiv}\mathbb{R}$, és $\mathbb{V}{\equiv}\mathbb{R}$ ill. $\mathbb{V}{\equiv}\mathbb{C}$: így az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények (valós) ill. az $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvények (komplex) vektortereit kapjuk. Tartsuk azért meg az általános X indulási halmaz lehetőségét is: sokszor előkerülnek pl. az $\mathbb{R}$ vagy az $\mathbb{R}^N$ (mint N-dimenziós tér) valamilyen részhalmazán értelmezett függvények. Érkezési halmaz is lehet $\mathbb{K}$ helyett más $\mathbb{V}$ vektortér is, pl. $\mathbb{K}^M$.

4.) Függvények vektorterei („**függvényterek**") tehát mindig a **a pontonkénti műveletekkel** ellátva értendők vektortérként: *tényleg* így szoktuk érteni függvények összegét, számszorosát. Az előző pontbeli C.) lehetőség itt hangsúlyosan színre lép: ha valamilyen „jó tulajdonságú" függvények halmaza (mely részhalmaz valamilyen „összes lehetséges" $X{\to}\mathbb{V}$ függvények vektorterében) „zárt" a vektortér-műveletekre nézve, akkor ő *altér*, azaz „önmaga jogán" vektortér. Fontos példák:

1. Folytonos függvények összege és számszorosa is folytonos: emiatt az $\mathbb{R} \to \mathbb{K}$ *folytonos függvények* halmaza, jelben: $C(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, vektortér. (Itt ugye $\mathbb{K}$ lehet $\mathbb{R}$ is, $\mathbb{C}$ is.) Ugyanígy értelmezhetjük akármilyen M indulási halmaz (amelyből induló függvényekre értelmes a folytonosság) esetén a folytonos $M \to \mathbb{K}$ függvények vektorterét, $C(M, \mathbb{K})$-t.

2. A (legalább egyszer) folytonosan differenciálható $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ függvényekre is igaz, hogy két ilyennek összege ill. ilyennek számszorosa is ilyen. Ők is vektorteret alkotnak tehát: ennek jele $C^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$.
3. Ugyanígy tovább: $C^n(\mathbb{R},\mathbb{C})$ a legalább n-szer folytonosan differenciálható $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ függvények vektortere (ő is „zárt" a függvényösszeadásra és számmalszorzásra nézve). Még tovább menve: $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ jelöli a „sima" (=végtelenszer differenciálható) $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ függvények vektorterét.
4. Két integrálható függvény összege is integrálható, és egy integrálható függvény számszorosa is az: az integrálható $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ függvények összességének jele $L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$; ő tehát vektortér.
5. Ha $\mathbb{V}$ és $\mathbb{W}$ vektorterek, akkor $\mathbb{W}^{\mathbb{V}}$-nek, vagyis az összes lehetséges $\mathbb{V}\to\mathbb{W}$ függvény halmazának részhalmaza $\mathrm{Lin}(\mathbb{V},\mathbb{W})$, a $\mathbb{V}\to\mathbb{W}$ lineáris leképezések halmaza. *Itt is igaz*, hogy $\hat{A},\hat{B}\in\mathrm{Lin}(\mathbb{V},\mathbb{W})$ esetén éppen a pontonkénti műveletekkel értelmeztük $\hat{A}+\hat{B}$-t ill. $\lambda\hat{A}$-t (csak az indulási $\mathbb{V}$ halmaz elemeit „pontok" helyett inkább „vektoroknak" hívtuk). Beláttuk jó régen (a „Vektorszámítás" jegyzet 5.1. szakaszában), hogy lineáris leképezések összege ill. számszorosa *is lineáris leképezés*: kimondhatjuk tehát, hogy $\mathrm{Lin}(\mathbb{V},\mathbb{W})$ a $\mathbb{W}^{\mathbb{V}}$ altere, azaz $\mathrm{Lin}(\mathbb{V},\mathbb{W})$ önmaga vektortér a lineáris leképezések szokásos összeadásával és számmalszorzásával ellátva.

• Sokféle „érdekes" vektortér van tehát. Ha $\mathbb{V}$ **vektortér**, akkor őrá **értelmes minden, ami** csakis **a lináris műveletekre épít**: elemek összege, számszorosa, *lineáris kombinációja*, részhalmazok *lineáris függetlensége*, $\mathbb{V}$-beli *bázisok* fogalma, *alterek*, *kiegészítő alterek*, alterek (ill. a $\mathbb{V}$) *dimenziója*, sőt, ha $\mathbb{W}$ is vektortér, akkor a $\mathbb{V}\to\mathbb{W}$ *lineáris leképezések* $\mathrm{Lin}(\mathbb{V},\mathbb{W})$ vektotere, stb.

Akármilyen $\mathbb{V}$ vektortérben **első körben** viszont **nem értelmesek** olyan fogalmak, amelyek a lineáris műveleteken túlmenő struktúrát „igényelnek" (noha esetleg ezeket a geometriai irányított szakaszokra ugyanúgy régen megszoktuk, mint a vektorösszeadást/számmalszorzást). Ilyenek: $\mathbb{V}$-beli elemek nagysága (hossza) ill. közelsége (még speciálisabban: skalárszorzat, bezárt szög; sőt három dimenzióban vektoriális szorzat, „sodrásúság"), továbbá a „közelség"-re építve: $\mathbb{V}$-beli sorozatok konvergenciája, elemek végtelen sorösszege, $\mathbb{V}$-ből vagy $\mathbb{V}$-be képező függvények folytonossága. Ezek akkor használhatók egy $\mathbb{V}$ vektortérben, ha $\mathbb{V}$-t további struktúrákkal látjuk el.[5]

• Ha egy vektortérben értelmezzük vektorok „nagyságát" (és a „nagyság"-képzésre mint műveletre a hossz-fogalomra vonatkozó alapvető „szemléletes elvárásainkat" követeljük meg), akkor az ilyen vektortér ezzel a nagyságképzéssel, más néven: „normával" mint további művelettel ellátva a **normált tér** megjelölést fogja viselni. Ilyenben már van értelme elemek közelségének (miszerint két elem távolsága a különbségvektoruk nagysága), továbbá konvergenciának, folytonosságnak, stb. Ha egy $\mathbb{V}$ vektortéren értelmezünk egy „skalárszorzat" nevű műveletet is (rá a geometriai térbeli vektorok skalárszorzatának alapvető tulajdonságait *megkövetelve*), akkor $\mathbb{V}$ ezzel a további művelettel ellátva (ki nem találnánk) a **skalárszorzatos tér** nevet fogja viselni. Találkoztunk már és még találkozni is fogunk ilyen struktúrákkal; most csak megemlítettük őket. Teljesen természetesnek hangzik, hogy pl. az az $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}_0^+$ leképezés, ami $\mathbb{R}^3$ minden $\mathbf{v}$ eleméhez $\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$-et rendeli, norma, az az $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ leképezés pedig, ami minden $\mathbb{R}^3$-beli $\mathbf{a},\mathbf{b}$ elemekhez $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$-at rendeli, skalárszorzat lesz. Ezek voltak a „térbeli" hosszképzésnek ill. skalárszorzásnak megfelelő számolási utasítások; ezek alaptulajdonságait akarjuk (majd) megőrizni az általános definícióban.

Felmerülhet kérdésként, hogy miért nem követeltük meg eleve már a vektortér-fogalom részeként, hogy $\mathbb{V}$ el legyen látva pl. skalárszorzás-művelettel? Válasz: *vannak* olyan vektorterek (pl.

[5] Az imént példának hoztuk a folytonos $\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ függvényeket. Ott már hallgatólagosan kihasználódik, hogy az érkezési halmaz, a $\mathbb{K}$ számhalmaz igenis „egyebeket is tud", mint csak azt, hogy ő vektortér: *értelmes* $\mathbb{K}$-ban a „közelség", erre építve a $\mathbb{K}$ értékű függvények folytonossága.

különféle függvényterek), amelyeken *nem kézenfekvő* ilyen további műveleteket bevezetni. Érdemes tehát a sokféle struktúrát „lépésenként” hozzáadni egy $\mathbb{V}$ vektortérhez; így tesz a matematika.

* * *

A továbbiakban annyi mindenképpen kell majd ebből a bevezető fejezetből, hogy különféle halmazokat (főleg különféle függvények halmazait) vektortereknek fogunk hívni; az eddigiek alapján világos lesz mindig, hogy mit értünk ez alatt, és hogy mi múlik ezen. ***E fejezet maradéka*** pedig ***abszolúte kiegészítés:*** bemutatuk még egy alapvető vektortér-konstrukciót.

• Legyen $\mathbb{V}$ akármilyen vektortér ($\mathbb{K}$ felett), amiben kijelölünk egy $\mathbb{M}\subset\mathbb{V}$ alteret. Ekkor a $\mathbb{V}$-nek az $\mathbb{M}$ **altér szerinti** ún. **faktortere**, jelben: $\mathbb{V}/\mathbb{M}$ az a vektortér, ami „elfelejti a $\mathbb{V}$-nek az $\mathbb{M}$-beli vektorok által feltárt részleteit”. A $\mathbb{V}/\mathbb{M}$ mint halmaz *elemei* olyan $\mathcal{X}\subset\mathbb{V}$ *részhalmazok*, amelyekbe eső $\mathbb{V}$-elemek csakis $\mathbb{M}$-beli elemmel különböznek:[6]

$$\mathbb{V}/\mathbb{M} \equiv \left\{ \mathcal{X}\subset\mathbb{V} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{minden } x\in\mathcal{X},\ y\in\mathcal{X} \text{ esetén } x-y \in \mathbb{M}, \\ \text{de ha } x\in\mathcal{X} \text{ és } y\notin\mathcal{X}, \text{ akkor } x-y \notin \mathbb{M}. \end{array} \right\} \tag{1.1}$$

• Beláthatjuk, hogy minden $x\in\mathbb{V}$ elem pontosan egy ilyen $\mathcal{X}$-be tartozik:
— Ha $\mathcal{X}$ és $\mathcal{X}'$ ilyen halmazok, amelyek különböznek, akkor van olyan y, ami egyiknek eleme, de másiknak nem, mondjuk $y\in\mathcal{X}$ de $y\notin\mathcal{X}'$. Ha egy adott x-re $x\in\mathcal{X}$ és $x\in\mathcal{X}'$, akkor a mondott y-ra az $\mathcal{X}$ definíciója azt adná, hogy $x-y \in \mathbb{M}$, $\mathcal{X}'$-é pedig azt, hogy $x-y \notin \mathbb{M}$. Egy adott x tehát nem lehet két különböző ilyen $\mathcal{X}$ és $\mathcal{X}'$ részhalmaznak is eleme.
— Másrészt minden $x\in\mathbb{V}$ kijelöl egy $\mathbb{V}/\mathbb{M}$-beli elemet (azaz: $\mathbb{V}$-nek egy az iménti (1.1) feltételnek megfelelő részhalmazát) az x-hez az összes lehetséges $\mathbb{M}$-beli elemet hozzáadva. Jelölje ezt $x+\mathbb{M}$, azaz $x+\mathbb{M} := \{y\in\mathbb{V} \,|\, y-x \in \mathbb{M}\}$. Nyilván $x \in x+\mathbb{M}$, mert itt y szerepébe x-et magát téve $x-x=0$, és a 0 nullavektor tényleg $\mathbb{M}$ eleme. Továbbá $x+\mathbb{M}$ tényleg az (1.1) definíciós feltételnek megfelelő részhalmaz: ha $y \in x+\mathbb{M}$ és $y' \in x+\mathbb{M}$, akkor $y-x \in \mathbb{M}$ és $y'-x \in \mathbb{M}$, így mivel $\mathbb{M}$ altér, $(y-x)-(y'-x) \in \mathbb{M}$, vagyis $y-y' \in \mathbb{M}$, ahogy kell. Ha pedig $y \in x+\mathbb{M}$ de $y' \notin x+\mathbb{M}$, akkor $y-x \in \mathbb{M}$ de $y'-x \notin \mathbb{M}$, így $y-y' = (y-x)-(y'-x)$ sem lehet $\mathbb{M}$ eleme, ahogy kell.

Az (1.1) definíciónak megfelelő részhalmazok (a $\mathbb{V}/\mathbb{M}$ elemei) tehát diszjunktak és uniójuk az egész $\mathbb{V}$: úgy mondjuk, hogy a $\mathbb{V}$ egy *partícióját* alkotják. A nullavektorhoz tartozó $0+\mathbb{M}$ éppen az $\mathbb{M}$, a többi $\mathbb{V}/\mathbb{M}$-beli elem viszont *nem* lineáris altér $\mathbb{V}$-ben (hanem $\mathbb{M}$ valamilyen „odébbtoltja”).

Úgy is mondhatjuk, hogy az ilyen $x+\mathbb{M}$ részhalmazok lényegében ún. *ekvivalencia-osztályok*, aholis két elemet most ekvivalensnek tekintettünk (azaz: „el akartuk felejteni a különbözőségüket”), ha azok csak $\mathbb{M}$-beli elemmel térnek el; így tehát egy $\mathbb{V}/\mathbb{M}$-beli elemben (ami $\mathbb{V}$-nek részhalmaza) olyan $\mathbb{V}$-beli vektorok vannak, amelyek ilyen értelemben mind egymással „ekvivalensek”.

• Bevezetünk $\mathbb{V}/\mathbb{M}$ elemein egy „természetes” összeadás– és számmalszorzás-műveletet:

$$x+\mathbb{M} \in \mathbb{V}/\mathbb{M} \text{ és } y+\mathbb{M} \in \mathbb{V}/\mathbb{M} \text{ esetén legyen } (x+\mathbb{M}) + (y+\mathbb{M}) := (x+y)+\mathbb{M},$$
$$x+\mathbb{M} \in \mathbb{V}/\mathbb{M} \text{ és } \lambda\in\mathbb{K} \text{ esetén pedig legyen } \lambda \cdot (x+\mathbb{M}) := \lambda x+\mathbb{M}.$$

$\mathbb{V}/\mathbb{M}$ egy adott $x+\mathbb{M}$ eleme esetleg más x'-kkel is felírható $x'+\mathbb{M}$ alakban. Ellenőrizni kell tehát, hogy a definícióink jók-e: nem függ-e attól két egyértelmű $\mathbb{V}/\mathbb{M}$-beli elem most definiált összege (ill. egy egyértelmű elem számmalszorzottja), hogy a $\mathbb{V}/\mathbb{M}$-beli elemet milyen ilyen x-szel írjuk fel.

[6] Ugyebár az $\{x\in H \,|\, „x\text{-re vonatkozó mondat”}\}$ halmaz az, ami a már létező H halmazból azon x-eket tartalmazza, amelyekre a mondat igaz. Az, hogy most azt írjuk a bal oldalon, hogy $\mathcal{X}\subset\mathbb{V}$, azt jelenti, hogy a $\mathbb{V}$ részhalmazai közül (a $\mathbb{V}$ össszes részhalmazainak halmazából) „különítjük el” a kijelölt fajta $\mathcal{X}$ részhalmazokat.

Az eddigiek alapján egyszerű belátni (gondoljuk át), hogy $x+\mathbb{M}=x'+\mathbb{M}$ pontosan akkor, ha $x=x'+a$, ahol $a\in\mathbb{M}$. Ha tehát $x+\mathbb{M}=x'+\mathbb{M}$ és $y+\mathbb{M}=y'+\mathbb{M}$, akkor $x=x'+a$ és $y=y'+b$, ahol $a,b\in\mathbb{M}$, emiatt $x'+y'+\mathbb{M}=x+y+(a+b)+\mathbb{M}=x+y+\mathbb{M}$, ahol utoljára azt használtuk ki, hogy mivel $\mathbb{M}$ altér, $a+b$ is $\mathbb{M}$ eleme. A szorzásra is hasonló: ha $x+\mathbb{M}=x'+\mathbb{M}$, azaz $x=x'+a$, ahol $a\in\mathbb{M}$, akkor $\lambda x'+\mathbb{M}=\lambda x+\lambda a+\mathbb{M}=\lambda x+\mathbb{M}$, ahol pedig azt használtuk az utolsó lépésben, hogy $\lambda a\in\mathbb{M}$ is igaz.

Jó tehát a $\mathbb{V}/\mathbb{M}$-beli elemek összegét és számmalszorzottját megadó definíciónk: mindegy bennük, hogy egy adott $\mathbb{V}/\mathbb{M}$-beli elemet melyik megfelelő x-szel írunk fel $x+\mathbb{M}$ alakban.

• ***Állítás:*** az imént definiált $\mathbb{V}/\mathbb{M}$-beli műveletekre igazak az *A1–MA'* tulajdonságok. Ez is azon múlik, hogy magukra a $\mathbb{V}$-beli műveletekre is igazak ezek; az új műveleteink definícióit és a $\mathbb{V}$-beli műveletek ugyanazon tulajdonságait használva kell haladni. Értelemszerű jelöléssel (és figyelve, hogy a $+$ és a $\cdot$ egyszer a faktortérbeli, másszor az eredeti $\mathbb{V}$-beli műveleteket jelentik):

A1: $\underline{\big((x+\mathbb{M})+(y+\mathbb{M})\big)+(z+\mathbb{M})} = ((x+y)+\mathbb{M})+(z+\mathbb{M}) = (x+y)+z+\mathbb{M} = x+(y+z)+\mathbb{M} =$
$= (x+\mathbb{M})+(y+z+\mathbb{M}) = \underline{(x+\mathbb{M})+\big((y+\mathbb{M})+(z+\mathbb{M})\big)}$,

A2: $\underline{(x+\mathbb{M})+(y+\mathbb{M})} = x+y+\mathbb{M} = y+x+\mathbb{M}) = \underline{(y+\mathbb{M})+(x+\mathbb{M})}$,

A3: $\mathbb{V}/\mathbb{M}$ nulla-eleme nyilván $0+\mathbb{M}=\mathbb{M}$, erre tényleg $\underline{(x+\mathbb{M})+(0+\mathbb{M})} = x+0+\mathbb{M} = \underline{x+\mathbb{M}}$,

A4: $x+\mathbb{M}$ ellentettje nyilván $-x+\mathbb{M}$, erre tényleg $\underline{(x+\mathbb{M})+(-x+\mathbb{M})} = x+(-x)+\mathbb{M} = \underline{0+\mathbb{M}}$,

M: $\underline{1\cdot(x+\mathbb{M})} = (1\cdot x)+\mathbb{M} = \underline{x+\mathbb{M}}$,

AM: $\underline{\lambda\cdot\big((x+\mathbb{M})+(y+\mathbb{M})\big)} = \lambda\cdot\big((x+y)+\mathbb{M}\big) = \lambda(x+y)+\mathbb{M} = \lambda x+\lambda y+\mathbb{M} =$
$= (\lambda x+\mathbb{M})+(\lambda y+\mathbb{M}) = \underline{\lambda\cdot(x+\mathbb{M})+\lambda\cdot(y+\mathbb{M})}$,

MM': $\underline{\alpha\cdot\big(\beta\cdot(x+\mathbb{M})\big)} = \alpha\cdot\big((\beta\cdot x)+\mathbb{M}\big) = \alpha\cdot(\beta\cdot x)+\mathbb{M} = (\alpha\beta)x+\mathbb{M} = \underline{(\alpha\beta)\cdot(x+\mathbb{M})}$,

MA': $\underline{(\alpha+\beta)\cdot(x+\mathbb{M})} = (\alpha+\beta)x+\mathbb{M} = (\alpha x+\beta x)+\mathbb{M} =$
$= (\alpha x+\mathbb{M})+(\beta x+\mathbb{M}) = \underline{\alpha(x+\mathbb{M})+\beta(x+\mathbb{M})}$.

Ezen felbátorodva tehát $\mathbb{V}/\mathbb{M}$-et a bevezetett $+$ és $\cdot$ műveletekkel vektortérnek tekintjük.

• Természetes módon előjön ez a konstrukció integrálható függvényeknél. Legyen pl. $\mathbb{V}$ a fentebbi $L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, az $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ integrálható függvények vektortere. Integrálás szempontjából nem számít, hogy a függvény az indulási halmaz (most: $\mathbb{R}$) egy *nulla mértékű részhalmazán* (pl. néhány pontban) hogyan van értelmezve. Ha „el akarjuk felejteni” az ilyen nulla mértékű halmazokat, akkor megállapíthatjuk, hogy azon $f\in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ függvények $\mathbb{M}$ halmaza, amelyek majdnem mindenütt nullák (azaz: legfeljebb nulla mértékű halmazon nem azok), lineáris altér $L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$-ben.[7]

Jelöljük $\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$-vel az $L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})/\mathbb{M}$ faktorteret. Ennek elemei a függvények olyan ekvivalencia-osztályai, amelyekben lévő függvények egymástól csakis majdnem mindenütt nulla függvénnyel térnek el. Bármilyen integrálható függvény kijelöli a saját ekvivalencia-osztályát, amiben a vele majdnem mindenütt egyenlő függvények vannak. Két ilyen ekvivalencia-osztály összegének képzéséhez akármelyik függvényt kiválaszthatjuk a két osztályból, azokat összeadhatjuk: az eredmény-ekvivalenciaosztályba az ezzel az összeggel majdnem mindenütt egyenlő függvények tartoznak. Az $\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ nulla-eleme, $\mathbb{M}$, a majdnem mindenütt nulla függvények halmaza.

[7]Hiszen egy ilyen függvény számszorosa is, és két ilyen függvény összege is ilyen; utóbbihoz tudni kell, hogy két nulla mértékű halmaz uniója is nulla mértékű, de ez tényleg igaz.

2. Fourier-sorok, Fourier-transzformáció

Először egy „élményszintű” megközelítés jön; ne veszítsük kedvünket, hogy sok kérdés nyitva marad. Továbbhaladva majd (közben felvetődött) új nézőpontokat is figyelembe véve pontosítunk.

2.1. Periodikus függvények Fourier-sorai

Foglalkoztunk már *hatványsorba fejtéssel*: „magasról nézve” az volt a vezérfonál, hogy (bonyolult) függvényeket megközelíthettünk (akármilyen finomsággal) ismert jó tulajdonságú függvényekkel (polinomokkal). A Fourier-sorfejtés viszont *periodikus függvények* körében lép be az életünkbe.

• Egy valós változójú függvényeket nézünk; a változót sokszor t-vel jelöljük arra gondolva, hogy $f(t)$ egy időben változó mennyiséget, pl. golyó kitérését, hanghullámban közeg elmozdulását stb. írja le. Kijelölünk egy $T{>}0$ értéket mint *periódust*, és T szerint periodikus függvényekkel foglalkozunk:

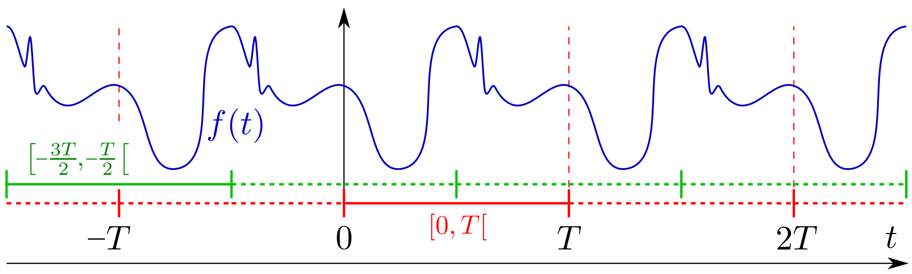
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad \mathrm{Dom} f = \mathbb{R}, \quad \text{és} \quad f(t) = f(t{+}T) \quad \text{minden } t{\in}\mathbb{R}\text{-re.} \tag{2.1}$$

Persze (mivel aztán t helyébe $t{+}T$-t, $t{+}2T$-t, stb. is írhatunk) a mondott feltétel azt is adja, hogy

$$f(t) = f(t{+}nT) \quad \text{minden } t{\in}\mathbb{R} \text{ esetén, minden } n{\in}\mathbb{Z}\text{-re.} \tag{2.2}$$

Megjegyzések:

1. Vehetjük úgy, hogy $f(t)$ értékeit előírjuk a $t \in [0, T[$ zárt-nyílt intervallumon, és az itteni menetét előre-hátra „másolgatjuk”, az intervallum érintkező másolataival betöltve $\mathbb{R}$-et. Egy T szerint periodikus függvény $2T$, $3T$,…,nT szerint is az minden $n{\in}\mathbb{N}^+$-re. Lehet, hogy egy ilyen f (ha a $[0, T[$-n is „ismétli” magát) pl. $\frac{T}{2}$ szerint is periodikus. Ha f lehetséges periódusai között van legkisebb, akkor az az *alapperiódus*. (Pl. azt, hogy a sin és a cos „2π szerint periodikusak”, úgy értik, hogy 2π az alapperiódus: ők amúgy 4π, 6π stb. szerint *is* periodikusak). Ez ne zavarjon; a lényeg, hogy a függvényeink T szerint a (2.1) értelemben periodikusak legyenek; az alapperiódusuk lehet akár kisebb is. Sőt: az $f(t){\equiv}c$ konstans függvény is megfelelő.



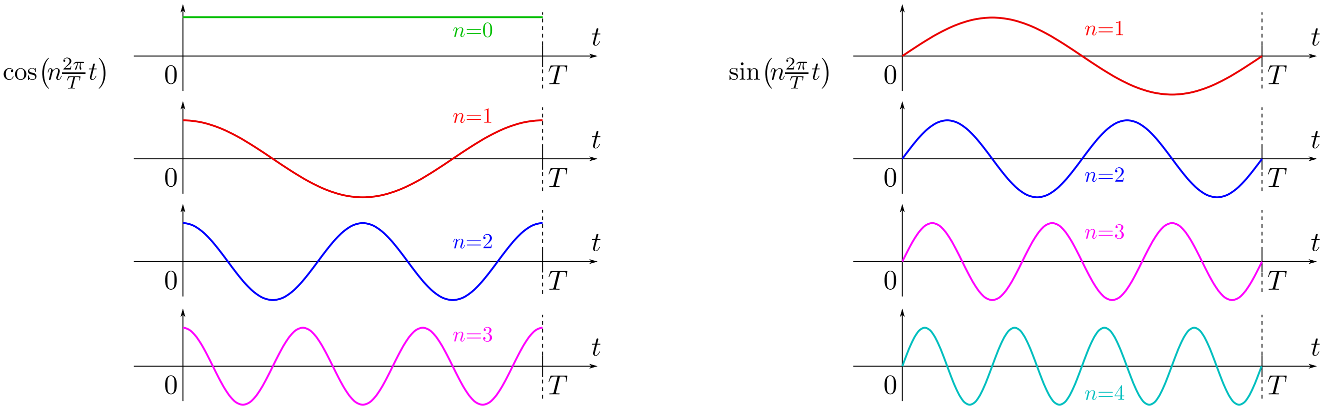
2. ábra. Periodikus függvény szemléltetése.

2. Néha a $[0, T[$ helyett pl. $]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$-ből, vagy más T hosszú, egyik végén nyílt, másikon zárt (=átfedés nélkül egymás mögé rakosgatható) intervallumból indulunk ki: egy T szerint periodikus f függvényt egyértelműen rögzít az is, ha bármilyen ilyen intervallumban megadjuk.
3. Sőt: noha egyelőre (a rezgések/hullámok képzete miatt) tényleg úgy gondolhatjuk, hogy az f függvényeink periodikusak és $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$, egyre inkább csak az fog számítani, hogy értelmezettek egy T hosszúságú intervallumon (amit másolgatva persze periodikus függvényre jutunk).
4. Az intervallumból, pl. $[0, T[$-ből ki is hagyhatunk akár pl. néhány pontot: az $f(t)$ integráljai fognak szerepet kapni; *nulla mértékű halmaz* nem számít ezek szempontjából.

• A „legegyszerűbb” periodikus függvények jól ismert elemi függvények: a harmonikus rezgőmozgáshoz tartozó sin és cos. Ezekre szeretnénk „építkezni”. Ahhoz, hogy a kijelölt T lehessen periódusuk, egész számú: egy, kettő, stb. (n darab) teljes „hullámzásuk” (változójuknak 2π-nyi odébbmenése) kell elférjen t-ben a T hosszúságú intervallumra. Ez akkor valósul meg, ha így használjuk őket:

$$\underbrace{1,\quad \cos\bigl(\tfrac{2\pi}{T}t\bigr),\ \cos\bigl(2\tfrac{2\pi}{T}t\bigr),\ \cos\bigl(3\tfrac{2\pi}{T}t\bigr),\ \dots,}_{\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\quad (\text{ahol } n\in\mathbb{N}_0^+),}\qquad \underbrace{\sin\bigl(\tfrac{2\pi}{T}t\bigr),\ \sin\bigl(2\tfrac{2\pi}{T}t\bigr),\ \sin\bigl(3\tfrac{2\pi}{T}t\bigr),\ \dots}_{\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\quad (\text{ahol } n\in\mathbb{N}^+).} \tag{2.3}$$

Bevettük a játékba a(z 1 értékű) konstans függvényt is; természetesen ennek is periódusa T a megbeszélt értelemben, és mellesleg őt a cos-okhoz is hozzásorolhattuk n=0-t írva: $1 = \cos\bigl(0\frac{2\pi}{T}t\bigr)$.



3. ábra. A bevezetett (T szerint periodikus) sin/cos függvények (közül az első néhány).

• Ezek a $\cos\bigl(n\frac{2\pi}{T}t\bigr)$, $\sin\bigl(n\frac{2\pi}{T}t\bigr)$ függvények végtelen sokan vannak: hátha „elég sokan” is vannak ahhoz, hogy *bármilyen* T szerint periodikus $f(t)$ függvényt összerakjunk belőlük. Ez lenne az ún.

$$\textbf{Fourier-sor:}\qquad f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\Bigl(n\frac{2\pi}{T}t\Bigr) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\Bigl(n\frac{2\pi}{T}t\Bigr), \tag{2.4}$$

vagyis T szerint periodikus $f(t)$-khez remélhetőleg léteznek a kijelölt **Fourier-együtthatók:** az $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ ill. $b_1, b_2, b_3, \dots$ számok, amelyekkel f így felírható. Az a_n-eknél $n\in\mathbb{N}_0^+$, a b_n-eknél $n\in\mathbb{N}^+$, azaz b_0-s tag nincs. A konstans a_0-s tag belesimul a cos-ok közé (a konstans 1 írható cos(0) módon is), mégis kicsit „különleges” eset lesz; ezért is írtuk más alakban, 2-vel osztva.

• Ha pl. adott $m\in\mathbb{N}_0^+$-t véve $f(t)=\cos\bigl(m\frac{2\pi}{T}t\bigr)$, akkor ő *felírható* (2.4) alakban: az összes b_n=0, és az a_n-ek közül csakis a_m nem nulla (hanem 1). Továbblépve: véges sok nem nulla a_n, b_n esetén véges összegünk van, de már így is „változatos” (T szerint periodikus) függvényeket kaphatunk.

Ha az $f(t)$ függvényre mint *hangra* gondolunk, akkor mondhatjuk, hogy az adott T periódusidőhöz tartozik egy $\frac{2\pi}{T}$ „alapfrekvencia” és ennek többszörösei;[8] utóbbiakat „felhangoknak” hívnánk. A Fourier-sor együtthatóinak egymáshoz képesti nagysága lényegében azt mondja meg ekkor, hogy a felhangok milyen arányban „keverednek hozzá” a hallott alaphanghoz: ezt hívjuk *hangszínnek*.[9]

[8] A (sokszor f-fel vagy ν-vel jelölt), Hz-ben mért *frekvencia* tulajdonképpen $\frac{1}{T}$ („hányat rezeg egységnyi idő alatt”); ennek 2π-szeresét írtuk. Ezt (pl. ω-val jelölendő) *körfrenkvenciának* kellene hívni: ezt írjuk a sin/cos változóiban t mellé: $\sin(\omega t)$, $\cos(\omega t)$. Tehát $\omega=2\pi\nu$. (Segítség megjegyezni, hogy melyik 2π-szerese melyiknek: „a *kör*frekvencia a hosszabbik szó, *tehát* ő a nagyobb, ő a 2π-szeres”; én kérek elnézést.) Az alábbiakban is sokszor (és már itt is) lazán „frekvenciát” mondunk *kör*frekvencia helyett is; egyértelmű lesz mindig, hogy utóbbira gondolunk.

[9] Szinte semmilyen hangeszköz nem egyfrekvenciás hangot ad: minden „rendes” hangban vannak felhangok. Ezek arányait (=a hangszínt) felismerve különbözteti meg a fülünk pl. a különféle hangszerek által kiadott hangokat.

• A (2.4) Fourier-sorfejtés azonban akkor igazán izgalmas, ha $f(t)$ valami más alakban adott, „nem is hasonlít" a használt sin/cos függvényekre, így **végtelen sok tag** kell. A felmerülő **kérdések:**

1. Adott $f(t)$ esetén hogyan találjunk a keresett (2.4) sorba megfelelő a_n, b_n együtthatókat?
2. Adott a_n, b_n együtthatók esetén létezik-e a (2.4)-ben kijelölt végtelen függvényösszeg? Pontonkénti, egyenletes, vagy valamilyen más értelmű konvergenciáról lehet szó?
3. Végül: ha egy adott függvényhez megtalált a_n, b_n együtthatókkal felírt Fourier-sor konvergens is, tényleg előállítja-e, azaz visszaadja-e a kiindulási függvényt?

• Kezdjük az első kérdéssel: adott $f(t)$ estén próbáljunk megfelelő a_n, b_n együtthatókat találni. Az alapötlet (ki gondolná...) *Fourier*-től származik. Rendkívül fontos lesz, hogy ha egy sin vagy cos függvényt az alapperiódusára vagy annak többszörösére integrálunk, akkor szinte mindig nullát kapunk, kivéve egyetlen esetben T-t. A használandó függvénykre konkrétan megfogalmazva:

$$\forall\ m\in\mathbb{Z} \text{ esetén } \int_0^T \mathrm{d}t \sin\left(m\tfrac{2\pi}{T}t\right) = 0, \qquad \text{és} \quad \int_0^T \mathrm{d}t \cos\left(m\tfrac{2\pi}{T}t\right) = \begin{cases} 0, \text{ ha } m\neq 0, \\ T, \text{ ha } m=0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Ezeket beláthatjuk „rajzzal" (ld. pl. az előző 3. ábrán): a sin és a cos váltakozó „öblei" kiejtik egymást. (Figyelem: az integrálási szakaszra tényleg *pontosan egész számú* alapperiódus kell elférjen!) **Egyedül a cos(0) ad nem nullát.** Más alakban is felírhatjuk ezeket: minden $m\in\mathbb{Z}$-re

$$\int_0^T \mathrm{d}t \sin\left(m\tfrac{2\pi}{T}t\right) = 0, \qquad \int_0^T \mathrm{d}t \cos\left(m\tfrac{2\pi}{T}t\right) = T\cdot\delta_{m0}. \tag{2.6}$$

Az iménti integrálokat a primitív függvényeket megkeresve is kiszámolhatjuk:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \sin\left(m\tfrac{2\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t &= \begin{cases} \text{ha } m\neq 0\text{: } \left[\frac{-T}{2\pi m}\cos\left(m\frac{2\pi}{T}t\right)\right]\Big|_0^T = \frac{-T}{2\pi m}\left[\cos(2\pi m) - \cos(0)\right] = \frac{-T}{2\pi m}\left(1-1\right) = 0, \\ \text{ha viszont } m=0, \text{ akkor az van, hogy } \int_0^T \mathrm{d}t \sin\left(0\frac{2\pi}{T}t\right) = \int_0^T \mathrm{d}t\, 0 = 0, \end{cases} \\
\int_0^T \cos\left(m\tfrac{2\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t &= \begin{cases} \text{ha } m\neq 0\text{: } \left[\frac{T}{2\pi m}\sin\left(m\frac{2\pi}{T}t\right)\right]\Big|_0^T = \frac{T}{2\pi m}\left[\sin(2\pi m) - \sin(0)\right] = \frac{T}{2\pi m}\left(0-0\right) = 0, \\ \text{itt pedig ha } m=0, \text{ akkor az van, hogy } \int_0^T \mathrm{d}t \cos\left(0\frac{2\pi}{T}t\right) = \int_0^T \mathrm{d}t\, 1 = T. \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Kijöttek az eredmények. **Tanulság:** $\cos(2\pi m)$, $\sin(2\pi m)$ jellegű behelyettesített értékeket tilos így hagyni. **Még fontosabb:** ha az integrandusban van egy egész szám, amelynek összes értékét egyszerre vizsgáljuk, és primitív függvényt találunk, **észre kell venni, ha az nem értelmes** a kijelölt szám speciális értéke(i) esetén. Mostani esetünkbek az első sorokban „minden m-re" felírtuk a primitív függvényt, de fel kellett tűnjön, hogy m=0-ra nem értelmesek, így külön kellett vizsgálni m=0-t. (Most a sin-nél m=0-ra is nulla lett az integrál, a cos-os esetben viszont *nem*.)

• Térjünk rá az együtthatókra! Az a_0 a legegyszerűbb: ehhez a sor alakú felírást integráljuk.

$$\begin{aligned}
\int_0^T \mathrm{d}t\, f(t) &= \int_0^T \mathrm{d}t \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\tfrac{2\pi}{T}t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\tfrac{2\pi}{T}t\right) \right\} = \\
&= \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_0^T \mathrm{d}t\, 1}_{=T} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_0^T \mathrm{d}t \cos\left(n\tfrac{2\pi}{T}t\right)}_{=\,0,\text{ mert } n\neq 0} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\int_0^T \mathrm{d}t \sin\left(n\tfrac{2\pi}{T}t\right)}_{=0} \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, f(t).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Itt (egyelőre kissé levegőben lógóan) feltettük, hogy a végtelen összeget tagonként integrálhatjuk, amivel kihasználhattuk, hogy az összes ilyen egész periódusra vett sin és cos-integrál nulla, csak a konstans tag nem az. Eredmény: megkapjuk a_0-t, ha kiszámítjuk $f(t)$ integrálját 0-tól T-ig.

• A többi $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ együtthatót is integrálással „hámozhatjuk ki”. Ez az ötlet is *Fourier*-től származik; rávezetésként idézzük fel az addíciós képletek szorzatokból összegeket adó felírásait:

$$\begin{aligned} \sin\alpha\cos\beta &= \tfrac{1}{2}\big[\sin(\alpha{+}\beta){+}\sin(\alpha{-}\beta)\big], \\ \cos\alpha\sin\beta &= \tfrac{1}{2}\big[\sin(\alpha{+}\beta){-}\sin(\alpha{-}\beta)\big], \\ \cos\alpha\cos\beta &= \tfrac{1}{2}\big[\cos(\alpha{-}\beta){+}\cos(\alpha{-}\beta)\big], \\ \sin\alpha\sin\beta &= \tfrac{1}{2}\big[\cos(\alpha{-}\beta){-}\cos(\alpha{-}\beta)\big] \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned} \sin A + \sin B &= 2\sin\tfrac{A+B}{2}\cos\tfrac{A-B}{2}, \\ \sin A - \sin B &= 2\cos\tfrac{A+B}{2}\sin\tfrac{A-B}{2}, \\ \cos A + \cos B &= 2\cos\tfrac{A+B}{2}\cos\tfrac{A-B}{2}, \\ \cos A - \cos B &= 2\sin\tfrac{A+B}{2}\sin\tfrac{A-B}{2}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Az ötlet: szorozzuk meg az $f(t)$ keresett Fourier-sor alakú felírását egy a sorfejtésben is szereplő, kijelölt $n'{>}0$ indexű $\cos\big(n'\frac{2\pi}{T}t\big)$ ill. $\sin\big(n'\frac{2\pi}{T}t\big)$ függvénnyel, majd így integráljunk a periódusra:

$$\int_0^T\!\mathrm{d}t\, f(t)\cos\big(n'\tfrac{2\pi}{T}t\big) = \int_0^T\!\mathrm{d}t\Big\{\frac{a_0}{2}\cos\big(n'\tfrac{2\pi}{T}t\big) + \cos\big(n'\tfrac{2\pi}{T}t\big)\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\big(n\tfrac{2\pi}{T}t\big) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\big(n\tfrac{2\pi}{T}t\big)\Big)\Big\} \overset{1.}{=}$$

$$\overset{1.}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T\!\mathrm{d}t\Big\{\frac{a_n}{2}\underbrace{\cos\big((n{-}n')\tfrac{2\pi}{T}t\big)}_{\to T\cdot\delta_{nn'}} + \frac{a_n}{2}\cos\big((n{+}n')\tfrac{2\pi}{T}t\big) + \frac{b_n}{2}\sin\big((n{+}n')\tfrac{2\pi}{T}t\big) + \frac{b_n}{2}\sin\big((n{-}n')\tfrac{2\pi}{T}t\big)\Big\},$$

$$\int_0^T\!\mathrm{d}t\, f(t)\sin\big(n'\tfrac{2\pi}{T}t\big) = \int_0^T\!\mathrm{d}t\Big\{\frac{a_0}{2}\sin\big(n'\tfrac{2\pi}{T}t\big) + \sin\big(n'\tfrac{2\pi}{T}t\big)\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\big(n\tfrac{2\pi}{T}t\big) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\big(n\tfrac{2\pi}{T}t\big)\Big)\Big\} \overset{1.}{=}$$

$$\overset{1.}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T\!\mathrm{d}t\Big\{\frac{a_n}{2}\sin\big((n'{-}n)\tfrac{2\pi}{T}t\big) + \frac{a_n}{2}\sin\big((n'{+}n)\tfrac{2\pi}{T}t\big) + \frac{b_n}{2}\underbrace{\cos\big((n{-}n')\tfrac{2\pi}{T}t\big)}_{\to T\cdot\delta_{nn'}} - \frac{b_n}{2}\cos\big((n{+}n')\tfrac{2\pi}{T}t\big)\Big\}.$$

A kijelölt lépésben elhagytuk az a_0-s tagot, mert az az integrál ($n'{\neq}0$ miatt) nulla, megelőlegeztük, hogy tagonként integrálhatjuk a maradék végtelen összeget, majd átírtuk a sin és cos szorzatait a felidézett (2.9) addíciós képletekkel. A maradék sin-ok kijelölt integráljai nullák. $\cos\big((n{+}n')\frac{2\pi}{T}t\big)$-é is az, mert most $n'{>}0$, és n-re 1-től összegzünk, így $n{+}n'$ nem lesz nulla. Viszont $n{-}n'$ *lehet* nulla: ekkor az $n{-}n'$-t tartalmazó cos-os integrál T-t ad. A Kronecker-deltás felírás ezt kódolja el.

A kiindulási bal oldalon az ismert f függvénnyel kijelölt integrált ki tudhatjuk számítani, a jobb oldalon pedig az egy maradék összegzést elvégezve a következőket kaptuk:

$$\int_0^T\!\mathrm{d}t\, f(t)\cos\big(n'\tfrac{2\pi}{T}t\big) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}T\delta_{nn'} = \frac{2}{T}a_{n'}, \qquad \int_0^T\!\mathrm{d}t\, f(t)\sin\big(n'\tfrac{2\pi}{T}t\big) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2}T\delta_{nn'} = \frac{2}{T}b_{n'}.$$

• Most **„visszajelölünk”:** itt n' a szabadindex, ő lehet bármilyen érték, jelölhetjük megint n-nel a kényelem kedvéért. Összegyűjthetjük ezeket is és fentebb (2.8)-ból az a_0-ra kapott eredményt is:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T\!\mathrm{d}t\, f(t), \quad \text{és } n{>}0\text{-ra} \quad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T\!\mathrm{d}t\, f(t)\cos\big(n\tfrac{2\pi}{T}t\big), \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T\!\mathrm{d}t\, f(t)\sin\big(n\tfrac{2\pi}{T}t\big). \tag{2.10}$$

Ha elhisszük, hogy integrálhattunk tagonként, akkor mondhatjuk, hogy kiderült, hogy milyen a_n, b_n együtthatók *lehetnek* azok, amelyek egy adott $f(t)$ függvény (2.4) Fourier-sorban szerepelnek.

• Következő lépés: cos és sin helyett **komplex exponenciálisokkal** írjuk fel a (2.4) Fourier-sort:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\frac{e^{in\frac{2\pi}{T}t}+e^{-in\frac{2\pi}{T}t}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\frac{e^{in\frac{2\pi}{T}t}-e^{-in\frac{2\pi}{T}t}}{2i};$$

$$\text{rendezve:}\qquad f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-ib_n}{2}e^{in\frac{2\pi}{T}t} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-in\frac{2\pi}{T}t}.$$

Érdemes itt újfajta c_n együttható-jelölést bevezetni; újdonság, hogy (az eddigi együtthatókkal ellentétben) c_n-ekben az index lehet negatív, nulla és pozitív egész is.

$$\text{Legyen}\quad c_0 \equiv \frac{a_0}{2}, \qquad \text{és minden } n>0 \text{ esetén} \quad c_n \equiv \frac{a_n - ib_n}{2}, \qquad c_{-n} \equiv \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

Természetesen visszafelé is kifejezhetjük ezekből a c_n-ekből az eddigi a_n, b_n együtthatókat:

$$a_0 = 2c_0, \qquad \text{és minden } n>0 \text{ esetén} \quad a_n = c_n + c_{-n}, \qquad b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

• Az új együttható-jelöléssel (a c_n-ekkel) egyszerűbb alakban, minden $n\in\mathbb{Z}$ pozitív, nulla és negatív egészen indexen végigfutó összegként írhatjuk az imént átalakított Fourier-sort:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\frac{2\pi}{T}t} \qquad \Rightarrow \qquad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}t}.$$

Tényleg jól adódnak így a pozitív és a negatív tagok is; a nulladik is (ugye $e^{0\cdot i\frac{2\pi}{T}t}$ konstans 1). Az a_n, b_n együtthatókra talált (2.10) kifejezésekből a c_n-eket is közvetlenül összerakhatjuk:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, f(t), \qquad \text{illetve } n>0\text{-ra} \qquad c_{\pm n} = \frac{a_n \mp ib_n}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, f(t)\big[\cos\big(n\tfrac{2\pi}{T}t\big) \mp i\sin\big(n\tfrac{2\pi}{T}t\big)\big].$$

Összefoglalhatjuk ezeket is a nulla, a pozitív és a negatív indexértékekre egyaránt:

$$\text{minden } n\in\mathbb{Z} \text{ esetén:} \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, f(t) e^{-in\frac{2\pi}{T}t}.$$

• Az eddigi tárgyalásban a valós sin-t és cos-t használó sorból indultunk: könnyebb ezeket a trigonometrikus függvényeket „elképzelni”. A komplex exponenciálisos alak azonban alkalmasabb lesz gyakorlati számításokra is és későbbi általánosításokhoz is. Kiindulhatunk rögtön ebből is:

tegyük fel, hogy a T szerint periodikus f függvény felírható, mint
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}t}; \tag{2.11}$$

mik lehetnek a c_n együtthatók adott f esetén? Itt a következő integrál fog kelleni:

$$\int_0^T \mathrm{d}t\, e^{in\frac{2\pi}{T}t} e^{-in'\frac{2\pi}{T}t} = \int_0^T \mathrm{d}t\, e^{i(n-n')\frac{2\pi}{T}t} = T\delta_{nn'}; \tag{2.12}$$

ez összefoglalja a sin-re és cos-ra látott fenti (2.6) integrálokat (melyek ennek valós ill. képzetes részei). Ezt is levezethetjük primitív függvénnyel, és ebben is fel kell tűnjön a speciális eset:

$$\int_0^T \mathrm{d}t\, e^{im\frac{2\pi}{T}t} = \begin{cases} \text{ha } m\neq 0\text{:} \;\; = \left[\frac{T}{2\pi m} e^{im\frac{2\pi}{T}t}\right]\Big|_0^T = \frac{T}{2\pi m}\left[e^{2\pi i m} - e^{2\pi i\cdot 0}\right] = \frac{T}{2\pi m}\big(1-1\big) = 0, \\ \text{ha viszont } m=0, \text{ akkor az van, hogy } \int_0^T \mathrm{d}t 1 = T, \end{cases}$$

$n=n'$ pedig pont akkor teljesül, ha $m \equiv n-n' = 0$. Fontos persze tudni, hogy egész m-re $e^{m\cdot 2\pi i} = 1$.

Ezt a kapott (2.12) eredményt használva egy füst alatt „kinyerhetjük” az összes c_n együtthatót: szorozzuk be az adott $f(t)$-t adott n'-t véve $e^{-in'\frac{2\pi}{T}t}$-vel, és $f(t)$ feltételezett (2.11) sorát beírva integráljunk 0-tól T-ig. Itt is megelőlegezzük, hogy integrálhatjuk tagonként a végtelen összeget:

$$\int_0^T \mathrm{d}t\, e^{-in'\frac{2\pi}{T}t} f(t) = \int_0^T \mathrm{d}t\, e^{-in'\frac{2\pi}{T}t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_0^T \mathrm{d}t\, e^{i(n-n')\frac{2\pi}{T}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n T\delta_{nn'} = c_{n'},$$

$\Rightarrow$ az n' szabadindexet n-re visszajelölve tényleg minden $n \in \mathbb{Z}$-re
$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, f(t) e^{-in\frac{2\pi}{T}t}.$$

2.2. További részletek, példák

• **Összefoglaljuk** az előző szakaszt: ha egy T szerint periodikus $f(t)$ függvény felírható így:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\frac{2\pi}{T}t}, \qquad \text{(ezt pongyolán „\textbf{komplex}” Fourier-sornak hívhatjuk),} \tag{2.13}$$

akkor egyenértékűleg mondhatjuk, hogy felírható a **„valós”** Fourier-sornak hívható sorral is:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\!\big(n\tfrac{2\pi}{T}t\big)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\!\big(n\tfrac{2\pi}{T}t\big), \tag{2.14}$$

ahol a kétféle felírásbeli együtthatók kapcsolata a következő: $n\in\mathbb{N}^+$ pozitív indexet véve

$$c_0=\tfrac{1}{2}a_0,\quad \begin{aligned}c_n&=\tfrac12\big(a_n-ib_n\big),\\ c_{-n}&=\tfrac12\big(a_n+ib_n\big)\end{aligned}\qquad\Leftrightarrow\qquad a_0=2c_0,\quad \begin{aligned}a_n&=c_n+c_{-n},\\ b_n&=i\big(c_n-c_{-n}\big).\end{aligned} \tag{2.15}$$

Megelőlegezve, hogy a vizsgált végtelen összeg(ek)et lehet tagonként integrálni azt találtuk, hogy adott $f(t)$ esetén a sorfejtésben szereplő együtthatók csakis a következők lehetnek:

$$\text{minden } n\in\mathbb{Z}\text{-re}\quad c_n=\frac{1}{T}\int_0^T\!\mathrm{d}t\, f(t)e^{-in\frac{2\pi}{T}t}. \tag{2.16}$$

Sokszor könnyebb a c_n-eket így kiszámolni és ezután az a_n, b_n-eket az iménti (2.15) alapján megadni, de ez utóbbiakra is felírtuk az egyenértékű kifejezéseket: $n\in\mathbb{N}^+$-t (pozitív n-eket) megengedve

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T\!\mathrm{d}t\, f(t)\cos\!\big(n\tfrac{2\pi}{T}t\big),\quad b_n=\frac{2}{T}\int_0^T\!\mathrm{d}t\, f(t)\sin\!\big(n\tfrac{2\pi}{T}t\big),\qquad \text{és}\quad a_0=\frac{2}{T}\int_0^T\!\mathrm{d}t\, f(t). \tag{2.17}$$

• Az integrálás is és konvergens sorok tagonkénti összeadása is **lineáris** művelet (a konvergenciákat egyelőre megelőlegezve): szabadon lineárkombinálhatunk tehát sorösszegeket és együtthatókat a

$$f_1(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n^{(1)}e^{in\frac{2\pi}{T}t},\quad f_2(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n^{(2)}e^{in\frac{2\pi}{T}t}\quad\Leftrightarrow\quad(\alpha f_1+\beta f_2)(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\big(\alpha c^{(1)}+\beta c_n^{(2)}\big)e^{in\frac{2\pi}{T}t} \tag{2.18}$$

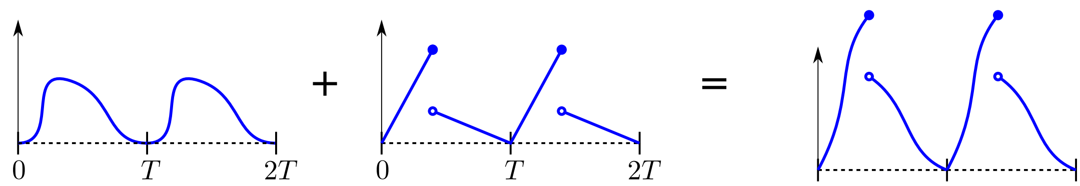
értelemben; persze kettő helyett akárhány véges sok tagra is. Ez jól használható pl. arra, hogy függvények lineáris kombinációjának Fourier-együtthatóit megkapjuk az eredeti függvényekéiből.

• **Pontosítunk** néhány **konvergenciatulajdonságot** (a bizonyításokra részben utalva). Kellemesebb az $e^{in\frac{2\pi}{T}t}$-ket használó „komplex” (2.13) Fourier-sor (és a c_n együtthatók vonatkozó (2.16) kifejezései) alapján gondolkodni; a következtetések az egyenértékű „valós” (2.14) sorra is igazak.

1. Mivel c_0 lényegében $f(t)$ integrálja, **csakis** a $[0,T]$-re **integrálható** f függvények jönnek szóba. Emlékezve, hogy az integrálhatóság egyenértékű az abszolútérték integrálhatóságával, látjuk, hogy mivel $\big|f(t)e^{-in\frac{2\pi}{T}t}\big|=|f(t)|$, a c_0 együttható pontosan akkor létezik, ha minden c_n is. Az $f(t)$ integrálhatósága tehát alapvető követelmény. (Pl. az az $f(t)$, ami $]0,T]$-n $\frac{1}{t}$, kizárt.)
2. Integrálásnál az értelmezési tartomány **nulla mértékű** részhalmazai **nem számítanak:** ha két függvény csak ilyen halmazon (pl. néhány pontban) különbözik, akkor Fourier-együtthatóik megegyeznek. Ha tehát egy f függvényről (valamilyen jó tulajdonsága alapján) belátjuk, hogy a Fourier-sora (valamelyik értelemben) konvergens és visszaadja f-et, akkor az f-től csak nulla mértékű halmazon különböző f_2 függvények Fourier-sorai is nyilván mind f-et adják vissza.

   Innentől itt is kiterjedten használjuk a **„majdnem mindenütt”** megfogalmazást: ez azt jelenti, hogy „ahol nem, az legfeljebb egy nulla mértékű halmaz”.

3. Egy **viszonylag egyszerű** állítás (melyet az A.1. függelékszakaszban belátunk): ha f mindenhol legalább kétszer differenciálható, és a **második deriváltja is korlátos** függvény (pl. folytonos; természetesen ha f „sima”, az bőven jó; de *vigyázat:* ha f-et pl. a $[0, T[$ intervallumon adjuk meg, akkor a periodikusság miatt a most mondott feltételhez az is hozzátartozik, hogy f is és f' is olyan, hogy a 0-ban jobbról vett és a T-ben balról vett határértékei megegyeznek), akkor **a Fourier-sora konvergens** pontonként abszolút, egyenletesen, **és visszaadja** f-et.
4. Lazítsunk az előző pont feltételén: lehessen $[0, T]$-n (belsejében vagy *határán*) véges sok pontban f-nek **ugrása vagy törése** (azaz f'-nek ugrása)! Ilyen f-eket előállíthatunk úgy, hogy az előző pont értelmében „jó” függvényekhez „egyszerű” töréses vagy ugrásos függvényeket (pl. szakaszonként más-más konstanst vagy „törött egyeneseket”) adunk. A „jó” részre az előző pontbeli „jó” tulajdonságok igazak, így az f függvényünk Fourier-sorának konvergenciája a „maradékon” (az egyszerű töréses/ugrásos hozzáadandó részen) múlik.



4. ábra. „Törött” függvény előáll, mint ”szép”+„egyszerű törött”.

5. Alább megnézünk konkrét egyszerű töréses/ugrásos függvényeket; az illusztrációkból látható lesz (és az A.1. függelékben részben be is bizonyítjuk), hogy ilyenekre a konvergencia nem egyenletes a törés/ugráspontok környékén, azonban a Fourier-sor pontonként visszaadja a kiindulási függvényt annyi „engedménnyel”, hogy a **kétoldali határértékek számtani közepét** kapjuk az ugrásoknál. Az előző megállapítással együtt ez általánosabban, sok ”törött” függvényre is igaz: a „sima rész” sora pontonként konvergens és visszaadja a sima részt, az egyszerű töréses részre (ami „beleteszi” a töréspontokat) pedig ez a számtani közepezés igaz.
6. **Általánosabban** az, hogy az (integrálható) $f(t)$ Fourier-sora milyen a mondottaknál gyengébb feltételek mellett (és hogyan) konvergens ill. adja vissza $f(t)$-t, **bonyolult kérdés**. Konkrét esetben esetleg megvizsgálhatjuk ezeket, de az általános kérdésről a XX. század második felében is születtek új matematikai eredmények; ezekkel nem foglalkozunk.
7. Már most megjegyezzük azonban, hogy a Fourier-sor (és későbbi általánosításai) szempontjából egy újfajta, az ún. ***Hilbert-térbeli*** **konvergencia** lesz a legnagyobb jelentőségű.

A gyakorlatban **legfontosabb eset** mégis az, amikor a Fourier-sor (majdnem mindenütt) **előállítja** a kiindulási függvényt. Ekkor tehát **a Fourier-együtthatók egyértelműek:** ha két függvény Fourier-együtthatói ugyanazok, akkor a függvények (majdnem mindenütt) egyenlőek.

• A vizsgált $f(t)$ lehet komplex értékű ($\mathbb{R} \to \mathbb{C}$) függvény is. Ha minden a_n, b_n együttható valós, akkor nyilván a „valós” (2.14) Fourier-sor összegfüggvénye is valós értékű, és az együtthatók egyértelműsége miatt visszafelé is: *pontosan a (manjdnem mindenütt) valós* értékű függvények a_n, b_n együtthatói valósak. A (2.15) megfeleltetés alapján ezt a c_n-ekre is átfogalmazhatjuk:

$f(t)$ majdnem mindenütt **valós értékű**	$\Leftrightarrow$	minden a_n és b_n valós	$\Leftrightarrow$	minden $n{\in}\mathbb{Z}$-re $\underline{\underline{c_n = c^*_{-n}}}$. (Speciálisan: a c_0 valós.)	(2.19)

Ebbe belefér az is, ha a c_n-ek valósak és $c_n = c_{-n}$: ekkor a_n-ek valósak, b_n-ek pedig nullák.

A felírt „valóssági feltétel” úgy is kijön, hogy a „komplex” (2.13) sorból indulunk ki:

$$\begin{aligned}
&\text{majdnem minden } t\text{-re } \big(f(t)\big)^*{=}f(t) \quad \overset{1.}{\Leftrightarrow} \quad \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}t}\right]^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}t} \\
&\overset{2.}{\Leftrightarrow} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* e^{-in\frac{2\pi}{T}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}t} \\
&\overset{3.}{\Leftrightarrow} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n}^* e^{in\frac{2\pi}{T}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}t} \quad \overset{4.}{\Leftrightarrow} \quad c_{-n}^* = c_n \ \ \forall\ n\text{-re.}
\end{aligned}$$

Az 1. lépésben Fourier-soraikkal írtuk fel f^*-ot és f-et, a 2. lépésben a konjugálást (ami folytonos!) bevittük a végtelen összegbe, a 3. lépésben pedig átjelöltük a bal oldali n összegzőindexet $-n$-re, végül a 4. lépésben leszűrtük, hogy mivel itt két Fourier-sorral előállított függvény egyenlő, ez csak úgy lehet, hogy az együtthatók egyenként ugyanazok. Még egyszer: jól jegyezzük meg, hogy

$$f \text{ majdnem mindenütt } \textbf{valós értékű} \quad \Leftrightarrow \quad c_n = c_{-n}^* \text{ minden } n{\in}\mathbb{Z}\text{-re.} \tag{2.20}$$

Ez jó **önellenőrzési lehetőség**, ha valós $f(t)$ függvény Fourier-sorával foglalkozunk.

• **Összegyűjtünk néhány** gyakrabban előkerülő **primitív függvényt.** Itt $\alpha{\neq}0$; a $t^k e^{-\alpha t}$-s visszavezethető a $t^{k-1}e^{-\alpha t}$-sre parciális integrálással (az $e^{-\alpha t}$-t deriváltnak tekintve és a deriválást a t^k-ra áthárítva annak fokszáma eggyel csökken); persze jó mindent közvetlenül ellenőrizni is itt.

Ha $\alpha{\neq}0$:

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}t\, e^{-\alpha t} &= -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}, \\
\int \mathrm{d}t\, te^{-\alpha t} &= -\left[\frac{t}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}\right]e^{-\alpha t}, \\
\int \mathrm{d}t\, t^2e^{-\alpha t} &= -\left[\frac{t^2}{\alpha}+\frac{2t}{\alpha^2}+\frac{2}{\alpha^3}\right]e^{-\alpha t}, \\
\int \mathrm{d}t\, t^3e^{-\alpha t} &= -\left[\frac{t^3}{\alpha}+\frac{3t^2}{\alpha^2}+\frac{6t}{\alpha^3}+\frac{6}{\alpha^4}\right]e^{-\alpha t},
\end{aligned}$$

…stb., látszik a szisztéma.

Ha $\alpha{=}0$, és $k{\in}\mathbb{N}_0^+$, akkor

$$\int \mathrm{d}t\, t^k = \frac{1}{k{+}1}t^{k+1}, \tag{2.21}$$

Arra is emlékezzünk, hogy

$$\cos(\beta t) = \tfrac{1}{2}\big(e^{i\beta t}{+}e^{-i\beta t}\big), \qquad \sin(\beta t) = \tfrac{1}{2i}\big(e^{i\beta t}{-}e^{-i\beta t}\big),$$

ezek is segítenek némely integrálásoknál.

Tartsuk észben azt is, hogy egész $n{\in}\mathbb{Z}$ esetén $e^{n2\pi i} = 1$ ill. $e^{in\pi} = (-1)^n$. Ez sokszor jól jön.

* * *

• **Egyszerű példákat nézünk** Fourier-sorokra; természetesen vezessünk le mindent magunk!

$$\textbf{Az első:} \quad f(t) = \begin{cases} f_0, \text{ ha } 0{<}t{<}\frac{T}{2}, \\ 0, \text{ ha } \frac{T}{2}{\leq}t{\leq}T, \end{cases} \quad \text{más } t\text{-kre pedig: } T \text{ szerint periodikus.} \tag{2.22}$$

Ez tehát egy adott f_0 értéktől 0-ra félúton leváltó lépcső. Határozzuk meg a Fourier-együtthatókat!

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, e^{-in\frac{2\pi}{T}t} f(t) = \frac{f_0}{T}\int_0^{T/2}\mathrm{d}t\, e^{-in\frac{2\pi}{T}t}; \quad \text{beírtuk, hogy } f \text{ félig konstans, félig nulla.}$$

Először „ösztönösen” minden n-re egyszerre próbálkozunk, de észre kell venni a kivételes esetet:

$$\text{Ha } n{\neq}0: \quad c_n = \frac{f_0}{T}\frac{e^{-in\frac{2\pi}{T}t}}{-in\frac{2\pi}{T}}\Bigg|_{t=0}^{t=\frac{T}{2}} = \frac{if_0}{2\pi n}\big(e^{-in\pi}{-}1\big) = \frac{if_0}{2\pi n}\big((-1)^n{-}1\big) = \begin{cases} 0, \text{ ha } n \text{ páros,} \\ -\frac{if_0}{n\pi}, \text{ ha páratlan.} \end{cases}$$

n=0-ra viszont más a primitív függvény (azaz: ilyenkor $e^{-in\frac{2\pi}{t}t}$ éppen konstans 1), úgyhogy

$$c_0 = \frac{f_0}{T}\int_0^{T/2} \mathrm{d}t\, 1 = \frac{f_0}{2}.$$

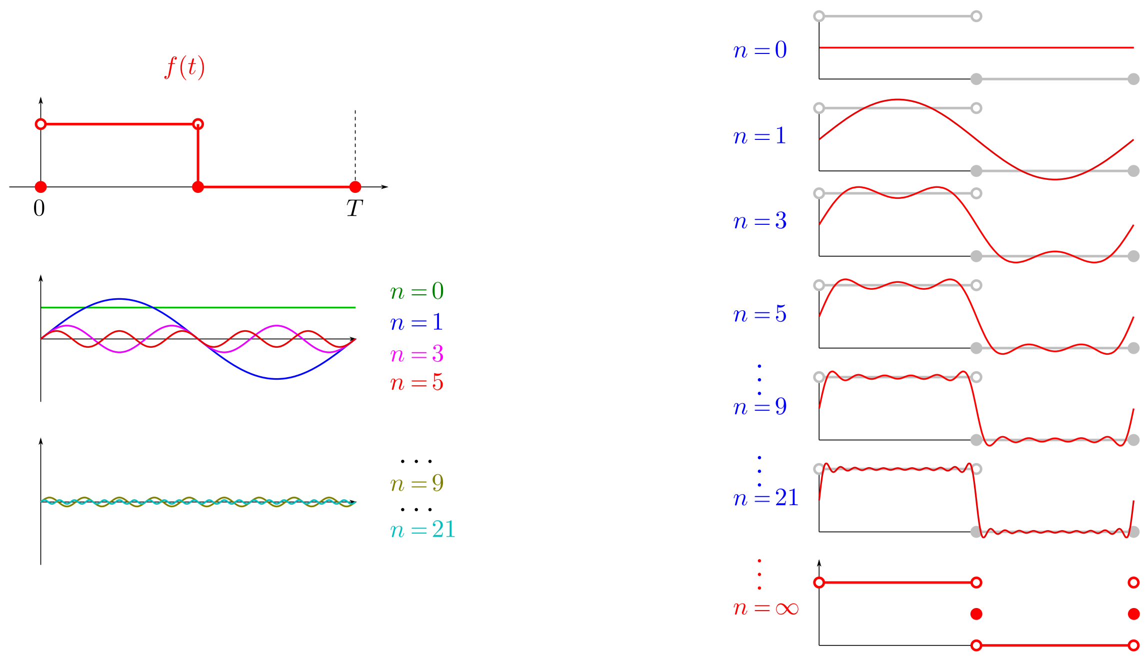
Összeszedve még egyszer ill. a (2.15) megfeleltetés alapján a_n, b_n-eket kikeverve $n{\geq}0$-ra:

$$c_n = \begin{cases} \frac{f_0}{2}, \text{ ha } n{=}0, \\ 0, \quad\text{ ha } n{\neq}0 \text{ páros}, \\ -\frac{if_0}{n\pi}, \text{ ha } n \text{ páratlan} \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{array}{l} n{=}0\text{-ra csak } a_0 \text{ van: } a_0{=}f_0, \\ \text{Ha } n{>}0, \text{ és } n \text{ páros: } a_n{=}0,\ b_n{=}0, \\ \text{Ha } n{>}0 \text{ páratlan: } a_n{=}0,\ b_n{=}\frac{2f_0}{n\pi}. \end{array}$$

Tényleg minden $n{\in}\mathbb{Z}$-re $c_n = c^*_{-n}$, és ennek megfelelően a_n, b_n tényleg valósak. Az is megnyugtató, hogy az együtthatók „fizikai dimenziója" (mértékegysége) tényleg az, ami f_0-é: ez tényleg az $f(t)$ függvény által leírt mennyiség mértékegysége is. A kapott „komplex" ill. „valós" Fourier-sor tehát

$$f(t) = \frac{f_0}{2} - if_0 \sum_{n\in\mathbb{Z}\text{ páratlan}} \tfrac{1}{n\pi} e^{in\frac{2\pi}{T}t} \qquad \Leftrightarrow \qquad f(t) = \frac{f_0}{2} + \frac{2f_0}{\pi}\cdot \sum_{n=1,\text{ptlan}}^{\infty} \tfrac{1}{n\pi} \sin\!\left(n\tfrac{2\pi}{T}t\right).$$

Az alábbi ábrán a (valós) Fourier-sor egyre többedik részletösszegeit láthatjuk: egyre jobban megközelítik a kiindulási $f(t)$ függvényt. Kivétel: az ugráspontokban. Itt az összes sin-függvény nulla, a konstans tagból pedig látszik, hogy a visszakapott érték tényleg az ugrás „középértéke".



5. ábra. A vizsgált lépcső-függvény Fourier-sora. Bal oldal: a függvény ill. a (valós) Fourier-sor néhány tagja. Jobb oldal: részletösszegek és határértékük (=a függvény, az ugrásponokat kivéve).

• **Következő** példa legyen egy **„fűrészfog-jel"** f_0 amplitúdóval: lineárisan növekszik t=0-tól $T/2$-ig 0-ról f_0-ra, majd ugyanígy visszacsökken 0-ra, mire t T-be ér. Nem elhanyagolható rutinfeladvány az is, hogy ez alapján szépen képlettel felírjuk a kívánt függvényt:

$$f(t) = \begin{cases} f_0\frac{2t}{T}, \text{ ha } 0{<}t{<}\frac{T}{2}, \\ f_0\left(2{-}\frac{2t}{T}\right), \text{ ha } \frac{T}{2}{\leq}t{\leq}T, \end{cases} \qquad \text{más } t\text{-kre: } T \text{ szerint periodikus.} \tag{2.23}$$

A Fourier-együtthatókat megadó integrálokat nyilván két szakaszra bontva érdemes kezelni.

Rögtön látszik az is (ld. a fentebbi (2.21) emlékeztetőket is), hogy az n=0 eset „különleges”:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, f(t)e^{-in\frac{2\pi}{T}t} = \frac{2f_0}{T^2}\int_0^{T/2}\mathrm{d}t\, t e^{-in\frac{2\pi}{T}t} + \frac{2f_0}{T}\int_{T/2}^{T}\mathrm{d}t\left(1-\frac{t}{T}\right)e^{-in\frac{2\pi}{T}t}. \tag{2.24}$$

$$\text{Ha } n=0:\quad c_0 = \frac{2f_0}{T^2}\int_0^{T/2}\mathrm{d}t\, t + \frac{2f_0}{T}\int_{T/2}^{T}\mathrm{d}t\left(1-\frac{t}{T}\right) = \frac{2f_0}{T^2}\frac{t^2}{2}\bigg|_0^{T/2} + \frac{2f_0}{T}\left(t-\frac{t^2}{2T}\right)\bigg|_{T/2}^{T} = \frac{f_0}{2}. \tag{2.25}$$

$$\text{Ha } n\neq 0:\quad c_n = -\frac{2f_0}{T^2}\left(\frac{t}{in\frac{2\pi}{T}}+\frac{1}{\left(in\frac{2\pi}{T}\right)^2}\right)e^{-in\frac{2\pi}{T}t}\bigg|_0^{T/2} + \frac{2f_0}{T^2}\left[\frac{T}{-in\frac{2\pi}{T}}+\frac{t}{in\frac{2\pi}{T}}+\frac{1}{\left(in\frac{2\pi}{T}\right)^2}\right]e^{-in\frac{2\pi}{T}t}\bigg|_{T/2}^{T} =$$

$$= f_0\left[\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}-\frac{1}{n^2\pi^2}\right] = \left\{0,\ \text{ha } n \text{ páros, és } -\tfrac{2f_0}{n^2\pi^2},\ \text{ha } n \text{ páratlan.}\right. \tag{2.26}$$

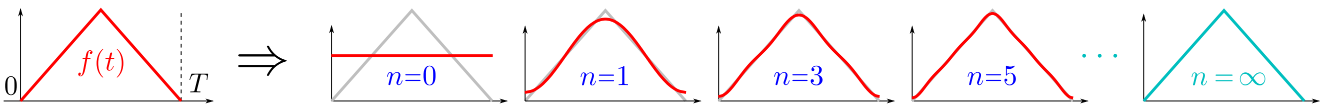
Behelyettesítgettünk, egyszerűsítgettünk.[10] Összeszedve és a „valós” sor együtthatóit kikeverve

$$\begin{aligned} c_0 &= \tfrac{f_0}{2}, \\ c_{n\neq 0 \text{ páros}} &= 0, \\ c_{n \text{ páratlan}} &= -\tfrac{2f_0}{n^2\pi^2} \end{aligned} \qquad\Leftrightarrow\qquad \begin{aligned} a_0 &= f_0, \\ a_{n\neq 0 \text{ páros}} &= 0, \\ a_{n \text{ páratlan}} &= -\tfrac{4f_0}{n^2\pi^2}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\text{és az összes} \\ &b_n = 0. \end{aligned}$$

Megnyugodhatunk: a_n-ek, b_n-ek tényleg valósak, „mértékegységük” f_0. A Fourier-sorok tehát:

$$f(t) = \tfrac{f_0}{2} - \sum_{n \text{ ptlan}} \frac{2f_0}{n^2\pi^2}e^{in\frac{2\pi}{T}t} \qquad\Leftrightarrow\qquad f(t) = \tfrac{f_0}{2} - \sum_{n>0,\text{ptlan}} \frac{4f_0}{n^2\pi^2}\cos\left(n\tfrac{2\pi}{T}t\right).$$

Itt gyorsabban ($\sim\frac{1}{n^2}$ módon) csökkenek az együtthatók, mint a lépcsős példában (ott $\sim\frac{1}{n}$ volt); „gyorsabb” a konvergencia is. Továbbá nincs ugrás: a konvergencia tényleg mindenhol „hibátlan”.



6. ábra. A fűrészfog-függvény Fourier-sorának tagjai.

• Számoljuk végig (sőt esetleg vizualizáljuk részletösszegenként) az alábbi **gyakorlópéldákat** is!

1. Vegyünk egy f_0 amplitúdójú *fél szinuszt*, T szerint periodikusan ismételgetve (ábrát ld. alább):[11]

$$F(t) := f_0 \sin\left(\tfrac{\pi}{T}t\right), \quad \text{ha } t\in[0,T].$$

A c_n-eket a $\sin\left(\frac{\pi}{T}t\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{\pi}{T}t}-e^{-i\frac{\pi}{T}t}\right)$ átírással számíthatjuk ki; az (egyszerűsített) eredmény:

$$\text{minden } n\in\mathbb{Z}\text{-re} \quad c_n = \frac{2f_0/\pi}{1-4n^2} \qquad\Leftrightarrow\qquad a_n = \frac{4f_0}{\pi}\frac{1}{1-4n^2}, \quad b_n=0;$$

végre egyszer nem nulla minden második. Itt nem kellett semmilyen n-re „külön odafigyelni”; az n=0 együttható azzal tűnik ki esetleg, hogy más az előjele, mint a többinek.

2. Vegyünk egy t=0-ban ill. t=T-ben a vízszintes tengelyt metsző, középen f_0-ig kiemelkedő lefelé nyitott paraboladarabot (T szerinti periódussal ismételgetve; ábra alább). *Írjuk fel képlettel is:*

$$G(t) := f_0\cdot 4\tfrac{t}{T}\left(1-\tfrac{t}{T}\right), \quad \text{ha } t\in[0,T].$$

---

[10] *Megjegyzés:* másképp is számolhatunk. Abból ötletelve, hogy a fűrészfog szép szimmetrikus, érdemes lehet a (2.24) felírás második tagjában $t\to T-t$ módon helyettesíteni, így az is 0-tól $T/2$-ig vett integrál lesz. Így összevonva a két tagot trigonometrikus függvények integráljait kell kiszámolni; ugyanarra az eredményre jutunk.

[11] Ha így képlettel felírják, el ne tévesszük: a t-beli alapperiódus itt $2T$ lenne, de félbevágtuk. Az egész periódusú szinuszhullám (valós) Fourier-sora pontosan egyetlen szinuszos tagból állna; a mostani példafüggvényé *nem ilyen.*

Ez a $G(t)$ és az előző $F(t)$ „hasonlítanak”; a Fourier-együtthatóik már csak kérdésesen. Itt (is) a korábbi (2.21) képletek kellenek; az $n{=}0$ esetre külön oda kell figyelni. Az eredmény:

$$c_0 = \tfrac{2}{3} f_0, \qquad c_{n\neq 0} = -\tfrac{2f_0}{n^2\pi^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad a_0 = \tfrac{4}{3} f_0, \qquad a_{n\neq 0} = -\tfrac{4f_0}{n^2\pi^2}, \qquad b_n{=}0.$$

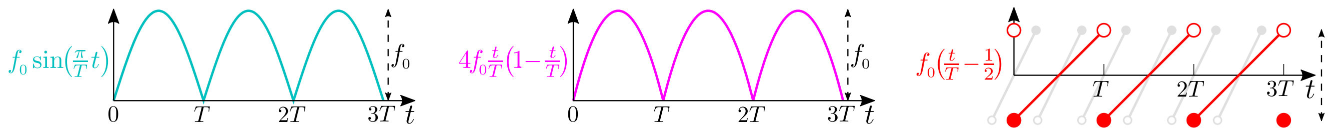
3. Jöjjön egy „fél-fűrészfog”: $-\frac{f_0}{2}$-től $\frac{f_0}{2}$-ig lineárisan növekszik $[0,T[$-n (és T szerint periodikus):

$$H(t) := f_0\big(\tfrac{t}{T} - \tfrac{1}{2}\big), \quad \text{ha } t{\in}[0,T[.$$

$$\Rightarrow \quad \text{Az eredmény:} \quad c_0{=}0, \quad c_{n\neq 0} = \tfrac{f_0}{2in\pi} \qquad \Leftrightarrow \qquad a_n{=}0, \quad b_n{=}\tfrac{f_0}{n\pi}.$$

$$\Rightarrow \qquad \text{A sort is felírjuk:} \quad H(t) = \sum_{n\neq 0} \frac{f_0}{2i\pi n} e^{in\frac{2\pi}{T}t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_0}{n\pi} \sin\!\big(n\tfrac{2\pi}{T}t\big). \tag{2.27}$$

Ez a $H(t)$ az előző $G(t)$-nek a deriváltjának $-\frac{T}{8}$-szorosa. Ha ezt eljátsszuk tagonként a $G(t)$ Fourier-sorával, beláthatjuk, hogy a $H(t)$ együtthatói ennek megfelelően adódnak a $G(t)$-iéiből.



7. ábra. Az iménti példa-függvények (és háttérben az alábbi utolsó).

4. Vegyük az előző fél-fűrészfog $H(t)$-t kétszeres frekvenciával és eltolva; ld. a 7. ábra jobb oldalán háttérben. Egyszerűbb $[0,T[$ helyett a $\big[-\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\big[$ intervallumon előírni a függvényt; mivel T szerint periodikus, így is jó. Sőt a c_n-ek kifejezéseiben is 0-tól T-ig vett helyett $-\frac{T}{4}$-től $\frac{3T}{4}$-ig vett integrált írhatunk; *mivel az összes $e^{in\frac{2\pi}{T}t}$ is T szerint periodikus, így is jó.* Tehát:

$$J(t) := \begin{cases} f_0\frac{2t}{T}, & \text{ha } -\frac{T}{4} \le t \le \frac{T}{4}, \\ f_0\big(\frac{2t}{T} - 1\big), & \text{ha } \frac{T}{4} < t \le \frac{3T}{4}, \end{cases} \qquad \text{más } t\text{-kre rögzíti, hogy } T \text{ szerint periodikus.}$$

$$\Rightarrow \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{3T/4} \mathrm{d}t\, f(t) e^{-in\frac{2\pi}{T}t} = \ldots = \begin{cases} 0, \text{ ha } n{=}0, \text{ vagy ha } n \text{ páratlan}, \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{if_0}{n\pi}, \text{ ha } n{\neq}0 \text{ páros} \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad a_n{=}0, \qquad b_n{=}0, \text{ ha } n{>}0 \text{ páratlan, és } b_n{=}(-1)^{\frac{n}{2}+1}\tfrac{2f_0}{n\pi}, \text{ ha } n{>}0 \text{ páros.}$$

Az $n/2$ ne zavarjon a kitevőben: a szereplő n-ek párosak. Felírjuk a komplex ill. a valós sort is, a páros n-eket $n{=}2m$-ként írva, és minden $m{\in}\mathbb{Z}\backslash\{0\}$-ra ill. minden $m{\in}\mathbb{N}^+$-ra összegezve:

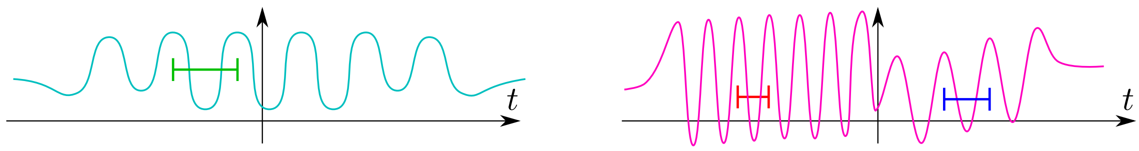
$$J(t) = \frac{if_0}{2\pi} \sum_{m\in\mathbb{Z},\, m\neq 0} (-1)^m e^{2mi\frac{2\pi}{T}t} = -\frac{f_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \sin\!\big(2m\tfrac{2\pi}{T}t\big). \tag{2.28}$$

Ahogy bevezettük, az alapján kigondolhatjuk, hogy ez a $J(t)$ kifejezhető az előző példabelivel: $J(t) = H\big(2\big(t+\frac{T}{4}\big)\big)$. Írjunk be $H(t)$ fenti (2.27) sorába $t \to 2t+\frac{T}{2}$-t; lássuk be, hogy így is $J(t)$ most kapott (2.28) sorát kapjuk! *Tanulság:* a Fourier-együtthatók integrálkifejezései „összeillenek” a trigonometrikus/exponenciális „bázisfüggvényeink” egyszerű ismert tulajdonságaival.

• A példáink (amelyekben direkt „szép” integrálok voltak) talán közelhozták a Fourier-sorokat. „Átgondolnivalókat” is elővettünk; további **kiegészítések** vannak **az A.1. függelékben.** Kiemeljük még egyszer, hogy $f(t)$ integráljával a c_0 (ill. az a_0) kapcsolatos: adott $f(t)$-hez konstanst adva csakis ez(ek) az együttható(k) tolódnak el. Egyre nagyobb indexű tagok az egyre nagyobb frekvenciájú részleteket „tárják fel”; pl. a töréspontok „hibátlan” lekövetéséhez végtelen sok tag kell.

2.3. A $T\to\infty$ határátmenet: Fourier-transzformáció

Periodikus függvény Fourier-együtthatói a különféle frekvenciájú összetevők „súlyait” adják meg. A **„frekvenciaeloszlás”** kérdése felmerülhet *nem periodikus* függvényekre is: pl. az alábbi 8. ábra függvényeiben a szemmel látható frekvenciák bizonyára nyomatékosan szerepelnének. Az eddigi módszer (a Fourier-sor) azonban tehetetlen velük: nem periodikusak. A **Fourier-transzformáció** innen közelítve lényegében „a Fourier-sor általánosítása nem periodikus függvényekre”.



8. ábra. Jó lenne valamit mondani nem periodikus függvények frekvenciaeloszlásáról is.

• Vegyünk tehát egy (nem periodikus) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ függvényt! Jelöljünk ki mégiscsak egy $T{>}0$ értéket, és tekintsük f-et a $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ intervallumon, ezen kívül pedig „egészítsük ki periodikussá” az ezen intervallumbeli menetet másolgatva! (*Ábra alább.*) Az így kapott periodikus függvényt Fourier-sorba fejthetjük. Persze ez még nem a kiindulási $f(t)$, de esetleg valahogyan a $T\to\infty$ határátmenettel az eredeti $f(t)$ egyre nagyobb darabját (határesetben: az egészet) le tudjuk kezelni. (Azért is $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$-ből indulunk $[0,T]$ helyett, hogy $\mathbb{R}^+$-t és $\mathbb{R}^-$-t is lefedjük $T\to\infty$ során.) Kérdés: lehet-e itt értelmes $T\to\infty$ határátmenet. A „komplex” Fourier-sorral lesz érdemes dolgozni.

Adott T esetén az $f(t)$ $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$-beli menetét „elkódolja” az ebből az intervallumból kiindulva kapott Fourier-sorbeli c_n együtthatók összessége. Az $e^{in\frac{2\pi}{T}t}$ „bázisfüggvények” a $\frac{2\pi}{T}$ frekvenciát és (pozitív, nulla, negatív) egész számú többszöröseit tartalmazzák; ideiglenes új jelöléssel:

$$\omega_n\equiv n\tfrac{2\pi}{T},\qquad \Delta\omega\equiv\tfrac{2\pi}{T}.\qquad \text{A bázisfüggvények:}\quad e^{in\frac{2\pi}{T}t}=e^{i\omega_n t}. \tag{2.29}$$

A véges T-jű $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ intervallum esetén kapott c_n együtthatók összessége tulajdonképpen a frekvenciaeloszlást megadó „függvény”: értelmezési tartománya az ω_n-ek halmaza, értékei maguk az együtthatók. $T\to\infty$ határesetben azt gondolhatjuk, hogy ezen „függvény” függetlenváltozó-értékei az egész folytonos $\omega{\in}\mathbb{R}$ halmazt betöltik, azaz a frekvenciaeloszlás egy „valódi” $\mathbb{R}\rightarrowtail\mathbb{C}$ függvénnyé válik (a diszkrét ω_n-eken „értelmezett” együtthatók helyett), mivel a szomszédos ω_n frekvenciák $\Delta\omega\equiv\frac{2\pi}{T}$ távolságra vannak, így $T\to\infty$ során „besűrűsödnek” (*ábra alább*).

E fonálon szeretnénk a Fourier-sort úgy „továbbfejleszteni”, hogy $T\to\infty$ esetén is értelmezhető képleteket kapjunk. Eddig azt tudjuk, hogy ha $f(t)$ a $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ intervallumon értelmezett, akkor

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c(\omega_n)e^{i\omega_n t}\qquad\Leftrightarrow\qquad c(\omega_n)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\mathrm{d}t\,f(t)e^{-i\omega_n t};\quad \text{ugye } \omega_n=n\tfrac{2\pi}{T}=n\Delta\omega. \tag{2.30}$$

A c_n-eket most $c(\omega_n)$-ként írtuk: ők a frekvenciaeloszlásnak az ω_n frekvenciához tartozó értékei.

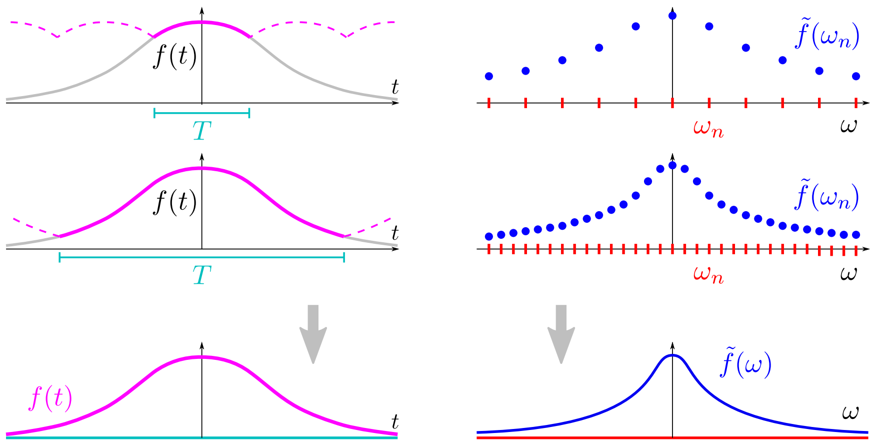
• A felírt integrál minden bizonnyal az egész $\mathbb{R}$-re vett integrállá válik, ha T-vel végtelenhez tartunk, az előtte lévő $\frac{1}{T}$ ill. az $f(t)$-t előállító összegzés sorsa viszont kérdéses. A nyerő ötlet: „renormáljuk” a $c(\omega_n)$-eket a bevezetett $\Delta\omega$-val, azaz térjünk át az alábbi $\tilde f(\omega_n)$-ekre:

$$\tilde f(\omega_n)\equiv\frac{c(\omega_n)}{\Delta\omega}\qquad\Rightarrow\qquad f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde f(\omega_n)e^{i\omega_n t}\Delta\omega,\qquad \tilde f(\omega_n)=\frac{1}{T\Delta\omega}\int_{-T/2}^{T/2}\mathrm{d}t\,f(t)e^{-i\omega_n t}. \tag{2.31}$$

Két légy ütődik egy csapásra. Egyrészt $T\Delta\omega{=}2\pi$ jól meghatározott érték, nincs gond vele $T{\to}\infty$ esetén. Másrészt $T{\to}\infty$ során az $\tilde{f}(\omega_n)$ értékek egyre több ω-nál válnak érdekessé, és a felírt összeg pont az, aminek $\Delta\omega{\to}0$ finomításával az ott szereplő folytonos változójú ω-függvény *integrálját* definiálnánk (kiértékelgetés, $\Delta\omega$-val szorzás, összeadás, majd $\Delta\omega{\to}0$.) Gondolatmenetünk azt sugallja tehát, hogy a nem periodikus $f(t)$ függvény „frekvenciaeloszlása" egy $\tilde{f}(\omega)$ függvény, amire

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} \qquad \Leftrightarrow \qquad \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, f(t) e^{-i\omega t}. \tag{2.32}$$

Ez már lényegében az, amit kerestünk: az $\tilde{f}(\omega)$ függvény az $f(t)$-nek a **Fourier-transzformáltja**.



9. ábra. Véges T periódusú Fourier-sor diszkrét frekvenciaértékeket használ, melyek T-t növelve egyre sűrűbben helyezkednek el. Ez alapján határesetben a frekvencia folytonos változóvá válik.

• t-vel jelöltük a „vizsgált f függvény" változóját és ω-val az $\tilde{f}(\omega)$ Fourier-transzformáltét (merthogy pl. időfüggvényről ill. frekvenciaeloszlásról lenne szó). A Fourier-transzformáltat megadó ill. az abból az $f(t)$-t újra összerakó (2.32) integrálok azonban (noha az iménti gondolatmenetben másképp „születtek") nagyon hasonlítanak egymásra. Tetézve: lehetett volna pl. úgy is csinálni, hogy amikor a $c(\omega_n)$-ekről $\tilde{f}(\omega_n)$-ekre áttérünk a (2.31) egyenlet szerint, $\Delta\omega$ mellett még egy konstans szorzót is beledefiniálunk $\tilde{f}(\omega_n)$-be. Kellemes lehetőség pl. ha még $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$-t is beírunk, azaz amit eddig $\tilde{f}$-nek hívtunk, azt $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\tilde{f}$-nek hívjuk. Ekkor képleteink szép „szimmetrikusak" lennének:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} \qquad \Leftrightarrow \qquad \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, f(t) e^{-i\omega t}; \tag{2.33}$$

Sőt: igaziból az is csak megállapodás kérdése volt, hogy hol szerepel $e^{i\omega t}$, és hol $e^{-i\omega t}$. Definiálhattuk volna akár a komplex Fourier-sort is „fordítva": úgy, hogy a „bázisfüggvények" az $e^{i\omega_n t}$-k helyett $e^{-i\omega_n t}$-k legyenek (és így az derült volna ki, hogy az együtthatókat megadó integrálokba $e^{i\omega_n t}$-k kerültek volna $e^{-i\omega_n t}$-k helyett). Ezt is „benyelve" már tényleg az a helyzet, hogy csak viszonylagosan mondhatjuk, hogy f és $\tilde{f}$ közül melyik az „eredeti" függvény és melyik „a Fourier-transzformált".

• A mondottak miatt (is) az irodalomban **nem egységes a definíció, a szóhasználat.** A lényeg: „oda– ill. vissza"-Fourier-transzformálásról kell beszélni; változatos lehet, hogy ki-ki melyik integrálba ír $e^{i\omega t}$-t ill. $e^{-i\omega t}$-t, és hogy melyik integrál elé milyen szorzót ír. (A fentebbi gondolatmenet alapján biztosnak tűnik, hogy a két szorzó szorzata $\frac{1}{2\pi}$, de mint az előző pontban mondtuk, ezt szabadon „szétoszthatjuk": kerülhet ide 1, oda $\frac{1}{2\pi}$, vagy fordítva, vagy ide is, oda is $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, stb).

• **Mi a következőkben** úgy fogalmazunk, hogy az eddigiek nyomán bevezetjük mindkétféle Fourier-transzformálást mint *függvényhez függvényt rendelő*, $\hat{\mathcal{F}}_+$ ill. $\hat{\mathcal{F}}_-$ jelű műveleteket:

az $\hat{\mathcal{F}}_\pm$ művelet az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ függvényhez egy szintén $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ függvényt rendel, így:

$$\big(\hat{\mathcal{F}}_\pm f\big)(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\, f(x)e^{\pm iyx}. \tag{2.34}$$

A $\pm$ index tehát az exponenciális kitevőjének előjelére utal. Az „oda-vissza szimmetria" hangsúlyozása kedvéért itt t és ω helyett a „jellegtelen" x-szel és y-nal jelöltük a változókat; továbbá az „$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ — $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$" választás mellett tesszük le a voksot. Barátkozzunk meg a zárójelezéssel az $\big(\hat{\mathcal{F}}_\pm f\big)(y)$ jelölésben: az $\hat{\mathcal{F}}_\pm$ az f-ből az $\hat{\mathcal{F}}_\pm f$ függvényt „csinálja", és ennek y-ban felvett értékéről van szó.

• Noha a „$T\to\infty$" gondolatmenet igen pongyola volt, a **Fourier-transzformációk** ez alapján bevezetett (2.34) definícióit már „vegyük komolyan"! *Integrálokkal* dolgozunk: egyrészt figyelni kell az integrálok létezésére, másrészt megnyugató, hogy „kitaposott" matematikai terepen mozgunk.

A (2.34) definíciók **paraméteres integrálok**: az eredményfüggvény y helyen felvett értéke egy x-re vett integrál eredménye, ahol az integrandus y-tól is függ. Az integrálás *lineáris*: f helyébe lineárkombinációt, pl. $\alpha f_1+\beta f_2$-t írva a felírt paraméteres integrál eredménye is ilyen lineárkombinációval adódik az f_1-re és f_2-re kapottakból. Az $\hat{\mathcal{F}}_\pm$ Fourier-transzformálásokra tehát azt mondanánk, hogy ők az $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ **„függvények vektorterén"** ható **lineáris operátorok**.

• Fontos **megjegyzések:**

1. Az $e^{\pm ixy}$ tényező miatt (is) világos, hogy *komplex* értékű, $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ függvények között mozgunk (még ha az ábrákon egyszerűbb is valós értékűeket rajzolni); valós értékű f-re is $\hat{\mathcal{F}}_\pm f$ általában komplex értékű függvény. Ha utóbbira mint az f függvény frekvenciaeloszlására gondolnánk, akkor további megfontolások kellenek (egy *eloszlás*tól elvárjuk, hogy valós értékű legyen).
2. A „$T\to\infty$" gondolatmenet „jóslata", hogy az $\hat{\mathcal{F}}_+$ és $\hat{\mathcal{F}}_-$ transzformációk **egymás inverzei** (ld. a (2.33) egyenletet: az egyik integrál megadja $f(t)$-t $\tilde{f}(\omega)$-ból, a másik vissza). „Operátorosan":

$$\hat{\mathcal{F}}_+\hat{\mathcal{F}}_- \stackrel{?}{=} \hat{I}, \qquad \hat{\mathcal{F}}_-\hat{\mathcal{F}}_+ \stackrel{?}{=} \hat{I}, \qquad \text{összefoglalóan:}\quad \hat{\mathcal{F}}_\pm\hat{\mathcal{F}}_\mp \stackrel{?}{=} \hat{I}. \tag{2.35}$$

   Nagyon fontos, hogy a „$T\to\infty$" gondolatmenetünk **nem rendes bizonyítás:** jogos is kissé kételkedni most. Meglátjuk majd, hogy ez a (2.35) **tényleg igaz**, de „körül kell ásni". Ugyanis nem minden függvényre értelmes a (2.34) integrál; sőt még az is előfordulhat, hogy egy f függvényre értelmes, azonban az $\hat{\mathcal{F}}_\pm f$ függvényre nem: ilyenkor „oda" tudnánk transzformálni, de „vissza" nem. Az $\hat{\mathcal{F}}_\pm\hat{\mathcal{F}}_\mp \stackrel{?}{=} \hat{I}$ képlettel tehát *értelmezési tartomány* szempontjából is lehet baj: az $\hat{I}$ egységoperátorra azt mondanánk, hogy *ő minden* függvényre értelmes (és $\hat{I}f=f$).
3. Nem azért tettem idézőjelbe, hogy $\hat{\mathcal{F}}_\pm$ a „függvények vektorterén" hat, mintha ez utóbbi valami misztikum lenne (*tudjuk* ugye, hogy az $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ függvények a pontonkénti összeadással és számmalszorzással ellátva *vektorteret* alkotnak), hanem mert tisztázni kell, hogy pontosan milyen függvények vektortere jön szóba. Azonban nem csak az lesz, hogy körülhatároljuk, hogy mikor létezik (ill. ilyen-olyan jó tulajdonságú) az $\hat{\mathcal{F}}_\pm f$-et megadó integrál: jót tesz a matematikai (pláne a fizikusi) gondolkodásban, ha nemcsak kidobunk mindent, ami a bebetonozott fogalmakon kívül van, hanem tágítjuk a kereteket. Meglátjuk majd, hogy milyen „objektumok" halmaza a **Fourier-transzformációk „természetes közege"**: az ún. ***temperált* disztribúciók** halmaza. Ezek a fizikában igen fontosak, és (ma már) matematikailag is „rendben vannak".

2.4. Fourier-transzformáció: alaptulajdonságok

• Van tehát egy $\hat{\mathcal{F}}_+$ és egy $\hat{\mathcal{F}}_-$ műveletünk, amelyek így rendelnek hozzá függvényhez függvényt:

$$\big(\hat{\mathcal{F}}_+ f\big)(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\, f(x)e^{iyx}, \qquad \big(\hat{\mathcal{F}}_- f\big)(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\, f(x)e^{-iyx}. \tag{2.36}$$

Mivel $y{\in}\mathbb{R}$-re $|f(x)e^{\pm iyx}| = |f(x)|$, és egy függvény pontosan akkor integrálható, ha az abszolútértéke is az, a felírt integrálok pontosan **akkor léteznek** minden $y{\in}\mathbb{R}$-re, **ha f integrálható**: a Fourier-transzformáció egyelőre integrálható függvényekre értelmes. Az alábbiakban elővett tulajdonságok „rímelnek” arra, hogy $\hat{\mathcal{F}}_-$ és $\hat{\mathcal{F}}_+$ egymás inverzei, de ezt egyelőre nem használjuk ki.

A változókat hol így (x-szel és y-nal), hol másképp (pl. az „eredeti” t–ω módon) jelöljük.

• Egy egyszerű de fontos megállapítás: $\omega{=}0$-ban $e^{\pm i\omega t}$ éppen 1, ezért egy Fourier-transzformált $\omega{=}0$-ban felvett értéke az eredeti függvény (egész $\mathbb{R}$-re vett) integráljával kapcsolatos:

$$\text{Ha } g(\omega) = \big(\hat{\mathcal{F}}_\pm f\big)(\omega), \quad \text{akkor} \qquad g(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\, f(t).$$

• **Mikor valós értékű** egy Fourier-transzformált; azaz ha $f=\hat{\mathcal{F}}_\pm\tilde{f}$, akkor milyen legyen $\tilde{f}$, hogy $f(t)=f^*(t)$ legyen? Az $\hat{\mathcal{F}}_\pm\tilde{f}$-et definiáló integrál konjugáltját alakítjuk: 1. bevisszük a konjugálást, 2. az exponenciálist konjugáljuk, 3. $\omega\to-\omega$ változóhelyettesítést végzünk, mely a határok cseréjével és a deriváltból jövő -1 szorzóval pont az eredeti fajta alakra vezet.

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\,\tilde{f}(\omega)e^{\pm i\omega t}\right]^* \overset{1.}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\,\tilde{f}^*(\omega)\big[e^{\pm i\omega t}\big]^* \overset{2.}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\,\tilde{f}^*(\omega)e^{\mp i\omega t} \overset{3.}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\,\tilde{f}^*(-\omega)e^{\pm i\omega t}.$$

Visszarakva az $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ szorzót arra jutottunk tehát, hogy

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\,\tilde{f}(\omega)e^{\pm i\omega t} \qquad\Rightarrow\qquad f^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\,\tilde{f}^*(-\omega)e^{\pm i\omega t}. \tag{2.37}$$

Ebből leszűrhetünk egy feltételt arra, hogy $f(t){=}f^*(t)$ legyen minden t-re:

ha $\boldsymbol{f=\hat{\mathcal{F}}_\pm\tilde{f}}$, és majdnem mindenütt $\boldsymbol{\tilde{f}(\omega){=}\tilde{f}^*(-\omega)}$ $\Rightarrow$ akkor $\boldsymbol{f(t)}$ **valós** értékű minden t-re. (2.38)

• Visszafelé: egy valós értékű függvény Fourier-transzformáltjára is hasonló megállapítást tehetünk.

ha $\boldsymbol{\tilde{f}=\hat{\mathcal{F}}_\mp f}$, **és** $\boldsymbol{f(t)}$ **valós** értékű majdnem mindenütt $\Rightarrow$ akkor minden ω-ra $\boldsymbol{\tilde{f}(\omega){=}\tilde{f}^*(-\omega)}$. (2.39)

Ez az előzőhöz igen hasonló átalakításon múlik; $\tilde{f}^*(-\omega)$-ból indulunk és $\tilde{f}(\omega)$-ba érkezünk:

$$\sqrt{2\pi}[(\hat{\mathcal{F}}_\mp f)(-\omega)]^* = \left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\, f(t)e^{\mp i(-\omega)t}\right]^* = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\, f^*(t)\big[e^{\pm i\omega t}\big]^* = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\, f(t)e^{\mp i\omega t} = \sqrt{2\pi}(\hat{\mathcal{F}}_\mp f)(\omega).$$

Figyelem: nem használtuk ki a látott két tulajdonság levezetéséhez, hogy $\hat{\mathcal{F}}_\pm$ az $\hat{\mathcal{F}}_\mp$ inverze lenne, azonban a (2.38) és (2.39) eredmények viszonya nagyon is konzisztensek ezzel. És mellesleg arra is hasonlítanak, hogy valós értékű függvény Fourier-sorának együtthatóira $c_n{=}c^*_{-n}$ teljesül.

• **Párosságról-páratlanságról** megállapíthatjuk a következőket. Ellenőrizzük az $\tilde{f}\equiv\big(\hat{\mathcal{F}}_\pm f\big)(\omega)$-t definiáló ($t$ változóval írt) integrálban a $t\to-t$ változóhelyettesítéssel, hogy ha minden t-re teljesül, hogy $f(t){=}f(-t)$, akkor $\tilde{f}(\omega){=}\tilde{f}(-\omega)$, illetve ha minden t-re $f(t){=}{-}f(-t)$, akkor $\tilde{f}(\omega){=}{-}\tilde{f}(-\omega)$.

Ez külön-külön $\mathcal{F}_+$-ra és $\mathcal{F}_-$-ra is igaz. Arra jutottunk tehát ebből, hogy

ha f páros (ill. páratlan), akkor $\hat{\mathcal{F}}_\pm f$ is páros (ill. páratlan) függvény.

Ezt kombinálhatjuk is a valóssági feltétellel, (2.38)-cal és (2.39)-cel. Lássuk be így a következőket:
1.) valós értékű páros függvény Fourier-transzformáltja is valós értékű páros függvény,
2.) valós értékű páratlan függvény Fourier-transzformáltja képzetes értékű páratlan függvény.

• Nagyon fontosak lesznek a Fourier-transzformációk **„műveleti tulajdonságai"**. Alapozásként **bevezetjük az alábbi**, $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ függvényekhez $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ függvényeket rendelő lineáris **operátorokat**:

$\hat{M}_g$: $\left\{\right.$ egy adott **g függvénnyel való szorzás:** minden f függvényre értelmes, és az f-hez rendelt $\hat{M}_g f$ függvény hozzárendelési utasítása értelemszerűen $(\hat{M}_g f)(x) := g(x)f(x)$.

$\hat{L}_a$: $\left\{\right.$ adott $a\in\mathbb{R}$-rel való **jobbra tolás:** minden függvényre értelmes; adott f-re az $\hat{L}_a f$ függvényt az $(L_a f)(x) := f(x-a)$ hozzárendelési utasítás értelmezi.

$\hat{D}$: $\left\{\right.$ a **differenciálás:** differenciálható függvényekre értelmes; az f-hez rendelt $\hat{D}f$ függvényt kézenfekvően a $(\hat{D}f)(x) := f'(x)$ hozzárendelési utasítás értelmezi.

Ezek tényleg **lineárisak:** függvények lineárkombinációjának eltoltja, függvényszerese, deriváltja az eltoltak, függvényszeresek, deriváltak lineárkombinációja. Egymás után is hattathatjuk (komponálhatjuk) őket; néha kiírjuk a $\circ$ jelet, néha nem (operátoroknál a kompozíció neve ugye „szorzás"). Nyilvánvaló pl. hogy $\hat{M}_{g_1}\circ\hat{M}_{g_2}=\hat{M}_{g_1 g_2}$, és az is, hogy $\alpha\hat{M}_g=M_{\alpha g}$, ahol α konstans szám. Amúgy figyeljünk a sorrendre: $\hat{A}\hat{B}\equiv\hat{A}\circ\hat{B}$-ben ugye először $\hat{B}$ hat, aztán $\hat{A}$.

Az alábbiakban az „$f(x)=x$" **identitás-függvényt id-del jelöljük**: ez olyasmi egy darab szimbólum, mint a sin, a cos; jól jön majd.[12]

• A bevezetett operátorok és a Fourier-transzformáció viszonya egyszerű átalakításokon múlik.

1.) Tekintsük az $x\to x+a$ változóhelyettesítést (*eltolást*) az $\hat{\mathcal{F}}_\pm$-t definiáló (x-re vett) integrálban:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\, e^{\pm iyx} f(x-a) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\, e^{\pm iy(x+a)} f(x) = e^{\pm iay}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\, e^{\pm iyx} f(x).$$

Kibontva ill. becsomagolva, azaz felismerve, hogy milyen operátorok hatnak, arra jutunk, hogy

$$\big(\hat{\mathcal{F}}_\pm\hat{L}_a f\big)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\, e^{\pm iyx}\big(\hat{L}_a f\big)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\, e^{\pm iyx} f(x-a),$$

$$\text{másrészt}\quad \frac{e^{\pm iay}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\, e^{\pm iyx} f(x) = e^{\pm iay}\big(\hat{\mathcal{F}}_\pm f\big)(y) = \big(\hat{M}_{\exp(\pm ia\cdot\mathrm{id})}\hat{\mathcal{F}}_\pm f\big)(y),$$

amiből leszűrhetjük (operátoros jelöléssel), hogy az $\hat{L}_a$ eltolás és az $\hat{\mathcal{F}}_\pm$ transzformáció kapcsolata

$$\hat{\mathcal{F}}_\pm\circ\hat{L}_a \;=\; \hat{M}_{\exp(\pm ia\cdot\mathrm{id})}\circ\hat{\mathcal{F}}_\pm; \tag{2.40}$$

az *értelmezési tartomány* pedig ugye: mindkét oldal hatása pontosan az integrálható függvényekre értelmes (hiszen tényleg pontosan ilyenek jöttek szóba az ide vezető ekvivalens átalakításokban).

2.) Tegyük fel, hogy f folytonosan differenciálható, és próbáljuk meg a deriváltját, $f'(x)$-et Fourier-transzformálni! Ösztönösen parciális integrálással próbálkozhatunk. Az f'-beli deriválást a másik

[12] Jelölésgyakorlásként gondoljuk ki, hogy az $\hat{L}_a\hat{D}\hat{M}_{\mathrm{id}}\sin$ függvény másképp írva az $f(x) = (x-a)\cos(x-a) + \sin(x-a)$ függvény: az $f(x)=\sin x$ függvényre hatott az identitással szorzás; kapjuk $f(x)=x\sin x$-et, deriválva az $f(x)=x\cos x+\sin x$-et, végül ezt eltoljuk a-val. Másik emésztenivaló: ha $f(y)=y^2$, akkor $e^y y^2=\big(\hat{M}_{\exp(\mathrm{id})}f\big)(y)$.

$e^{\pm iyx}$ tényezőre hárítjuk, mivel az ott egyszerűen hat: $\frac{d}{dx}e^{\pm iyx} = \pm iye^{\pm iyx}$. Az x szerinti integrálból pedig kiemelhetjük $\pm iy$-t. Egyelőre véges intervallumra integrálva:

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, e^{\pm iyx} f'(x) = \Big[e^{\pm iyx} f(x)\Big]\Big|_{x=a}^{x=b} \mp iy\int_a^b \mathrm{d}x\, e^{\pm iyx} f(x).$$

Ha f' integrálható ($\mathbb{R}$-re), akkor a bal oldalnak létezik $a,b{\to}\pm\infty$ határértéke (az f' Fourier-transzformáltjának értéke y-ban), így a jobb oldalnak is. Továbbá ha f' integrálható, akkor véges a,b esetén is létezik $\int_a^b \mathrm{d}x\, f'(x) = f(b){-}f(a)$, és léteznek a $\lim_{x\to\pm\infty}\int_a^x \mathrm{d}t\, f'(t) = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - f(a)$ határértékek fix a-nál. Vagyis: léteznek a $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ határértékek. Tegyük fel még, hogy f is integrálható ($\mathbb{R}$-re)! Ekkor a (már láttuk, hogy létező) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ határértékek csakis nullák lehetnek.[13] Ilyenkor tehát a jobb oldalon $a,b{\to}\pm\infty$-t véve a kiintegrált rész nulla lesz, így tehát

$$\text{a mondott fajta } f\text{-ekre} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{\pm iyx} f'(x) = \mp iy\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{\pm iyx} f(x),$$

amit („kibontva” ill. „becsomagolva”) az alábbi operátoros jelöléssel is felírhatunk:

$$\underline{\underline{\big(\hat{\mathcal{F}}_\pm \hat{D} f\big)}}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{\pm iyx}\big(\hat{D} f\big)(x) = \underline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{\pm iyx} f'(x)},$$

$$\text{másrészt} \quad \underline{\frac{\mp iy}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{\pm iyx} f(x)} = \mp iy\big(\hat{\mathcal{F}}_\pm f\big)(y) = \underline{\underline{\big(\hat{M}_{\mp i\cdot \mathrm{id}}\hat{\mathcal{F}}_\pm f\big)}}(y).$$

Még egyszer: akkor igaz ez, ha f integrálható, folytonosan differenciálható és f' integrálható (mint láttuk, utóbbi egyenértékű a $\lim_{x\to\pm\infty} f = 0$ követelménnyel). Ilyen függvényekre hatva tehát

$$\hat{\mathcal{F}}_\pm \circ \hat{D} \;=\; \hat{M}_{\mp i\cdot \mathrm{id}} \circ \hat{\mathcal{F}}_\pm. \tag{2.41}$$

3.) Jöjjenek az előzőek „fordítottjai”. Mi lesz, ha Fourier-transzformáltat eltolunk? Állítás:

$$\hat{L}_a \circ \hat{\mathcal{F}}_\pm \;=\; \hat{\mathcal{F}}_\pm \circ \hat{M}_{\exp(\mp ia\cdot \mathrm{id})}, \tag{2.42}$$

az integrálható f függvényeken mint értelmezési tartományon: a bal oldal pont ilyenekre értelmes, és a jobb oldal is, mert $e^{\mp ia\cdot\mathrm{id}} f$ pont akkor integrálható (így $\hat{\mathcal{F}}_\pm$ hathat rá), ha f is az (hiszen $|e^{\mp ia\cdot\mathrm{id}}|{=}1$). Az állításunk indoklása igen egyszerű; lényeg, hogy a kimelelt 1. lépésben szétírjuk az exponenciális szorzót két darabba:

$$\underline{\underline{\big(\hat{L}_a\hat{\mathcal{F}}_\pm f\big)}}(y) = \big(\hat{\mathcal{F}}_\pm f\big)(y{-}a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{\pm i(y-a)x} f(x) \overset{1.}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{\pm iyx} e^{\mp iax} f(x) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{\pm iyx}\big(\hat{M}_{\exp(\mp ia\cdot\mathrm{id})} f\big)(x) = \underline{\underline{\big(\hat{\mathcal{F}}_\pm \hat{M}_{\exp(\mp ia\cdot\mathrm{id})} f\big)}}(y).$$

4.) Végül deriváljunk egy Fourier-transzformáltat! Ehhez paraméteres integrálba kell „bederiválni”:

$$\underline{\frac{d}{dy}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x) e^{\pm iyx}} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\frac{\partial e^{\pm iyx}}{\partial y} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\cdot \pm ixe^{\pm iyx} = \underline{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \big[\pm ixf(x)\big] e^{\pm iyx}};$$

ebből az adódik (most már az olvasóra bizva, hogy felismerje az előkerült operátorokat), hogy

$$\hat{D} \circ \hat{\mathcal{F}}_\pm \;=\; \hat{\mathcal{F}}_\pm \circ \hat{M}_{\pm i\cdot \mathrm{id}}. \tag{2.43}$$

[13] *Csak amiatt*, mert f integrálható $-\infty$-től ∞-ig, még nem feltétlenül *léteznek* a $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ határértékek; *ha tudjuk, hogy* igen, akkor tényleg csak nullák lehetnek. Viszont vázoljuk fel pl. az $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[n,n+1/n^2]}(x)$ függvényt (ugye $\chi_H(x){=}1$, ha $x{\in}H$, és $\chi_H(x){=}0$, ha $x{\notin}H$): ez az f integrálható $\mathbb{R}^+$-ra, de nem létezik $\lim_{x\to\infty} f$.

Nyilván olyan f függvényekre értelmes ez, amelyek integrálhatók, és $xf(x)$ is integrálható.[14] Ilyenekre viszont belátható hogy „legális lépés” volt bedifferenciálni a paraméteres integrálba.[15]

* * *

• A kapott azonosságok alkalmazhatósága úgy válhat rutinná, ha nemcsak versikeszerűen, hanem a látott indoklásokkal együtt jegyezzük meg őket. Azt is meglátjuk majd, hogy szinte azt mondhatjuk, hogy ezek és a később látott hasonló tulajdonságok a Fourier-transzformáció igazi hasznosítási lehetőségei, nem is a „frekvenciaeloszlás” gondolata (noha az volt a motiváció). **Összefoglalva:**

1.) Ha az f függvények, amikre hatunk, integrálhatók, akkor
$$\hat{\mathcal{F}}_\pm \circ \hat{L}_a = \hat{M}_{\exp(\pm ia\cdot \mathrm{id})} \circ \hat{\mathcal{F}}_\pm, \tag{2.44}$$

2.) Ha az f függvények, amelyekre hatunk, integrálhatók, folytonosan differenciálhatók, és $\lim_{x\to\pm\infty} f = 0$, (ezekből következik, hogy f' is integrálható), akkor
$$\hat{\mathcal{F}}_\pm \circ \hat{D} = \hat{M}_{\mp i\cdot \mathrm{id}} \circ \hat{\mathcal{F}}_\pm, \tag{2.45}$$

3.) Ha az f függvények, amikre hatunk, integrálhatók, akkor
$$\hat{L}_a \circ \hat{\mathcal{F}}_\pm = \hat{\mathcal{F}}_\pm \circ \hat{M}_{\exp(\mp ia\cdot \mathrm{id})}, \tag{2.46}$$

4.) Ha az f függvények, amikre hatunk, integrálhatók, és $\mathrm{id}\cdot f$ is integrálható függvény, akkor
$$\hat{D} \circ \hat{\mathcal{F}}_\pm = \hat{\mathcal{F}}_\pm \circ \hat{M}_{\pm i\cdot \mathrm{id}}. \tag{2.47}$$

• Ide is szépen illeszkedik az, hogy a kétféle Fourier-transzformáció egymás inverze lesz: fentebb külön mindegyik látott azonosságot megindokoltuk, de ha elhisszük, hogy $\hat{\mathcal{F}}_\pm \hat{\mathcal{F}}_\mp = \hat{I}$ (és most ideiglenesen úgy vesszük, hogy minden operátor mindenhol, azaz minden függvényre hatva értelmezett; *temperált disztribúciók* halmazára kiterjesztve majd így is lesz), akkor elég a látott azonosságok „felét”, pl. az 1. és a 2. számút megjegyezni, a 3. és a 4. már rekonstruálható ezekből.

A 3. tulajdonságot így kaphatjuk meg az 1.-ből (ízlésesen (=*„eleve tudva”*, hogy hogy lesz jó az előjelkiosztás) beírva, hogy $\hat{I}=\hat{\mathcal{F}}_\pm\hat{\mathcal{F}}_\mp$, illetve a jelölt lépésben az 1. tulajdonságot használva):

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\underline{\hat{L}_a\hat{\mathcal{F}}_\pm}}} &= \hat{I}\hat{L}_a\hat{\mathcal{F}}_\pm = (\hat{\mathcal{F}}_\pm\hat{\mathcal{F}}_\mp)\hat{L}_a\hat{\mathcal{F}}_\pm = \hat{\mathcal{F}}_\pm(\hat{\mathcal{F}}_\mp\hat{L}_a)\hat{\mathcal{F}}_\pm \overset{1.}{=} \hat{\mathcal{F}}_\pm(\hat{M}_{\exp(\mp ia\cdot\mathrm{id})}\hat{\mathcal{F}}_\mp)\hat{\mathcal{F}}_\pm = \\ &= \hat{\mathcal{F}}_\pm\hat{M}_{\exp(\mp ia\cdot\mathrm{id})}(\hat{\mathcal{F}}_\mp\hat{\mathcal{F}}_\pm) = \hat{\mathcal{F}}_\pm\hat{M}_{\exp(\mp ia\cdot\mathrm{id})}\hat{I} = \underline{\underline{\underline{\hat{\mathcal{F}}_\pm\hat{M}_{\exp(\mp ia\cdot\mathrm{id})}}}},\end{aligned} \tag{2.48}$$

a 4. tulajdonságot pedig a 2.-ből (a kijelölt lépésben kihasználva az utóbbit):

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\underline{\hat{D}\hat{\mathcal{F}}_\pm}}} &= \hat{I}\hat{D}\hat{\mathcal{F}}_\pm = (\hat{\mathcal{F}}_\pm\hat{\mathcal{F}}_\mp)\hat{D}\hat{\mathcal{F}}_\pm = \hat{\mathcal{F}}_\pm(\hat{\mathcal{F}}_\mp\hat{D})\hat{\mathcal{F}}_\pm \overset{2.}{=} \hat{\mathcal{F}}_\pm(\hat{M}_{\pm i\cdot\mathrm{id}}\hat{\mathcal{F}}_\mp)\hat{\mathcal{F}}_\pm = \\ &= \hat{\mathcal{F}}_\pm\hat{M}_{\pm i\cdot\mathrm{id}}(\hat{\mathcal{F}}_\mp\hat{\mathcal{F}}_\pm) = \hat{\mathcal{F}}_\pm\hat{M}_{\pm i\cdot\mathrm{id}}\hat{I} = \underline{\underline{\underline{\hat{\mathcal{F}}_\pm\hat{M}_{\pm i\cdot\mathrm{id}}}}}.\end{aligned} \tag{2.49}$$

2.5. Fourier-transzformáció: példák

Önmaguk jogán is érdekes (és a látott tulajdonságokat illusztráló) példák következnek; később is hivatkozunk majd némelyikükre, és mindenféle egyéb körülményre is felhívjuk a figyelmet.

[14] Találjunk példákat arra, hogy ezek független feltételek, azaz teljesülhet egyik úgy, hogy a másik nem!

[15] A „Komplex függvénytan” jegyzet C.4. függelékében elővett, az ilyen paraméteres integrálok differenciálhatóságáról szóló tétel kell: a mostani esetre alkalmazva ha az x-függő integrandus integrálható minden y-nál x-ben (ezt most feltettük), differenciálható y szerint minden x-re (ez most igaz), és a derivált abszolútértéke minden y esetén egyszerre egy integrálható függvénnyel majorálható (ez is igaz most, mert a derivált abszolútértéke most pont $|xf(x)|$, amiről feltettük, hogy integrálható), akkor a paraméteres integrál eredménye differenciálható y szerint, és bedifferenciálhatunk az integrálba.

• Kezdjük a talán legfontosabb példával: legyen f adott $\sigma{>}0$ szélességű **Gauss-görbe**. Állítás: az ő **Fourier-transzformáltja is** Gauss-függvény, $\frac{1}{\sigma}$ (azaz az eredetinek reciproka) szélességgel.

$$f(x) = A\exp\bigl(-\tfrac{1}{2\sigma^2}x^2\bigr). \qquad \textit{Állítás:} \qquad \bigl(\hat{\mathcal{F}}_\pm f\bigr)(y) = A\sigma\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}\sigma^2y^2\bigr). \tag{2.50}$$

Ez kijön tudva, hogy a Gauss-integrálos képlet komplexben is érvényes (ld. pl. a „Komplex függvénytan (bevezetés)" jegyzet 5.1. szakaszát); sőt rögtön egyszerre lekezelhetjük $\hat{\mathcal{F}}_+$-t és $\hat{\mathcal{F}}_-$-t is.

$$\text{Emlék:} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\, e^{-\alpha x^2+\beta x} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}, \quad \text{hacsak } \Re(\alpha){>}0. \quad \text{Ebből:}$$

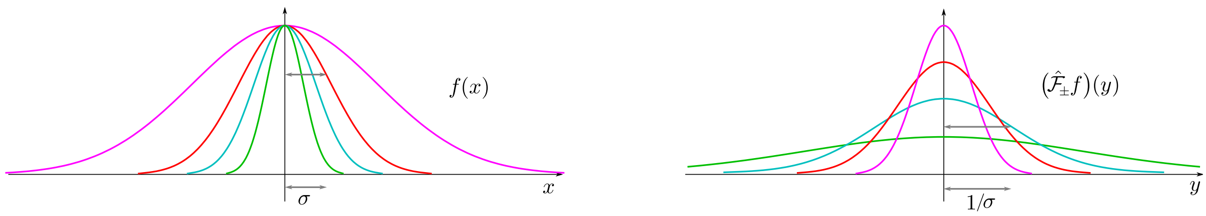
$$\bigl(\hat{\mathcal{F}}_\pm f\bigr)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\, Ae^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}e^{\pm iyx} = \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\pm iyx} = \frac{A\sqrt{\pi 2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}}\exp\Bigl(\frac{(\pm iy)^2}{4\frac{1}{2\sigma^2}}\Bigr) = A\sigma e^{-\frac{\sigma^2}{2}y^2}.$$

• Valós értékű páros függvény Fourier-transzformáltja is tényleg valós értékű páros függvény lett. A kapott eredmény másik tanulsága: **szélesebb** görbe **Fourier-transzformáltja keskenyebb** és viszont. Ez fontos beidegződés lesz, nemcsak Gauss-görbékre.

Másrészt (mivel Fourier-transzformálással is Gauss-görbét kaptunk) a kapott képletet *annak* Fourier-transzformáltjára is alkalmazhatjuk: olyan jelöléssel, hogy látszódjon, hogy „visszafelé" transzformálunk (pl. megfelelően jelölve a változókat, az $\hat{\mathcal{F}}_\pm$-beli előjeleket pedig fordítva):

$$\begin{aligned} &\text{ha} \quad f(x) = A\exp\bigl(-\tfrac{1}{2\sigma^2}x^2\bigr) \quad \Rightarrow \quad g(y) := \bigl(\hat{\mathcal{F}}_\pm f\bigr)(y) = A\sigma\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}\sigma^2y^2\bigr),\\ &\text{ha viszont} \quad g(y) = A\sigma\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}\sigma^2y^2\bigr) \quad \Rightarrow \quad \bigl(\hat{\mathcal{F}}_\mp g\bigr)(x) = A\exp\bigl(-\tfrac{1}{2\sigma^2}x^2\bigr).\end{aligned}$$

A második is a (2.50) következménye, σ helyett $\frac{1}{\sigma}$-t beírva; $\frac{1}{1/\sigma} = \sigma$ miatt visszajön a σ szélesség, és $\sigma\frac{1}{\sigma} = 1$ miatt visszajön A is. **Második tanulság** tehát: a konkrét integrálokat kiszámolva (*nem hivatkozva* arra a „sejtésre", hogy a kétféle transzformáció egymás inverze) találtunk *egy* függvényt (a Gauss-t), amire hattatva $\hat{\mathcal{F}}_+$-t majd az eredményre $\hat{\mathcal{F}}_-$-t visszakapjuk az eredeti függvényt.[16]



10. ábra. Szimmetrikus Gauss-görbe Fourier-transzformáltja is ugyanilyen; szélesebbé keskenyebb.

• Általánosítsunk eltolt és még egy „képzetes hullámmal" (e^{ikx}-szel) szorzott Gauss-görbékre!

$$\text{Legyen} \quad f(x) = A\exp\bigl(-\tfrac{1}{2\sigma^2}(x{-}x_0)^2{+}ikx\bigr); \qquad \hat{\mathcal{F}}_\pm f = ? \tag{2.51}$$

Itt k egy adott érték, σ a szélesség (mint fent), x_0 a görbe „középpontja". Két apró „nehezítés" van itt az előző példához képest: az $\hat{\mathcal{F}}_\pm f$ függvény valóban $\mathbb{C}$-be képező (komplex értékű) függvény lesz, illetve különböző lesz az $\hat{\mathcal{F}}_+$ és $\hat{\mathcal{F}}_-$ transzformációk eredménye. Itt is a (komplex) Gauss-integrált kell használni; kicsit kibontjuk a lépéseket, de azért *számoljuk végig magunk is*:

$$\underline{\bigl(\hat{\mathcal{F}}_+ f\bigr)(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\, e^{iyx}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\, e^{iyx}Ae^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-x_0)^2+ikx} =$$

[16] Mi az $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$-s előírást használjuk $\hat{\mathcal{F}}_\pm$-ban. Ha pl. az $\hat{\mathcal{F}}_+$-ba 1-et és az $\hat{\mathcal{F}}_-$-ba $\frac{1}{2\pi}$-t írtunk volna, akkor néhány $\sqrt{2\pi}$ faktor még megjelenne, de az egyik majd a másik Fourier-transzformálás úgy is az eredeti Gauss-t adná vissza.

$$= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2 + (ik+iy+\frac{x_0}{\sigma^2})x} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x_0^2} = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x_0^2} \sqrt{\frac{\pi}{1/2\sigma^2}}\, e^{\frac{\sigma^2}{2}(ik+iy+\frac{x_0}{\sigma^2})^2} =$$

$$= A\sigma e^{-\frac{1}{2}k^2\sigma^2 - \frac{1}{2}y^2\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{2}\frac{x_0^2}{\sigma^4} - \sigma^2 ky + ikx_0 + ix_0y - \frac{1}{2\sigma^2}x_0^2} = \underline{A\sigma e^{-\frac{\sigma^2}{2}(y+k)^2 + ix_0(y+k)}}. \tag{2.52}$$

Ugyanígy számolva (csak kicsit másképp csoportosítva) megkapjuk $\hat{\mathcal{F}}_-$ eredményét is:

$$\big(\hat{\mathcal{F}}_- f\big)(y) = A\sigma e^{-\frac{\sigma^2}{2}(y-k)^2 - ix_0(y-k)}. \qquad \text{Egybe:} \quad \underline{\underline{\big(\hat{\mathcal{F}}_\pm f\big)(y) = A\sigma e^{-\frac{\sigma^2}{2}(y\pm k)^2} e^{\pm ix_0(y\pm k)}}}. \tag{2.53}$$

A(z y-függő) Fourier-transzformált is eltolt és képzetes hullámmal szorzott Gauss-görbe: szélessége újfent $\frac{1}{\sigma}$, eltolását az eredeti szorzóhullám k paramétere, a transzformáltat szorzó képzetes hullám „hullámszáma” pedig az eredeti x_0 eltolás (és az előjelek itt-ott függenek az $\hat{\mathcal{F}}_\pm$-beliektől). Ez az f kiadódik az előző pontbeli Gauss-görbéből: x_0-lal eltolva, *aztán* e^{ikx}-szel szorozva, azaz az $\hat{M}_{\exp(ik\cdot\mathrm{id})}\hat{L}_{x_0}$ operátor hatásával. Működnek az előző szakaszbeli (2.47) tulajdonságok: a mostani f Fourier-transzformáltja tényleg kiadódik a Gauss-görbééből az $\hat{L}_{\mp k}\hat{M}_{\exp(\pm ix_0\cdot\mathrm{id})}$ operátort hattatva. Valóban, $\hat{\mathcal{F}}_\pm\hat{M}_{\exp(ik\cdot\mathrm{id})}\hat{L}_{x_0} = \hat{L}_{\mp k}\hat{\mathcal{F}}_\pm\hat{L}_{x_0} = \hat{L}_{\mp k}\hat{M}_{\exp(\pm ix_0\cdot\mathrm{id})}\hat{\mathcal{F}}_\pm$. Silabizáljuk végig (előjelestül)!

Jó edzés, ha mindent megfelelően átjelölgetve kiszámítjuk ugyancsak a (2.52) képlettel az abban kapott eredményfüggvény Fourier-transzformáltjait is. Az előjelekre itt is figyelve az eredmény (melyből látszik, hogy a mostani (2.51) példafüggvényre is teljesül, hogy $\hat{\mathcal{F}}_\pm\hat{\mathcal{F}}_\mp f = f$):

$$g(y) = A\sigma e^{-\frac{\sigma^2}{2}(y\pm k)^2} e^{\pm ix_0(y\pm k)} \qquad \Rightarrow \qquad \big(\hat{\mathcal{F}}_\mp g\big)(x) = A\exp\big(-\tfrac{1}{2\sigma^2}(x-x_0)^2 + ikx\big).$$

• Következő példa: **valós (gaussi) hullámcsomag**. Legyen $\Omega>0$ egy adott „vivőfrekvencia”, és

$$f(t) := A\cos(\Omega t)e^{-\frac{1}{2\sigma^2}t^2}. \tag{2.54}$$

Tudva, hogy $\cos(\Omega t) = \frac{1}{2}(e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t})$, két taggá bontva a függvényünket rögtön megkapjuk az eredményt az előző (2.52) alapján (de számoljuk is újra végig az itteni másfajta jelöléssel):

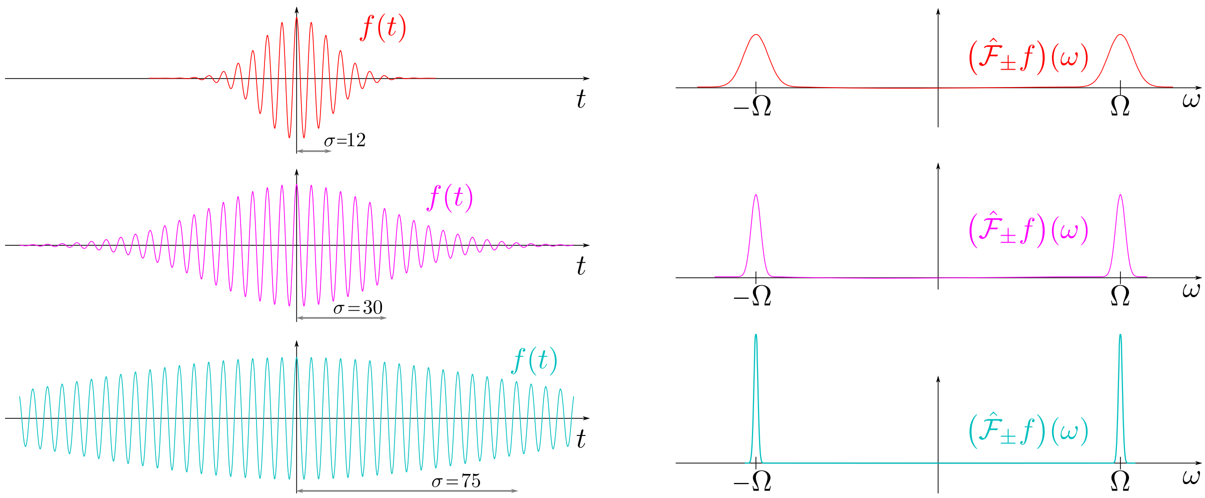
$$\big(\hat{\mathcal{F}}_\pm f\big)(\omega) = \tfrac{1}{2}A\sigma e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(\omega-\Omega)^2} + \tfrac{1}{2}A\sigma e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(\omega+\Omega)^2}. \tag{2.55}$$

Tanulságos itt $\hat{\mathcal{F}}_\pm f$-re tényleg frekvenciaeloszlásként gondolni (a jelölést is így választottuk). Az eredmény $\Omega\gg\sigma$ esetén igazán érdekes. Ekkor $f(t)$ lényegében egy Ω frekvenciájú rezgés, de nem „az idő kezdetétől a végéig változatlanul”: a gaussi $\exp\big(-\frac{1}{2\sigma^2}t^2\big)$ szorzó (amely kicsivé válik, ha $|t|$ már nem kicsi σ-hoz képest) „becsomagolja” burkológörbeként; ld. az alábbi 11. ábrát. A (2.55) frekvenciaeloszlás pedig az Ω (és $-\Omega$) környékére korlátozódik: minél nagyobb σ az Ω-hoz képest, annál inkább csak ezek környéke jut szerephez (az $\hat{\mathcal{F}}_\pm f$-beli $\frac{1}{\sigma}$ szélességű Gauss-görbék miatt). „Pontosan egy frekvencia” csakis $\sigma\to\infty$ esetén lehetne (visszatérünk ide, amint bevezetjük a *Dirac-deltát*); véges σ esetén Ω-tól eltérő frekvenciákat is kapunk a frekvenciaeloszlásban, ami tehát relatíve annál jobban „szétkenődik”, minél rövidebb idejű véges „csomag” az $f(t)$ által leírt rezgés.

Az, hogy Ω mellett $-\Omega$ is előkerül a (2.55) másik tagjában, ne zavarjon: eredendően komplex exponenciálisokkal dolgozunk sin, cos helyett; utóbbiakba az $e^{i\omega t}$ szempontjából negatív ω-k is bekerülnek. Másrészt ha pl. cos helyett sin-t írunk, akkor ugyanúgy számolva, mint az előbb:

$$f(t) = A\sin(\Omega t)e^{-\frac{1}{2\sigma^2}t^2} \qquad \Rightarrow \qquad \big(\hat{\mathcal{F}}_\pm f\big)(\omega) = \tfrac{1}{2i}A\sigma e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(\omega+\Omega)^2} - \tfrac{1}{2i}A\sigma e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(\omega-\Omega)^2};$$

ami nem valós (pláne nem pozitív) értékű függvény. (Mellesleg teljesül, amit az előző szakaszban láttunk: valós értékű páratlan függvény Fourier-transzformáltja tiszta képzetes értékű páratlan függvény lett). Ami a „frekvenciaeloszláskét” való értelmezést illeti, már most megjegyezzük, hogy sok fizikai esetben igaziból az $\left|(\hat{\mathcal{F}}_{\pm}f)(\omega)\right|^2$ *abszolútérték-négyzet* jelenti a frekvenciaeloszlást. Ez pozitív valós, és a „szétkentségre" vonatkozó iménti megállapításaink ugyanúgy érvényesek rá.



11. ábra. A (2.54) hullámcsomag(ok) Fourier-transzformáltja(i, torzított függőleges léptékkel): szélesebb hullámcsomag esetén határozottabban csak az Ω vivőfrekvencia (ill. $-\Omega$) szerepel a frekvenciaeloszlásban. Fordítva is: minél rövidebb a csomag, annál szétkentebb a frekvenciaeloszlás.

* * *

„Gauss-jellegű függvények" Fourier-transzformáltjait tehát Gauss-integrálokkal számolhattuk ki. A következő példákban kiterjedten használunk más integrálási módszereket is.

• A **reziduumtételes** integrálszámolások egyik fennforgása éppen az, hogy néhány erre látott példát (ld. a „Komplex függvénytan" jegyzet 5.2. szakaszát) most Fourier-transzformáltakként beazonosíthassunk. Legyenek $P(t)$ és $Q(t)$ olyan polinomok, hogy $\deg Q \geq \deg P + 2$ teljesüljön a fokszámaikra, és Q-nak ne legyen valós zérushelye: ekkor a $\frac{P(t)}{Q(t)}$ racionális törtfüggvény integrálható t-ben az egész $\mathbb{R}$-re; értelmes kérdés az ő Fourier-transzformáltja. Vegyük mondjuk $\hat{\mathcal{F}}_+$-t:

$$f(t) \equiv \frac{P(t)}{Q(t)}, \qquad (\hat{\mathcal{F}}_+ f)(\omega) = ?, \qquad \text{azaz} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \, e^{i\omega t} \frac{P(t)}{Q(t)} = ? \tag{2.56}$$

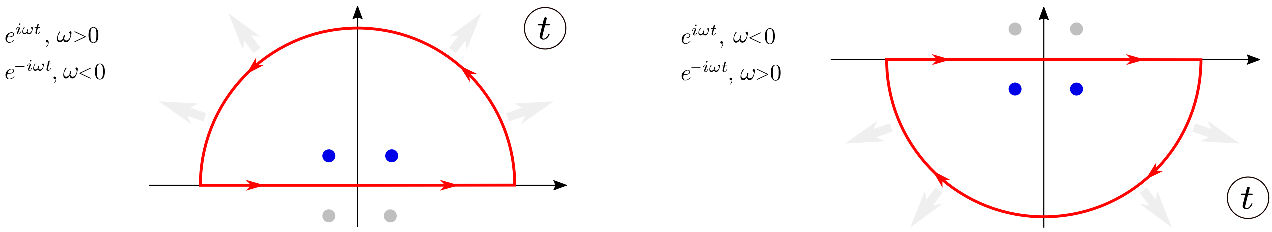
Figyelem: az $\omega \in \mathbb{R}$ valós mennyiség az eredményfüggvény *változója.* A Fourier-transzformált mint függvény $\omega \in \mathbb{R}$-en, **pozitív és negatív ω-kra egyaránt értelmezett**: mindkét esettel foglalkozni kell; ha netán megszoktuk, hogy pl. csak $\omega > 0$-t vizsgáljuk, akkor ezt a könnyítést felejtsük el.

Felfrissítjük a (2.56) integrál kiszámítási módszerét A t-t komplex változónak, az integrált a $t \in \mathbb{C}$ síkon a valós tengelyen futó vonalintegrálnak tekintjük. Az $e^{i\omega t}\frac{P(t)}{Q(t)}$ integrandus meromorf függvény, pólusai vannak a $Q(t)$ nevező zérushelyeiben (véges sok, egyikük sem valós). A keresett $\int_{-\infty}^{\infty}$ integrál a P-re és Q-ra mondott feltételek miatt létezik és egyenlő az $\int_{-R}^{R}$ integrál $\lim_{R\to\infty}$ határértékével. A beidegződött ötlet: az $[-R, R]$ szakaszt „lefelé" vagy „felfelé", $\Im(t) < 0$ vagy $\Im(t) > 0$ irányba bezárjuk egy félkörrel (olyan nagy R-et véve, hogy a kapott zárt γ félkörgörbe már megkerülje a használt félsíkon lévő pólusokat). A zárt γ-ra vett integrált megkapjuk reziduumtétellel:

$$\oint_{\gamma} \mathrm{d}t \, e^{i\omega t} \frac{P(t)}{Q(t)} = \pm 2\pi i \sum_{t_k \in \mathrm{Int}\gamma} \mathrm{Res} \left[e^{i\omega t} \frac{P(t)}{Q(t)} \right] \Bigg|_{t_k},$$

$+$: ha γ felfelé (↺ módon irányítva) záródik, $-$: ha lefelé (↻ módon irányítva).

Itt t_k-k a pólusok, Intγ a γ belseje. A zárt γ-ra vett integrál a $[-R,R]$-re és az ívre vett darabokból áll; ha $R{\to}\infty$-re az ív járuléka nullához tart, akkor a reziduumtétellel kapott eredmény a keresett valós $\int_{-\infty}^{\infty}$ integrállal egyenlő. Mivel $\deg Q \geq \deg P + 2$, van olyan fix $K{>}0$ konstans, hogy elég nagy R esetén ha $|t|{=}R$ (azaz az íven) $\left|\frac{P(t)}{Q(t)}\right| \leq \frac{K}{R^2}$. Másrészt (mivel ω valós) ha t valós, akkor $|e^{i\omega t}| = 1$, ha viszont nem az, $t = a{+}ib$, akkor $|e^{i\omega t}| = |e^{i\omega a}e^{-\omega b}| = e^{-\omega b}$, vagyis a valós t tengelytől egyik irányban távolodva exponenciálisan nő, ami felülírja a $\left|\frac{P(t)}{Q(t)}\right|$ csökkenését, a másik irányban viszont $|e^{i\omega t}|{\leq}1$. Konkrétan ha $\omega{\geq}0$, akkor $|e^{i\omega t}|$ a felső t-félsíkon marad korlátos, ha pedig $\omega{\leq}0$, akkor az alsón. Ezek miatt az $e^{i\omega t}$-vel írt integrálunkban $\omega{\geq}0$-ra a felső, $\omega{\leq}0$-ra az alsó félsíkon kell zárni: a „szokásos integrálbecslés” alapján (miszerint $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \ell(C)\cdot\max_{z\in C}|f(z)|$, ahol $\ell(C)$ a C görbedarab hossza) kiderül, hogy ilyenkor tényleg nullához tart az ívre vett járulék. Az így kiválasztott félsíkon lévő pólusok reziduumaiból pedig megkapjuk a keresett eredményt (a γ irányítására is figyelve). A végső eredményt sok esetben $\omega{\geq}0$-ra és $\omega{\leq}0$-ra is összefoglalhatjuk az $|\omega|$ abszolútértéket használva. *Figyelem!* Ha $e^{i\omega t}$ helyett $e^{-i\omega t}$-vel (azaz $\hat{\mathcal{F}}_+$ helyett $\hat{\mathcal{F}}_-$-szal) dolgozunk, akkor gondoljuk újra végig: éppen fordítva, $\omega{\geq}0$-ra kell lefelé zárni, $\omega{\leq}0$-ra felfelé.



12. ábra. Racionális törtfüggvények Fourier-transzformáltjait az út megfelelő irányba való bezárásával (az így kiválasztódó félsíkon lévő pólusok reziduumaiból) számolhatjuk ki.

- Az alábbi példák mint integrálok részben előkerültek a „Komplex függvénytan” jegyzetben.

Példa: legyen f **Lorentz-görbe:**
$$f(t) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{t^2{+}a^2} \qquad \Rightarrow \qquad \big(\hat{\mathcal{F}}_\pm f\big)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-a|\omega|}. \tag{2.57}$$

Tömören kiszámoljuk ezt most is. Írjuk fel az $\hat{\mathcal{F}}_+$-os integrált, és kezeljük is le a felidézett recepttel:

$$\big(\hat{\mathcal{F}}_+ f\big)(\omega) = \frac{a/\pi}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\,\frac{e^{i\omega t}}{t^2{+}a^2}. \qquad \begin{array}{ll} \text{Az integrandus: } h{\equiv}\frac{e^{i\omega t}}{t^2+a^2}. & t_1{=}ia;\quad \operatorname{Res} h\big|_{t_1} = \frac{e^{-\omega a}}{2ia}, \\ \text{Két elsőrendű pólusa van:} & t_2{=}{-}ia;\ \operatorname{Res} h\big|_{t_2} = \frac{e^{\omega a}}{-2ia}. \end{array}$$

(A reziduumok kiszámolását felfrissíthetjük pl. a „Komplex függvénytan” jegyzet (4.29) egyenletéből és környékéből.) A fent mondottak szerint most $\omega{>}0$ esetén felfelé, $\omega{<}0$ esetén lefelé záródó R sugarú félkörívet kell venni, így $\omega{>}0$ esetén a keresett integrálunk eredménye a t_1-beli reziduumból, $\omega{<}0$ esetén a t_2-beliből adódik, utóbbi esetben -1-gyel még szorozva a negatív irányítás miatt.

$$\big(\hat{\mathcal{F}}_+ f\big)(\omega) = \begin{cases} \frac{a}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot 2\pi i\operatorname{Res} h\big|_{t_1} = \frac{a}{\pi}\frac{2\pi i}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-\omega a}}{2ia} = \frac{e^{-\omega a}}{\sqrt{2\pi}}, & \text{ha } \omega{\geq}0, \\ \frac{a}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot -2\pi i\operatorname{Res} h\big|_{t_2} = \frac{a}{\pi}\frac{-2\pi i}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{\omega a}}{-2ia} = \frac{e^{\omega a}}{\sqrt{2\pi}}, & \text{ha } \omega{\leq}0. \end{cases}$$

Újra ellenőrizzük, hogy a fentebbi (2.57) alak tényleg helyes erre: $\omega{\geq}0$-ra $|\omega|{=}\omega$, de $\omega{<}0$-ra $|\omega|{=}{-}\omega$. Ezután **számoljuk végig** $\hat{\mathcal{F}}_+$ helyett $\hat{\mathcal{F}}_-$ hatását is: ugyanez az ω-függvény az eredmény.

A kapott eredményfüggvény integrálható ω szerint $\mathbb{R}$-re (mindkét irányban exponenciálisan csökken); vissza-Fourier-transzformálhatjuk őt. Nyilván $\mathbb{R}^+$-ra és $\mathbb{R}^-$-ra külön írjuk az integrált:

$$g(\omega)=\frac{e^{-a|\omega|}}{\sqrt{2\pi}} \qquad\Rightarrow\qquad 2\pi\big(\hat{\mathcal{F}}_-g\big)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\!\mathrm{d}\omega\, e^{-i\omega t}e^{-a|\omega|}=\int_0^{\infty}\!\mathrm{d}\omega\, e^{-i\omega t-a\omega}+\int_{-\infty}^{0}\!\mathrm{d}\omega\, e^{-i\omega t+a\omega},$$

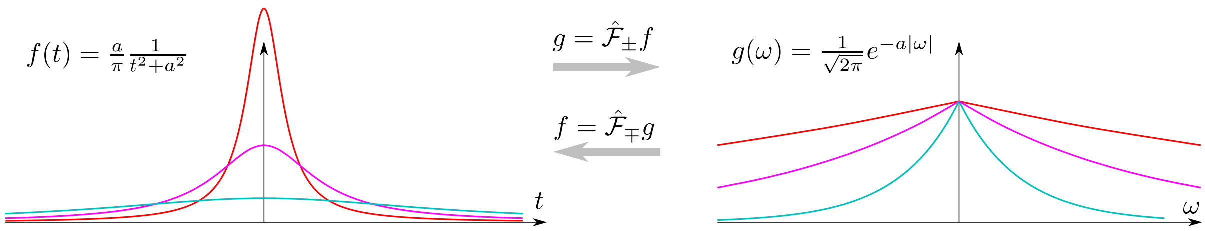
hiszen $|\omega|$ mást jelent itt és ott. Az $\mathbb{R}^-$-ra vett integrálban $\omega\to-\omega$ módon kell helyettesíteni:[17]

$$\big(\hat{\mathcal{F}}_-g\big)(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\!\mathrm{d}\omega\, e^{-a\omega-i\omega t}+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\!\mathrm{d}\omega\, e^{-a\omega+i\omega t}=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{a+it}+\frac{1}{a-it}\right]=\frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+t^2}. \tag{2.58}$$

Számoljuk végig itt is $\hat{\mathcal{F}}_-$ helyett $\hat{\mathcal{F}}_+$-szal is; ugyanez a függvényalak adódik. Kijött tehát, hogy

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+t^2},\qquad g(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-a|\omega|},\qquad \hat{\mathcal{F}}_\pm f=g,\qquad \hat{\mathcal{F}}_\mp g=f. \tag{2.59}$$

Az $f(t)$-t pont olyannak írtuk (ellenőrizzük!), hogy $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{d}t=1$ legyen; a $g(\omega{=}0)$ tényleg ennek az 1-nek $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$-szerese. Az a érték az f Lorentz-görbe szélességének tekinthető: $x{=}0$-beli értékéhez képest $x{=}\pm a$-ban csökken felére. A $g(\omega)$ karakterisztikus szélessége $1/a$: ennyivel odébb csökken e-edére. Az eredeti függvény és a Fourier-transzformált „szélességei" tehát fordítottan arányosak.



13. ábra. Lorentz-görbe Fourier-transzformáltja kétirányú exponenciális; keskenyebbé szélesebb.

• Számoljuk végig gyakorlásképpen (a reziduumtételes módszerrel) az alábbi példákat is:

$$f_1(t)=\frac{1}{t^4+3a^2t^2+2a^4}\qquad\Rightarrow\qquad g_1(\omega)\equiv\big(\hat{\mathcal{F}}_\pm f_1\big)(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a^3}\Big(e^{-a|\omega|}-\tfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}a|\omega|}\Big), \tag{2.60}$$

$$f_2(t)=\frac{t}{t^4+3a^2t^2+2a^4}\qquad\Rightarrow\qquad g_2(\omega)\equiv\big(\hat{\mathcal{F}}_\pm f_2\big)(\omega)=\pm i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{sgn}(\omega)}{a^2}\Big(e^{-a|\omega|}-e^{-\sqrt{2}a|\omega|}\Big), \tag{2.61}$$

$$f_3(t)=\frac{t^2}{t^4+3a^2t^2+2a^4}\qquad\Rightarrow\qquad g_3(\omega)\equiv\big(\hat{\mathcal{F}}_\pm f_3\big)(\omega)=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a}\Big(e^{-a|\omega|}-\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}a|\omega|}\Big). \tag{2.62}$$

itt sgn a szignumfüggvény.[18] Ellenőrizhetjük itt is, hogy g_1, g_2, g_3 „vissza"-transzformáltjai tényleg f_1, f_2, f_3; exponenciálisokat kell integrálni (mint egy ponttal feljebb) $\omega{\in}\mathbb{R}^-$-re és $\omega{\in}\mathbb{R}^+$-re külön.

Érdekesség itt, hogy f_2 az f_1-ből ill. f_3 az f_2-ből t-vel szorozva, azaz az identitással való szorzás $\hat{M}_{\mathrm{id}}$ operátorát hattatva adódik. Láttuk a korábbi (2.47) egyenletekben, hogy ilyenkor a Fourier-transzformált deriválódik (i vagy $-i$ szorzókat még kiosztva). Ellenőrizzük most, hogy a kapott g_2 a g_1-ből ill. g_3 a g_2-ből tényleg a $\mp i\hat{D}$ operátorral adódik: $g_2(\omega){=}{\mp}ig_1'(\omega)$, $g_3(\omega){=}{\mp}ig_2'(\omega)$. Közben kiderül, hogy g_1 (és g_2 is) *differenciálhatók, $\omega{=}0$-ban is* (utóbbit pl. az ekörüli sorfejtés mutatja), még úgy is, hogy amúgy az $|\omega|$ „tüskés" itt. Tovább viszont egyelőre nem léphetünk: g_3 *nem* differenciálható $\omega{=}0$-ban, ezzel párhuzamosan $f_3(t)$-nek a t-szerese már *nem integrálható* (a nevező csak eggyel lenne magasabb fokú, mint a számláló): rá egyelőre nem hattathatnánk $\hat{\mathcal{F}}_\pm$-t.

[17] Az $x{\to}{-x}$ változóhelyettesítésnél esetleg eltéveszthetjük az előjelet: $\int_{-\infty}^{0}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}f(-x)\mathrm{d}x$. Közben a határok $\int_{-\infty}^{0}$-ból $\int_{\infty}^{0}$ lettek, majd a helyettesítés deriváltjából jövő -1-et megette az, hogy visszacseréltünk $\int_0^{\infty}$-re.

[18] Ugye sgn az „előjelfüggvény", $\mathrm{sgn}(x){=}1$, ha $x{\geq}0$, és $\mathrm{sgn}(x){=}{-1}$, ha $x{<}0$. Van, aki az $x{=}0$-beli értéket 0-nak definiálja; ez most nem fájna nekünk, mert g_2-ben $\omega{=}0$-ban $e^{-a|\omega|}-e^{-\sqrt{2}a|\omega|}$ így is, úgy is 0-t vesz fel.

• Jöjjön **még néhány tanulságos példa**. Az alábbi elsőt kiszámoltuk két ponttal feljebb; most olyan jelöléssel és szorzókkal írjuk fel, hogy rímeljen az alatta lévőre. Legyen $\lambda>0$; ekkor

$$f(x)=e^{-\lambda|x|} \quad\Leftrightarrow\quad \big(\hat{\mathcal{F}}_{\pm}f\big)(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\lambda}{y^2+\lambda^2}, \tag{2.63}$$

$$\text{Újdonság:}\quad f(x)=\operatorname{sgn}(x)e^{-\lambda|x|} \quad\Rightarrow\quad \big(\hat{\mathcal{F}}_{\pm}f\big)(y)=\pm i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{y^2+\lambda^2}. \tag{2.64}$$

Az utóbbinak megfelelő integrált egy (a sgn miatti) előjelcsere erejéig ugyanúgy számíthatjuk ki, mint az elsőnek megfelelő, ott „visszatranszformálás"-nak gondolt (2.58)-at. Ügyeljünk az előjelekre!

$$f(x)=\operatorname{sgn}(x)e^{-\lambda|x|} \qquad\Rightarrow\qquad \big(\hat{\mathcal{F}}_{\pm}f\big)(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty\!\mathrm{d}x\,e^{\pm ixy-\lambda x}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0\!\mathrm{d}x\,e^{\pm ixy+\lambda x}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty\!\mathrm{d}x\,e^{\pm ixy-\lambda x}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty\!\mathrm{d}x\,e^{\mp ixy-\lambda x}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{\lambda\mp iy}-\frac{1}{\lambda\pm iy}\right]=\pm i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{y^2+\lambda^2}.$$

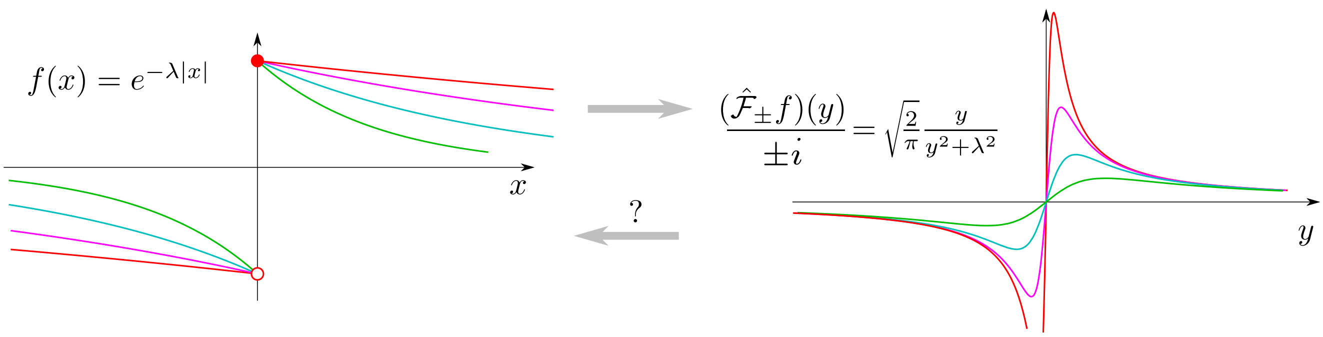
• A felidézett (2.63)-ban tényleg mindkét irányt beláttuk, de a most kiszámolt (2.64)-ban csak a $\Rightarrow$ irányt írtuk egyelőre. Az eredményfüggvénnyel visszafelé ugyanis gondjaink lennének: rendes értelemben nem integrálható; $\sim\frac{1}{y}$ szerint csökken. Létezik viszont az alábbi impropius integrál:

$$g(y)=\frac{y}{y^2+\lambda^2};\qquad \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\!\mathrm{d}y\,g(y)e^{i\omega y}=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\!\mathrm{d}y\,\frac{ye^{\mp i\omega y}}{y^2+\lambda^2}=(*)=?$$

Ezt részben megcsináltuk (pont ezért…) a „Komplex függvénytan" jegyzet 5.2. szakaszában reziduumtétellel (ld. az ottani (5.19) egyenletet és (5.21) eredményt) kicsit más jelöléssel. Kis fennakadást okozott az integrandus nem elég gyors csökkenése, továbbá ott az $e^{i\omega y}$ esetét $\omega>0$-ra számoltuk ki csak; most a másik előjel ill. $\omega<0$ is kell. Vagy újra végigszámolunk mindent (az utat mindig a megfelelő irányban zárva), vagy észrevesszük, hogy (a felírt valós integrálban $y\to-y$ helyettesítéssel láthatóan) az eredmény ω-nak páratlan függvénye kell, hogy legyen.

Az eredmény az lesz, hogy ha $\omega\neq0$, akkor $\qquad (*)=\mp i\pi\operatorname{sgn}(\omega)e^{-\lambda|\omega|}$.

Betéve $\sqrt{2\pi}$-ket, i-ket és ω helyett x-et látható ebből, hogy a kiszámolt impropius integrálunk, ami „majdnem" az $\hat{\mathcal{F}}_{\mp}$ visszatranszformálást jelentené, kiadta a (2.64)-beli induló függvényt az ottani eredményből. Ez nem véletlen; kiderül majd, hogy itt is az $\hat{\mathcal{F}}_{\pm}\hat{\mathcal{F}}_{\mp}=\hat{I}$ „működik" a háttérben.



14. ábra. sgn-vel szorzott exponenciális(ok) és az „$\frac{1}{y}$-hoz közelítő" törtfüggvény(ek) .

* * *

• Nézzük még meg egy **véges** méretű szimmetrikus) **„dobogó”** Fourier-transzformáltját! Legyen a szélesség $2a$, a magasság pedig $\frac{1}{2a}$: így a terület 1, akármennyi is az a. A függvényünk tehát

$$f(x) = \tfrac{1}{2a}\chi_{[-a,a]}(x), \quad \text{azaz} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, \text{ ha } -a \le x \le a, \\ 0 \text{ egyébként} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x) = 1.$$

A Fourier-transzformációhoz most **véges szakaszra** kell integrálni. Kiderül, hogy az $y{=}0$ érték „félig különleges”: rá nem vonatkozik az $y{\neq}0$-ra található (rögtön felírt) primitív függvény, azonban az $y{\neq}0$-ra kapott eredmény $y{=}0$-beli határértéke pont annyi, mint az oda kiszámolt érték:

$$(\hat{\mathcal{F}}_\pm f)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{\chi_{[-a,a]}(x)}{2a} e^{iyx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \frac{e^{iyx}}{2a} = \begin{cases} \frac{1}{2a} \frac{e^{iyx}}{iy\sqrt{2\pi}} \Big|_{x=-a}^{x=a} = \frac{\sin(ay)}{\sqrt{2\pi}\, ay}, & \text{ha } y{\neq}0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \, \frac{1}{2a} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, & \text{ha } y{=}0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \big(\hat{\mathcal{F}}_\pm f\big)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(ay)}{ay}, \qquad y{=}0\text{-ban a határérték, } \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ értelemben.} \tag{2.65}$$

• „Visszatranszformálni” itt is csak improprius integrállal lehet. Ahhoz hasonlóan kell számolni, ahogyan az improprius $\int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{\sin x}{x}$ integrállal a „Komplex függvénytan” jegyzet 3.6. szakaszában.

A $\sqrt{2\pi}$-ket összevonva és $2a$-val mindkét oldalt bővítve az ide vonatkozó **állítás:**

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \mathrm{d}y\, e^{\mp iyx} \frac{\sin(ay)}{\pi y} = \chi_{[-a,a]}(x), \tag{2.66}$$

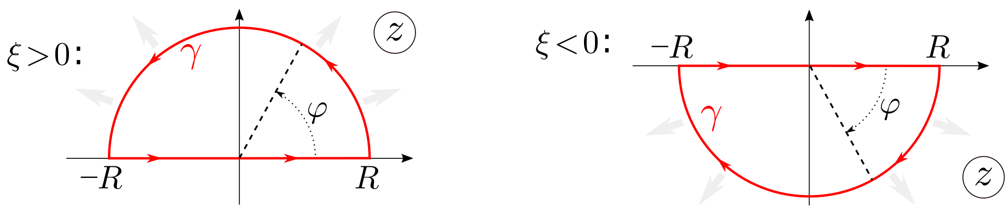
annyi pontosítással, hogy pont $\pm a$-ban (a határokon) 0 ill. 1 helyett $\frac{1}{2}$-et ad az improprius integrál. (Ez a két pont amúgy *nulla mértékű halmaz*; szinte sosem érdekes ez a körülményeskedés.)

Levezetjük az imént idézett eredményt. Az integrandusban $y \to -y$ helyettesítést végezve látszik, hogy a $\pm$ kétféle előjellel ugyanarra az eredményre jutunk; vegyük mondjuk a $+$-t:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \mathrm{d}y\, e^{\mp iyx} \frac{\sin(ay)}{\pi y} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \mathrm{d}y\, e^{iyx} \frac{\sin(ay)}{\pi y} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \mathrm{d}y \frac{(e^{i(x+a)y}{-}1) - (e^{i(x-a)y}{-}1)}{2\pi i y} \equiv$$

$$\equiv X(x{+}a){-}X(x{-}a), \qquad \text{ahol tehát} \quad X(\xi){:=} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \mathrm{d}z \frac{e^{i\xi z}{-}1}{2\pi i z}.$$

Az $X(\xi)$ tehát a kérdés. (A -1-eket azért tettük be, hogy különvehessük a két X-et: így lett az ő integrandusában megszüntethető a szingularitás $z{=}0$-ban; nyilván úgy értendő, hogy meg is szüntetjük.) Nyilvánvaló, hogy $X(0){=}0$. Más ξ-kre az X-et úgy számolhatjuk ki, hogy a komplex síkon félkörrel zárjuk az utat; már „erre készülve” jelöltük z-vel X-ben az integrandust. Ha $\xi{>}0$, akkor a z-síkon felfelé érdemes zárni (mert $z = a{+}ib$, $b{>}0$-t beírva ekkor lesz $|e^{i\xi z}| {=} |e^{i\xi x} e^{-\xi b} {=} e^{-\xi b} {\le} 1$ az exponenciális növekedés helyett), ha pedig $\xi{<}0$, akkor lefelé, mert erre lesz $|e^{i\xi z}|{\le}1$.



15. ábra. A most tárgyalt $X(\xi)$ integrál levezetéséhez útzárás és ívparaméterezés kell.

A körívet $z(\varphi){=}Re^{i\varphi}$ módon paraméterezzük: φ felfelé záráskor a $[0, \pi]$, lefelé záráskor a $[0, -\pi]$ tartományon fut. A bekerülő $\frac{dz}{d\varphi}{=}iRe^{i\varphi}$ derivált pont kiejti az integrandusban $\frac{1}{iz}$-t; ezt rögtön beírjuk. A zárt görbére vett integrál nulla, így a szakaszra vett integrál az ívre vettnek -1-szerese:

$$\oint_\gamma \mathrm{d}z \frac{e^{i\xi z}-1}{2\pi i z} = 0 \quad \Rightarrow \quad X(\xi) = \int_{-R}^{R} \mathrm{d}x \, \frac{e^{i\xi x}-1}{2\pi i x} = -\int_{\text{körív}} \mathrm{d}z \, \frac{e^{i\xi z}-1}{2\pi i z} = \begin{cases} \dfrac{-1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \left[e^{iR\xi e^{i\varphi}}-1\right] & \text{felfelé zár-va } (\xi>0), \\ \dfrac{-1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{-\pi} \mathrm{d}\varphi \left[e^{iR\xi e^{i\varphi}}-1\right] & \text{lefelé zár-va } (\xi<0). \end{cases}$$

Az $R\to\infty$ határátmenet kell. A -1 a számlálóban (π-vel egyszerűsítve és az integrálási határokra figyelve) $\frac{1}{2}$-et ill. $-\frac{1}{2}$-et ad. Az $e^{iR\xi e^{i\varphi}}$ járuléka pedig mindkét esetben nullához tart, *mert jó irányban zártunk.* Ugyebár $|e^{iR\xi e^{i\varphi}}| = e^{-R\xi \sin\varphi}$: ez egyrészt a φ-szakasz *belsejében* midkét esetben pontonként nullához tart $R\to\infty$-nél, mert a kitevőben R-et pozitív szám szorozza (akkor is, amikor $\xi>0$ és $\varphi\in\,]0,\pi[$ miatt $\sin\varphi>0$, és akkor is, ha $\xi<0$ de $\varphi\in\,]-\pi,0[$ miatt $\sin\varphi<0$). Mindkét esetben az integrandus minden $R>0$-ra a (véges φ-szakaszra integrálható) konstans 1-gyel felülbecsülhető: így (a *Lebesgue-tétel* miatt) biztos, hogy ezek az *integrálok is* nullához tartanak $R\to\infty$-nél.

Összetéve ezeket arra jutunk, hogy
$$X(0) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, \text{ ha } \xi<0, \\ 0, \text{ ha } \xi=0, \\ \frac{1}{2}, \text{ ha } \xi>0, \end{cases}$$
ebből pedig visszafejtve tényleg kiadódik, amit (2.66)-ban állítottunk.

* * *

• Sejtjük már régóta, hogy igaz lesz, hogy $\hat{\mathcal{F}}_\pm \hat{\mathcal{F}}_\mp = \hat{I}$. E szakaszban láttuk is ezt különféle példákon; még az iménti két esetben is ilyesmit láttunk, amikor a visszatranszformálást csak improprius integrál módjára csinálhattuk. Persze esetleg zavaró kérdés maradhatott pl. éppen ez, hogy improprius integrálokat vajon jogos-e bevenni a játékba (és ha igen, miért, milyeneket).

A következő fejezetben — sok minden egyéb mellett — általánosítjuk a Fourier-transzformációt is; ehhez be kell vezetni a *disztribúciókat.* Ez váratlanul hasznos matematikai fogalom lesz; nemcsak Fourier-transzformációk szempontjából, hamem mindenféle más művelet értelmezési tartományának „természetes” kibővítése szempontjából is. Ezzel megalapozódik majd az, hogy sok, a fizikában megszokott, de pongyolán kezelt képlet *tényleg* általánosan érvényes lesz disztribúciók körében.

3. Disztribúciók

3.1. Motiváció, alapvető definíciók

A disztribúciók **„általánosított függvények”**. Megpróbálunk túllépni az itt néha kiérezhető „tessék megijedni, nem visszakérdezni” titokzatosságon; először $\mathbb{R}$ értelmezési tartományú esetben.

E fejezet első két szakasza „alapozás”; talán túl alapos is, de ne veszítsük kedvünket: a későbbiekben bőven fogunk látni a bevezetett fogalmakra és módszerekre példákat.

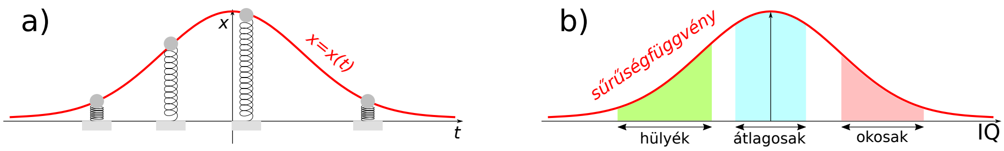
• Kétféle „üzemmódban” szoktunk *függvénygrafikont* rajzolgatni. Az egyik az, amikor ténylegesen „hozzárendelési utasítást” gondolunk mögé: pl. egy golyó kitérését (x) ábrázolva az idő (t) függvényében arra gondolunk, hogy a t–x koordinátasíkon a grafikon egy (t,x) pontja egy t idő és a neki megfelelő (=hozzárendelt) kitérésérték párosát jelenti. Az alábbi 16.a. ábra ilyet szemléltet.

A másik „grafikonszemlélet” az, amikor **eloszlást** ábrázolnánk, mint az alábbi 16.b. ábra példáján.[19] Itt nem arról van szó, hogy a grafikon pontjai összetartozó értékpárokat jelentenek. Egy valamilyen „egyedeket” jellemző, valós számokkal reprezentált mennyiség „eloszlása” fogalmilag a mennyiség értelmezési tartományának **részhalmazaihoz** rendel **számokat** (mint az adott részhalmazba eső mennyiség-értékű „egyedek” számát), tehát egy $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrowtail \mathbb{R}$ leképezés lenne. ($\mathcal{P}(\mathbb{R})$ az $\mathbb{R}$ *hatványhalmaza*; az a halmaz, aminek *elemei* az $\mathbb{R}$ *részhalmazai*.) Az ilyen μ értelmezett kell, hogy legyen ha nem is *minden* részhalmazra (a $\rightarrowtail$ jel ezt is jelenti), de legalábbis az „értelmes” fajta részhalmazokra igen: például és elsősorban az intervallumokra. (És **additív** kell, hogy legyen: részhalmazok (akár megszámlálható) uniójához rendelt érték az egyes értékek összege kell, hogy legyen. Az ilyen $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrowtail \mathbb{C}$ leképezések **„mérték”** névre hallgatnak.) Mármost

ha μ bizonyos „jó” tulajdonságokkal bír, akkor van olyan $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{C}$ függvény, hogy legalábbis az intervallumokhoz rendelt számérték így adódik:

$$\mu\big([a,b]\big) = \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\chi_{[a,b]}(x). \tag{3.1}$$

Ezen f neve ekkor a μ **sűrűségfüggvénye**; ezt ábrázoljuk: egy $\mathbb{R}$-részhalmaz „fölötti” *terület* mutatja a hozzá rendelt számértéket (példánkban: az adott tartományba eső IQ-jú emberek számát).



16. ábra. Függvénygrafikon mint hozzárendelési utasítás ill. mint eloszlás sűrűségfüggvénye.

• Visszafelé: legyen az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vagy akár $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvény **lokálisan integrálható** ($\mathbb{R}$ alaphalmaz esetén ez azt jelenti, hogy minden korlátos intervallumra integrálható). Az f függvénnyel *definiálhatunk* egy $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrowtail \mathbb{C}$ „eloszlást” az előző (3.1) képlet módjára: minden $[a,b]$ intervallumra legyen $\mu([a,b]) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\chi_{[a,b]}(x)$. Az $\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{C}$ lokálisan integrálható **függvényeket** tehát tulajdonképpen **tekinthetjük mértékeknek**, azaz megfelelő $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrowtail \mathbb{C}$ leképezéseknek is.

Tetézzük: rájöhetünk, hogy a „függvény”-nek gondolt fizikai mennyiségek is, pl. $T(x)$ hőmérsékletmező, $x(t)$ időfüggő kitérés, stb. inkább *mérték*-ként „születnek”. (Hogyan mérnénk meg pl.

[19] Félreértés ne essék: az IQ egyrészt teljesen blőd dolog; szabad (*kötelező*) belekötni abba, hogy „egzaktul mérhető mennyiség” lenne, másrészt egész szám értékekkel definiált, nem valósakkal. Ezek a példa kedvéért ne zavarjanak!

a T hőmérsékletet *egy pontban?* Inkább „összesített" mérést tudhatunk végezni az értelmezési tartomány részhalmazain, pl. intervallumokon.) „Fizikailag" is jó gondolat tehát ($\mathbb{R}$-rel reprezentált változójú, $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ „értékű") mennyiségeket „függvény" helyett először *mértéknek* tekinteni.

• Azonban tovább is kell lépnünk. A „mérték"fogalom (egyelőre) alkalmatlan pl. arra, hogy *differenciálást* értelmezzünk rajta, ami pedig a fizikában sok törvény megfogalmazásához alapvető eszköz. A **disztribúciók** olyan objektumok lesznek, amelyek a (lokálisan integrálható) függvényeknél, sőt **még** a (bizonyos értelemben „véges") mértékeknél is **általánosabbak**, és értelmes rájuk sok, függvényekre ismert művelet: összeadás/számmalszorzás, differenciálás, *Fourier-transzformáció*, stb. Ezeknél disztribúciók körében **alig kell** majd **aggódni az *értelmezési tartományon***. Ezért sok differenciálegyenlet, számítási módszer, stb. a disztribúciók között „érzi jól magát", noha esetleg pl. amikor a fizikában felírtuk a differenciálegyenletet, *függvények* körében gondolkodtunk.[20]

• Utolsó „fizikailag motiváló" lépés: gondoljunk el pl. egy műszert, ami a hőmérséklet-eloszlás $T(x)$ „sűrűségfüggvényét" hivatott vizsgálni, és kiterjedt halmazon „gyűjt" információt, akár helyről helyre változó érzékenységgel. A műszerünk (érzékenysége) egy $\phi(x)$ függvénnyel modellezhető, amivel a műszer által „összesített" mérési eredmény $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, T(x)\phi(x)$-szel egyenlő: ahol ϕ nagyobb, ott érzékenyebb a műszer (az ottani $T(x)$-menetet nagyobb súllyal veszi figyelembe).

Ez a $\phi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, T(x)\phi(x)$ hozzárendelés tehát a ϕ **„tesztfüggvényhez" számot rendelő lineáris leképezés** (merthogy egy $\alpha\phi_1+\beta\phi_2$ lineárkombinációhoz így rendelt szám nyilván az eredeti eredmények lineárkombinációja). Ezt *a leképezést* a $T(x)$ függvény meghatározza; talán visszafelé is: *eme leképezés* (azaz az ilyen műszerekkel végezhető összes lehetséges mérés) *ismerete hátha rögzíti a $T(x)$ függvényt.* Ez a kulcs a függvényfogalom kívánt általánosításához.

* * *

• Készen állunk, hogy bevezessük a disztribúciókat. Először definiáljuk a $\mathcal{D}(\mathbb{R})$-rel és $\mathcal{S}(\mathbb{R})$-rel jelölt alábbi függvényhalmazokat.[21] A „sima" jelentése itt: *végtelenszer differenciálható.* No akkor:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) := \big\{\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\big|\; \phi \text{ sima és „kompakt tartójú"}\big\}. \tag{3.2}$$

Ennek elemeit (*„$\mathcal{D}(\mathbb{R})$-beli"*) **alapfüggvényeknek** vagy **tesztfüggvényeknek** hívjuk. Folytonos f függvény **tartója**, jelben $\mathrm{Supp} f$ az a legszűkebb zárt halmaz, amin kívül $f{=}0$. Az $\mathbb{R}$ ún. **kompakt** részhalmazai éppen a korlátos zárt halmazok. Ilyenek biztos részei egy korlátos intervallumnak: $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ akkor kompakt tartójú tehát, ha van olyan $[a, b]$ véges intervallum, amin kívül $\phi(x){=}0$.

A másik vizsgálandó halmaz (melynek elemeit **Schwartz-függvényeknek** hívjuk[22]):

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \big\{\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\big|\; \psi \text{ sima és } \textit{gyorsan csökkenő}\big\}. \tag{3.3}$$

ψ-t *gyorsan csökkenő*nek mondjuk itt, ha $\lim_{x\to\pm\infty} \big[p(x)\frac{d^n\psi(x)}{dx^n}\big]{=}0$ minden $n{\in}\mathbb{N}_0^+$ és minden p polinom esetén; szavakban: ő és deriváltjai is minden polinomnál gyorsabban eltűnnek $\pm\infty$-ben.

[20] Analóg emlék: amikor még csak az $\mathbb{N}_0^+$ természetes számokat ismertük, de már bevezettük a *kivonás* műveletét. Így vigyázni kellett, nehogy „értelmetlen dolgot" (=későbbi tudással: negatív számot) találjunk kihozni pl. egy számítás közbenső lépésében. Bevezetve viszont az általánosabb, negatív számokat is tartalmazó számfogalmat (ez *elsőre* legalább olyan „elvont" lépés, mint a disztribúciók bevezetése mindjárt!) mondhatjuk, hogy a kivonás ezen „objektumok" között (azaz a $\mathbb{Z}$ számhalmazon) már „jól érzi magát": nem kell aggódni az értelmezési tartományával.

[21] Emlékezzünk itt (is) a halmazelméleti $\big\{x{\in}H \,\big|\, \text{„}x\text{-re vonatkozó mondat"}\big\}$ jelölésre: ez az a halmaz, ami a már létező H halmaz azon x elemeit tartalmazza, amelyekre a mondat igaz. Most az, hogy kiírjuk, hogy $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvényeket vizsgálunk, ugyanaz, mint hogy ilyenek halmazából válogatunk.

[22] *Laurent Schwartz*-ról elnevezve, aki megalapozta a disztribúcióelméletet (az 1940-es években).

Tehát pl. $f(x)=\frac{1}{1+x^{10}}$ „jó gyorsan” csökken, de *nem* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ eleme: tizedfokú polinommal szorozva már nem tart nullához. Az $e^{-a|x|}$ függvény sem $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ eleme: noha (az exponenciális miatt) bármilyen polinommal szorozva is nullához tart $\pm\infty$-ben, *nem sima*: x=0-ban nem differenciálható.

Fontos **példa Schwartz-függvényre** viszont a **Gauss-görbe**: $\psi(x)=e^{-\alpha x^2}$, ahol $\alpha>0$. Általánosabb példa: $\psi(x)=e^{-\alpha(\gamma^2+x^2)^\beta}$, ahol $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}^+$. Ezek a függvények tényleg $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ elemei.[23]

• $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ és $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ **vektorterek**, a lineárkombinálás nem vezet ki belőlük.[24] Továbbá ha egy sima függvény kompakt tartójú, akkor gyorsan csökkenő is, hiszen ha *eltűnik* egy korlátos szakaszon kívül, akkor ő is és deriváltjai is 0-hoz is *tartanak* $\pm\infty$-ben, polinommal szorozva is. Tehát $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ lineáris altér $\mathcal{S}(\mathbb{R})$-ben: részhalmaz, és a lineárkombinálás nem vezet ki belőle.

Vajon nem voltunk-e túl szigorúak; **vannak-e egyáltalán $\mathcal{D}(\mathbb{R})$-beli függvények** (a konstans ϕ=0-n kívül, ami triviálisan eleme $\mathcal{D}(\mathbb{R})$-nek, és persze $\mathcal{S}(\mathbb{R})$-nek is)? Megnyugtató **igen** a válasz: $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ is és $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ is végtelen dimenziósak. Amint szükséges lesz (illetve az A.2. függelékben) mutatunk konkrét $\mathcal{D}(\mathbb{R})$-beli függvényeket; *nagyon sokat.* Fontosak lesznek az alábbi 17. ábrán is vázolt fajták (kék és zöld), melyek egy intervallumon konstansok, és „simán” leváltanak 0-ra.

Láttuk, hogy $\mathcal{D}(\mathbb{R})\subset\mathcal{S}(\mathbb{R})$; az előző pont végi példák pedig olyan $\mathcal{S}(\mathbb{R})$-beli függvények (máris *nagyon sok*), amelyek $\mathcal{D}(\mathbb{R})$-nek nem elemei. Tehát $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ *valódi* lineáris altér $\mathcal{S}(\mathbb{R})$-ben.

17. ábra. „Szabadkézi” rajzok $\mathcal{D}(\mathbb{R})$-beli (kompakt tartójú, sima) függvényekről ill. nem $\mathcal{D}(\mathbb{R})$-beli, de sima, gyorsan csökkenő (azaz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$-beli) függvényekről. Ilyenek *tényleg léteznek.*

• $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ és $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ is *vektorterek*, és a $\mathbb{C}$ számhalmaz is az; értelmesek tehát a következő definíciók.

1.) Az olyan $\mathcal{D}(\mathbb{R})\to\mathbb{C}$ lineáris leképezéseket, amelyek ún. „$\mathcal{D}$-értelemben folytonosak”, **disztribúcióknak** hívjuk. Ezek halmazának jele: $\mathcal{D}(\mathbb{R})^*$. (3.4)

2.) Azon $\mathcal{S}(\mathbb{R})\to\mathbb{C}$ lineáris leképezéseket, amelyek ún. „$\mathcal{S}$-értelemben folytonosak”, ***temperált* disztribúcióknak** hívjuk. A halmazuk jelölése: $\mathcal{S}(\mathbb{R})^*$. (3.5)

Az ilyen T lineáris leképezések tehát (megfelelő) ϕ *függvényekhez rendelnek számot.* A T disztribúció által a ϕ-hez **hozzárendelt számot így jelöljük:** $\big(T\big|\phi\big)$.

Végtelen dimenziós esetben foglalkozni kell lineáris leképezések folytonosságával (ami véges dimenzióban mintha fel se merülne). Az „ún. $\mathcal{D}$-értelembeli (röviden: $\mathcal{D}$–)folytonosság” illetve az „ún. $\mathcal{S}$-értelembeli (röviden: $\mathcal{S}$–)folytonosság” a $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ill. az $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ halmazok szerkezetéhez „illeszkedő” folytonosságfogalom. Azonban hál’ Istennek ezen alig múlik valami egyelőre: alább néha

[23] Az első néhány deriváltjukat „elnagyolva” kiszámolva is látható, hogy tényleg *minden* $x\in\mathbb{R}$-re végtelenszer differenciálhatók, és minden deriváltjuk olyan, hogy a szereplő exponenciális tényezőt egy legfeljebb hatványfüggvényként növekvő tényező szorozza. Ezen az se ront, ha még további polinommal szorzunk. Mindenhol az exponenciális csökkenés „győz”: tényleg mindegyik ψ és deriváltjaik is még polinomokkal szorozva is nullához tartanak $x\to\pm\infty$-ben.

[24] Bizonyítás: sima függvények lineárkombinációja nyilván sima. Továbbá: egyrészt kompakt tartójú függvények lineárkombinációja kompakt tartójú: ha $\phi_1(x)$=0, ha $x\notin[a_1,b_1]$ és $\phi_2(x)$=0, ha $x\notin[a_2,b_2]$, akkor van olyan I korlátos intervallum, amire $[a_1,b_1]\cup[a_2,b_2]\subset I$, és nyilván $\alpha\phi_1(x)+\beta\phi_2(x)$=0, ha $x\notin I$. Másrészt gyorsan csökkenő függvények lineárkombinációja gyorsan csökkenő: ha $\lim_{x\to\pm\infty}[p(x)\frac{d^n\psi_1(x)}{dx^n}]=0$ és $\lim_{x\to\pm\infty}[p(x)\frac{d^n\psi_2(x)}{dx^n}]=0$, akkor nyilván $\lim_{x\to\pm\infty}\big[p(x)\frac{d^n}{dx^n}\big(\alpha\psi_1(x)+\beta\psi_2(x)\big)\big]=0$ is igaz. Készen vagyunk.

elmondjuk, hogy minden „rendben van” ezzel; bővebb kifejtés található az A.4. függelékben.

• Ugye $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ lineáris altér. Így egy $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ lineáris leképezés $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ lineáris leképezésnek is tekinthető, ha leszűkítjük, azaz úgy tekintjük, hogy csak $\mathcal{D}(\mathbb{R})$-beli elemekre hat. Ebben az értelemben tehát azt mondhatjuk, hogy $\underline{\underline{\mathcal{S}(\mathbb{R})^* \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})^*}}$.[25] Sőt valódi részhalmaz: fordítva nem működik a dolog; látni fogunk olyan $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ lineáris leképezéseket, amelyek nem terjeszthetők ki „értelmesen” (=folytonosan) a bővebb $\mathcal{S}(\mathbb{R})$-re mint értelmezési tartományra.

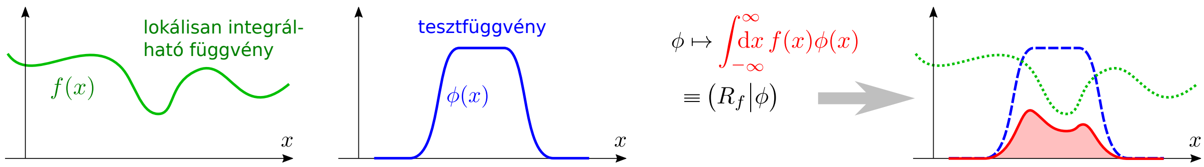
Az elnevezés is illeszkedik ezekhez: a *temperált disztribúciók* tényleg egyúttal *disztribúciók* is.

• Egy függvényt lokálisan integrálhatónak hívtunk, ha integrálható minden korlátos intervallumra. Ilyenek az integrálható függvények, emellett pl. a polinomok, e^x, sőt minden folytonos függvény, stb. is. (Azonban pl. az $\frac{1}{x}$ nem: semmilyen az x=0-t tartalmazó intervallumra nem integrálható.)

A korábbi motiváció alapján **lokálisan integrálható függvényekhez** egy „természetes” disztribúciót ($\mathcal{D}(\mathbb{R})^*$-beli elemet) társítunk.[26] Ő *leképezés* lesz; meg kell mondani, hogy *mit csinál.*

Ha f lokálisan integrálható, akkor legyen R_f a megfelelő ún. **reguláris disztribúció**:

$$\big(R_f\big|\phi\big) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\phi(x). \tag{3.6}$$



18. ábra. Lokálisan integrálható f függvény mint reguláris disztribúció hatása a ϕ tesztfüggvényen.

Bármilyen lokálisan integrálható f esetén tényleg minden $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ alapfüggvényt véve létezik a felírt integrál.[27] Emiatt R_f iménti definíciója *értelmes.* És tényleg *lineáris* leképezést ad meg:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\big[\alpha\phi_1(x)+\beta\phi_2(x)\big] = \alpha\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\phi_1(x) + \beta\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\phi_2(x),$$

$$\text{emiatt valóban:}\quad \big(R_f\,\big|\,\alpha\phi_1+\beta\phi_2\big) = \alpha\cdot\big(R_f\big|\phi_1\big) + \beta\cdot\big(R_f\big|\phi_2\big). \tag{3.7}$$

• Azt csak *mondjuk*, hogy R_f *$\mathcal{D}$-folytonos*, ahogy kell. Így a lokálisan integrálható függvényeket az $f \to R_f$ hozzárendeléssel lényegében *beágyaztuk* a disztribúciók közé. Ez a **beágyazás lineáris**:

$$R_{\alpha f+\beta g} = \alpha R_f + \beta R_g, \quad \text{azaz minden } \phi{\in}\mathcal{D}(\mathbb{R})\text{-re} \quad \big(R_{\alpha f+\beta g}\big|\phi\big) = \alpha\big(R_f\big|\phi\big)+\beta\big(R_g\big|\phi\big). \tag{3.8}$$

Az első jobb oldal disztribúciók mint *lineáris leképezések lineárkombinációja*: az első egyenlőség *definíció szerint* azt jelenti tehát, amit a második állítás mond. Utóbbi azzal egyenértékű, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \big[\alpha f(x)+\beta g(x)\big]\phi(x) = \alpha\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\phi(x) + \beta\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, g(x)\phi(x), \quad \text{ez pedig igaz.}$$

Persze alapkellék (volt), hogy lokálisan integrálható függvények lineárkombinációja is az. *Figyelem:* ne keverjük ezt a (3.8) állítást az előző (3.7)-tel, miszerint maga R_f egy lináris leképezés!

[25]Kiderül az is itt, hogy az eredeti *$\mathcal{S}$-folytonosság* implikálja a leszűkítés *$\mathcal{D}$-folytonosságát*; ezzel sincs gond.

[26]A *disztribúció* szó „eloszlás”-t jelent, mutatva, hogy a fogalom tényleg a lokálisan integrálható függvények eloszlásként való értelmezése nyomán született. (Magyarul legalább van két külön szó *disztribúció*ra és *eloszlás*ra.)

[27]Minden $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ alapfüggvény nulla valamilyen korlátos zárt I intervallumon kívül, az I-n pedig folytonos: ezek miatt van véges K korlát, amivel $|\phi(x)| \le K\chi_I(x)$. Emiatt $|f(x)\phi(x)| \le K|f(x)|\chi_I(x)$. Az f lokális integrálhatósága azt mondja, hogy a $K|f(x)|\chi_I(x)$ függvény integrálható: emiatt az általa majorált $f(x)\phi(x)$ is az; kész.

• Az $f \to R_f$ beágyazás **„lényegében kölcsönösen egyértelmű"** is:

$$R_{f_1}{=}R_{f_2} \text{ (azaz ők mint disztribúciók, mint } \mathcal{D}(\mathbb{R})\to\mathbb{C} \textit{ leképezések} \text{ egyenlők)} \quad \Leftrightarrow \quad \text{akkor és csak akkor, ha } f_1{=}f_2 \text{ majdnem mindenütt.} \tag{3.9}$$

Ez nem nyilvánvaló. Pl. ha $f{=}0$, akkor nyilván $R_f{=}0$ mint leképezés (minden ϕ alapfüggvényhez nullát rendel a fenti integrállal), de az alapfüggvények elég „speciálisak": akár létezhetne is olyan nem majdnem mindenütt nulla f, amivel mégis minden $\mathcal{D}(\mathbb{R})$-beli ϕ-re az $\big(R_f\big|\phi\big)$-t megadó integrál nulla. Kiderül azonban, hogy az alapfüggvények mégiscsak „elég sokan" vannak: ha minden $\big(R_f\big|\phi\big)$ alakú integrál nulla velük, akkor $f{=}0$ majdnem mindenütt. (Ezt kicsit körüljárjuk az A.2. függelékben, az ottani (A.6) állítás környékén.) Ebből pedig a beágyazás lineárissága miatt, $f \equiv f_1{-}f_2$-t gondolva következik az állításunk, mert egyrészt $f_1{=}f_2$ egyenértékű azzal, hogy $f_1{-}f_2 = 0$, másrészt $R_{f_1}{=}R_{f_2}$ egyenértékű azzal, hogy $R_{f_1}{-}R_{f_2} = 0$, vagyis $R_{f_1-f_2} = 0$.

Megjegyzés: a látott (és ezutáni) elvárt „kellemes" alaperedményeket *azért* lehet(ett) bizonyítani, *mert* jó keretet adott (=„sikeres volt") a matematikai fogalomalkotás. Pl. ha alapfüggvényeknek valami szűkebb halmazt választottunk volna, esetleg nem lenne biztos az $f \to R_f$ beágyazás egyértelműsége, bővebb alapfüggvényosztály esetén pedig esetleg csak sokkal speciálisabb f függvények esetén tudnánk R_f-et a látott integrállal értelmesen definiálni.

• Rögtön továbbfűzzük az iménti megjegyzés utolsó gondolatát; előkerült ugyanis $\mathcal{D}(\mathbb{R})$-nél bővebb függvényhalmaz. f lokális integrálhatósága elég ahhoz, hogy az $(R_f|\phi)$-t megadó integrál minden $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ esetén létezzen, így R_f-et mint disztribúciót definiáljuk, de szűkíthetjük a kört:

$$\textbf{Ha } f \text{ olyan, hogy } \textbf{minden } \psi{\in}\mathcal{S}(\mathbb{R})\textbf{-et véve is} \text{ létezik} \quad \big(R_f\big|\psi\big){\equiv}\int_{-\infty}^{\infty}\!\mathrm{d}x\, f(x)\psi(x), \quad \textbf{akkor } R_f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^*\text{: ő } \textbf{temperált} \text{ disztribúció.} \tag{3.10}$$

Ez a feltétel tehát azt biztosítja, hogy egyáltalán értelmes legyen ez a definíció ne csak $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$, hanem $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ lineáris leképezésként is. Ahogy ígértük, azt csak *kimondjuk*, hogy az ilyen R_f $\mathcal{S}$*-folytonos* is: nincs gond; ha a (3.10)-beli feltétel teljesül, akkor R_f tényleg $\mathcal{S}(\mathbb{R})^*$ eleme.[28]

• Mivel $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ bővebb, mint $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, a feltételünk bizonyára **tényleg plusz feltétel f-re**. Nehézkes ezt konkrétan az f tulajdonságaira vonatkozóan általánosan megadni: olyasmi, hogy „nem növekedhet valamilyen értelemben túl gyorsan". (Innen jön a név: *temperált*=kb. „mérsékelt".)

Például ha f polinom, akkor R_f temperált. Ugyanis minden $\psi{\in}\mathcal{S}(\mathbb{R})$ Schwartz-függvény még bármilyen P polinommal szorozva is *integrálható* ($\mathbb{R}$-re), hiszen mivel egy polinom $(1{+}x^2)$-tel szorozva újra csak polinom, az $(1{+}x^2)P(x)\psi(x)$ is nullához kell tartson $\pm\infty$-ben, így legalábbis korlátos: van olyan K, amivel $|P(x)\psi(x)|{\le}\frac{K}{1+x^2}$; utóbbi integrálható, így $P(x)\psi(x)$ is az. Ez (P-t f-fé átjelölve) rögtön adja, hogy ha f polinom, akkor minden $\psi{\in}\mathcal{S}(\mathbb{R})$ esetén létezik $\int_{\mathbb{R}} f\psi$.

Azonban nem fér bele pl. $f(x){=}e^{ax}$ vagy $f(x){=}e^{ax^2}$ ($a{>}0$-val): ők is lokálisan integrálhatók, így léteznek a nekik megfelelő R_f reguláris disztribúciók, de ezek nem temperáltak.[29]

[28]Azért múlnak dolgok a folytonosságon. Az $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *vektortérnek* $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ altere: mondhatnánk pl. hogy minden $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ lineáris leképezést triviálisan kiterjeszthetünk $\mathcal{S}(\mathbb{R})$-re úgy, hogy $\mathcal{D}(\mathbb{R})$-nek valamilyen $\mathcal{S}(\mathbb{R})$-beli kiegészítő alterén nullát vegyen fel. *Ezt így az $\mathcal{S}$-folytonosság követelménye tiltja meg*; ill. ez teszi egyértelművé a $\mathcal{D}(\mathbb{R})$-ről $\mathcal{S}(\mathbb{R})$-re való kiterjesztést (ld. az A.4. függeléket is), ha van ilyen kiterjesztés. Ez *nagyon jó:* enélkül pl. nem lenne egyértelmű, hogy egy reguláris disztribúció esetén az $\mathcal{S}(\mathbb{R})$-beli függvényeken való hatást is a „természetesnek" tűnő (3.10) integrállal *kell* definiálni; persze csak ha ez utóbbi létezik.

[29]Láttunk az $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ halmaz (3.3) definíciója után példát Schwartz-függvényre: $\psi(x){=}e^{-\alpha(\gamma^2+x^2)^\beta}$. Ha $f(x){=}e^{ax}$ vagy $f(x){=}e^{ax^2}$, akkor megfelelően kicsi α, β-t véve olyan ψ-t kapunk, amelyek ilyen f-fel szorozva még mindig exponenciálisan növekvő függvényt adnak, így tehát nem létezhet az $(R_f|\psi)$-t megadó integrál *minden* $\psi{\in}\mathcal{S}(\mathbb{R})$-vel.

3.2. Disztribúció-műveletek

Még legyünk kicsit türelemmel; a következő szakaszban már konkrét példákat is látunk.

• Lokálisan integrálható f függvényekhez tartozik tehát *reguláris disztribúció*, $R_f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$, ennek hatása értelmes a $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ alapfüggvényeken. Ha f „legfeljebb mérsékelten nő”, akkor R_f hatása a $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ Schwartz-függvényeken is értelmes, és R_f temperált disztribúció, $\mathcal{S}(\mathbb{R})^*$ eleme is.

$$R_f \text{ hatása:} \quad \big(R_f\big|\phi\big) = \int_{-\infty}^{\infty}\!\mathrm{d}x\, f(x)\phi(x), \qquad \text{ill. ha létezik:} \quad \big(R_f\big|\psi\big) = \int_{-\infty}^{\infty}\!\mathrm{d}x\, f(x)\psi(x).$$

A **lokálisan integrálható** függvények ilyen $f \to R_f$ beágyazása a disztribúciók közé lineáris és (lényegében) kölcsönösen egyértelmű: ezek nyugtatnak meg, hogy az ilyen **függvények** egyenértékűleg **(reguláris) disztribúciónak** is tekinthetők. Sokszor el is hagyjuk az R_f jelet:

$$\big(R_f\big|\phi\big) \quad \text{helyett időnként így jelölünk:} \quad \big(f\big|\phi\big), \quad \text{ugyanazzal a jelentéssel.} \tag{3.11}$$

• **Vannak nem reguláris disztribúciók is**: ők „igazi” $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ leképezések, és első körben nem felelnek meg függvénynek, de látjuk majd, hogy sokszor ”függvény+kiegészítő utasítás” módjára képzelhetjük őket. Előlegezzük meg, hogy *ők is fontosak*, és velük is olyan „hasznos dolgokat” csinálnánk, mint függvényekkel. Az alábbiakban ezért kiterjesztünk disztribúciókra műveleteket; ez természetesnek fog hatni mindenféle disztribúciókat közelebbről ismerve. Vezérfonál a *„permanencia-elv”*: szeretnénk visszakapni a „rendes” függvényekre ismert dolgokat, ha „visszatettenünk” közéjük. Egyelőre itt is lecsaljuk a $\mathcal{D}$– *ill.* $\mathcal{S}$*-folytonosság* vizsgálatát; ld. később.

* * *

• A disztribúciók lineáris leképezések, ezek módjára **lehet** őket **összeadni és számmal szorozni**:

$$\begin{array}{lcl} \text{Ha } T_1, T_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*, & \Rightarrow & \alpha T_1{+}\beta T_2 \in \mathcal{D}(R)^* \text{ minden } \alpha,\beta{\in}\mathbb{C}\text{-vel; hatása az} \\ \text{akkor nyilvánvalóan} & & \text{alapfüggvényekre: } \big(\alpha T_1{+}\beta T_2\big|\phi\big) = \alpha\big(T_1\big|\phi\big){+}\beta\big(T_2\big|\phi\big). \end{array} \tag{3.12}$$

Nem reguláris disztribúciókat is nyugodtan lineárkombinálhatunk, de ez **visszaadja** persze lokálisan integrálható **függvények** lineárkombinálását (ezt a körülményt hívtuk az $f{\to}R_f$ beágyazás linearitásának): ha éppen $T_1{=}R_{f_1}$ és $T_2{=}R_{f_2}$, akkor láttuk, hogy (rögtön az új (3.11) jelöléssel)

$$\text{minden } \phi\text{-re} \quad \big(\alpha f_1{+}\beta f_2\big|\phi\big) = \alpha\big(f_1\big|\phi\big){+}\beta\big(f_2\big|\phi\big) \quad \Rightarrow \quad \text{tényleg:} \quad \alpha R_{f_1}{+}\beta R_{f_2} = R_{\alpha f_1+\beta f_2}.$$

• Emlékeztető: az a-val jobbra tolás $\hat{L}_a$ operátora $(\hat{L}_a f)(x) = f(x{-}a)$ módon rendeli az f függvényhez az $\hat{L}_a f$ függvényt. Minden T **disztribúció** $\hat{L}_a T$-vel jelölendő **eltoltját is értelmezzük** most. Azt szeretnénk ugye, hogy $\hat{L}_a T$ értelmezése *konzisztens legyen függgvények* eltolásával. Ez úgy értendő, hogy (mivel R_f azonosítható f-vel, $R_{\hat{L}_a f}$ pedig az eltolt $\hat{L}_a f$ függvénnyel) reguláris disztribúciókra $\hat{L}R_f{=}R_{\hat{L}_a f}$ legyen. Vizsgáljuk meg ezt alapfüggvényekre való hatás szempontjából (mert hogy általános T disztribúciókra csakis ez a kérdés): szeretnénk, hogy minden $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$-re

$$\underline{\big(\hat{L}R_f\big|\phi\big)} = \big(R_{\hat{L}_a f}\big|\phi\big) \quad \text{legyen; továbbalakítva (az 1. lépésben egy ide „illeszkedő” } x \to x{+}a \text{ helyettesítéssel:} \quad = \int_{-\infty}^{\infty}\!\mathrm{d}x\,(\hat{L}_a f)(x)\phi(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\!\mathrm{d}x\, f(x{-}a)\phi(x) \overset{1.}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\!\mathrm{d}x\, f(x)\phi(x{+}a) = \int_{-\infty}^{\infty}\!\mathrm{d}x\, f(x)(\hat{L}_{-a}\phi)(x) = \underline{\big(R_f\big|\hat{L}_{-a}\phi\big)} \text{ legyen.}$$

Nem csináltunk disznóságot: ha $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, akkor eltoltja is ugyanolyan jó tulajdonságokkal bír, tehát $\hat{L}_{-a}\phi$ is $\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$: értelmes volt, hogy R_f erre való hatását ismertük fel a végén. Az elejéből-végéből kapott $\big(\hat{L}R_f\big|\phi\big) = \big(R_f\big|\hat{L}_{-a}\phi\big)$ egyenlőség ekvivalens a kiinduló követelményünkkel, viszont ebben R_f helyett bármilyen T disztribúció is „elfér”: ezért a következő „természetes” meghatározást fogadjuk el, ami tehát reguláris disztribúciókra ***visszaadja a*** megfelelő ***függvények eltolását***:

bármilyen $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ esetén $\hat{L}_a T$ legyen az a disztribúció, ami így hat minden $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$-re:
$$\big(\hat{L}_a T\big|\phi\big) = \big(T\big|\hat{L}_{-a}\phi\big). \tag{3.13}$$

A további művelet-általánosításokban is hasonlóan fogunk haladni: úgy alakítjuk a reguláris disztribúciókra megfogalmazott követelményt, hogy az alapfüggvényre „hárítsuk a tennivalót”.

• **Minden T disztribúciónak van** (=értelmezhető a) **deriváltja**, jelben: T', ami szintén disztribúció. Megint csak azt szeretnénk, hogy ez visszaadja függvények deriválását; pontosan körülírva

szeretnénk, hogy ha f lokálisan integrálható, differenciálható, és f' is lokálisan integrálható, akkor $(R_f)' = R_{f'}$ legyen.

Mint fentebb, úgy kapunk ebből a követelményből iránymutatást, ha felírjuk alapfüggvényekre való hatásként, majd „ösztönösen” alakítjuk; a lényeg egy parciális integrálás lesz (a jelölt 1. lépésben).

ha f a mondott fajta, akkor azt szeretnénk, hogy minden $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$-re legyen
$$\big((R_f)'\big|\phi\big) = \big(R_{f'}\big|\phi\big) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f'(x)\phi(x) \overset{1.}{=}$$
$$\overset{1.}{=} \big[f(x)\phi(x)\big]\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\phi'(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\phi'(x) = -\big(R_f\big|\phi'\big).$$

Több „apró részlet” fontos itt. Tényleg kihasználtuk az f-re vonatkozó összes feltételt, és az alapfüggvények jó tulajdonságai is kellettek: *ők* végtelenszer differenciálhatók, kompakt tartójúak (utóbbi miatt nulla a kiintegrált rész), és ezek miatt *a deriváltjuk is ilyen, azaz ϕ' is alapfüggvény:* vonatkoztathatjuk rá R_f hatását. A kapott $\big((R_f)'\big|\phi\big) = -\big(R_f\big|\phi'\big)$ egyenlőségből érezhető, hogy mi az általános definíció (ami tehát a látott „jó” f függvényekre mint disztribúciókra „jól működik”):

Bármely $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ disztribúcióra legyen $T' \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ az a disztribúció, ami így hat:
$$\big(T'\big|\phi\big) = -\big(T\big|\phi'\big). \tag{3.14}$$

Disztribúció deriváltja tehát úgy hat egy alapfüggvényen, mint a disztribúció az alapfüggvény deriváltján -1-gyel szorozva (ez az előjel lényegében a parciális integrálás „miatt” került be).

• Továbblépve: a T' is disztribúció, *őrá is* működik ugyanez. Minden disztribúció **akárhanyadik deriváltja** értelmes tehát. (Itt „aratódik le”, hogy *az alapfüggvények* simák.) Konkrétan:

$$(T''|\phi) = -(T'|\phi') = (T|\phi''), \qquad (T'''|\phi) = -(T''|\phi') = (T'|\phi'') = -(T|\phi'''), \qquad \ldots$$

összefoglalva: egy T disztribúció n-edik deriváltja, $T^{(n)}$, az, ami így hat az alapfüggvényeken:
$$\big(T^{(n)} \,\big|\, \phi\big) = (-1)^n \cdot \big(T \,\big|\, \phi^{(n)}\big).$$

• Érdekes az is, hogy minden R_f reguláris disztribúciónak is létezik deriváltja, akkor is, ha f nem differenciálható, vagy ha az is, f' nem lokálisan integrálható. Lesznek fontos ilyen példák: ilyenkor $(R_f)'$ bizonyára „igazi” (nem reguláris) disztribúció lesz. (És nem $R_{f'}$, ami ekkor nem is létezik).

• Ismert dolog függvények kompozíciója: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Értelmezhetjük **disztribúciók** mindenféle g **függvényekkel való kompozícióját** is, ami szintén disztribúció lesz. (*Figyelem:* ez *nem* az, hogy disztribúciót *hattatunk* alapfüggvényre!) Most végigvezetjük ezt, de a gyakorlatban egyszerűbb lesz ez majd, mint amennyire esetleg az alábbi levezetés bonyolultnak tűnik.

Kelleni fog egy ésszerű korlátozás g-re; mindenesetre a vezérfonál: reguláris disztribúciókra legyen $(R_f)\circ g = R_{f\circ g}$. Ezt alakítjuk, egyelőre megelőlegezve a g-re kellő feltételek teljesülését:

legyen minden ϕ alapfüggvényre $\quad \big((R_f)\circ g\big|\phi\big) = \big(R_{f\circ g}\big|\phi\big) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,(f\circ g)(x)\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,f(g(x))\phi(x) =$

$$= \quad \big(x\to g^{-1}(t)\big) \quad = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\,f(t)\phi\big(g^{-1}(t)\big)\cdot(g^{-1})'(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\,f(t)\frac{\phi(g^{-1}(t))}{g'(g^{-1}(t))} = \big(R_f\big|\tfrac{\phi\circ g^{-1}}{g'\circ g^{-1}}\big).$$

Az átalakítás lelke a jelölt $x{=}g^{-1}(t)$, azaz $g(x){=}t$ integrálási változóhelyettesítés: ez akkor működik biztosan így, ha $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ végtelenszer differenciálható bijekció, melyre g' sehol sem nulla: ekkor g^{-1} is végtelenszer differenciálható, g' sem nulla sehol, a határok tényleg t-ben is $\pm\infty$ lesznek, továbbá a kikapott $\frac{\phi\circ g}{g'\circ g^{-1}}$ is tényleg kompakt tartójú (azaz *t-ben nézve is* egy korlátos zárt intervallumon kívül nulla), továbbá sima is (mivel sima függvények szorzata és kompozíciója): $\frac{\phi\circ g^{-1}}{g'\circ g^{-1}}$ is alapfüggvény tehát, azaz értelmes volt R_f hatását erre vonatkozólag felírni. Az R_f-ekre kapott képlet alapján viszont *definiáljuk* bármilyen T disztribúció és látott fajta g függvény kompozícióját:

Legyen $T\in\mathcal{D}(\mathbb{R})^*$, és $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mondott fajta függvény; ekkor $(T\circ g)\in\mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ az, ami így hat:
$$\big(T\circ g\big|\phi\big) = \big(T\big|\tfrac{\phi\circ g^{-1}}{g'\circ g^{-1}}\big). \tag{3.15}$$

Mint mondtuk, a gyakorlatban egyszerűbb ez, nem kell ilyen „full horror” módjára megjegyezni.

A $g(x)$ lehet pl. $ax{+}b$ lineáris függvény ($a{\neq}0$-val). Az eltolás ennek speciális esete: $\hat{L}_a f$ éppen $f\circ g$, ha $g(x)=x{-}a$. Érdekes a „tükrözés”, $g(x){=}{-}x$, azaz $g{=}{-}\mathrm{id}$ is: ahogy függvényeket, disztribúciókat is hívhatunk párosnak/páratlannak, ha $T\circ(-\mathrm{id})=T$, illetve ha $T\circ(-\mathrm{id})=-T$.

• Disztribúciókat **szorozhatunk „megfelelő” függvényekkel.** $\hat{M}_h$ jelölte a (bármilyen) h függvénnyel szorzás operátorát: bármilyen f függvényre $\hat{M}_h f = hf$. Szeretnénk akármilyen T disztribúcióra is a $\hat{M}_h T$ disztribúciót értelmezni úgy, hogy reguláris (=függvényekkel azonosított) disztribúciókra a „rendes” függvénnyelszorzást kapjuk vissza; körülírva: ha f lokálisan integrálható, és h olyan, hogy hf is lokálisan integrálható, akkor $\hat{M}_h R_f{=}R_{hf}$ legyen.[30] Megint írjuk ezt fel alapfüggvényekre való hatásként, majd alakítsuk; itt annyi lesz a „trükk”, hogy a szorzatokat másképp csoportosítjuk. Szeretnénk tehát, hogy (a mondott fajta h-val és f-fel) minden $\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$-re legyen

$$\big(\hat{M}_h R_f\big|\phi\big) = \big(R_{hf}\big|\phi\big) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,h(x)f(x)\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,f(x)h(x)\phi(x) \overset{1.}{=} \big(R_f\big|h\phi\big), \tag{3.16}$$

ahol az utolsó (kiemelt) lépéshez az kellett, hogy $h\phi$ is alapfüggvénynek legyen tekinthető, azaz R_f rá hatását értelmezhessük. Az elejéből-végéből így kapott $(\hat{M}_h R_f|\phi)=(R_f|h\phi)$ egyenlőség viszont *ekvivalens* az $\hat{M}_h R_f = R_{hf}$ követelménnyel, és előbbibe R_f helyett bármilyen T disztribúció is „elfér”. Ezért a következő definíciót fogadjuk el (ami tehát visszaadja az R_f-re látottakat):

ha $T\in\mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ és $h:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ megfelelő függvény, akkor $\hat{M}_h T\in\mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ az, ami így hat az alapfüggvényeken:
$$\big(\hat{M}_h T\big|\phi\big) = \big(T\big|h\phi\big). \tag{3.17}$$

Akkor értelmes ez, ha a T disztribúció hatása értelmezhető $h\phi$-n. (Lesznek olyan fontos speciális disztribúciók, amelyek hatása értelmezhető az alapfüggvényeken túl másfajta függvényekre is.[31])

[30] A követelmény „nem üres”: pl. $f(x)=1/\sqrt{x}$ integrálható *minden* szakaszra, de ha $h(x)$ is $1/\sqrt{x}$, akkor nem lokálisan integrálható függvényt kapunk: az $1/x$ nem integrálható az $x{=}0$-t tartalmazó (vagy 0 végpontú) szakaszokra.

[31] Tulajdonképpen már a temperált disztribúciók is ilyenek: az ő hatásuk Schwartz-függvényekre *is* értelmes.

Egy általános megállapítás: ha h sima függvény, akkor minden $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ esetén garantáltan $h\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, hiszen a h-val szorzás nem rontja el sem a simaságot, sem a kompakt tartót (ha ϕ nulla egy korlátos intervallumon kívül, akkor $h\phi$ is). A definíciónk alapján tehát *végtelenszer differenciálható függvénnyel bármilyen T disztribúciót megszorozhatunk.* Sejthető esetleg, hogy speciális(abb) fajta T disztribúciókhoz esetleg ennél általánosabb h-kat is megengedhetünk (és kell is majd megengedjünk); az „út vége” az, ha odáig visszamegyünk, hogy igazi függvényeket bármilyen függvénnyel szorozhatunk pontonként, „disztribúciózás” nélkül is.

• **Disztribúciókat egymással szorozni** viszont **általánosan nem lehet**, pedig a fizikában is néha megkísért ez a gondolat. Nincs mindig disztribúcióból a kolbász, abból meg a kerítés. . .

* * *

Kiterjeszthetjük viszont az $\hat{\mathcal{F}}_\pm$ **Fourier-transzformációt minden *temperált* disztribúcióra**; a szakasz maradéka erről szól. $\hat{\mathcal{F}}_\pm$ eddig integrálható függvényekre működött; ők (mint reguláris disztribúciók) tényleg temperált disztribúciók, így valóban *kiterjesztésről* van szó.[32]

• Először is megállapítjuk a következő, még máshol is előkerülő fontos állítást:

ha f és g akármilyen integrálható $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ függvények, akkor
$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\big(\hat{\mathcal{F}}_\pm f\big)(x)\cdot g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,f(x)\cdot\big(\hat{\mathcal{F}}_\pm g\big)(x), \tag{3.18}$$

úgy értve, hogy mindkét integrál létezik, és egyenlők. A lényeg az, hogy pl. a jobb oldalba beírjuk $\hat{\mathcal{F}}_\pm g$ definícióját (másképp, y-nal jelölve az új integrálási változót), így kettős integrálra jutva:

$$\underline{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,f(x)\cdot\big(\hat{\mathcal{F}}_\pm g\big)(x)}=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,f(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\,e^{\pm ixy}g(y)\overset{1.}{=}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,f(x)e^{\pm ixy}g(y)=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\,g(y)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,e^{ixy}f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\,g(y)\cdot\big(\hat{\mathcal{F}}_\pm f\big)(y)=\underline{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\big(\hat{\mathcal{F}}_\pm f\big)(x)\cdot g(x)};$$

a változójelölést visszacserélve ($y\to x$). A kiemelt 1. lépés környékén a *Fubini-tétel* kellett: eszerint ha a kettős integrandus (most $f(x)g(y)e^{\pm ixy}$) *abszolútértéke*, most $|f(x)|\cdot|g(y)|$, integrálható valamelyik sorrendben (most biztosan, mert $f(x)$ és $g(y)$ is integrálhatók), akkor létezik az eredeti kettős integrál is, mindkét sorrendi integrál is (ezt is tudni akartuk), és ezek egyenlők egymással.

• A (3.18) képletbeli integrálok olyan alakúak, mint ha $\hat{\mathcal{F}}_\pm f$ ill. f mint reguláris disztribúciók hatnának g-n ill. $\hat{\mathcal{F}}_\pm g$-n. Utóbbiak persze nem eleve alapfüggvények; Schwartz-függvények között azonban tisztul a helyzet. **Állítás** (a bizonyítást az A.3. függelékre hagyva):

$$\text{Ha } \psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}) \qquad\Rightarrow\qquad \hat{\mathcal{F}}_\pm\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}), \tag{3.19}$$

azaz Schwartz-függvény *Fourier-transzformáltja is* Schwartz-függvény.[33] (Persze tudva tudjuk itt, hogy minden ψ Schwartz-függvénynek *létezik* a Fourier-transzformáltja, hiszen integrálható.[34]) Ezt tudva viszont ha az előző (3.18) megállapításban g helyébe egy ψ Schwartz-függvényt teszünk,

---

[32]Integrálható f-re minden ψ Schwartz-függvény esetén is létezik az $(R_f|\psi)$-t értelmező $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,f(x)\psi(x)$ integrál, mivel ψ biztosan korlátos, $|\psi(x)|\le K$, azaz $|f(x)\psi(x)|\le K|f(x)|$, így ha ez utóbbi integrálható, mint feltettük, akkor az itteni előbbi is. Létezik tehát $(R_f|\psi)$: R_f temperált disztribúció. (Az $\mathcal{S}$*-folytonossággal* eddig sem foglalkoztunk.)

[33]Az, hogy Gauss-görbe Fourier-transzformáltja is Gauss-görbe, ennek egy nagyon speciális esete.

[34]Ugyanis „bőven elég gyorsan” csökken; de ide annyi is elég, hogy $|\psi|$ pl. $(1+x^2)$-tel szorozva is nullához tart $\pm\infty$-ben, és folytonos: így $(1+x^2)|\psi|$ korlátos; $|\psi|\le\frac{K}{1+x^2}$ valamilyen K-val. Így mivel $\frac{K}{1+x^2}$ integrálható, ψ is az.

akkor az *tényleg* reguláris (temperált) disztribúciók Schwartz-függvényeken (ψ-n ill. $\hat{\mathcal{F}}_\pm\psi$-n) való hatására vonatkozó állításként olvasható: ha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ integrálható, és $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, akkor

$$\big(R_{\hat{\mathcal{F}}_\pm f}\,\big|\,\psi\big) = \big(R_f\,\big|\,\hat{\mathcal{F}}_\pm\psi\big). \tag{3.20}$$

• Ebben a képletben viszont R_f helyett bármilyen *temperált* disztribúció „elfér”. Értelmes tehát a bármilyen T temperált disztribúció Fourier-transzformáltját értelmező következő definíció:

ha $T\in\mathcal{S}(\mathbb{R})^*$, akkor $\hat{\mathcal{F}}_\pm T$ az a temperált disztribúció, ami így hat a $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ Schwartz-függvényeken:

$$\underline{\underline{\big(\hat{\mathcal{F}}_\pm T\,\big|\,\psi\big) = \big(T\,\big|\,\hat{\mathcal{F}}_\pm\psi\big).}} \tag{3.21}$$

Minden temperált disztribúciónak van tehát Fourier-transzformáltja, és az is temperált disztribúció. Az előző (3.20) képlet megnyugtat, hogy integrálható f függvények(hez tartozó reguláris disztribúciók) Fourier-transzformáltja továbbra is az, ami eddig: ilyenkor $\hat{\mathcal{F}}_\pm f$ rendes függvény(hez tartozó reguláris disztribúció), és kiszámíthatjuk az $(\hat{\mathcal{F}}_\pm f)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\,e^{\pm ixy}f(y)$ képlettel.

Viszont pl. láttuk, hogy ha f polinom, akkor R_f temperált disztribúció. Ilyennek is *van* Fourier-transzformáltja: ezt nem lehet a felírt integrállal kiszámolni (pl. ha $f(x)=x^2$, akkor nem létezik az $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\,e^{\pm ixy}y^2$ integrál), mégis meg fogjuk tudni konkrétan adni $\hat{\mathcal{F}}_\pm f$-et (ld. a következő szakaszt).

• Még más miatt is „szerencsés húzás” kiterjeszteni a Fourier-transzformációt $\mathcal{S}(\mathbb{R})^*$-ra. Előkerültek korábban a következő **műveleti tulajdonságok** (ld. a 2.4. szakaszban a (2.47) egyenletet):

$$\hat{\mathcal{F}}_\pm\hat{L}_a\overset{1.}{=}\hat{M}_{\exp(\pm ia\cdot\mathrm{id})}\hat{\mathcal{F}}_\pm,\quad \hat{\mathcal{F}}_\pm\hat{D}\overset{2.}{=}\hat{M}_{\mp i\cdot\mathrm{id}}\hat{\mathcal{F}}_\pm,\quad \hat{L}_a\hat{\mathcal{F}}_\pm\overset{3.}{=}\hat{\mathcal{F}}_\pm\hat{M}_{\exp(\mp ia\cdot\mathrm{id})},\quad \hat{D}\hat{\mathcal{F}}_\pm\overset{4.}{=}\hat{\mathcal{F}}_\pm\hat{M}_{\pm i\cdot\mathrm{id}}, \tag{3.22}$$

Ezeket olyan függvényekre hatva engedélyeztük, amelyek (amellett, hogy integrálhatók, tehát korábbi tudásunkkal is értelmes a Fourier-transzformáltjuk) még további feltételeknek tesznek eleget. Kiderül, hogy ezen azonosságok **„természetes közege”** is a **temperált disztribúciók**. Ezt a következő lépések világítják meg (a bizonyításokat részben itt is az A.3. függelékre hagyva):

→ Megint leszűkítéssel indítva: az itteni operátorok (a $\hat{D}$ deriválás, az $\hat{L}_a$ eltolás, és az előkerült függvénnyelszorzások, $\hat{M}_{\exp(\pm ia\cdot\mathrm{id})}$ és $\hat{M}_{\pm i\cdot\mathrm{id}}$) a Schwartz-függvények közül nem vezetnek ki.

→ Azok a tulajdonságok, amelyeket azon függvényekre, amelyekre hatni akarunk, ki kell(ett) kötni, hogy az azonosságaink igazak legyenek, Schwartz-függvényekre automatikusan teljesülnek.

→ *Értelmeztük* az előkerült operátorok hatását disztribúciókra, és kiderül, hogy nem vezetnek ki a *temperált* disztribúciók közül. Az alábbi (bármilyen ψ Schwartz-függvényre való hatást felíró) átalakítások alapján így az azonosságaink minden $T\in\mathcal{S}(\mathbb{R})^*$ esetén igaznak bizonyulnak:

$$\begin{aligned}
1.)\quad (\hat{\mathcal{F}}_\pm\hat{L}_a\,T\,|\,\psi) &= (\hat{L}_aT\,|\,\hat{\mathcal{F}}_\pm\psi) = (T\,|\,\hat{L}_{-a}\hat{\mathcal{F}}_\pm\psi) \overset{3.}{=} (T\,|\,\hat{\mathcal{F}}_\pm\hat{M}_{\exp(\pm ia\cdot\mathrm{id})}\psi) = \\
&= (\hat{\mathcal{F}}_\pm T\,|\,\hat{M}_{\exp(\pm ia\cdot\mathrm{id})}\psi) = (\hat{M}_{\exp(\pm ia\cdot\mathrm{id})}\hat{\mathcal{F}}_\pm\,T\,|\,\psi),\\
2.)\quad (\hat{\mathcal{F}}_\pm\hat{D}\,T\,|\,\psi) &= (\hat{D}T\,|\,\hat{\mathcal{F}}_\pm\psi) = -(T\,|\,\hat{D}\hat{\mathcal{F}}_\pm\psi) \overset{4.}{=} -(T\,|\,\hat{\mathcal{F}}_\pm\hat{M}_{\pm i\cdot\mathrm{id}}\psi) = \\
&= -(\hat{\mathcal{F}}_\pm T\,|\,\hat{M}_{\pm i\cdot\mathrm{id}}\psi) = -(\hat{M}_{\pm i\cdot\mathrm{id}}\hat{\mathcal{F}}_\pm T\,|\,\psi) = (\hat{M}_{\mp i\cdot\mathrm{id}}\hat{\mathcal{F}}_\pm\,T\,|\,\psi),\\
3.)\quad (\hat{L}_a\hat{\mathcal{F}}_\pm\,T\,|\,\psi) &= (\hat{\mathcal{F}}_\pm T\,|\,\hat{L}_{-a}\psi) = (T\,|\,\hat{\mathcal{F}}_\pm\hat{L}_{-a}\psi) \overset{1.}{=} (T\,|\,\hat{M}_{\exp(\mp ia\cdot\mathrm{id})}\hat{\mathcal{F}}_\pm\psi) = \\
&= (\hat{M}_{\exp(\mp ia\cdot\mathrm{id})}T\,|\,\hat{\mathcal{F}}_\pm\psi) = (\hat{\mathcal{F}}_\pm\hat{M}_{\exp(\mp ia\cdot\mathrm{id})}\,T\,|\,\psi),\\
4.)\quad (\hat{D}\hat{\mathcal{F}}_\pm\,T\,|\,\psi) &= -(\hat{\mathcal{F}}_\pm T\,|\,\hat{D}\psi) = -(T\,|\,\hat{\mathcal{F}}_\pm\hat{D}\psi) \overset{2.}{=} -(T\,|\,\hat{M}_{\mp i\cdot\mathrm{id}}\hat{\mathcal{F}}_\pm\psi) = \\
&= -(\hat{M}_{\mp i\cdot\mathrm{id}}T\,|\,\hat{\mathcal{F}}_\pm\psi) = -(\hat{\mathcal{F}}_\pm\hat{M}_{\mp i\cdot\mathrm{id}}T\,|\,\psi) = (\hat{\mathcal{F}}_\pm\hat{M}_{\pm i\cdot\mathrm{id}}\,T\,|\,\psi).
\end{aligned}$$

A korábban látott operátor-definíciókat használtuk oda-vissza (az előzőek alapján tudva, hogy „legálisan”, mert tényleg Schwartz-függvényekre való hatások kerültek elő), a számozott egyenlőségekben pedig a(z eddig csak a feltételeket teljesítő függvényekre érvényes) kellő, az előző (3.22) felidézésben beszámozott tulajdonságokat használtuk (jogosan); igen-igen figyelve az előjelekre. Leszűrtük tehát, hogy a tárgyalt, most még egyszer felírt tulajdonságok temperált disztribúciók között valódi *egyenlőségek*, minden $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^*$-ra egységesen értelmes és igaz átalakítás-lehetőségek:

$$\begin{aligned} &\mathbf{1.)}\quad \hat{\mathcal{F}}_\pm \circ \hat{L}_a = \hat{M}_{\exp(\pm ia\cdot\mathrm{id})} \circ \hat{\mathcal{F}}_\pm, &&\mathbf{3.)}\quad \hat{L}_a \circ \hat{\mathcal{F}}_\pm = \hat{\mathcal{F}}_\pm \circ \hat{M}_{\exp(\mp ia\cdot\mathrm{id})},\\ &\mathbf{2.)}\quad \hat{\mathcal{F}}_\pm \circ \hat{D} = \hat{M}_{\mp i\cdot\mathrm{id}} \circ \hat{\mathcal{F}}_\pm, &&\mathbf{4.)}\quad \hat{D} \circ \hat{\mathcal{F}}_\pm = \hat{\mathcal{F}}_\pm \circ \hat{M}_{\pm i\cdot\mathrm{id}}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

• Most, hogy $\hat{\mathcal{F}}_\pm$ hatása minden $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^*$ temperált disztribúcióra értelmes, és $\hat{\mathcal{F}}_\pm T$ is temperált disztribúció, látjuk, hogy utóbbira is értelmes $\hat{\mathcal{F}}_\mp$ hatása, azaz az $\hat{\mathcal{F}}_\pm \hat{\mathcal{F}}_\mp$ operáció minden $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^*$-re értelmes és újra $\mathcal{S}(\mathbb{R})^*$-ba képez. Az állítás pedig az (amit már sokszor ígértünk, de még mindig csak a következő szakaszban bizonyítjuk be teljesen, mert ott lesz kézenfekvő), hogy a Fourier-transzformációk „inverzségi” tulajdonsága $\mathcal{S}(\mathbb{R})^*$-on tényleg rendes *egyenlőségként* igaz:

$$\hat{\mathcal{F}}_\pm \hat{\mathcal{F}}_\mp = \hat{I}, \quad \text{minden temperált disztribúcióra értelmezetten.} \tag{3.24}$$

• Az eddigiek alapján mondjuk, hogy a Fourier-transzformáció „természetes közege” a temperált disztribúciók $\mathcal{S}(\mathbb{R})^*$ halmaza. Utolsó megjegyzés: az, hogy éppen a *temperált* disztribúciókra sikerült kiterjeszteni a Fourier-transzformációt a (3.21) „áttevős” képlettel, a (3.19) tulajdonságon múlott, miszerint ha $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, akkor $\hat{\mathcal{F}}_\pm \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ha igaz lenne ilyen a $\mathcal{D}(\mathbb{R})$-beli alapfüggvényekre is, akkor minden disztribúcióra is működhetne a kiterjesztés. Sajnos azonban ha $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, akkor $\hat{\mathcal{F}}_\pm \phi$ továbbra is $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ eleme (merthogy ugye $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, azaz $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ is igaz), de kiderül (ld. az A.3. függeléket), hogy garantáltan $\hat{\mathcal{F}}_\pm \phi \notin \mathcal{D}(\mathbb{R})$. A látott módon tehát nem tudjuk $\hat{\mathcal{F}}_\pm$-t minden disztribúcióra kiterjeszteni: pl. a nem temperált disztribúciót meghatározó e^x függvénynek nincs értelmes Fourier-transzformáltja nemhogy függvények, de disztribúciók között sem.

* * *

• Az alapgondolat mindegyik e szakaszban látott (disztribúciókra való) művelet-kiterjesztésnél ugyanaz volt: „transzponált”ként, az alapfüggvényre „áthárítva” kellett kezelni az operátorok hatásait. Át is fogalmazhatjuk ennek megfelelően a látottakat: ha $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$, akkor

$$\text{minden } \phi \text{ alapfüggvényt véve}\quad \begin{aligned} (\hat{L}_a T \,|\, \phi) &= (T \,|\, \hat{L}_{-a}\phi)\\ (\hat{M}_h T \,|\, \phi) &= (T \,|\, \hat{M}_h \phi)\\ (T' \,|\, \phi) &= (T \,|\, -\phi') \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned} \hat{L}_a T &= T \circ \hat{L}_{-a},\\ \hat{M}_h T &= T \circ \hat{M}_h,\\ \hat{D} T &= T \circ (-\hat{D}), \end{aligned}$$

illetve $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^*$ esetén, azaz temperált disztribúciókra a Fourier-transzformációt is így írhatjuk:

$$\text{minden } \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\text{-re } (\hat{\mathcal{F}}_\pm T \,|\, \psi) = (T \,|\, \hat{\mathcal{F}}_\pm \psi) \quad\Leftrightarrow\quad \hat{\mathcal{F}}_\pm T = T \circ \hat{\mathcal{F}}_\pm.$$

• A *$\mathcal{D}$-folytonosság* ill. *$\mathcal{S}$-folytonosság* vizsgálata abban állna, hogy mivel disztribúciókra ill. a temperált disztribúciókra követelmények ezek, be kell most látni, hogy ha T mint $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ leképezés $\mathcal{D}$-folytonos, akkor $T \circ \hat{L}_{-a}$ is, $T \circ, \hat{M}_h$ is és $T \circ (-\hat{D})$ is az, illetve ha T $\mathcal{S}$-folytonos, akkor $T \circ \hat{\mathcal{F}}_\pm$ is az: ezek jogosítanak fel visszamenőleg, hogy disztribúcióként értelmeztük disztribúció eltoltját, deriváltját, függvényszeresét, Fourier-transzformáltját. Ezen a folytonosság-kérdésen, mint mondtuk, alig múlik valami egyelőre; az A.4. függelékben megvizsgáljuk a megpendített kérdéseket.

• Addig is a következő szakaszban *megismerkedünk „igazi” disztribúciókkal*. . .

3.3. Dirac-delta

• Sok más matematikai fogalomhoz hasonlóan a Dirac-delta is a fizikában bukkant fel,[35] és lényegében az „ő kedvéért” építették ki (kicsit később) a disztribúcióelméletet.[36] Most (nem követve a történelmet) nyakon öntjük magunkat a Dirac-deltával mint disztribúcióval; felbukkannak majd azok a tulajdonságok, amelyek nyomán annak idején bevezették. Legyen $a\in\mathbb{R}$ egy adott „pont”.

Definíció: az a-ra koncentrált ***Dirac-delta***, jele: δ_a, az a disztribúció, ami így hat a $\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ alapfüggvényeken:

$$\big(\delta_a \,\big|\, \phi\big) = \phi(a). \tag{3.25}$$

Az a=0-ra koncentrált Dirac-delta jele most δ: $$\big(\delta \,\big|\, \phi\big) = \phi(0). \tag{3.26}$$

• A δ_a Dirac-delta mint leképezés tehát *kiértékel*; nyilvánvaló, hogy ez lináris leképezés, $\mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ eleme.[37] Továbbá δ_a **temperált** disztribúció, azaz $\mathcal{S}(\mathbb{R})^*$ eleme is: minden $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ Schwartz-függvényt is ki lehet értékelni, nemcsak $\mathcal{D}(\mathbb{R})$-beli (kompakt tartójú) alapfüggvényeket.[38]

Megjegyzés: mondhatnánk, hogy *bármilyen függvényre* értelmes δ_a hatása, hiszen ki lehet értékelni. Ha *csak ennyit* várnánk el, igazunk lehetne, de ne siessük el: sok alábbi, Dirac-deltával kapcsolatos képlet első körben alapfüggvényekre vagy Schwartz-függvényekre való hatást szem előtt tartva működik csak; ami mégis igaz általánosabban is, azt majd pontosan körülírjuk.

• Egyszerű de fontos, hogy Dirac-delta **eltoltja az eltolt** pontra koncentrált Dirac-delta:

$$\hat{L}_a\delta_b = \delta_{a+b}, \qquad \text{speciálisan:}\quad \hat{L}_a\delta = \delta_a, \tag{3.27}$$

hiszen δ_a iménti (3.25) ill. a disztribúciók eltolásának előző szakaszbeli (3.13) definíciója alapján:

$$\text{minden } \phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})\text{-re}\quad \big(\underline{\hat{L}_a\delta_b} \,\big|\, \phi\big) = \big(\delta_b \,\big|\, \hat{L}_{-a}\phi\big) = (\hat{L}_{-a}\phi)(b) = \phi(a{+}b) = \big(\underline{\delta_{a+b}} \,\big|\, \phi\big).$$

• Ha δ_a reguláris disztribúció lenne, akkor létezne a lokálisan integrálható $\delta(x{-}a)$ függvény, az ún. ***„Dirac-****féle* ***deltafüggvény”*** (ami az előző pont alapján a nullára koncentrált δ-hoz tartozó $\delta(x)$ függvény a-val eltoltja lenne; rögtön így írtuk itt). Mivel definíciónk szerint $(\delta_a|\phi)=\phi(a)$, ezért

erre a $\delta(x{-}a)$-ra igaz lenne, hogy minden $\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ esetén

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\delta(x{-}a)\phi(x) = \phi(a). \tag{3.28}$$

Ha I zárt, I' pedig őt tartalmazó nyílt intervallum, akkor van olyan $\phi_{I,I'}\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, ami I'-n kívül nulla, I-n pedig 1 (ld. az A.2. függelékszakaszban is). Ha I olyan, hogy $a\notin I$, akkor vehetünk olyan I'-t, amire $I\subset I'$, de a még I'-nek sem eleme. Így $\phi_{I,I'}(a)$=0, vagyis az iménti (3.28)-ban írt integrál is nulla lenne, abban a határesetben is, amikor az I'-t ráhúzzuk I-re. Ha viszont I olyan, hogy $a\in I$, akkor $\phi_{I,I'}(a)$=1, így az I'-t I-re ráhúzva kapott határesetben is 1 lenne az integrál.

Tehát bármilyen b_1, b_2 intervallumhatárokra igaz lenne, hogy

$$\int_{b_1}^{b_2}\mathrm{d}x\,\delta(x{-}a) = \begin{cases} 0, \text{ ha } a\notin[b_1,b_2], \\ 1, \text{ ha } a\in[b_1,b_2]. \end{cases} \tag{3.29}$$

A $\delta(x{-}a)$ tehát az a-ban lévő egységnyi **pontszerű eloszlás** (pl. ponttöltés) **„sűrűségfüggvénye”** lenne: ha I tartalmazza a-t, akkor I-hez 1-et rendel, ha nem, akkor 0-t.

[35] 1930 körül; a névadó Paul A. M. *Dirac* 20. századi *fizikus* volt, a kvantummechanika egyik „alapító atyja”.

[36] Visszatekintés: a (mai precízséghez képest mondva) ”kézzel-lábbal” deriválás-integrálás Newton/Leibniz idejéből (17. század) származik, de a matematikai fogalmak csak a 19. század végére/20. század elejére ülepedtek le.

[37] Függvények lineárkombinációjának kiértékeltje tényleg az értékek lineárkombinációja; ez már-már körkörös.

[38] Azt most is csak *mondjuk*, hogy δ_a mint $\mathcal{D}(\mathbb{R})\to\mathbb{C}$ lineáris leképezés tényleg $\mathcal{D}$*-folytonos* (és ebből következően ő mint $\mathcal{S}(\mathbb{R})\to\mathbb{C}$ lineáris leképezés $\mathcal{S}$*-folytonos* is); erről szokás szerint az A.4. függelékszakaszban lesz szó.

Ilyen *függvény* viszont nincsen: *minden* olyan intervallumra nulla lenne az integrálja, ami a-t nem tartalmazza, és ez csak úgy lehetne, ha majdnem mindenütt nulla lenne a $\mathbb{R}\setminus\{a\}$ halmazon, de akkor a (nulla mértékű) $\{a\}$ halmazt hozzávéve az lenne az egész $\mathbb{R}$-en is. Így ő csakis a $0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ nulla-disztribúciót határozhatná meg, nem rendelhetne $\phi(a)$-t olyan ϕ-hez, amire $\phi(a){\neq}0$.

Összefoglalva: a $\delta(x{-}a)$ függvény nem létezik; δ_a **nem reguláris disztribúció**.

Értelmes tehát az, hogy $(\delta_a|\phi) = \phi(a)$, *de nem* értelmes *az*, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta(x{-}a)\phi(x) = \phi(a). \tag{3.30}$$

A fizikusi irodalomban sokszor **mégis ez utóbbi alakot használják**, mintha *létezne* a látott megfelelő tulajdonságú Dirac-féle deltafüggvény, $\delta(x)$, és olyanokat mondanak, hogy ő „közönséges értelemben nem függvény”, „általánosított függvény”, „csak az integráljel alatt van értelme”. Ezek mind ugyanazt takarják: a δ_a mint $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ leképezés (disztribúció) értelmes, $(\delta_a|\phi) = \phi(a)$; a felírt (3.30)-beli $\delta(x)$ függvény pedig értelmetlen, de úgy tekinthetjük, hogy a (3.30)-beli integrálalak „így egyben egy szimbólum”, ami δ_a definícióját mint hozzárendelési utasítást fejezi ki.

• A Dirac-deltát egyfajta **határértékként** is tekinthetjük. Vegyünk egy integrálható $f(x)$ függvényt, amire $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x) = 1$, és egy $\lambda{>}0$ paraméterrel készítsük el az f_λ függvényt a körül λ-szoros összeszűkítéssel ill. $\frac{1}{\lambda}$-szoros függőleges nyújtással. Ez a következő módon felírt függvényt jelenti:

$$f_\lambda(x) := \tfrac{1}{\lambda} \cdot f\big(a{+}\tfrac{x-a}{\lambda}\big).$$

Nyilvánvaló, és a változót „visszacsináló” $x = a{+}\lambda(t{-}a)$ helyettesítéssel is látható, hogy

minden λ-ra is az f_λ integrálja is 1:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f_\lambda(x) \overset{1.}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, f(t) = 1,$$
mert $\frac{dx}{dt}{=}\lambda$ kiejti $\frac{1}{\lambda}$-t, és a határok t-ben is $\pm\infty$ lettek.

A $\lambda{\to}0$ eset lesz érdekes: ekkor f_λ az a körül **„végtelenül keskeny, végtelenül csúcsos”** függvénnyé válna. Ha f olyan, hogy léteznek a $\lim_{x\to\pm\infty} xf(x)$ határértékek, akkor f integrálhatósága miatt ezek csakis nullák lehetnek, és ekkor $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ is igaz: ilyenkor fix x-et véve

$$\text{ha } x{\neq}a, \text{ akkor} \qquad \lim_{\lambda\to 0} f_\lambda(x) = \lim_{a+\frac{x-a}{\lambda}\to\infty} \Big\{ \big(\tfrac{1}{\lambda}\big) \cdot f\big(a{+}\tfrac{1}{\lambda}\cdot(x{-}a)\big) \Big\} = 0,$$

$x{=}a$-ban pedig ha $f(a){=}0$, akkor $f_\lambda(a){=}0$, ha viszont $f(a){\neq}0$, akkor $\lim_{\lambda\to 0} |f_\lambda(a)|{=}\infty$. Mindenesetre ekkor az f_λ függvénysorozat pontonkénti (függvény)határértéke majdnem mindenütt nulla. Ha pedig nem létezik $\lim_{x\to\pm\infty} xf(x)$ vagy $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$, (ettől még f lehet integrálható, ld. a korábbi 13. lábjegyzetet is), akkor nincsen pontonkénti $\lim_{\lambda\to 0} f_\lambda$ függvényhatárérték.

Érdekes viszont az f_λ-k **„disztribúció-értelemben vett határértéke”**, vagyis hogy mihez tartanak az R_{f_λ} reguláris disztribúciók, azaz $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ alapfüggvényekre az $(R_{f_\lambda}|\phi)$-k. ***Állítás:***

ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrálható függvény, és $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x) = 1$, akkor az előző f_λ-kkal

$$\underline{\underline{\lim_{\lambda\to 0} R_{f_\lambda} = \delta_a}}, \tag{3.31}$$

vagyis konkrétan: minden $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ alapfüggvényre

$$\lim_{\lambda\to 0} \big(R_{f_\lambda}|\phi\big) = \lim_{\lambda\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f_\lambda(x)\phi(x) = \phi(a). \tag{3.32}$$

• Ez utóbbi alak a kvintesszenciális példa arra, amikor a határértéket *nem* cserélhetjük fel az integrálással: láttuk az imént, hogy a $\lim_{\lambda\to 0} f_\lambda(x)$ pontonkénti függvényhatárérték vagy nem létezik, vagy majdnem mindenütt nulla, most viszont $\phi(a)$ az eredmény (és nem nulla).

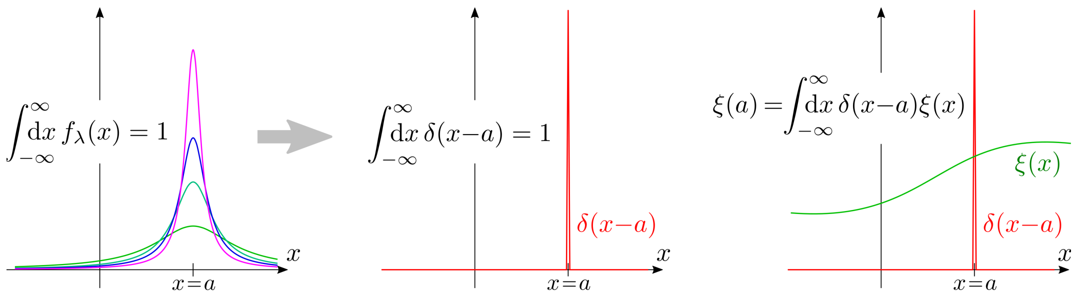
Az $f_\lambda(x)$-ben elvégzett, a nyújtásokat visszacsináló (az alábbi 1. lépésbeli) változóhelyettesítés,

$x=a+\lambda(t-a)$ segítségével láthatjuk be a (3.32) állítást. Sőt rögtön kicsit általánosabban is: ha a $\xi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ függvény korlátos (van olyan K, hogy $|\xi(x)|\leq K$ minden x-re), és a-ban folytonos, akkor

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\, f_\lambda(x)\xi(x) = \lim_{\lambda\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\, \tfrac{1}{\lambda} f\big(a+\tfrac{x-a}{\lambda}\big)\xi(x) \overset{1.}{=} \lim_{\lambda\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\, f(t)\xi\big(a+\lambda(t-a)\big) \overset{2.}{=}$$

$$\overset{2.}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\, f(t) \lim_{\lambda\to 0}\xi(a+\lambda(t-a)) \overset{3.}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\, f(t)\xi(a) = \xi(a)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\, f(t) = \xi(a).$$

A 2. lépésben kihasználtuk, hogy a Lebesgue-tétel alapján *ebben az alakban már megcserélhetjük* az integrálást a határértékképzéssel: a ξ K korlátjával a $K|f(t)|$ jó λ-tól független integrálható majoránsnak. A 3. lépésben ξ a-beli folytonosságát használtuk: $\lim_{\lambda\to 0}\xi(a+\lambda(t-a)) = \xi(a)$. A ϕ alapfüggvényeink teljesítik a ξ-re megkövetelteket: ennyi elég is róluk; beláttuk a (3.32) állítást.



19. ábra. A(z a-ra koncentrált) Dirac-delta megközelítése egyre csúcsosabb függvényekkel.

- Ez alapján (is) úgy képzelhetjük a δ_a Dirac-deltát, hogy a $\delta(x-a)$ egy olyan „függvény”, amire

ha $x\neq a$, akkor $\delta(x-a)=0$, $x=a$-ban $\delta(a-a)=\delta(0)=\infty$, és $\delta(0)$ „annyira végtelen”, hogy ráadásul
$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\, \delta(x-a) = 1. \tag{3.33}$$

Ezek egyenértékűek a korábbi (3.29) megfogalmazással: egy I intervallumra $\int_I \delta(x-a)\mathrm{d}x=1$, ha $a\in I$, és $\int_I \delta(x-a)\mathrm{d}x=0$, ha $a\notin I$; továbbra sincs ilyen függvény, de mégis gondolhatjuk úgy, hogy ő az összehúzott-nyújtott függvények (látott módon disztribúció-értelmű) határesete. Erre (is) gondolhatunk, amikor δ_a hatását ilyen $\delta(x-a)$ „függvénnyel” fejezzük ki. Még egyszer:

azt szokták írni tehát, hogy
$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\, \delta(x-a)\xi(x) = \xi(a),$$

ezt is gondolhatjuk úgy, hogy a végtelenül csúcsos egységnyi területű $\delta(x-a)$ „függvény” a $\xi(a)$ értéket „szemeli ki”, amivel szorzódik az ő integrálja (ami 1 lenne $\xi(a)$ nélkül).

- Néhány példa a Dirac-delta ilyen megközelítésére (mindegyik f-re tényleg $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\, f(x) = 1$):

$$\begin{array}{llll}
\text{Lorentz:} & f(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+(x-a)^2}, & f_\lambda(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda}\cdot\dfrac{1}{1+\big(\frac{x-a}{\lambda}\big)^2}, & \lim\limits_{\lambda\to 0} R_{f_\lambda} = \delta_a, \\
\text{Gauss:} & f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\big(-\frac{1}{2}(x-a)^2\big), & f_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\big(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-a)^2\big), & \lim\limits_{\sigma\to 0} R_{f_\sigma} = \delta_a, \\
\text{Dobogó:} & f(x) = \frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}(x-a), & f_b(x) = \frac{1}{2b}\chi_{[-b,b]}(x-a), & \lim\limits_{b\to 0} R_{f_b} = \delta_a.
\end{array}$$

ahol σ-val ill. b-vel is jelöltük a nullához tartandó „szélességet”. *Megjegyzés:* a 19. ábrán is és a példáinkban is az összehúzandó/nyújtandó kiindulási f függvénynek eleve a-ban van a „közepe”, de ez nem kötelező: ahhoz, hogy $\lim_{\lambda\to 0} R_{f_\lambda} = \delta_a$ legyen, elég, ha f integrálható, és integrálja 1.

• A látott fajta értelmezéshez a Dirac-delta többi műveleti lehetősége is szépen illeszkedik.[39]

$$\text{Állítás:}\qquad \hat{M}_g\delta_a = g(a)\cdot\delta_a,$$

azaz a g függvénnyel való szorzástól csak a $g(a)$ értékkel mint számmal szorzódik a Dirac-delta. Tényleg ezt adja az, ahogyan disztribúciók függvénnyel szorzottját értelmeztük az előző szakaszban:

$$\big(\underline{\hat{M}_g\delta_a}\,\big|\,\phi\big) = \big(\delta_a\big|\hat{M}_g\phi\big) = (\hat{M}_g\phi)(a) = g(a)\phi(a) = g(a)\cdot\big(\delta_a\big|\phi\big) = \big(\underline{g(a)\delta_a}\,\big|\,\phi\big),$$

ha pedig a delta-függvényes jelölést használjuk, akkor így írhatjuk *ugyanezt*:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\!\mathrm{d}x\, g(x)\delta(x{-}a)\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\!\mathrm{d}x\,\delta(x{-}a)g(x)\phi(x) = g(a)\phi(a) = g(a)\int_{-\infty}^{\infty}\!\mathrm{d}x\,\delta(x{-}a)\phi(x).$$

Végtelenszer differenciálható $g(x)$ függvénnyel ugye bármilyen disztribúciót szorozhatunk; ezen iménti képletet érvényesnek vehetjük akkor is, ha g-re csak annyi teljesül, hogy folytonos a-ban. Speciálisabban: ha $\xi(x)$ olyan, mint fentebb: korlátos és a-ban folytonos, és g olyan, hogy $g\xi$ is ilyen, akkor a határértékes változat is működik: az f_λ „összehúzott" függvényekkel

$$\lim_{\lambda\to 0} R_{f_\lambda} = \delta_a \qquad\Rightarrow\qquad \lim_{\lambda\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\!\mathrm{d}x\, g(x)f_\lambda(x)\xi(x) = g(a)\xi(a).$$

Ha éppenséggel $g(a){=}0$, (és a g függvény a látott módon „elég jó", azaz pl. sima), akkor a g-vel való szorzás δ_a-t a 0-ba, azaz a (minden alapfüggvényhez nullát rendelő) nulla-disztribúcióba viszi:

$$\text{Ha } g(a){=}0, \text{ akkor}\quad \hat{M}_g\delta_a = 0,\quad \text{szimbolikusan:}\quad g(x)\delta(x{-}a) = 0.$$

• Érdekes lesz „visszafelé" is ez. Legyen a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ függvény egyelőre végtelenszer differenciálható, és olyan, hogy pontosan egy adott a helyen nulla, $g(a){=}0$, viszont $g'(a){\neq}0$. Ha az a kérdés, hogy milyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *függvény* lehet az, amit ezzel a g-vel szorozva azonosan nullát kapunk, $\hat{M}_g f=0$, akkor a válasz: az $f(a)$ érték bármi lehet, máshol viszont $f{=}0$ konstans nulla kell, hogy legyen.

Ha viszont bármilyen (nem feltétlenül reguláris) $T\in\mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ disztribúciót megengedve keresünk olyan T-t, amire $\hat{M}_g T=0$, akkor éppen a fentebb látott lehetőség, az a-ra koncentrált Dirac-delta számszorosa (α-szorosa) a válasz (aminek persze a nulla-disztribúció (ami egyúttal a majdnem mindenütt nulla függvényhez tartozó reguláris disztribúció) tényleg speciális esete, $\alpha{=}0$-t véve):

$$T\in\mathcal{D}(\mathbb{R})^*,\quad \hat{M}_g T = 0 \qquad\Rightarrow\qquad T = \alpha\cdot\delta_a,\quad \text{ahol } \alpha{\in}\mathbb{C}. \tag{3.34}$$

A fentebbiek szerint $T=\alpha\cdot\delta_a$ tényleg ilyen; az állításunk az, hogy csakis ez ilyen. A bizonyításhoz egyszer ötlet kellett. Bármilyen $\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ alapfüggvénnyel elkészíthetjük a következő ϕ_{g1} függvényt: legyen $\phi_{g1}(x){=}\frac{\phi(x)-\phi(a)}{g(x)}$, ha $x{\neq}a$, és $\phi_{g1}(a){=}\frac{\phi'(a)}{g'(a)}$. Ugye $g(a){=}0$ (és csakis a-ban nulla); a ϕ_{g1} a-beli értékét az $x{\to}a$ határátmenet „sugallja" (ha $\phi_{g1}(x) = \frac{\phi(x)-\phi(a)}{x-a}\cdot\frac{x-a}{g(x)-g(a)}$ alakba írjuk). Ez a ϕ_{g1} függvény végtelenszer differenciálható: $x{=}a$ az egyetlen kérdéses pont, de itt is az.[40] Vegyünk ezután egy olyan (nagy) I intervallumot, amiben ϕ tartója „bőségesen" benne van. Van ugye olyan

[39] Már az eltolás is illeszkedik, hiszen $\delta(x{-}a)$ módon írtuk/írjuk a $\delta(x)$ „függvény" eltoltját, célozva az $x\to x{+}a$ változóhelyettesítés lehetőségére, amivel lényegében disztribúciók eltoltját (alapfüggvényre hatásként) értelmeztük.

[40] Ha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ n-szer differenciálható a egy környezetében, akkor $f_a(x):=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ függvénynek (melynek a-beli értékét értelemszerűen $f'(a)$-ként definiáljuk) $n{-}1$-szer differenciálható a-ban, és $f_a^{(k)}(a) = \frac{1}{k+1}f^{(k+1)}(a)$. (Ezt a l'Hospital-szabály sorozatos alkalmazásával láthatjuk be; ha működne a *Taylor-sorfejtés a* körül, akkor egyszerűbben is menne, de most nem tettünk fel analitikusságot.) Mindenesetre ebből következik, hogy a $\frac{\phi(x)-\phi(a)}{x-a}$ és a $\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ függvények is végtelenszer differenciálhatók a-ban, így a hányadosuk, ϕ_{g1} is az. (A nevező $g'(a)$ ugye nem nulla.)

kompakt tartójú sima $\phi_{I,I'}$ alapfüggvény, ami I-n konstans 1: egyrészt emiatt $\phi\cdot\phi_{I,I'}=\phi$, másrészt a $\phi_{g1}\cdot\phi_{I,I'}$ függvény kompakt tartójú sima: ő is alapfüggvény. Továbbá ahogy legyártottuk ϕ_{g1}-et, abból nyilvánvaló, hogy $g\cdot\phi_{g1}\cdot\phi_{I,I'}=\phi\cdot\phi_{I,I'}-\phi(a)\cdot\phi_{I,I'}=\phi-\phi(a)\cdot\phi_{I,I'}$. (Mindjárt látjuk, hogy *ezért* vezettük be ϕ_{g1}-et így.) A keresett T-re vonatkozó feltétel (minden eredeti ϕ esetén is) erre a $\phi_{g1}\cdot\phi_{I,I'}$ alapfüggvényre való hatásként is igaz; T linearitását is kihasználva

$$\begin{aligned}\big(\hat{M}_g T\,\big|\,\phi_{g1}\phi_{I,I'}\big)=0 \quad &\Rightarrow \quad \big(T\,\big|\,g\phi_{g1}\phi_{I,I'}\big)=0 \quad \Rightarrow\\ &\Rightarrow \quad \big(T\,\big|\,\phi-\phi(a)\cdot\phi_{I,I'}\big)=0 \quad \Rightarrow \quad \big(T\,\big|\,\phi\big)=\phi(a)\cdot\big(T\,\big|\,\phi_{I,I'}\big).\end{aligned}$$

Az $\alpha\equiv(T\,|\,\phi_{I,I'})$ definícióval tényleg azt kaptuk, hogy valóban minden ϕ-re (a kiindulási ϕ akármilyen alapfüggvény lehetett!) igaz, hogy $(T|\phi)=\alpha\phi(a)$, azaz $T=\alpha\cdot\delta_a$ tényleg.[41]

•

3.4. Általánosítás többdimenziós értelmezési tartományra

3.5. Néhány további példa-számolás

---

[41]Olyan, mintha az α függhetne attól, hogy milyen nagy I-t és megfelelő $\phi_{I,I'}$-t veszünk. *Nem függhet ettől* (hacsak $\operatorname{Supp}\phi\subset I$ már teljesül): máskülönben nem is lenne ilyen T, de a $T{=}\alpha\delta_a$-ról már tudjuk, hogy ilyen.

A. függelék: Kiegészítések

A.1. Fourier-sorok néhány konvergenciatulajdonsága

• Vizsgáljuk meg először azt a függvényt, ami a $[0,T]$ szakaszon **egy darab lépcső**. Az $a{=}\frac{T}{2}$ speciális eset volt a 2.2. szakasz első példája. A mostani általánosabb eset:

$$f(t) = \chi_{[0,a]}(t) = \begin{cases} 1, \text{ ha } 0<t<a, \\ 0, \text{ ha } a\le t\le T, \end{cases} \qquad \begin{matrix} \text{ahol } a \text{ egy adott } 0<a<T \text{ érték; itt „vált".} \\ \text{(Más } t\text{-kre pedig: periodikus } T \text{ szerint.)} \end{matrix}$$

Az együtthatók kifejezése itt (ami $a{=}\frac{T}{2}$-re tényleg visszaadja a 2.2. szakaszbeli speciális esetet):

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, f(t) e^{-in\frac{2\pi}{T}t} = \frac{1}{T}\int_0^a \mathrm{d}t\, e^{-in\frac{2\pi}{T}t} = \ldots = \begin{cases} \frac{a}{T}, \text{ ha } n{=}0, \text{ és} \\ \frac{1}{2\pi i n}\big(1-e^{-2\pi i n\frac{a}{T}}\big), \text{ ha } n{\neq}0. \end{cases}$$

• **Állítás:** az ezen együtthatókkal írt **Fourier-sor $f(t)$-hez konvergál** minden t-ben (feltételesen, ld. alább), kivéve az ugráspontokban, ahol $\frac{1}{2}$-et ad. Ez az $a{=}\frac{T}{2}$ esetre látszott a 2.2. szakaszbeli 5. ábrán; most megnézzük „képlettel" is. Az alábbi módon írt sorösszegről beszélünk:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{2\pi}{T}t} \equiv c_0{+}\mathcal{X}, \quad \mathcal{X} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} c_k e^{ik\frac{2\pi}{T}t} + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} c_{-k} e^{-ik\frac{2\pi}{T}t} = 2\,\mathrm{Re}\left[\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} c_k e^{ik\frac{2\pi}{T}t}\right],$$

ahol különvettük a nulladik tagot és a pozitív ill. a negatív indexű tagokat, utóbbiakban rögtön átjelöltünk $k\to -k$ módon, és kihasználtuk, hogy esetünben $c_{-k}=c_k^*$, így mivel $(e^{ik\frac{2\pi}{T}t})^*{=}e^{-ik\frac{2\pi}{T}t}$, egy negatív indexű részletösszeg a tükrözött pozitív részletösszeg konjugáltja: valós részre jutottunk. Beírjuk a c_k-kat, rendezzük az exponenciálisokat, és kihasználjuk, hogy $\mathrm{Re}\, z = \mathrm{Im}(iz)$:

$$\mathcal{X} = 2\,\mathrm{Re}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(e^{i\frac{2\pi}{T}t})^k-(e^{i\frac{2\pi}{T}(t-a)})^k}{2\pi i k} = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{z_2^k}{k}-\frac{z_1^k}{k}\right]. \quad \text{ahol} \quad \begin{matrix} z_1 \equiv e^{i\frac{2\pi}{T}(t-a)}, \\ z_2 \equiv e^{i\frac{2\pi}{T}t}. \end{matrix} \tag{A.1}$$

Az előkerült sor $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k} = -\,\mathrm{Ln}(1{-}z)$, ami a konvergenciakör határán, $|z|{=}1$ esetén is működik, hacsak $z{\neq}1$ (ld. pl. a „Komplex függvénytan" jegyzet C.5. függelékében). Most éppen $|z_1|{=}|z_2|{=}1$, és $z_2{=}1$ ill. $z_1{=}1$ éppen akkor, ha $t{=}nT$ ill. $t{=}a{+}nT$; ezek az ugrópontok. Zárjuk ki őket most:

$$\begin{matrix}\text{ha } t\neq a{+}nT \\ \text{és } t\neq nT:\end{matrix} \quad \mathcal{X} = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\big[\mathrm{Ln}(1{-}z_1){-}\mathrm{Ln}(1{-}z_2)\big] = \frac{1}{\pi}\big[\arg(1{-}e^{i\frac{2\pi}{T}(t-a)}){-}\arg(1{-}e^{i\frac{2\pi}{T}t})\big]. \tag{A.2}$$

Kössük ki, hogy $t\in[0,T]$ lehet (de $t{\neq}0$, $t{\neq}a$, $t{\neq}T$). Egyszerűsítve, figyelve az értékkészletre[42]

$$\arg\big(1{-}e^{i\frac{2\pi}{T}(t-a)}\big) = \begin{cases} \frac{\pi}{T}(t{-}a){+}\frac{\pi}{2}, \text{ ha } 0<t<a, \\ \frac{\pi}{T}(t{-}a){-}\frac{\pi}{2}, \text{ ha } a<t<T, \end{cases} \quad \begin{matrix}\text{és hacsak} \\ 0<t<T:\end{matrix} \quad \arg\big(1{-}e^{i\frac{2\pi}{T}t}\big) = \frac{\pi}{T}t{-}\frac{\pi}{2},$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{X} = \begin{cases} \frac{t}{T}{-}\frac{a}{T}{+}\frac{1}{2}{-}\big(\frac{t}{T}{-}\frac{1}{2}\big) = 1{-}\frac{a}{T}, \text{ ha } 0<t<a, \\ \frac{t}{T}{-}\frac{a}{T}{-}\frac{1}{2}{-}\big(\frac{t}{T}{-}\frac{1}{2}\big) = -\frac{a}{T}, \text{ ha } a<t<T. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c_0{+}\mathcal{X} = \begin{cases} 1, \text{ ha } 0<t<a, \\ 0, \text{ ha } a<t<T. \end{cases}$$

Utoljára még a $c_0 = \frac{a}{T}$ együtthatót is visszatéve megkaptuk az eredeti keresett sorösszeget.[43]

A $t{=}0$ ugráspontban $z_2{=}1$, a $t{=}a$-ban pedig $z_2{=}1$; vegyük a $t{=}0$-t, ekkor $z_2{=}1$. Visszatérünk

[42] Rajzzal, körrel/háromszögekkel könnyű belátni, hogy $\arg(1{-}e^{i\varphi}) = \frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{2}$, hacsak $0{<}\varphi{<}2\pi$. Ha φ nem ide esik, akkor a megfelelő számú 2π-vel eltolt (a jelölt tartományba eső) értéket kell beírni helyette; ez kell az első taghoz.

[43] *Megjegyzés:* az „argumentum-odafigyelés" pont behozta a kívánt ugrást. Az $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k}$ sorösszegére $-\,\mathrm{Ln}(1{-}z)$ helyett más(hol vágott) változatot is használhatnánk, de csak olyat, ami analitikus a $|z|{<}1$ körön: mivel biztosan a $z{=}1$ az elágazási pont, a fázisugrás tényleg pont ilyen módon jelenik meg mindenképpen.

az (A.1) képlethez: Im folytonos függvény, bevihetjük a határértékbe, így a csupa valós tagok eltűnnek. A maradékban pedig megint $-\,\mathrm{Ln}(1-z)$ hatványsora jön be, ami z_1-ben is működik:

$$\mathcal{X}(t{=}0) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-(e^{-2\pi i\frac{a}{T}})^k}{k} = -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(e^{-2\pi i\frac{a}{T}})^k = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\,\mathrm{Ln}\left(1-e^{-2\pi i\frac{a}{T}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\arg\left(1-e^{-2\pi i\frac{a}{T}}\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\pi\frac{a}{T}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}-\frac{a}{T} \qquad\Rightarrow\qquad \underline{\underline{c_0+\mathcal{X}(t{=}0) = \frac{1}{2}}}.$$

Mint az előbb, kibontottuk az argumentumot, és még a $c_0{=}\frac{a}{T}$-t is visszaadtuk. Kijött tehát, hogy a megcélzott Fourier-sor a $t{=}0$ ugráspontban tényleg a kétoldali 0 és 1 számtani közepét, $\frac{1}{2}$-et ad; lássuk be lényegében pont ugyanígy, hogy ugyanez jön ki a $t{=}a$ ugráspontban is!

• Eredendően az előzőekkel nem egyenértékű, de nagyon fontos állítás, és most részletesen belátjuk, hogy a vizsgált Fourier-sorösszeg a kiindulási lépcsőfüggvényhez tart az $L^2([0,T])$ **Hilbert-térbeli értelemben is** . Sőt ez a konvergencia feltétlen: $\mathcal{I}$-vel jelölve a $\mathbb{Z}$ indexhalmaz véges részhalmazát akármilyen $\mathcal{I}\to\mathbb{Z}$ határátmenetet tekinthetünk, azaz akármilyen sorrendben egyre több tagot bevehetünk az összegbe (hacsak végül az összes bekerül). Ezt így jelöljük alább: $\lim_{\mathcal{I}\to\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathcal{I}}$.

Ismerve az ilyen Hilbert-térbeli konvergencia jelentését a kérdés:

$$\lim_{\mathcal{I}\to\mathbb{Z}}\int_0^T\!\mathrm{d}t\left|\chi_{[0,a]}(t)-\sum_{k\in\mathcal{I}}c_k e^{ik\frac{2\pi}{T}t}\right|^2 \overset{?}{=} 0, \tag{A.3}$$

vagy kiírva az abszolútértéket, elvégezve a szorzásokat, és tudva $\chi_{[0,a]}(t)$ jelentését (és hogy valós):

$$\lim_{\mathcal{I}\to\mathbb{Z}}\int_0^T\!\mathrm{d}t\left[\chi_{[0,a]}(t)-\sum_{k\in\mathcal{I}}c_k^* e^{-ik\frac{2\pi}{T}t}\right]\left[\chi_{[0,a]}(t)-\sum_{k'\in\mathcal{I}}c_{k'} e^{ik'\frac{2\pi}{T}t}\right] = \lim_{\mathcal{I}\to\mathbb{Z}}\Bigg\{\int_0^T\!\mathrm{d}t\,\chi_{[0,a]}(t)-$$

$$-\sum_{k\in\mathcal{I}}c_k^*\underbrace{\int_0^T\!\mathrm{d}t\,\chi_{[0,a]}(t)e^{-ik\frac{2\pi}{T}t}}_{=Tc_k}-\sum_{k'\in\mathcal{I}}c_{k'}\underbrace{\int_0^T\!\mathrm{d}t\,\chi_{[0,a]}(t)e^{ik'\frac{2\pi}{T}t}}_{=Tc_{k'}^*}+\sum_{k\in\mathcal{I}}\sum_{k'\in\mathcal{I}}c_k^*c_{k'}\underbrace{\int_0^T\!\mathrm{d}t\,e^{ik'\frac{2\pi}{T}t}e^{-ik\frac{2\pi}{T}t}}_{=T\delta_{kk'}}\Bigg\}\overset{?}{=}0.$$

Közben éppen megjelentek a $\chi_{[0,a]}(t)$, azaz a vizsgált függvényünk Fourier-együtthatóit megadó integrálok, illetve az utolsó tagban pedig a komplex Fourier-sort megideologizáló integrál. Elvégezve az összegzéseket és egyszerűsítve az állításunk a következő (beírva végül c_k konkrét kifejezését is):

$$\lim_{\mathcal{I}\to\mathbb{Z}}\left\{a-T\sum_{k\in\mathcal{I}}c_k^*c_k-T\sum_{k'\in\mathcal{I}}c_{k'}c_{k'}^*+T\sum_{k\in\mathcal{I}}\sum_{k'\in\mathcal{I}}\delta_{kk'}c_k^*c_{k'}\right\} = a-T\lim_{\mathcal{I}\to\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathcal{I}}|c_k|^2\overset{?}{=}0,$$

$$\text{azaz:}\quad \lim_{\mathcal{I}\to\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathcal{I}}|c_k|^2 = \frac{a^2}{T^2}+\lim_{\mathcal{I}\to\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathcal{I}}^{k\neq 0}\left|\frac{1-e^{-2\pi ik\frac{a}{T}}}{2\pi ik}\right|^2 = \frac{a^2}{T^2}+\lim_{\mathcal{I}\to\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathcal{I}}^{k\neq 0}\frac{1-\cos\left(k\frac{2\pi a}{T}\right)}{2\pi^2k^2}\overset{?}{=}\frac{a}{T}.$$

A $k{=}0$-s tagot (c_0-t) különvettük a maradék összegtől. A kapott összeg tényleg abszolút (=feltétlen) konvergens. A kérdés tehát (felismerve, hogy áttérhetünk képzetes exponenciálisra, mert annak képzetes része a $k\leftrightarrow -k$ szimmetria miatt kiesik, és az $\alpha=\frac{a}{T}$ jelölést használva):

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}^{k\neq 0}\frac{1-\cos\left(k\frac{2\pi a}{T}\right)}{2k^2}\overset{?}{=}\frac{a\pi^2}{T}-\frac{a^2\pi^2}{T^2},\qquad \text{azaz:}\quad \sum_{k\in\mathbb{Z}}^{k\neq 0}\frac{1-e^{2\pi ik\alpha}}{k^2}\overset{?}{=}2\pi^2\alpha(1-\alpha).$$

Ilyen összeget komplex integrállal lehet kiszámolni; az ötletek több hasonlót ismerve jönnek (és a második átírás is ehhez igazodott). Tömören írom le, rajzoljunk, ellenőrizzünk magunknak!

Tekintsük a következő függvényt, ahol egyelőre $\beta\in\mathbb{R}^+$ paraméter:

$$f(z) = \frac{1-e^{2\pi i\alpha z}}{e^{2\pi iz}-1}\,\frac{2\pi i}{z^2+\beta^2}.$$

Ennek elsőrendű pólusai vannak $\pm i\beta$-ban ill. a $z{=}0$-n kívüli (ami megszüntethető szingularitás) $z{=}k{\in}\mathbb{Z}$ egész számokban; a reziduum utóbbiakban $\frac{1-e^{2\pi i\alpha k}}{k^2+\beta^2}$, majdnem az összeadandóink. Ezen felül a függvény a valós tengelytől eltávolodva *mindkét irányban* korlátos marad (ez az exponenciálisok szempontjából azon is múlik, hogy határozottan $0<\alpha<1$), sőt, az $\frac{1}{z^2+\beta^2}$ miatt még $\sim\frac{1}{|z|^2}$ módon csökken is: mindkét félsíkon egy végtelenbe fújt félkörívre vett integrálja nulla.

Azt játszhatjuk el tehát, amit a „Komplex függvénytan" jegyzet 5.2. szakaszának utolsó példájában: a sorösszeget felírjuk, mint a nulladik tagot plusz a $k{\in}\mathbb{Z}$, $k{\neq}0$ pólusokat pozitív irányban megkerülő kis körintegrálok összegét, majd ezeket összefűzve és két végtelen nagy félkörívvel bezárva az utat két darabban átdobjuk a csak $i\beta$-t és $-i\beta$-t negatív irányban megkerülő utakká:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}^{k\neq0}\frac{1-e^{2\pi ik\alpha}}{k^2+\beta^2}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}^{k\neq0}\operatorname{Res}f(z)\Big|_{z=k}=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k\in\mathbb{Z}}^{k\neq0}\oint^{(k+)}\mathrm{d}z\,f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint^{(i\beta-)}\mathrm{d}z\,f(z)+\frac{1}{2\pi i}\oint^{(-i\beta-)}\mathrm{d}z\,f(z)=$$

$$=-\operatorname{Res}f(z)\Big|_{z=i\beta}-\operatorname{Res}f(z)\Big|_{z=-i\beta}=\ldots=\frac{\pi}{\beta}\left[\frac{1-e^{-2\pi\alpha\beta}}{1-e^{-2\pi\beta}}-\frac{e^{2\pi\alpha\beta}-1}{e^{2\pi\beta}-1}\right].$$

Már csak venni kell ennek $\beta{\to}0$ határesetét; ellenőrizzük, hogy valóban $2\pi^2\alpha(1-\alpha)$ adódik.[44] Végülis beláttuk az (A.3) állítást: a lépcső Fourier-sora Hilbert-térbeli értelemben is visszaadja őt.

* * *

• A 2.2. szakasz elején egy speciális, de széles körben érvényes állítást tettünk függvények Fourier-sorának konvergenciájáról (mely az imént vizsgált lépcső esetétől diszjunkt eset). T szerint periodikus függvényeket vizsgálunk. **Legyen f legalább kétszer differenciálható** az egész $\mathbb{R}$-en (a kijelölt szakaszhatárokon, pl. 0-ban és T-ben is), **és legyen f'' is integrálható** $[0,T]$-re.[45] *Két* parciális integrálással (mindkétszer az $e^{-in\frac{2\pi}{T}t}$-t tekintve a deriváltnak) azt kapjuk, hogy $n{\neq}0$-ra

$$c_n=\frac{1}{T}\int_0^T\!\mathrm{d}t\,f(t)e^{-in\frac{2\pi}{T}t}=\underline{\left[\frac{f(t)}{T}\frac{e^{-in\frac{2\pi}{T}t}}{-in\frac{2\pi}{T}}\right]\Bigg|_{t=0}^{t=T}}-\frac{1}{T}\int_0^T\!\mathrm{d}t\,f'(t)\frac{e^{-in\frac{2\pi}{T}t}}{-in\frac{2\pi}{T}}=\frac{1}{2\pi in}\int_0^T\!\mathrm{d}t\,f'(t)e^{-in\frac{2\pi}{T}t}=$$

$$=\underline{\left[\frac{f'(t)}{2\pi in}\frac{e^{-in\frac{2\pi}{T}t}}{-in\frac{2\pi}{T}}\right]\Bigg|_{t=0}^{t=T}}-\frac{1}{2\pi in}\int_0^T\!\mathrm{d}t\,f''(t)\frac{e^{-in\frac{2\pi}{T}t}}{-in\frac{2\pi}{T}}=\frac{-T}{4\pi^2n^2}\int_0^T\!\mathrm{d}t\,f''(t)e^{-in\frac{2\pi}{T}t},$$

Az aláhúzott kiintegrált részek nullák voltak a periodikusság miatt. Tudva, hogy ha f'', akkor $|f''|$ is integrálható $[0,T]$-re, a szokásos abszolútértékes integrálbecsléssel innen arra jutunk, hogy

$$|c_n|=\frac{T}{4\pi^2n^2}\left|\int_0^T\!\mathrm{d}t\,f''(t)e^{-in\frac{2\pi}{T}t}\right|\le\frac{T}{4\pi^2n^2}\int_0^T\!\mathrm{d}t\,\left|f''(t)e^{-in\frac{2\pi}{T}t}\right|=\frac{T}{4\pi^2n^2}\int_0^T\!\mathrm{d}t\,\left|f''(t)\right|,$$

vagyis azt kaptuk, hogy a c_n együtthatók abszolútértékben kellemesen elég gyorsan csökkennek:

a feltételeink teljesülése esetén (*figyelem: tényleg mindegyik kellett!)* ha $n{\neq}0$, akkor $$|c_n|\le\frac{K}{n^2},\quad\text{ahol }K=\frac{T}{4\pi^2}\int_0^T\!\mathrm{d}t\,\left|f''(t)\right|.$$

[44] A sorösszeg $\beta{\to}0$ határértéke tényleg egyenlő a tagonkénti $\beta{\to}0$ határértékek (az $\frac{1}{k^2}$-es eredeti összeadandók) sorösszegével. Itt is a *Lebesgue-tételre* hivatkozunk úgy, hogy a végtelen összegzést integrálnak fogjuk fel, ahol az integrandus az egyes tagok által kijelölt „magasságú", k-tól $k{+}1$-ig terjedő egység szélességű lépcsőkből összerakott függvény, melynek integrálja éppen a k-ra vett sorösszeg. A β-tól független integrálható majoráns szerepére ekkor olyan sorösszeg kell, ami létezik, és tagonként abszolútértékben nagyobb, mint akármilyen β-ra a vizsgált sorösszeg megfelelő tagja. Esetünkben gondoljuk ki, hogy jó lesz erre pl. $\sum_{k\in\mathbb{Z}}^{k\neq0}\frac{2}{k^2}$. Tényleg kicserélhetjük tehát a $\beta{\to}0$ határértéket a sorösszegzéssel, azaz vehetünk tagonként $\beta{\to}0$-t.

[45] Ha f'' létezik az egész $\mathbb{R}$-en, akkor f' folytonos $\mathbb{R}$-en, speciálisan a *zárt* $[0,T]$ szakaszon is. Emiatt f' korlátos is $[0,T]$-n, azaz f' biztosan integrálható is $[0,T]$-re. Ezt tehát nem kell külön feltennünk most.

Emiatt a $|c_n|$-ek összegezhetők $n\in\mathbb{Z}$-re. Az ún. Weierstrass-kritérium alapján (ld. a „Komplex függvénytan” jegyzet B.3. függelékében) ebből következik, hogy **esetünkben** maga **a Fourier-sor pontonként abszolút és egyenletesen konvergens** mindenhol (mivel most a $|c_n|$-ek itt a függvénysor, azaz a Fourier-sor tagjainak a szuprémumai is, hiszen $\left|c_n e^{i\frac{2\pi}{T}t}\right| = |c_n|$).

• A vizsgált esetben a Fourier-sor sorösszege **tényleg a kiindulási** $f(t)$. Ez *nem következik* az előző pont eredményeiből; tudni kell még, hogy a Fourier-bázisfüggvények (az összes $e^{in\frac{2\pi}{T}t}$, $n\in\mathbb{Z}$) halmaza *teljes rendszer* az $L^2([0,T])$ Hilbert-térben („elég sokan” vannak). Ez azt jelenti, hogy

ha $f \in L^2([0,T])$, akkor az ő Fourier-sora *Hilbert-térbeli értelemben is* f-et adja ki:

$$\lim_{\mathcal{I}\to\mathbb{Z}} \int_0^T \mathrm{d}t \left| f(t) - \sum_{k\in\mathcal{I}} c_k e^{ik\frac{2\pi}{T}t} \right|^2 = 0. \tag{A.4}$$

A mostani feltételeinknek megfelelő f-ek négyzetesen integrálhatók $[0,T]$-re, azaz $L^2([0,T])$ elemei, és láttuk, hogy a Fourier-soruk $[0,T]$-n egyenletesen konvergens. Emiatt (a *Lebesgue-tétel* egy következményeként) az iménti (A.4)-ben a határértéket bevihetjük az integrálba:

$$\int_0^T \mathrm{d}t \left| f(t) - \lim_{\mathcal{I}\to\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathcal{I}} c_k e^{ik\frac{2\pi}{T}t} \right|^2 = 0 \qquad \Rightarrow$$

mivel az integrandus nemnegatív, ő majdnem mindenütt nulla kell legyen.

Vagyis $f(t)$ majdnem mindenütt egyenlő a sorösszeggel, de mivel f is és (az egyenletes konvergencia miatt) a sorösszeg is folytonos, igaziból *mindenütt* egyenlőség kell, hogy legyen. Kész.

A.2. $\mathcal{D}(\mathbb{R})$-beli alapfüggvények néhány tulajdonsága

• A 3.1. szakaszban bevezettük a kompakt tartójó végtelenszer differenciálható (sima) $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ függvények $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ halmazát. Kérdés lehet, hogy a triviális konstans nullán kívül *van-e egyáltalán* ilyen függvény. Az alábbiakhoz esetleg idézzük fel a „Komplex függvénytan” jegyzet 4.1. szakaszát.

Azért merülhet fel a kérdés, mert sok „kellemes” sima függvény *analitikus is* (=mindenhol hatványsorba fejthető), és ha egy analitikus függvény kiterjedt halmazon (mint most: a megkövetelt kompakt tartón kívül) nulla, akkor mindenhol az. Azonban ami egyszer plusz fejfájás volt, az most szerencse: *igenis vannak* sima de nem analitikus $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ függvények; most ezekből kiindulva „felépítünk” $\mathcal{D}(\mathbb{R})$-beli (más szempontból is jó tulajdonságú) függvényeket, rögtön *igen sokat* is.

1. Azt találtuk, hogy a következő függvény mindenhol sima (az egyetlen kérdéses $x{=}0$ pontban is):

$$\phi_0(x) =: \begin{cases} 0, \text{ ha } x\le 0, \\ e^{-1/x}, \text{ ha } x>0; \end{cases} \tag{A.5}$$

ld. a „Komplex függvénytan” jegyzet 4.1. szakaszát.

   Megvizsgálva az $x{=}0$-beli bal oldali deriváltakat (triviálisan mind 0-k) és a jobb oldali deriváltakat (amelyek $x\to 0+$ esetén mind 0-hoz tartanak) kiderült, hogy ez a ϕ_0 sima $x{=}0$-ban is (és minden deriváltja 0 itt), azonban itt nem analitikus (hatványsora azonosan nullát állítana elő).

2. Következő lépésként az előző függvény $\mathbb{R}^+$-beli menetét az $x = \frac{t}{1-t}$ helyettesítéssel a t változó szempontjából $t\in\,]0,1[$-beli menetbe „zsúfoljuk bele”:

$$\phi_1(t) := \begin{cases} 0, \text{ ha } t\le 0, \\ e^{-\frac{t}{1-t}}, \text{ ha } 0<t<1, \\ 1, \text{ ha } t\ge 1. \end{cases}$$

beláthatjuk az előző mintára, hogy ez a ϕ_1 minden $t\in\mathbb{R}$-re sima (de $t{=}0$-ban és $t{=}1$-ben nem analitikus).

3. Legyenek most $a<b$ akármilyen valós számok: az előző függvényt eltolhatjuk/nyújthatjuk víz-

szintesen, hogy $t{=}0$ és $t{=}1$ helyett a $t{=}a$ és $t{=}b$ értékeknél váltson át 0-ból 1-be:

$$\phi_{a,b}(t) := \phi_2\!\left(\tfrac{t-a}{b-a}\right).$$

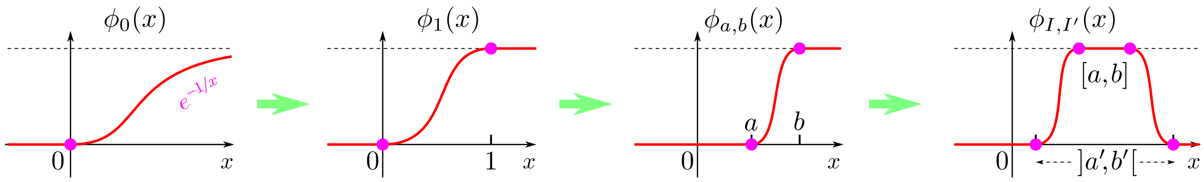
Mindenhol sima, $t{=}a$-ban és $t{=}b$-ben nem analitikus, és

$$\phi_{a,b}(t) = \begin{cases} = 0, \text{ ha } t{\le}a, \\ \in [0,1], \text{ ha } a{<}t{<}b, \\ = 1, \text{ ha } t{\ge}b. \end{cases}$$

4. Végül legyenek $a'{<}a{<}b{<}b'$ akármilyen valós számok (határozottan nem egyenlők): ekkor a zárt $I \equiv [a,b]$ intervallum része az $I' \equiv]a',b'[$ nyílt intervallumnak. Legyen az előző függvénnyel

$$\underline{\underline{\phi_{I,I'}(x) := \phi_{a',a}(x) - \phi_{b,b'}(x).}}$$

Ez is sima, I'-n kívül nulla, és I-n belül 1.



20. ábra. Az imént megkonstruált $\mathcal{D}(\mathbb{R})$-beli függvényekhez vezető gondolatmenet.

• Vegyük szemügyre az alábbi más alakú függvényt is, ami hasonló, mint eme utóbbi $\phi_{I,I'}$:

Legyenek $r{<}R$ pozitív valós számok, és legyen

$$\xi_{r,R}(x) := \frac{\phi_0(R^2{-}x^2)}{\phi_0(R^2{-}x^2) + \phi_0(x^2{-}r^2)}.$$

ahol ϕ_0 a fentebbi kiindulási (A.5)-beli függvény. Gondoljuk ki ϕ_0 tulajdonságai alapján, hogy

1.) $\xi_{r,R}(x)$ jól definiált (a nevező sehol sem nulla), és tényleg sima (mert ilyenekből épül fel),

2.) ha $|x|{\ge}R$, akkor $\xi_{r,R}(x){=}0$, ha $|x|{\le}r$, akkor $\xi_{r,R}(x){=}1$, ha pedig $r{<}|x|{<}R$, akkor $0{<}\xi_{r,R}(x){<}1$.

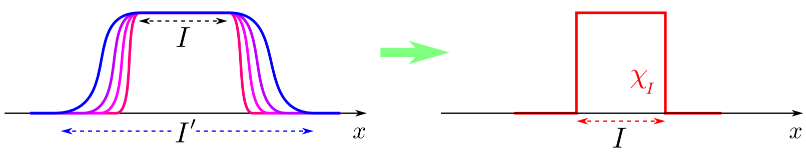
A $\xi_{r,R}$-et eltolva tehát olyan függvényt kapunk, ami egy intervallumon kívül nulla, egy benne szimmetrikusan elhelyezkedő kisebb részintervallumon 1, közöttük pedig simán átvált. Ez kicsit speciálisabb, mint a fentebbi $\phi_{I,I'}$ függvény, de jobb lesz a többdimenziós általánosításhoz.

• Találtunk tehát sok kompakt tartójú sima függvényt. Ilyenekből továbbiakat gyárthatunk: bármilyen sima függvénnyel őket újfent $\mathcal{D}(\mathbb{R})$-beli függvényekre jutunk. A legfontosabbak mégis ezek, amelyek egy intervallumon konstans 1-ek, mert velük megközelíthetjük a lépcsős függvényeket:

az $I'{\equiv}]a',b'[$ intervallumot az $I{\equiv}[a,b]$-re kívülről, $a'{\to}\,a{-}0$ és $b'{\to}\,b{+}0$ módon ráhúzva pontonként

$$\lim_{I'\to I} \phi_{I,I'}(x) = \chi_{[a,b]}(x).$$

Az ábrán szép láthatóan nagyobb I'-ből indulunk az I-re való ráhúzás során, de jó tudatosítani, hogy a határátmenet kiinduló *nyílt* I'-je elég, ha csak akármilyen kicsit nagyobb a *zárt* I-nél.



21. ábra. Intervallum karakterisztikus függvényének $\mathcal{D}(\mathbb{R})$-beli függvényekkel való megközelítése.

• A lépcsőfüggvények ilyen megközelítése a reguláris disztribúciók megalapozásának egy fontos lépése. Legyen $U{\subset}\mathbb{R}$ nyílt részhalmaz, és legyen f olyan lokálisan integrálható függvény, amire igaz, hogy minden olyan $\phi{\in}\mathcal{D}(\mathbb{R})$ alapfüggvényre, ami U-n kívül azonosan nulla, $\big(R_f\big|\phi\big){=}0$.

Vegyünk bármilyen $I \equiv [a,b] \subset U$ *zárt* intervallumot! U nyíltsága miatt a „széleken sincs érintés”: van olyan I' *nyílt* intervallum is, amire $I \subset I'$, de még $I' \subset U$. Az f-ünkre vonatkozó kitételbe a mondott I-t és I'-t használó $\phi_{I,I'}$-t téve, majd I'-t I-re ráhúzva arra következtetünk, hogy

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\chi_I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \lim_{I'\to I} f(x)\phi_{I,I'}(x) \overset{1.}{=} \lim_{I'\to I} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\phi_{I,I'}(x) = \lim_{I'\to I} \big(R_f \big| \phi_{I,I'}\big) = 0.$$

A jelölt lépésben az integrál és a határértékképzés cseréjét szokásosan a *Lebesgue-tétel* indokolja. Minden előkerülő integrandushoz egyszerre integrálható majoráns pl. $f(x)\chi_J(x)$, ahol J olyan kompakt intervallum, ami az összes I'-t tartalmazza. (Ilyen van, és f J-re is integrálható.)

A következtetés bármilyen $[a,b]\subset U$ esetén igaz: ha tehát f olyan, hogy minden $\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$-re, ami U-n kívül biztos nulla, igaz, hogy $(R_f|\phi)=0$, akkor f minden U-beli korlátos intervallumra vett integrálja nulla. Ez a feltétel viszont már egyfajta „végállomás". Érezhető, és az integrálfogalom felépítésében rendesen ki is derül, hogy igaz a következő: ha f lokálisan integrálható, és

$$\text{minden } [a,b]\subset U \text{ esetén} \quad \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) = 0, \quad \begin{array}{l}\text{akkor nincs más lehetőség, mint hogy}\\ f{=}0 \text{ az } U\text{-n majdnem mindenütt.}\end{array} \tag{A.6}$$

• Az előbbi eredmény egyik megjelenése, ha $U{=}\mathbb{R}$-et veszünk: ha $(R_f|\phi)=0$ minden $\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$-re, azaz $R_f = 0$ (nulla-leképezés), akkor $f{=}0$ majdnem mindenütt. Ezt értjük az alatt, hogy lokálisan integrálható függvények reguláris disztribúcióként $\mathcal{D}(\mathbb{R})^*$-ba való $f\to R_f$ beágyazása lényegében injektív, ahogy a 3.1. szakaszban mondtuk. (Ennek a következtetésnek a lehetőségére céloztunk úgy ott, hogy az alapfüggvények „elég sokan" vannak.)

Másik megjelenés: $U=\mathbb{R}\backslash\{a\}$, azaz egy adott a pont kihagyva. Ha f olyan, hogy az U-ba eső tartójú ϕ-kre $(R_f|\phi)=0$, akkor $f{=}0$ majdnem mindenütt ezen az U-n. Ez is kell ahhoz, hogy leszűrjük, hogy a Dirac-delta, δ_a nem reguláris disztribúció (ld. 3.3. szakaszban): nincs olyan lokálisan integrálható f, amivel ő R_f alakba, azaz a hatása a megfelelő integrállal lenne írható.

A.3. Schwartz-függvények és Fourier-transzformáltjaik

A 3.2. szakasz végén kiterjesztettük a Fourier-transzformációt temperált disztribúciókra több oda vonatkozó körülmény/állítás bizonyítását csak ígérgetve. Ezeket pótoljuk most; kicsit más sorrendben haladva, mint ahogy a 3.2. szakaszban előkerültek (a bizonyítások így logikusabbak).

• Idézzük fel a 3.1. szakaszból az $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ függvényhalmaz (a Schwartz-függvények) definícióját: $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, ha sima (=végtelenszer differenciálható), és $\lim_{x\to\pm\infty} Q(x)\psi^{(n)}(x) = 0$ bármilyen n-edik deriváltra és bármilyen Q polinomra. Azt találtuk (ld. a 3.1. szakaszbeli 24. lábjegyzetet is), hogy $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ vektortér, Schwartz-függvények összege/számszorosa is az. Továbbmenve:

1. Ha $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, akkor sima, és ψ is és minden $\psi^{(n)}$ deriváltja is bármilyen Q polinommal szorozva is $\pm\infty$-ben nullához tart. Nyilvánvalóan ekkor ψ'-re (sőt bármelyik $\psi^{(n)}$-re) is és egy eltolással kapott $\hat{L}_a\psi$-re is ugyanezek igazak (tudva persze, hogy egy polinom eltoltja is valamilyen polinom). Összefoglalva: a $\hat{D}$ deriválás és az $\hat{L}_a$ eltolás nem vezet ki $\mathcal{S}(\mathbb{R})$-ből.
2. Az $\hat{M}_f$ függvénnyelszorzás kivezethet a Schwartz-függvények közül (pl. ha f nem sima, vagy túl gyorsan nő). Viszont bármilyen p polinommal szorzás, $\hat{M}_{p(\mathrm{id})}$ nem vezet ki. Ugyanis ha $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, akkor $p\psi$ is végtelenszer differenciálható, és szorzatként deriválva látszik, hogy további bármilyen Q polinommal is $Q(x)\frac{d^n}{dx^n}[p(x)\psi(x)]$ olyan tagok összege, amelyekben ψ-t és különféle deriváltjait továbbra is valamilyen polinomok szorozzák. Ezek a tagok $\pm\infty$-ben nullához tartanak, tehát az összegük is. Vagyis $p\psi$ teljesíti a követelményeket: $p\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

   Speciálisan: identitással vagy annak i-szeresével való $\hat{M}_{\pm i\cdot\mathrm{id}}$ szorzás sem vezet ki $\mathcal{S}(\mathbb{R})$-ből.

3. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$-ből a képzetes exponenciálissal való $\hat{M}_{\exp(\pm ia\cdot\mathrm{id})}$ szorzás sem vezet ki: ha ψ Schwartz-függvény, akkor az $e^{\pm iax}\psi(x)$ függvény is sima, és itt is bármilyen Q polinom esetén is a vizsgálandó $Q(x)\frac{d^n}{dx^n}[e^{\pm iax}\psi(x)]$ kombináció olyan tagok összege, amelyek ψ deriváltjai polinomokkal és még $e^{\pm iax}$-szel szorozva: ezek is nullához tartanak $\pm\infty$-ben. Tehát tényleg $e^{\pm ia\cdot\mathrm{id}}\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Megjegyzés: vegyük észre most, hogy ha *egy* igazi példát mutatunk Schwartz-függvényre (ilyen pl. az $e^{-\alpha x^2}$ Gauss-görbe, de a 3.1. szakaszban láttuk az összetettebb $e^{-\alpha(x^2+\beta^2)^\gamma}$ példát is), akkor a felsoroltakat tudva máris *rettenetesen sok* Schwartz-függvény áll előttünk!

• Értelmeztük ezen operátorokat $T\in\mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ disztribúciókra is (ld. a 3.2. szakasz végi jelölésmódot):

$$\hat{D}T = T\circ(-\hat{D}),\qquad \hat{M}_{\exp(\pm ia\cdot\mathrm{id})}T = T\circ\hat{M}_{\exp(\pm ia\cdot\mathrm{id})},\qquad \hat{M}_{\pm i\cdot\mathrm{id}}T = T\circ\hat{M}_{\pm i\cdot\mathrm{id}},\qquad \hat{L}_aT = T\circ\hat{L}_{-a}.$$

Ha most $T\in\mathcal{S}(\mathbb{R})^*$ temperált disztribúció, akkor ezen operációk eredménye is *temperált* disztribúció, ami azon múlik, hogy mivel, mint láttuk, a felírt kompozíciókban szereplő, most vizsgált operátoraink a Schwartz-függvények $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ halmazából nem vezetnek ki, a felidézett módon definiált $\hat{D}T$, $\hat{M}_{\exp(\pm ia\cdot\mathrm{id})}T$, $\hat{M}_{\pm i\cdot\mathrm{id}}T$ és $\hat{L}_aT$ disztribúciók hatása is *értelmes* minden $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ Schwartz-függvényen. (Ők mint $\mathcal{S}(\mathbb{R})\to\mathbb{C}$ leképezések $\mathcal{S}$-*folytonosak* is; ezt most is az A.4. szakaszra hagyjuk.) Lényeg a lényeg: a vizsgált operátoraink disztribúciók között értelmezve nem vezetnek ki a temperált disztribúciók $\mathcal{S}(\mathbb{R})^*$ halmazából; ezt is kihasználjuk a 3.2. szakaszban.

• Minden Schwartz-függvény integrálható (mert felülbecsülhető $\frac{K}{1+x^2}$-tel, ld. a 3.2. szakasz 34. lábjegyzetét is), tehát az eredeti Fourier-integrál értelmében is létezik Fourier-transzformáltja. Az is kiderül, hogy a Fourier-transzformáció műveleti tulajdonságai vonatkozó feltételek Schwartz-függvények esetén automatikusan teljesülnek. A 2.4. szakaszban látottak alapján konkrétan:

1. Ha ψ integrálható (és ugye ha $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, akkor biztosan az), akkor $\hat{\mathcal{F}}_\pm\hat{L}_a\psi=\hat{M}_{\exp(\pm ia\cdot\mathrm{id})}\hat{\mathcal{F}}_\pm\psi$.
2. Ha ψ integrálható, folytonosan differenciálható, és $\lim_{x\to\pm\infty}\psi=0$ (márpedig ha $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, akkor ezek teljesülnek), akkor $\hat{\mathcal{F}}_\pm\hat{D}\psi=\hat{M}_{\mp i\cdot\mathrm{id}}\hat{\mathcal{F}}_\pm\psi$.
3. $\hat{L}_a\hat{\mathcal{F}}_\pm\psi=\hat{\mathcal{F}}_\pm\hat{M}_{\exp(\mp ia\cdot\mathrm{id})}\psi$; itt is elég annyi, hogy ha ψ Schwartz-függvény, akkor integrálható.
4. Ha ψ és $\hat{M}_{\mathrm{id}}\psi$ (azaz: $\psi(x)$ és $x\psi(x)$ is) integrálható függvények (márpedig ha $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, akkor ezek igazak, mert ekkor $\hat{M}_{\mathrm{id}}\psi$ is Schwartz-függvény), akkor $\hat{D}\hat{\mathcal{F}}_\pm\psi=\hat{\mathcal{F}}_\pm\hat{M}_{\pm i\cdot\mathrm{id}}\psi$. Itt az, hogy $\hat{D}$ hathat $\hat{\mathcal{F}}_\pm\psi$-re (azaz utóbbi differenciálható), már *következmény*.

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$-re leszűkítve tehát ezek a tulajdonságok biztos működnek; sőt mivel $\hat{D}$, $\hat{L}_a$, $\hat{M}_{\exp(\pm ia\cdot\mathrm{id})}$ és $\hat{M}_{\pm i\cdot\mathrm{id}}$ nem vezetnek ki $\mathcal{S}(\mathbb{R})$-ből, ezen operátorok többszörös hatását is megengedhetjük, és a tulajdonságokat n-szer alkalmazva lépésenként „átdobhatjuk” őket $\hat{\mathcal{F}}_\pm$-on. Pl. a 4. számúra:

$$\hat{D}\circ\hat{\mathcal{F}}_\pm=\hat{\mathcal{F}}_\pm\circ\hat{M}_{\pm i\cdot\mathrm{id}}\qquad\Rightarrow\qquad \hat{D}^n\circ\hat{\mathcal{F}}_\pm=\hat{\mathcal{F}}_\pm\circ\left(\hat{M}_{(\pm i\cdot\mathrm{id})}\right)^n=\hat{\mathcal{F}}_\pm\circ\hat{M}_{(\pm i\cdot\mathrm{id})^n}.$$

A 2. számúból pedig arra juthatunk (végül még akármilyen p polinomot is megengedve), hogy

$$\hat{M}_{\mathrm{id}}\circ\hat{\mathcal{F}}_\pm=\hat{\mathcal{F}}_\pm\circ(\pm i\hat{D})\quad\Rightarrow\quad\hat{M}_{\mathrm{id}^n}\circ\hat{\mathcal{F}}_\pm=\hat{\mathcal{F}}_\pm\circ(\pm i\hat{D})^n\quad\Rightarrow\quad\hat{M}_{p(\mathrm{id})}\circ\hat{\mathcal{F}}_\pm=\hat{\mathcal{F}}_\pm\circ p(\pm i\hat{D}).$$

A második alak nem más tehát, mint n-szer alkalmazva az első. Továbbmenve: akármilyen p polinomot (ill. vele való szorzásoperátort) lineáris kombinálással kaphatunk különböző fokú hatványokból (ill. ilyenekkel való szorzásoperátorokból), így igaz lesz ez a legutolsó megállapítás is.[46]

[46] Ez alapján is világos, hogy itt egy p polinomra $p(\pm i\hat{D})$ nyilvánvalóan azt kell, hogy jelentse, hogy a változójába a $\pm i\hat{D}$ deriválást írjuk, őt hatványozzuk (szorozgatjuk önmagával) mint operátort, majd ilyen tagokat adunk össze. Pl. ha $p(x)=x^3+3x+2$, akkor $p(\hat{D})=\hat{D}^3+3\hat{D}+2\hat{I}$, azaz egy f függvényre való hatás $p(\hat{D})f=f'''+3f'+2f$.

• Az előző kettő megállapításból konkrétan felírva $\hat{\mathcal{F}}_\pm$ hatását mint integrált arra jutunk, hogy

$$\underline{\hat{M}_{p(\mathrm{id})} \circ \hat{D}^n} \circ \hat{\mathcal{F}}_\pm = \hat{M}_{p(\mathrm{id})} \circ \hat{\mathcal{F}}_\pm \circ \hat{M}_{(\pm i\cdot\mathrm{id})^n} = \underline{\hat{\mathcal{F}}_\pm \circ p(\pm i\hat{D}) \circ \hat{M}_{(\pm i\cdot\mathrm{id})^n}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \text{ha } \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \text{ akkor} \quad p(x)\frac{d^n}{dx^n}(\hat{\mathcal{F}}_\pm\psi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\, e^{iyx}p\big(\pm i\tfrac{d}{dy}\big)[(\pm iy)^n\psi(y)]. \tag{A.7}$$

Az eddigiek alapján az utóbbi jobb oldalon is Schwartz-függvényt integrálunk: az integrál *létezik*, és minden x esetén ugyanazzal a(z esetleg p-től és n-től függő) $K_{p,n}$ konstanssal felülbecsülhető:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\, e^{iyx}p\big(\pm i\tfrac{d}{dy}\big)[(\pm iy)^n\psi(y)]\right| \le \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\,\left|e^{iyx}p\big(\pm i\tfrac{d}{dy}\big)[(\pm iy)^n\psi(y)]\right| \le \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\,\left|p\big(\pm i\tfrac{d}{dy}\big)[y^n\psi(y)]\right| \equiv K_{p,n}.$$

Ebből pedig azt szűrhetjük le, hogy az iménti (A.7) bal oldalán kapott alak korlátos:

$$\left|p(x)\tfrac{d^n}{dx^n}(\hat{\mathcal{F}}_\pm\psi)(x)\right| \le K_{p,n}, \quad x\text{-től függetlenül.}$$

Emiatt viszont ez a kifejezés (minden p polinomra) nemcsak korlátos, de nullához is tart $x\to\pm\infty$ esetén: ha nem így lenne, akkor egy magasabb fokú polinomot véve a korlátosság is elromlana. Ez így viszont azt mondja, hogy $\hat{\mathcal{F}}_\pm\psi$-re teljesül az, amit Schwartz-függvényektől elvárunk.

• Leszűrtük tehát, hogy ***Schwartz-függvény Fourier-transzformáltja is Schwartz-függvény***; ezt alaposan kihasználjuk a 3.2. szakaszban. Az is igaz emiatt, hogy az $\hat{\mathcal{F}}_\pm$ műveleti tulajdonságaiban tényleg semelyik operáció sem vezet ki $\mathcal{S}(\mathbb{R})$-ből: a tulajdonságok $\mathcal{S}(\mathbb{R})$-en minden további korlátozás nélkül igazak, és minden kifejezés $\mathcal{S}(\mathbb{R})$-ből $\mathcal{S}(\mathbb{R})$-be képez. Még egyszer:

$$\hat{\mathcal{F}}_\pm\hat{L}_a = \hat{M}_{\exp(\pm ia\cdot\mathrm{id})}\hat{\mathcal{F}}_\pm, \quad \hat{\mathcal{F}}_\pm\hat{D} = \hat{M}_{\mp i\cdot\mathrm{id}}\hat{\mathcal{F}}_\pm, \quad \hat{L}_a\hat{\mathcal{F}}_\pm = \hat{\mathcal{F}}_\pm\hat{M}_{\exp(\mp ia\cdot\mathrm{id})}, \quad \hat{D}\hat{\mathcal{F}}_\pm = \hat{\mathcal{F}}_\pm\hat{M}_{\pm i\cdot\mathrm{id}};$$

ez is kellett ezen azonosságok temperált disztribúciókra ($\mathcal{S}(\mathbb{R})^*$-ra) való kiterjesztéséhez.

* * *

• Ugye $\mathcal{D}(\mathbb{R})\subset\mathcal{S}(\mathbb{R})$: ha tehát $\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, akkor Fourier-transzformáltja biztosan $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ eleme. Azonban kiderül, hogy ilyen ϕ-kre $\hat{\mathcal{F}}_\pm\phi$ *analitikus* függvény. Ilyen pedig csak akkor kompakt tartójú, ha konstans nulla: ugyanis nulla lenne a tartóján kívül, így az analitikus függvények *merevsége* (ld. a „Komplex függvénytan" jegyzet 4.1. szakaszát) miatt mindenhol nulla kellene legyen. Összefoglalva: ha $\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, akkor $\hat{\mathcal{F}}_\pm\phi$ csakis akkor $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ eleme, ha ő a konstans nulla.

Erre hivatkoztunk a 3.2. szakasz végén, amikor megindokoltuk, hogy miért „állunk meg" temperált disztribúcióknál az $\hat{\mathcal{F}}_\pm$ Fourier-transzformáció kiterjesztésével: akármilyen disztribúciókra nem működik az, hogy $\hat{\mathcal{F}}_\pm$-t „áthárítjuk" az alapfüggvényre; nem alapfüggvényt kapnánk.

• Belátjuk ezt az előző állítást. Mivel $\hat{\mathcal{F}}_\pm\phi$ az $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ eleme, biztos, hogy végtelenszer differenciálható. $\mathbb{R}$ értelmezési tartomány esetén ugye ebből még nem következik az analitikusság (az előző A.2. függelékszakaszban erre is apelláltunk $\mathcal{D}(\mathbb{R})$-beli függvényeket konstruálván). Ha viszont belátjuk, hogy $\hat{\mathcal{F}}_\pm\phi$ értelmezett *komplex számokra is* legalábbis $\mathbb{C}$-nek valamilyen az $\mathbb{R}$-et tartalmazó nyílt részhalmazán (ami tehát legalább kicsit „kövérkésen körbefogja" a valós tengelyt), és (komplex) differenciálható is itt, akkor ebből, mint tudjuk, már következik a mondott analitikusság.

Próbáljuk meg tehát komplex z-re is felírni az $\hat{\mathcal{F}}_\pm\phi$-t megadó integrált!

Legyen $z=x+iy$, ahol x,y valós számok; $\big(\hat{\mathcal{F}}_\pm\phi\big)(z)$ ekkor az lenne, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\, e^{\pm izt}\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{a}^{b}\mathrm{d}t\, e^{\pm ixt}e^{\mp yt}\phi(t).$$

Azon múlik a dolog, hogy amint rögtön írtuk is, elég egy véges $[a,b]$ szakaszra integrálni, hiszen mivel $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, van olyan véges intervallum, amin kívül $\phi{=}0$. Az integrandus abszolútértéke $e^{\mp yt}|\phi(t)|$, és ez *véges szakaszra integrálható.* („Végtelen szakasz" esetén bezavarhatna az $e^{\mp yt}$ t-ben való exponenciális növekedése.) $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ esetén tehát $\hat{\mathcal{F}}_{\pm}\phi$ olyan függvény, ami minden $z{\in}\mathbb{C}$-re (tehát az $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ részhalmaz „környékén" is) *értelmes.* Paraméteres integrálról van szó: $t \in [a,b]$-re integrálunk egy még z-től is függő integrandust. A paraméteres integrál differenciálhatóságáról szóló tétellel pedig (ld. a „Komplex függvénytan" jegyzet C.4. függelékét) belátható itt, hogy az $\hat{\mathcal{F}}_{\pm}\phi$ eredményfüggvény a változója, z szerint differenciálható.[47] Ebből tehát következik, hogy analitikus is, amiből, mint láttuk, az, hogy ő mint $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvény sem lehet kompakt tartójú.

A.4. Disztribúciók folytonosság-fogalmai

[47] Végignézzük részletesen. Az integrandusunk $f(t,z){=}e^{\pm izt}\phi(t)$, ez, mint láttuk, minden z-re integrálható t-ben $[a,b]$-re. Továbbá differenciálható z szerint, deriváltja $\frac{\partial f}{\partial z}{=}\pm ite^{\pm izt}\phi(t)$. Ha a paraméteres integrál eredményének egy $z_0 \equiv x_0{+}iy_0$-beli differenciálhatóságát vizsgáljuk, akkor a tétel alkalmazásához kell egy $U \subset \mathbb{C}$ konvex nyílt halmaz, amire $z_0 \in U$, és egy olyan integrálható függvény, ami minden $z{\in}U$-ra nagyobb, mint $\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|$. Mostani esetünkben U-nak jó lesz bármilyen olyan nyílt „vízszintes sáv", ami tartalmazza z_0-t, azaz az $U := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \xi_1 < \Im(z) < \xi_2 \right\}$ halmaz valamilyen olyan ξ_1 és ξ_2 valós számokkal, melyekre $\xi_1{<}y_0{<}\xi_2$. Esetünkben $\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| = t|\phi(t)|e^{\mp yt}$, a sávunkon pedig megállapíthatjuk, hogy biztosan $\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \le t|\phi(t)|e^{Yt}$, ahol Y a $|\xi_1|$ és a $|\xi_2|$ közül a nagyobb. Utóbbi függvény integrálható t-ben *a véges* $[a,b]$*-ra*: ő jó integrálható majoránsnak. Készen vagyunk.