

Komplex függvénytan (bevezetés)

— vázlatok —

Nagy Márton

2021.

• Ez a leirat a „Matematikai módszerek a fizikában” c. tantárgy komplex függvénytanal foglalkozó részéhez készült; ott kb. a félév negyedében kell elmondanom, amennyit lehet, ide jóval többet leírtam. Az ábrák most is a **Gnuplot** és az **Inkscape** programokkal készültek. Komplex függvénytanból amúgy sok jó jegyzet/könyv van; nem pontosan tudom, miért kezdtem el ezt.

Sokszor hivatkozom a „Vektorszámítás” jegyzetre; a jelöléseim is leginkább ugyanazok, mint ott, és nagyban építünk az ott tanultakra. Már bevezettük egyszer a komplex számokat, megtanultunk deriválni-integrálni, sőt vonalmenti integrálokkal is találkoztunk. Ezek nagy szerepet kapnak itt.

• *Ez sem könnyed olvasmány!* Ne siessünk, alaposan gondoljuk végig, sőt lehetőleg papíron ceruzával kövessük (azaz próbáljuk valós időben, „előre” megcsinálni) a számolásokat olvasás közben!

Próbáltam „lélekkel megtölteni” a szöveget, de nem tudtam elkerülni a matematikai irományokban szokásos „aljasságokat”. Például azért használok, használunk képleteket (szövegközben is), mert azok tömörebbek, de ennek ára van. Tipikus eset például, hogy így, egy levegővel le van írva, hogy $A \leq B = C \leq D = E$: ekkor arról van szó, hogy egyenként teljesülnek a „lépések” (hogy $A \leq B$, $B = C$, stb.), amiket egyenként végig kellhet gondolni, majd pedig végül le kell vonni a következtetést, miszerint $A \leq E$. Az ember agya (főleg ha a jelölt betűk bonyolult kifejezések) ezt lassabban dekódolja, mint a folyószöveget; nem könnyű rutinosan „olvasási tempót váltani”.

• A komplex függvénytan a fizikában időnként külön magyarázat nélkül a tarsolyból elővett „matematikai módszer”. Először ritkábban, később egyre többször lesz szükség rá: érdekes speciális függvények, integrálási módszerek, differenciálegyenlet-megoldások jobb kezelhetőségét nyújtja. Kispórolom annak ismételtetését, hogy mennyire fontos, amit tanulunk. A komplex függvénytan a matematika egyik gyöngyszeme is; ma is kutatott terület, de az alapokat jó 200 éve kidolgozták (nagyraoszt *Augustin-Louis Cauchy*, valamint *Bernhard Riemann*; sokszor fognak ők szerepelni).

• Írtam hosszú függelék is: sehonnai plusz témakörök, bizonyítások befejezései, matematikai bevezetők/tisztázások kaptak itt helyet. Némelyik függelékbeli anyag talán jobban érezné magát egy matematikus kurzuson, de talán veszteség éri azt a fizika BSc szakos hallgatót, aki elől „eltitkolják” ezeket, így azt gondoltam, hogy elfér ennyi „matematikuskodás”. A főszövegben legalábbis mindig megemlítem, hogy mikor milyen tételt vagy fogalmat használunk.

• Sokat támaszkodtam Matolcsi Tamás egykori analízisóráira (és a kapcsolódó „Analízis” jegyzet-sorozatra.¹) Visszamenőleg köszönetet mondok neki (és szerzőtársainak); most azért lespóroltam a szigorúságból. Hasznos volt számomra Halász Gábor „Komplex függvénytan füzetek” jegyzet-sorozata is; ez sokkal több mindent tárgyal, és a matematikus szakon tankönyv.

• Néhány apróság már most előre:

1.) Ugye $A \subset B$ azt jelenti, hogy A részhalmaza B -nek. Vigyázat: nem lehet elégszer mondani, hogy ez megengedi azt is, hogy A megegyezzen B -vel; nem fogom ezt mindig külön hangsúlyozni!

2.) Ha x és y különböző valós számok, akkor vagy $x < y$, vagy $y < x$; akármennyire kicsit térnek is csak el, mindkét esetben még mindig van közöttük végtelen sok további valós szám.

3.) Ha U halmaz, akkor egy $H \subset U$ részhalmaz *karakterisztikus függvénye* (jelben: χ_H) az az U -n értelmezett valós értékű (tehát $U \rightarrow \mathbb{R}$) függvény, aminek értéke az $x \in U$ helyen 1, ha $x \in H$, és nulla, ha $x \notin H$. Sokszor használjuk például valós intervallumok karakterisztikus függvényeit.

¹Ezt kevés fenntartással jó szívvel ajánlom annak, aki kicsit el akar mélyedni a matematikában; letölthető innen (2020): <http://szofi.elte.hu/~szaboa/MatolcsiKonyvek/pdf/jegyzet/>, analízis1-től 9-ig.

Tartalomjegyzék

Fülszöveg	2
1. Ismétlések, komplex számok, komplex változós függvények	1
1.1. Komplex számok bevezetése	1
1.2. Komplex számok és műveleteik	4
1.3. Polinomok, racionális törtfüggvények (alaptudnivalók)	8
1.4. Hatványsorok	12
1.5. Elemi függvények, egyszerű hatványsorok	17
2. Komplex differenciálhatóság és egyszerű következményei	23
2.1. Komplex differenciálhatóság	23
2.2. A Cauchy-Riemann-egyenletek	24
2.3. Differenciálható függvények mint konform leképezések szemléltetése	28
2.4. Laplace-egyenlet, U és V harmonikus pár, „varázssformula”	36
2.5. Jellemző függvénytípusok és elnevezések	44
3. Vonalintegrálok	52
3.1. Közjáték: görbefogalmak	52
3.2. Közjáték: az integrálfogalom finomságai, becslések, Lebesgue-tétel	53
3.3. Vonalintegrálás a komplex síkon	58
3.4. Komplex Newton-Leibniz-formula	61
3.5. Komplex integrál útfüggetlensége, Cauchy-tétel	63
3.6. Integrálok útfüggetlensége: közvetlen alkalmazások	66
4. Analitikusság, Cauchy-formulák, Laurent-sor	72
4.1. Függvények analitikussága, analitikus elfolytatás	72
4.2. Cauchy formulái	76
4.3. A Cauchy-formulák néhány következménye	80
4.4. Izolált szingularitások, Laurent-tétel, reziduomtétel	82
4.5. Pólusok és reziduumaik	88
5. Alkalmazások, további ismeretek	93
5.1. Az analitikusság hasznosításai	93
5.2. Integrálok kiszámítása reziduomtétellel	96
5.3. Egyszerű típusú vágások	107
5.4. Síkbeli elektrosztatika (azaz: Laplace-egyenlet, második felvonás)	116
5.5. Kiegészítés: az argumentum-elv	122
6. A gamma-függvény	126
6.1. Definíció, speciális értékek, kapcsolódó integrálok	126
6.2. Analitikus elfolytatás, reflexiós összefüggés	131
6.3. Stirling-formula, következmények	135
6.4. További érdekességek	140

A. függelék: Valós harmadfokú egyenlet megoldóképlete	148
B. függelék: Sorok, sorozatok, konvergencia	153
B.1. Konvergens sorozatok, Cauchy-féle sorozatok	153
B.2. Sorok, sorösszegek, abszolút összegezhetőség	157
B.3. Függvénytörzsek, függvény-sorok, folytonosság	162
B.4. Kiegészítések hatványsorokhoz	166
C. függelék: Bizonyítások, kiegészítések	170
C.1. A Cauchy-tétel Goursat-féle bizonyítása	170
C.2. Kiegészítések a Cauchy-formulák és a Laurent-tétel bizonyításához	172
C.3. A „varázsszám” bizonyítása és további részletei	174
C.4. Paraméteres integrál differenciálhatósága	175
C.5. Hatványsorok viselkedése a konvergenciakör határán	177
C.6. Kiegészítések a gamma-függvény tárgyalásához	181
D. függelék: a Riemann-féle zéta-függvény	187
D.1. Definiáló sorok, integrálok	187
D.2. Analitikus elfolytatás, reflexiók összefüggés	190
D.3. Speciális értékek, zérushelyek	193

1. Ismétlések, komplex számok, komplex változós függvények

1.1. Komplex számok bevezetése

Ez az első szakasz elsősre kihagyható plusz érdekesség: komplex számok bevezetése *másképp*.

• A valós számok halmaza (\mathbb{R}) ugyebár olyan halmaz, amelyben értelmezett egy *összeadás* és egy *szorzás* nevű művelet: mindkettő $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ művelet, azaz rendezett halmazelem-párokhoz halmazelemet (magyarul: bármely két számhoz számot) rendel, és teljesülnek az alábbiak:

A1: Az *összeadás asszociatív*: bármely három x, y, z számra $(x + y) + z = x + (y + z)$.

A2: Az *összeadás kommutatív*: bármely két x, y számra $x + y = y + x$.

A3: Létezik „nulla”, azaz olyan $0 \in \mathbb{R}$ szám, amire igaz, hogy minden x számra $x + 0 = x$.

A4: Minden x számnak van *ellentettje*, $-x$, amire $x + (-x) = 0$.

M1: A *szorzás asszociatív*: $(xy)z = x(yz)$ bármely három x, y, z számra.

M2: A *szorzás kommutatív*: bármely két x, y számra $xy = yx$.

M3: Létezik „egy”, azaz olyan $1 \in \mathbb{R}$ szám, amire $1 \neq 0$, és minden x számra $x \cdot 1 = x$.

M4: Minden *nemnulla* $x \neq 0$ számnak van *reciproka*, $\frac{1}{x}$, amire $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.

AM: A szorzás *disztributív* az összeadásra nézve: minden a, x, y esetén $a(x+y) = ax + ay$.

Ezen tulajdonságok közül egyik sem következik *logikailag* a többiből, de ezekből már a műveletek minden további jól ismert kellemes tulajdonsága logikailag következik. Néhány ilyen:

- Az asszociativitás miatt véges sok szám összegét illetve szorzatát egyértelműen értelmezhetjük. A kommutativitás miatt pedig fordított sorrendű szorzásra is igazak ugyanazok; például $1 \cdot x = x$, $\frac{1}{x} \cdot x = 1$, továbbá $(x+y) \cdot a = xa + ya$, hiszen $(x+y)a \stackrel{M2}{=} a(x+y) \stackrel{AM}{=} ax+ay \stackrel{M2}{=} xa+ya$. A kommutativitást nem is mindig hangsúlyozzuk az alábbiakban (tehát természetesnek vesszük).
- Az összeadás *semleges eleme* (az *A3*-ban mondott tulajdonságú 0 szám), a szorzás *semleges eleme* (az *M3*-ban mondott tulajdonságú 1 szám), valamint minden x számhoz az *A4*-ben mondott tulajdonságú ellentett és (ha $x \neq 0$) az *M4*-ben mondott tulajdonságú reciprok egyértelműek.
 - Ugyanis ha 0 és 0' is az *A3*-beli tulajdonságú „nulla”k lennének, akkor $0 \stackrel{A3}{=} 0+0' \stackrel{A2}{=} 0'+0 \stackrel{A3}{=} 0'$.
 - Ha 1 és 1' is az *M3*-ban mondott tulajdonságú „egy”ek lennének, akkor $1 \stackrel{M3}{=} 1 \cdot 1' \stackrel{M2}{=} 1' \cdot 1 \stackrel{M3}{=} 1'$.
 - Ha $x+a=0$, akkor $a \stackrel{A3}{=} a+0 = a+(x+(-x)) \stackrel{A1}{=} (a+x) + (-x) = 0 + (-x) \stackrel{A3}{=} -x$.
 - Ha $x \neq 0$, és $x \cdot u = 1$ akkor $u \stackrel{M3}{=} u \cdot 1 = u \cdot (x \cdot \frac{1}{x}) \stackrel{M1}{=} (u \cdot x) \cdot \frac{1}{x} = 1 \cdot \frac{1}{x} \stackrel{M3}{=} \frac{1}{x}$.
 A reciprok és az ellentett egyértelműségét tudva *értelmezhetjük a* (nem nullával) *osztást* mint a reciprokkal szorzást és a *kivonást* mint az ellentett hozzáadását.
- Az is már következmény, hogy a nullával szorzás mindent nullába visz: $0 \cdot x = 0$ minden x -re.
 - Ugyanis $0 \stackrel{A4}{=} -0x+0x \stackrel{A3}{=} -0x+(0+0)x \stackrel{AM}{=} -0x+(0x+0x) \stackrel{A1}{=} (-0x+0x)+0x \stackrel{A4}{=} 0+0x \stackrel{A3}{=} 0x$.
- Ha $xy = 0$, akkor $x=0$ vagy $y=0$, azaz szorzat csak akkor nulla, ha az egyik tényező nulla. Ez a sokszor kihasznált tulajdonság a reciprok létezésén múlik:
 - Ha $x \neq 0$, de $xy = 0$, akkor $y \stackrel{M3}{=} 1y \stackrel{M4}{=} (\frac{1}{x}x)y \stackrel{M1}{=} \frac{1}{x}(xy) = \frac{1}{x}0 \stackrel{2.}{=} 0$.
 Ebből következik, hogy ha $x \neq 0$, akkor $ax = bx$ csak úgy lehet, ha $a = b$. Itt már a kivonást használjuk: $ax = bx \Rightarrow ax - bx = 0 \stackrel{AM}{\Rightarrow} (a-b)x = 0$, tehát ha $x \neq 0$, akkor $a - b = 0$, azaz $a = b$.

• Folytathatnánk a további jól ismert „számolási szabályok” megindoklásával, de talán látszik, hogy valóban mind az *A1–AM* tulajdonságokból következnek. Éppen ezért ezeket a tulajdonságokat

annyira szeretjük, hogy nevet kaptak: egy olyan halmazt, amit eláttunk az $A1-AM$ tulajdonságokat teljesítő összeadás- és szorzásművelettel, (szám)testnek hívunk (angolul: *field*). Az $A1-AM$ tulajdonságok a *testaxiómák*. (Az „axióma” szó jelentése általában *alapgazság*; a mostani kontextusban *alapkövetelménynek* fordíthatjuk). Úgy mondhatjuk tehát, hogy a valós számok \mathbb{R} halmaza egy (szám)test; ugyanakkor például a racionális számok \mathbb{Q} halmaza is egy számtest.²

A számok rendezése viszont a testaxiómáktól független fogalom. A valós számok (már korábban előkerült) fontos tulajdonsága a rendezés teljessége, miszerint \mathbb{R} minden felülről korlátos halmazának van felső határa. Ez a tulajdonság az \mathbb{R} halmaz „sajátja”; például \mathbb{Q} -ban nem is teljesül.

• Szeretnénk tovább bővíteni a számfogalmat, azonban a „számegegyenes már tele van”. Következő ötlet a „sík”. Halmazelméletileg jobb *rendezett számpárokat* (azaz az \mathbb{R}^2 halmazt) tekinteni: a kérdés tehát, hogy megadhatunk-e \mathbb{R}^2 -n olyan (majd összeadásnak és *egymással* szorzásnak hívott) műveleteket, amelyek teljesítik a testaxiómákat. Hosszú lenne ezt teljesen általánosan végigvizsgálni; mi most az összeadást rögtön lerögzítjük a szokásos komponensenkénti összeadásként. Tehát

$$\text{legyen } \mathbb{R}^2\text{-beli elemek összege } (a_1, b_1) + (a_2, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2); \quad (1.1)$$

ekkor ha (amint nyilvánvalónak is tűnik) így értelmezzük az \mathbb{R}^2 -beli „nullát” és az ellentettet:

$$\text{nulla-elem: } (0, 0), \quad \text{ellentett: } -(a, b) := (-a, -b), \quad (1.2)$$

akkor valóban teljesülni fognak a vonatkozó $A1-A4$ axiómák. (*Ellenőrizgessük is!*)

Az is követelményként merül fel, hogy az eddigi valós számokat beágyazhassuk az új számhalmazba, ráadásul művelettartó módon, azaz az újonnan értelmezendő műveletek az \mathbb{R} halmaz beágyazására leszűkítve ugyanazt csinálják, mint \mathbb{R} -ből örököelve nézve. Itt is sok lehetőséget megvizsgálhatnánk, de most rögzítjük, hogy az x valós szám beágyazott képe az $(x, 0)$ számpár legyen:

$$\mathbb{R} \text{ beágyazása az új } \mathbb{R}^2 \text{ számhalmazba: } x \equiv (x, 0); \quad (1.3)$$

speciálisan $0 \equiv (0, 0)$. Az $(x, 0)$ alakú számpárok halmazát hívhatjuk *valós tengelynek*; egy számpárról így akkor mondjuk, hogy valós, ha $(x, 0)$ alakú. Ez az $\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}^2$ beágyazás az összeadás látott értelmezését véve tényleg művelettartó: $x+y \equiv (x+y, 0)$, ami ugyanaz, mint $(x, 0) + (y, 0)$.

• A szorzást is szeretnénk \mathbb{R}^2 -en értelmezni.³ Akkor lesz az $\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}^2$ beágyazás művelettartó, ha minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $(x, 0) \cdot (y, 0) = (xy, 0)$, speciálisan $(1, 0) \cdot (y, 0) = (y, 0)$. A szorzásművelet (e_1, e_2) egységeleme emiatt nem is lehet más, mint az $(1, 0)$, azaz az eredeti 1 beágyazva. Ugyanis $(e_1, e_2) \cdot (x, 0) = (x, 0)$ kell, hogy legyen, de $(1, 0) \cdot (x, 0) = (x, 0)$ is igaz, tehát a (csakis a testaxiómákból következő) fentebbi 4. számú következtetésünk szerint ezek miatt valóban $(e_1, e_2) = (1, 0)$.

Nézzük most egy $(a, 0)$ alakú számpár (azaz valós szám) és egy $(0, y)$ alakú számpár szorzatát:

$$(a, 0) \cdot (0, y) = (f(a, y), g(a, y)),$$

ahol az f és a g függvények alakját az elvárt AM tulajdonság (a disztributivitás) korlátozza: a

²Ebben itt nem is az „lényeg”, hogy \mathbb{Q} -n a műveletek teljesítik a testaxiómákat (hiszen $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, és \mathbb{R} -en is teljesítik), hanem hogy nem vezetnek ki \mathbb{Q} -ból: tekinthetjük őket \mathbb{Q} -n értelmezett és oda is képező műveleteknek. Érdekesség: a (közövel-vonalzóval egységszakaszból) *szerkeszthető számok* halmaza is test; ez az elemeinek összegei, szorzatai, különbségei, hányadosai mellett pozitív elemei négyzetgyökeit is mind tartalmazza, vagyis bővebb \mathbb{Q} -nál. (Az algebrai számok halmazánál, ami szintén test, viszont szűkebb: például a $\sqrt[3]{2}$ nem szerkeszthető; ld. „kockakettőzés”).

³Vigyázat: ennek semmi köze sincs vektorok skalárszorzatához, vagy vektoriális szorzatához: most \mathbb{R}^2 -et szeretnénk ellátni egy „egymással szorzás”-művelettel; két számpár szorzataként számpárt kapva.

helyébe a_1+a_2 -t illetve y helyébe y_1+y_2 -t írva azt kapjuk, hogy minden a, y, a_1, a_2, y_1, y_2 esetén

$$\begin{aligned} f(a_1+a_2, y) &= f(a_1, y) + f(a_2, y), & f(a, y_1+y_2) &= f(a, y_1) + f(a, y_2), \\ g(a_1+a_2, y) &= g(a_1, y) + g(a_2, y), & g(a, y_1+y_2) &= g(a, y_1) + g(a, y_2). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Ebből viszont már következik, hogy f és g mindkét változójukban lineárisak, azaz $f(a, y) = f_0 \cdot a \cdot y$ és $g(a, y) = g_0 \cdot a \cdot y$ lehet csak.⁴ Ezenfelül $(a, 0)$ helyébe az $(1, 0)$ egységelemet írva $f(1, y)=0$ és $g(1, y)=y$ kell, hogy legyen, emiatt a konstansok értékei $f_0=0$ és $g_0=1$. Összerakva tehát

$$(a, 0) \cdot (0, y) = (0, ay), \quad \text{és azt is tudjuk már, hogy } (a, 0) \cdot (x, 0) = (ax, 0). \quad (1.5)$$

Továbbá mivel $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$ és a disztributivitást elvárjuk, igaz kell, hogy legyen, hogy

$$(a, 0) \cdot (x, y) = (ax, ay). \quad (1.6)$$

• Elhagyhatjuk a számpáros jelölést, ha a már látott módon az $1 \equiv (1, 0)$ azonosítást tesszük, valamint az $\mathcal{U} \equiv (0, 1)$ jelölést használjuk (mint „új számegegység”). Ekkor a számpárjaink mint számok alakja (a szorzásról látottakat tudva)

$$z := a \cdot 1 + b \cdot \mathcal{U}, \quad \text{ahol } a, b \in \mathbb{R}, \text{ vagyis } a \equiv (a, 0) \text{ és } b \equiv (b, 0).$$

Úgy mondhatjuk tehát, hogy a „sík-számok” 1 és \mathcal{U} valós lineárkombinációi, továbbá $1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot \mathcal{U}$ és $\mathcal{U} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot \mathcal{U}$. Az $a \cdot 1 + 0 \cdot \mathcal{U}$ számok halmaza (ahol tehát a mondott értelemben $a \in \mathbb{R}$) a *valós tengely*, az \mathbb{R} beágyazása a sík-számok közé. Az összeadás egyszerűen

$$z_1 = a_1 \cdot 1 + b_1 \cdot \mathcal{U}, \quad z_2 = a_2 \cdot 1 + b_2 \cdot \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad z_1 + z_2 := (a_1 + a_2) \cdot 1 + (b_1 + b_2) \cdot \mathcal{U}.$$

A nulla $0 \cdot 1 + 0 \cdot \mathcal{U}$, egy $z = a \cdot 1 + b \cdot \mathcal{U}$ szám ellentettje pedig $-z := (-a) \cdot 1 + (-b) \cdot \mathcal{U}$.

• A szorzásművelet csakis akkor lehet asszociatív, kommutatív és összeadásra nézve disztributív, ha működik a „tagonkénti” szorzás, azaz (rögtön kihasználva, hogy $1 \cdot \mathcal{U} = \mathcal{U} \cdot 1 = \mathcal{U}$ és $1 \cdot 1 = 1$)

$$\begin{aligned} z_1 = a_1 \cdot 1 + b_1 \cdot \mathcal{U}, & & z_1 \cdot z_2 = a_1 a_2 \cdot 1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot \mathcal{U} + b_1 b_2 \cdot (\mathcal{U} \cdot \mathcal{U}) \\ z_2 = a_2 \cdot 1 + b_2 \cdot \mathcal{U} & \Rightarrow & \text{kell, hogy legyen.} \end{aligned}$$

Ha viszont ez igaz, akkor (amint ellenőrizgethetjük is) a szorzásműveletre *tényleg* teljesülni fog $M1$, $M2$, $M3$ és AM ; természetesen az $1 \equiv 1 \cdot 1 + 0 \cdot \mathcal{U}$ egységelemmel. A nemnulla elemek reciprokanak létezése, azaz az $M4$ axióma maradt ki; ezzel párhuzamosan $\mathcal{U} \cdot \mathcal{U}$ maradt kérdéses. Mindenesetre ez is *valamilyen* sík-szám kell legyen:

$$\mathcal{U} \cdot \mathcal{U} = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot \mathcal{U}, \quad \text{ahol } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ egyszer s mindenkorra rögzített valós számok.} \quad (1.7)$$

Úgy tűnhet, hogy ahányféle α, β valós számokat választunk, annyiféleképpen vezethetünk be értelmes szorzásműveletet a sík-számainkon. De nem mindegyik lehetőség *lényegesen* különböző.

• Az \mathcal{U} helyett ugyanolyan joggal egy másik $\mathcal{U}' := A \cdot 1 + B \cdot \mathcal{U}$ számot is használhatunk arra, hogy \mathcal{U}' és az 1 lineárkombinációjaként felírjuk a sík-számokat (itt $A, B \in \mathbb{R}$, és $B \neq 0$). Adott α és β

⁴Ha az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egyváltozós függvényre $f(x+y) = f(x) + f(y)$ minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén, akkor $f(x) = \alpha x$ lineáris függvény, ahol α persze éppen $f(1)$. Ezt könnyű belátni $x \in \mathbb{Z}$ egész számokra 1-ből indulva lépegetve, majd m -szer összeadván az elvárt értéket beláthatjuk az állítást $\frac{n}{m}$ alakú racionális számokra, majd a rendezést ismerve léphetünk tovább $x \in \mathbb{R}$ esetére, tudva, hogy \mathbb{Q} sűrű \mathbb{R} -ben, azaz minden intervallum tartalmaz racionális számot.

esetén viszont megfelelő A -t és B -t választva \mathcal{U}' szorzása esetleg egyszerűbb. Ellenőrizzük, hogy

$$\mathcal{U}' = A \cdot 1 + B \cdot \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{U}' \cdot \mathcal{U}' = (\alpha B^2 - \beta AB - A^2)1 + (\beta B + 2A)\mathcal{U}'.$$

Mindenképp megválaszthatjuk úgy A -t, hogy $\mathcal{U}' \cdot \mathcal{U}'$ -ből kiessen a \mathcal{U}' -s tag, azaz $\mathcal{U}' \cdot \mathcal{U}'$ valós legyen:

$$\text{Legyen } A = -\frac{1}{2}\beta B, \quad \text{ezt visszaírva: } \mathcal{U}' \cdot \mathcal{U}' = \frac{B^2}{4}(\beta^2 + 4\alpha) \cdot 1.$$

Három lehetőség kínálkozik attól függően, hogy az eredetileg megadott α és β számok milyenek.

- Ha $4\alpha + \beta^2 = 0$, akkor az iménti \mathcal{U}' -t nevezzük el \mathcal{N} -nek (mint „Nulla-négyzetű”). A sík-számaink szorzása ekkor az lenne, hogy

$$z = a \cdot 1 + b \cdot \mathcal{N}, \quad \mathcal{N} \cdot \mathcal{N} = 0, \quad \text{ebből} \quad \begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 1 + b_1 \mathcal{N})(a_2 1 + b_2 \mathcal{N}) = \\ &= a_1 a_2 \cdot 1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot \mathcal{N}. \end{aligned}$$

Ez a szorzás kommutatív, asszociatív, az $1 \equiv 1 \cdot 1 + 0 \cdot \mathcal{N}$ az egységeleme, és az összeadásra disztributív: *majdnem* minden testaxióma teljesül. M_4 viszont nem: nemcsak a $0 \cdot 1 + 0 \cdot \mathcal{N}$ nullának, hanem az összes $0 \cdot 1 + b \cdot \mathcal{N}$ alakú számnak sincsen reciproka (itt $b \in \mathbb{R}$ akármi lehet): próbáljuk ki, hiába szorozzuk a felírt módon az ilyen számokat bármivel is, nem jöhet ki $1 \cdot 1 + 0 \cdot \mathcal{N}$.

- Ha $4\alpha + \beta^2 > 0$, akkor B -t megválaszthatjuk $\frac{2}{\sqrt{4\alpha + \beta^2}}$ -nek, és az új \mathcal{U}' neve \mathcal{E} legyen (mint „Egynégyzetű”), amivel az ilyen típusú szorzási szabályú „sík-számainkra” az vonatkozna, hogy

$$z = a \cdot 1 + b \cdot \mathcal{E}, \quad \mathcal{E} \cdot \mathcal{E} = 1, \quad \text{ebből} \quad \begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 1 + b_1 \mathcal{E})(a_2 1 + b_2 \mathcal{E}) = \\ &= (a_1 a_2 + b_1 b_2) \cdot 1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Itt is M_4 -gyel lesz hiba: próbáljuk ki, hogy nemcsak a $0 \cdot 1 + 0 \cdot \mathcal{E}$ nullát, hanem az összes $a \cdot 1 + a \cdot \mathcal{E}$ és az összes $a \cdot 1 - a \cdot \mathcal{E}$ alakú számokat is (ahol itt $a \in \mathbb{R}$ akármi) hiába szorozzuk itt bármivel, nem kaphatunk 1-et, azaz $1 \cdot 1 + 0 \cdot \mathcal{E}$ -t.

- Végül (alig várjuk), ha $4\alpha + \beta^2 < 0$, akkor B -t $2/\sqrt{|4\alpha + \beta^2|}$ -nek választhatjuk, és az így kapott \mathcal{U}' -t nevezzük \mathcal{I} -nek, ezzel ebben az esetben a szorzási szabály az lesz, hogy

$$z = a \cdot 1 + b \cdot \mathcal{I}, \quad \mathcal{I} \cdot \mathcal{I} = -1, \quad \text{ebből} \quad \begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 1 + b_1 \mathcal{I})(a_2 1 + b_2 \mathcal{I}) = \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) \cdot 1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot \mathcal{I}. \end{aligned}$$

Ugyebár kiderül, hogy így tényleg csak a nullának nincs reciproka: (szám)testet kapunk. Ez a komplex számok \mathbb{C} halmaza; az átmenetileg \mathcal{I} -vel jelölt „dolgot” jelölhetjük i -vel, ahogy szoktuk.

1.2. Komplex számok és műveleteik

• Az előző szakasz **összefoglalva**: ha „a síkot betöltő” számok összeadását és szorzását szeretnénk az $A1-AM$ testaxiómákat megtartva bevezetni, akkor vagy nem sikerül, vagy pedig (az új számegységet alkalmasan választva) lényegében a $z = a + bi$ alakú komplex számokra jutunk.

Komplex számokkal mint kéttagú kifejezésekkel lehet számolni, i -t önálló szimbólumként kezelve, melyre $i^2 = -1$. (Tényleg „megtaláltuk” tehát a negatív valós számok négyzetgyökeit is.)

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 + ib_1, & \Rightarrow & & z_1 \pm z_2 &= (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i, \\ z_2 &= a_2 + ib_2, & & & z_1 z_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i, \end{aligned} \tag{1.8}$$

speciálisan valós λ esetén $\lambda(a + bi) = \lambda a + \lambda bi$. A nulla: $0 + 0i$, a valós tengelyen lévő számok $a + 0i$

alakba írhatók. Továbbá tényleg minden nemnulla komplex számnak van reciproka:

$$z = a + bi \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i. \quad (1.9)$$

A komplex számok \mathbb{C} halmaza tehát **test**: az összeadásukra és szorzásukra igazak az előző szakasz legelején látott $A1-AM$ tulajdonságok, az összes következményükkel együtt. Ott valós számokra mondtuk ki őket, de épp ez most a lényeg, hogy komplexekre is igazak. *Ha kihagytuk az előző szakaszt, akkor most ezeket azért olvassuk át alaposan!*

A komplex számok továbbá *kitöltik* a komplex síkot, épp mint a valósak a számegeyest.

- \mathbb{R} -ből \mathbb{C} -be kilépve feladtuk a *rendezést*; ezt nem nagyon sajnáljuk. Vajon léteznek-e még a „síknál is bonyolultabb” számok? Válasz: további általánosításokat is tehetünk, de egyre több megszokott dolgot kell feladni. Például az úgynevezett *kvaterniók* halmaza négydimenziós valós teret tölt ki (ahogyan valós vektortérként nézve \mathbb{R} egy-, \mathbb{C} pedig kétdimenziós); a kvaterniók szorzásművelete azonban nem kommutatív. Eleresztve a gyeplőt: adott N esetén az $N \times N$ -es mátrixok (mátrix-)szorzásánál 1) nincs kommutativitás, 2) nincs mindennek inverze („reciproka”), emiatt nemnulla tényezők szorzata is lehet nulla. A mátrixszorzás és -összeadás (a többi jó tulajdonsága miatt) emlékeztet számok szorzására és összeadására, de már annyira más módon, hogy eszünk ágában sincs általános mátrixokat önálló *számként* értelmezett objektumoknak tekinteni. A komplex számok viszont *még elég jók* ahhoz, hogy számokként kezelhessük őket.

Még másképp: a \mathbb{C} az a halmaz, ami **még** kényelmesen *szám*halmaznak tekinthető **algebrai** értelemben (tehát: testet alkot), de **már** elég érdekes **geometriailag**: sík, amin vannak görbék, érdekes alakú tartományok, stb. Végülis ezen kettősség az oka annak, hogy a komplex (differenciálható) függvényekre meglepetésszerűen erős állításokat tehetünk majd.

- Újra **összefoglalunk** néhány alapfogalmat. A komplex számsíkot kifeszíti a valós tengely (ezen „lakik” \mathbb{R} mint \mathbb{C} részhalmaza), és a képzetes tengely, amelyet merőlegesen rajzolunk. Elnevezések:

Komplex szám:	$z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}$
z komplex konjugáltja:	$z^* \equiv a - bi,$
z valós és képzetes részei:	$\operatorname{Re} z = \Re(z) \equiv a, \quad \operatorname{Im} z = \Im(z) \equiv b,$
z abszolútérték-négyzete:	$ z ^2 \equiv a^2 + b^2 = zz^* \in \mathbb{R}_0^+,$
z argumentuma (fázisa):	$\varphi = \arg z \in]-\pi, \pi].$
z trigonometrikus és exponenciális alakja:	$z = z (\cos \varphi + i \sin \varphi) = z e^{i\varphi}.$

A Re és az Im helyett használnak ilyen furcsa R és I betűket is nyomtatásban.⁵

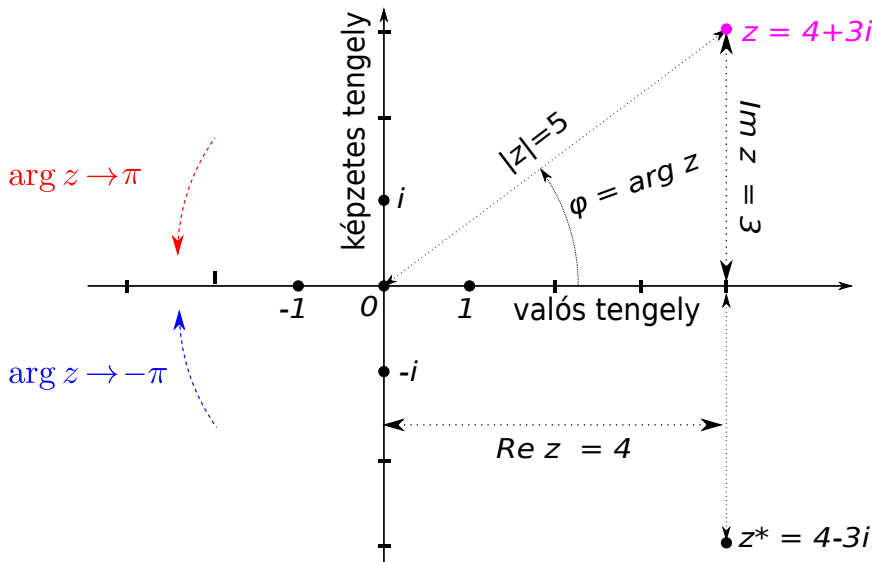
- Az előbbi összefoglalóban is már kihasznált **Euler-formula** alapvető fontosságú:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad \text{de akármilyen } z\text{-re is} \quad \exp(iz) = \cos z + i \sin z. \quad (1.10)$$

Ezt vagy „kidumáljuk” (azaz a \sin és \cos függvényeket geometriailag ismerve így értelmezzük e^{iz} -t; lásd például a Vektorszámítás jegyzet 2.4. szakaszát), vagy „levezetjük” (azaz az \exp függvényt máshogy, hatványsorral vezetjük be, és ezen (1.10) Euler-formulának megfelelően értelmezzük a \sin és \cos függvényeket; ennek ismétlését ld. lentebb az 1.5. szakaszban). Az Euler-formulát és az elemi függvények komplexesített jellemzőit hasznos tudni; lesznek példák bőven.

⁵ \LaTeX -ben ezt a karaktertípust a \mathfrak{R} és a \mathfrak{I} módon érhetjük el. A beépített Re és Im parancsok flancosabb: ilyen \Re és \Im betűket produkálnak; utóbbiakat én nem szeretem.

• A most φ -vel is jelölt **argumentum** (fázis), ami a z irányú „vektor” valós tengellyel bezárt szöge, $\arg z$, nem lenne egyértelmű. Szokásosan **megszorítjuk** a $]-\pi, \pi]$ tartományba, azaz a **vágást** a negatív valós féltengelyre (pontosabban: alá) tesszük: pozitív (óramutatóval ellentétes) körbejárással $\arg z$ nő π -ig, majd az \mathbb{R}^- féltengelyen áthaladva visszaugrik $-\pi$ „fölé”.



1. ábra. A komplex számsík egyszerű fogalmainak illusztrációja (kb. tavalyról átemelve).

• A komplex hatványozást így érdemes ugye definiálni: $a, b \in \mathbb{C}$ akármilyen számokra (ha $a \neq 0$)

$$a^b \equiv \exp(b \operatorname{Ln} a) = e^{b \operatorname{Ln} a}, \quad \text{ahol} \quad \operatorname{Ln} z := \ln(|z|) + i \arg z, \quad (1.11)$$

és ugye $-\pi < \arg z \leq \pi$.

Felidézttük a komplex logaritmust is. Az $\arg z$ a fázismegállapodás miatt az egyes x, y tartományokban különféleképpen írható fel az ismert \arctg függvénnyel. Néhány részben átfedő lehetőség:⁶

Tartomány:	$\Re(z) > 0$	$\Im(z) > 0$	$\Im(z) < 0$	\mathbb{R}_0^- -t kivéve akárhol:
$\arg(x+iy) =$	$\arctg \frac{y}{x}$	$\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{x}{y}$	$\arctg \frac{x}{y} - \frac{\pi}{2}$	$2 \arctg \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+x}}$

• Emlékeztető a komplex számok műveleteinek **geometriai jelentéséről**: az összeadás a (két-dimenziós sík mintájára) vektor-összeadásként értelmeződött, vagyis egy komplex számhalmaz minden eleméhez egy konstans z_0 számot **hozzáadva** azt mintegy a z_0 „vektorral” **eltoljuk**.

Szorzásnál a fázisok összeadódnak (de a fázist ugye úgy kell érteni, hogy végül mindig $-\pi$ és π közé essen), az abszolútértékek pedig szorzódnak. Egy z -vel való **szorzás** tehát origó középpontú $|z|$ -szeres **nagyítást** és $\arg z$ szögű **elforgatást** jelent. Speciálisan: $\pm i$ -vel való szorzás egyszerűen $\pm 90^\circ$ -os elforgatást jelent. Ebből (is) nyilvánvalók az alábbi összefüggések; azért felírjuk őket:

$$\begin{aligned} \Re(iz) &= -\Im(z), & \Im(iz) &= \Re(z), \\ \Re(-iz) &= \Im(z), & \Im(-iz) &= -\Re(z). \end{aligned} \quad (1.12)$$

⁶Az utolsó bonyolultabb: úgy kapjuk, hogy \sqrt{z} -t a lentebbi (1.17) képlettel kifejezzük, egyszerűsítünk, és \sqrt{z} -re (mivel a fázismegállapodás szerint $\Re(\sqrt{z}) \geq 0$ mindig igaz) az első képletet alkalmazzuk: az így kapott eredmény kétszerese lesz z argumentuma. A trigonometrikus $\operatorname{tg}(2\varphi) = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$ képletből indulva is ugyanerre juthatunk.

• \mathbb{R} -ből \mathbb{C} -be kilépve újra kell gondolnunk a **hatványozást**, amit valós kitevőknél is ($a \in \mathbb{R}^+$ és $c \in \mathbb{R}$ esetén) az $a^c \equiv \exp(c \ln a) \equiv e^{c \ln a}$ módon értelmezzük. A logaritmus azonosságaiából kell kiindulni:

$$\text{Valós számok között: ha } a, b \in \mathbb{R}^+, c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \ln(ab) &= \ln a + \ln b, & \text{és} \\ \ln(a^c) &= c \cdot \ln a, \end{aligned} \quad (1.13)$$

mivel minden $x \in \mathbb{R}$ -re $\ln(\exp x) = x$. Ezekből következőleg igazak a szokásos összefüggések:

$$\text{Valós számok között} \quad (ab)^c = a^c \cdot b^c, \quad \text{és} \quad (a^c)^d = a^{cd}. \quad (1.14)$$

Tudva, hogy $e^{X+Y} = e^X e^Y$ tényleg mindig igaz, valamint tudva a logaritmus iménti azonosságait az elsőt így igazolhatjuk: $(ab)^c = e^{c \ln(ab)} = e^{c(\ln a + \ln b)} = e^{c \ln a + c \ln b} = e^{c \ln a} e^{c \ln b} = a^c \cdot b^c$. A másodikat pedig így: $(a^c)^d = e^{d \ln(a^c)} = e^{d c \ln a} = a^{cd}$. A szomorú hír ezek után viszont az, hogy

$$\begin{aligned} \text{Komplex számok között, azaz} & \quad \text{Ln}(ab) \text{ nem mindig egyenlő } \text{Ln } a + \text{Ln } b\text{-vel,} \\ \text{ha csak azt tudjuk, hogy } a, b \in \mathbb{C}, & \quad \text{és } \text{Ln}(a^b) \text{ nem mindig egyenlő } b \cdot \text{Ln } a\text{-val.} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Konkrétan: $\text{Ln } z = \ln |z| + i \arg z$, emiatt az első azonosság úgy romolhat el, hogy két *komplex* szám, a és b argumentumai összeadódnak, amikor az ab szorzatot képezzük, de ha a kapott „argumentum” π -nél nagyobb vagy $-\pi$ -nél kisebb lenne, akkor 2π -t levonunk, vagy hozzáadunk, hiszen keményen megköveteltük, hogy az argumentum mindig $]-\pi, \pi]$ -be essen.⁷ Az pedig hasonlóan végiggondolva még nyilvánvalóbb, hogy $\text{Ln}(a^b)$ és $b \cdot \text{Ln } a$ teljesen mások is lehetnek, főleg ha $b \notin \mathbb{R}$. Így tehát

$$\begin{aligned} \text{komplex számok} & \quad (ab)^c \text{ nem feltétlenül egyenlő } a^c \cdot b^c\text{-vel,} \\ \text{között mozogva:} & \quad \text{és } (a^b)^c \text{ totál más is lehet, mint } a^{bc}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

• Itt a fázisátbukás már „durvább” eltéréseket is okozhat.⁸ Sokszor körülményes lenne minden $(ab)^c \stackrel{?}{=} a^c b^c$ átalakításnál leellenőrizni, hogy az ab szorzásnál „nem bukik-e át” a fázis, azaz tényleg igaz-e az egyenlőség; később, az 5.1. szakaszban majd látunk egyszerűbb módszereket.

Már most kiemeljük, hogy ha $r \in \mathbb{R}^+$ pozitív valós, akkor $\arg r = 0$: emiatt ha $r \in \mathbb{R}^+$, akkor $(ar)^c = a^c r^c$ mindig igaz. Másrészt ha $m \in \mathbb{Z}$ valós egész szám, akkor is $(ab)^m = a^m b^m$ mindig igaz. Szorozgatásként gondolva a hatványozásra ez nyilvánvaló, az előző ponttal pedig úgy harmonizál, hogy amikor a szorzásból jövő esetleges $2\pi i$ ugrást visszatesszük a kitevőbe, akkor $e^{2\pi i \cdot c}$ -ről tudjuk, hogy akkor és csak egyenlő 1-gyel, ha $c=m$ egész. De már törtekitevőkkel is (négyzetgyökkel is, ami 1/2-dik hatványozás) vigyázzunk: komplexben $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ nem mindig egyenlő \sqrt{ab} -vel.

• Ha $c \notin \mathbb{Z}$, az $f(z) = z^c$ függvénynek vágása van az $z \in \mathbb{R}^-$ féltengelyen: ehhez kétfelől közelítve mások a határértékek (mivel $z^c \equiv e^{c \text{Ln } z}$, és $\Im(\text{Ln } z)$ felülről $+i\pi$ -hez, alulról $-i\pi$ -hez tart ott).

Valós pozitív α kitevőre az $f(z) = z^\alpha$ **hatványozásfüggvény** geometriai jelentést hordoz. Ugye $z^\alpha = e^{\alpha(\ln |z| + i \arg z)} = e^{\alpha \ln |z|} e^{i \alpha \arg z} = |z|^\alpha e^{i \alpha \arg z}$: ha itt $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor az utóbbi alak egy exponenciális alakban jól felírt komplex szám, melynek abszolútértéke az eredetiének α -adik hatványa: $|z^\alpha| = |z|^\alpha$. Érdekesebb, hogy az **argumentum α -szorosára** változik. Ha $\alpha < 1$, akkor tehát a függvényünk az \mathbb{R}^- vágástól kétfelé visszahajtogatva a komplex síkot legyezőszerűen „összebbcukja”, ha pedig $\alpha > 1$, akkor pedig „kihajtogat”: utóbbi esetben egy $\frac{\pi}{\alpha}$ középponti szögű „ékből” (a $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{\alpha}$ tartományból) indulva a felső félsíkon lévő összes komplex szám kiadódik α -adik hatványként.

⁷Példa: $a = 2e^{i\frac{3}{4}\pi}$, $b = 3e^{i\frac{3}{4}\pi}$; mindkettőre $\arg = \frac{3}{4}\pi = 135^\circ$. Ekkor ab -ra írhatjuk, hogy ő $6e^{i\frac{3}{2}\pi}$ -nel egyenlő, az argumentumára viszont azt kell mondanunk, hogy az 2π -vel kevesebb, $-\frac{\pi}{2}$. Most tehát $\text{Ln}(ab) = \ln 6 - i\frac{\pi}{2}$, de $\text{Ln } a + \text{Ln } b = (\ln 2 + i\frac{3}{4}\pi) + (\ln 3 + i\frac{3}{4}\pi) = \ln 6 + i\frac{3}{2}\pi$, azaz itt emiatt tényleg $\text{Ln}(ab) \neq \text{Ln } a + \text{Ln } b$.

⁸Az előzőhöz hasonló példa: ellenőrizzük, hogy ha $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(i-1)$, $b=i$ és $c=4i$, akkor $(ab)^c = e^{3\pi}$, de $a^c \cdot b^c = e^{-5\pi}$.

• Az $1/2$ -edik hatványozás, azaz **négyzetgyökvonás** komplex számok között mozogva is „valós műveletekkel elvégezhető”: adott $z=a+ib$ számra kijön az a $w = A+iB$, amire $w^2 = z$:

$$\begin{aligned}
 z = a+ib. \\
 \sqrt{z} := A+iB.
 \end{aligned}
 \Rightarrow
 \begin{cases}
 (A+iB)^2 = a+ib \\
 \Rightarrow \begin{cases}
 A^2-B^2=a, \\
 2AB = b
 \end{cases}
 \end{cases}
 \Rightarrow
 \begin{aligned}
 A &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{a^2+b^2} + a}, \\
 B &= \frac{\text{sgn}(b)}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{a^2+b^2} - a}.
 \end{aligned}
 \tag{1.17}$$

Ugye $\arg z \in]-\pi, \pi]$, és a hatványozásra fentebb látottak szerint a képhalmaz ilyenkor egy „legyező-összébhhajtással” adódik: így látjuk, hogy a négyzetgyök eredményének a fázisa mindig $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ -be esik. A gyökvonás *képhalmaza* tehát a $\Re(z) \geq 0$ félsík (kivéve az $\Im(z) < 0$ képzetes féltengelyt).

Az A, B párra az $A^2-B^2=a, 2AB=b$ egyenletrendszerből kétféle megoldás adódna. A felírt képletünk ezek közül azt választja, aminek a valós része nemnegatív, ahogy kell. Továbbá negatív valós számra (azaz ha $a \leq 0$ és $b=0$) a négyzetgyök tényleg $+i\sqrt{|a|}$. (Emlékezzünk: a sgn szignum-függvény negatív valós számra -1 , pozitívra $+1$; továbbá úgy vesszük, hogy $\text{sgn}(0) = 1$).

• A komplex konjugálást nemcsak összege, szorzaton, hányadoson, elemi függvényeken „emelhetjük át”, hanem legtöbbször a logaritmuson is, és emiatt a hatványozáson is: gondoljuk még egyszer végig, hogy mivel $\text{Ln } z = \ln |z| + i \arg z$, és $\arg z$ vágása a negatív valós féltengelyen van (azaz $\arg z$ „szimmetrikus” a valós tengelyre), emiatt ha csak $z \notin \mathbb{R}^-$, akkor $\text{Ln}(z^*) = (\text{Ln } z)^*$. Az $\text{Ln}(z), z \in \mathbb{R}^-$ esettől eltekintve tehát egy „bonyolult kifejezés” konjugáltja úgy adódik, hogy az „összetevőknek” egyenként a konjugáltját vesszük (speciálisan: i -t mindenhol $-i$ -re cseréljük).

1.3. Polinomok, racionális törtfüggvények (alaptudnivalók)

Néhány fontos függvényt kicsit összefoglalunk ebben és a következő szakaszokban. A legtöbbjük már ismerős, és később még bővebben, más szempontokból is ismerkedünk még velük.

Polinomok: igen fontosak a polinomok; ők talán „a legegyszerűbb” függvények. Például:

elsőfokú	másodfokú	harmadfokú	...	N -edfokú
$a_0+a_1z,$	$a_0+a_1z+a_2z^2,$	$a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3,$		$\sum_{k=1}^N a_k z^k.$

Itt az a_0, a_1, a_2, \dots számok a polinom szempontjából rögzített (komplex) számok, a polinom *együtthatói* (amiket sokszor más, például a, b, c betűkkel jelölünk; lényeg, hogy ne a változóéval). A polinomoknak számos jó tulajdonsága van, ezeket legtöbbször rutinszerűen használjuk.

• Az első egy egyszerű dolog, amiről a későbbiekben derül majd ki igazán, hogy mennyire fontos:

Állítás: ha $P(z)$ egy *nem nulladfokú* polinom, (1.18)
 akkor ha $|z| \rightarrow \infty$, akkor $|P(z)| \rightarrow \infty$.

Vagyis ha z -vel *akármilyen irányban* végtelenhez tartunk, azaz $|z| \rightarrow \infty$, akkor $P(z)$ is a végtelenhez tart. (Hogy egy komplex szám végtelenhez tart, azt mindig úgy értjük, hogy az abszolútértéke ∞ -hez tart.) Az állítás indoklása: $P(z) = \sum_{k=1}^N a_k z^k = z^N \cdot (a_N + \frac{a_{N-1}}{z} + \frac{a_{N-2}}{z^2} + \dots + \frac{a_0}{z^N})$, és a zárójel a_N -hez tart, z^N pedig végtelenhez, ha $N > 0$. (A polinomunk akkor N -edfokú, ha $a_N \neq 0$.)

• Egy nulladfokú polinom éppen az a_0 együttható értékű konstans függvény. Nem nulladfokú polinom viszont (mivel $|z| \rightarrow \infty$ -re végtelenhez tart) semmiképpen nem konstans függvény. Ebből következik, hogy egy polinom fokszáma (a legmagasabb fokú tag kitevője) és együtthatói *egyér-*

telműek. Azaz: ha tudjuk valahonnan, hogy P és Q polinomok, és $P(z)=Q(z)$ mindenütt, akkor biztos, hogy P és Q ugyanolyan együtthatójú ugyanannyiadfokú polinomok. Ugyanis $P-Q$ ekkor azonosan nulla függvény és polinom: P és Q együtthatóinak különbsége csak csupa 0 lehet.

• Valós számok között ugye például az x^2+4 polinomnak nincsenek valós zérushelyei. Komplexek viszont vannak: $2i$ és $-2i$. Ha \mathbb{C} -t vesszük értelmezési tartománynak, akkor igaz az úgynevezett

Algebra alaptétele: \mathbb{C} -n értelmezett nem nulladfokú (akár komplex együtthatós) polinomnak biztosan van zérushelye. (1.19)

Ez nem annyira *alaptétel*; be kell bizonyítani, ld. később.⁹ *Megjegyzés:* polinomokra a *zérushely* és a *gyök* szavakat felváltva, azonos értelemben használja mindenki, innentől mi is néha.

Első- és másodfokú polinomokra gondolva nem nagy újdonság az algebra alaptétele, hiszen:

$$\begin{aligned} L(z) := az + b, & \Rightarrow z = -\frac{b}{a}. & Q(z) := az^2 + 2bz + c, & \Rightarrow z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}. \\ L(z) = 0 & & Q(z) = 0 & \end{aligned}$$

(Emlékezzünk: a négyzetgyökvonás nem okoz problémát, ld. fentebb az (1.17) egyenletet.)

Harmadfokú egyenlet megoldóképlete (ld. az A függelék is) nem véletlenül kevésbé ismert, nem túl kényelmes. Magasabb (például ötöd-)fokú polinomokra pedig nincs megoldóképlet. Nem lenne tehát biztos, hogy minden hülye komplex együtthatós sokadfokú polinom is tényleg valahol biztos „átmegy a nullán”; azaz felvett értékének *valós és képzetes része egyszerre* nulla lesz valamilyen z -nél. A tétel lényege, hogy *van* ilyen z zérushely (csak esetleg nem tudjuk *kifejezni*).

• Ha viszont egy N -edfokú $P(z)$ polinomnak van egy zérushelye, z_1 , akkor felírható $(z-z_1) \cdot \tilde{P}(z)$ alakban, ahol $\tilde{P}(z)$ is polinom: $N-1$ -edfokú. Ennek is van zérushelye, z_2 , így ebből $(z-z_2)$ -t emelhetünk ki. Ezt folytatva $P(z)$ -t egyértelműen felírhatjuk így (**gyöktényezős alakban**):

$$P(z) = a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad \Rightarrow \quad P(z) = a_N (z-z_1)(z-z_2) \dots (z-z_N).$$

Persze ez oda-vissza egyértelmű: ha adottak a z_1, z_2, \dots, z_N zérushelyek és az a_N együttható, akkor szorozgatással a $P(z)$ polinomot kifejezhetjük a z -hatványok szerint rendezett alakjában.

• **Lehetséges**, hogy a gyöktényezős alakban kijelölt $z_0 \dots z_N$ számok közül némelyek ugyanazok („egybeesnek”): az ilyen érték neve **többszörös** zérushely. Ezt a lehetőséget tudva úgy célszerű fogalmazni, hogy egy N -edfokú $P(z)$ polinomra egyértelműen létezik

— n darab **zérushely** (ahol $n \leq N$ egész szám), jelben: z_1, z_2, \dots, z_n ,

— minden z_k -hoz (itt $k = 1 \dots n$ lehet) egy $m_k \geq 1$ egész szám (a z_k zérushely **multiplicitása**),

— úgy, hogy a polinom N fokszáma kiadódik, mint $N = m_1 + m_2 + \dots + m_k$, és

— ezekkel a polinom felírható N darab gyöktényező szorzataként, azaz ilyen alakban:

$$\begin{aligned} P_N(z) &= a_N \underbrace{(z-z_1) \dots (z-z_1)}_{m_1 \text{ db}} \cdot \underbrace{(z-z_2) \dots (z-z_2)}_{m_2 \text{ db}} \cdot \dots \cdot \underbrace{(z-z_n) \dots (z-z_n)}_{m_n \text{ db}} = \\ &= a_N (z-z_1)^{m_1} \cdot (z-z_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (z-z_n)^{m_n}. \end{aligned}$$

Ha z_k multiplicitása m_k , akkor z_k -t m_k -szoros gyöknek is mondjuk. Ha egyik gyök sem esik egybe semelyik másikkal (azaz minden gyök egyszeres), akkor persze N darab van belőlük, azaz $n = N$.

⁹Nem is *algebrai* tétel igazából: nem elég a műveleti tulajdonságokat vizsgálni (hiszen bármilyen ilyen gondolatmenet \mathbb{R} -re ugyanúgy igaz lenne, mint \mathbb{C} -re, és \mathbb{R} -ben ugye nem is igaz a tétel). „Analízisbeli”, azaz a \mathbb{C} halmaz „folytonossági”, alakbeli tulajdonságaira épülő módszereket felhasználó bizonyítás kell majd.

• **Példák:** ezeket ellenőrizzük, és gondoljuk végig, ahogy csak tudjuk:

- 1.) $3z^3 - 6(1-i)z^2 + 3(1-4i)z + 6i = 3(z-1)^2(z+2i),$
- 2.) $iz^2 - (1+i)z + 1 = i(z-1)(z+i),$
- 3.) $z^3 - (4-i)z^2 + (3-4i)z + 3i = (z-3)(z+i)(z-1),$
- 4.) $2z^4 - 8iz^3 - 12z^2 + 8iz + 2 = 2(z-i)^4,$
- 5.) $z^4 - 2iz^3 + 3z^2 - 4iz + 4 = (z-2i)^2(z+i)^2,$
- 6.) $z^4 - 3z^3 + 6z^2 - 12z + 8 = (z-2i)(z+2i)(z-1)(z-2),$
- 7.) $z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 6z + 9 = (z-i\sqrt{3})(z+i\sqrt{3}) \cdot [z-(1+\sqrt{2}i)] \cdot [z-(1-\sqrt{2}i)],$

- tehát:
- 1.) harmadfokú, $z_1=1$ kétszeres, $z_2=-2i$ egyszeres gyök,
 - 2.) másodfokú, $z_1=1$ és $z_2=-i$ egyszeres gyökök,
 - 3.) harmadfokú, $z_1=3$, $z_2=-i$, $z_3=1$ egyszeres gyökök,
 - 4.) negyedfokú, $z_1=i$ négyszeres gyök,
 - 5.) negyedfokú, $z_1=2i$ és $z_2=-i$ mindkettő kétszeres gyök,
 - 6.) negyedfokú, $z_1=2i$, $z_2=-2i$, $z_3=1$, $z_4=2$ egyszeres gyökök,
 - 7.) negyedfokú, $z_1=i\sqrt{3}$, $z_2=-i\sqrt{3}$, $z_3=1+\sqrt{2}i$, $z_4=1-\sqrt{2}i$ egyszeres gyökök.

• Fontos speciális eset, ha az együtthatók mind valósak (nézzük át az előző két utolsó példát is):

Ha a P polinom együtthatói mind valós számok, akkor:

$\rightarrow x \in \mathbb{R}$ -re nyilván $P(x) \in \mathbb{R}$ is igaz,
 \rightarrow Általánosabban: $P(z^*) = [P(z)]^*$ is igaz,
 \rightarrow emiatt ha $P(z_1)=0$, akkor $P(z_1^*)=0$ is,
 \rightarrow vagyis ha z_1 zérushely, akkor z_1^* is az,
 \rightarrow emiatt az összes zérushely vagy valós, vagy van egy komplex konjugált párja.

Ha egy ilyen polinomnak van egy nem valós z_1 zérushelye, akkor tehát z_1^* is az; ez a kettő gyöktényező egy valós együtthatós másodfokú kifejezéssé áll össze:

$$(z-z_1)(z-z_1^*) = z^2 - (z_1+z_1^*)z + z_1z_1^* = z^2 - (2 \operatorname{Re} z_1) \cdot z + |z_1|^2.$$

Ha itt z_1 nem valós, akkor ha az eredeti polinomunkat \mathbb{R} -ben maradván akarnánk szorzattá alakítani, akkor ez a másodfokú kifejezés lenne itt a „végállomás”; ez csak komplexben bontható ketté.

Racionális törtfüggvények: két polinom hányadosát szokták ezzel a névvel illetni; ilyeneket:

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad \text{ahol } P(z) \text{ és } Q(z) \text{ polinomok.} \quad \text{Például } R(z) = \frac{3z^3 + 4z^2 + 4}{z^2 - 2z + 2}.$$

Valódi racionális törtfüggvénynek hívhatjuk az olyat, ahol a számláló kisebb fokú, mint a nevező. Ha a számláló polinom fokszáma nem kisebb, mint a nevezőé, akkor sorozatos egyszerűsítésekkel („polinom-osztással”) olyan alakra juthatunk, ahol a maradék már valódi racionális törtfüggvény:

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = P_1(z) + \frac{P_2(z)}{Q(z)}, \quad \text{azaz } R(z) \text{ ilyen alakba írható; itt } P_1 \text{ és } P_2 \text{ is polinomok, és } P_2 \text{ kisebb fokú, mint } Q.$$

Az előbbi példában (ellenőrizzük le!):

$$R(z) = \frac{3z^3 + 4z^2 + 4}{z^2 - 2z + 2} = 3z + 10 + \frac{14z - 16}{z^2 - 2z + 2}.$$

• Valódi racionális törtet **parciális törtre bonthatunk**. Tudva a nevező polinom z_1, z_2, \dots zérushelyeit olyan valódi tört összegeként írhatjuk a függvényünket, amelyek nevezőiben $z-z_k$ -k vagy ilyenek hatványai vannak. N -edfokú nevező esetén N darab tag lesz.

1. Ha a (z N -edfokú) nevezőnek **csupa egyszeres zérushelyei** vannak (jelben itt: z_1, z_2, \dots, z_N):

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{N-1} z^{N-1}}{\alpha(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\dots(z-z_N)} \Rightarrow R(z) = \frac{A_1}{z-z_1} + \frac{A_2}{z-z_2} + \dots + \frac{A_N}{z-z_N}.$$

A számlálóban itt legfeljebb $N-1$ -edfokú polinom lehet, ezért írtuk így. A kérdés itt: mik ezek az A_1, A_2, \dots, A_N számok; egyáltalán található-e ilyeneket. Kétféleképpen haladhatunk.

Egyrészt ha elhittük, hogy tényleg léteznek megfelelő A_1, A_2, \dots, A_N számok, akkor a kapni vélt tört-összeget hozzuk közös nevezőre: a nevező $(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_N)$ lesz, ami tényleg a $Q(z)$ -vel arányos. Ha az így kapott számlálóról megköveteljük, hogy azonosan egyezzen meg az elvárt $P(z)$ -vel, N darab lineáris egyenletet kapunk az A_k -kra. Az állítás az (mindjárt látjuk), hogy biztosan mindig van egyértelmű megoldása (ami ugye nem lenne teljesen magától értetődő).

Példa: $R(z) = \frac{3z^2 - 8}{z^3 - 5z^2 + 4z}.$

A nevező zérushelyei $z_1=0, z_2=1, z_3=4$, egyszeresek, és valóságok. A keresett alak:

$$R(z) = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-1} + \frac{c}{z-4} \stackrel{\text{köz.név.}}{=} \frac{(a+b+c)z^2 - (4b+5a+c)z + 4a}{z(z-1)(z-4)}.$$

Összehasonlítva az eredeti nevezővel:

$$\begin{aligned} a+b+c &= 3, & a &= -2, \\ 4b+5a+c &= 0, & \Rightarrow & b = \frac{5}{3}, \\ 4a &= -8 & c &= \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{R(z) = -\frac{2}{z} + \frac{5}{3} \frac{1}{z-1} + \frac{10}{3} \frac{1}{z-4}}.}$$

Másik példa: $T(x) = \frac{x^2+5}{x^3+x^2}.$

A nevező gyökei $x_1=0, x_2=i, x_3=-i$: egyszeresek, nem mind valóságok. Az elvárt alak:

$$T(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-i} + \frac{C}{x+i} \stackrel{\text{köz.név.}}{=} \frac{(A+B+C)x^2 + i(B-C)x + A}{x(x-i)(x+i)},$$

amiből az eredeti nevezővel összevetve:

$$\begin{aligned} A+B+C &= 1, & A &= 5, \\ i(B-C) &= 0, & \Rightarrow & B = -2, \\ A &= 5, & C &= -2, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T(x) = \frac{5}{x} - \frac{2}{x-i} - \frac{2}{x+i}}.}$$

2. **Továbbra is az egyszeres zérushelyű** nevező esetét vizsgáljuk. A parciális törtet megadó **másik módszer** egyszerűbb és általánosabb is. Legyen $Q(z) = (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\dots(z-z_N)$; vegyük úgy, hogy a legmagasabb fokú tag együttthatójával már egyszerűsítettünk, így az 1-gyel egyenlő. Legyen most is $P(z)$ legfeljebb $N-1$ -edfokú. Az, hogy létezik a parciális törtre bontott alak, a nevezőbeli $Q(z)$ polinommal való átszorzással is egyenértékűleg felírható:

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{A_1}{z-z_1} + \frac{A_2}{z-z_2} + \dots + \frac{A_N}{z-z_N} \Leftrightarrow \begin{aligned} P(z) &= A_1(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)\dots(z-z_N) + \\ &+ A_2(z-z_1)(z-z_3)(z-z_4)\dots(z-z_N) + \\ &+ A_3(z-z_1)(z-z_2)(z-z_4)\dots(z-z_N) + \\ &+ \dots + \\ &+ A_N(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\dots(z-z_{N-1}). \end{aligned}$$

Látszik a lényeg: minden A_k -hoz tartozó tagban a megfelelő $z-z_k$ tényező lehangyódott. Ha most az utóbbi alakot kiértékeljük valamelyik z_k zérushelyen, akkor a bal oldalon a $P(z_k)$ érték szerepel, a jobb oldalon pedig minden tag kiesik, kivéve éppen az A_k -s, mert egyedül ebben

nincs $z - z_k$ szorzó. Ezt az egy tagot kiértékelve majd visszaosztva azt kapjuk tehát, hogy

$$\forall k\text{-ra: } A_k = \frac{P(z_k)}{(z_k - z_1) \dots (z_k - z_{k-1})(z_k - z_{k+1}) \dots (z_k - z_N)} = \left[\frac{P(z)}{Q(z)} \cdot (z - z_k) \right] \Big|_{z=z_k}, \quad (1.20)$$

ahol az utóbbi alakban tehát a nevezőbeli $Q(z)$ -ből lehangyódik a $z - z_k$ tényező, és a maradék értelmes véges (határ)értéket ad $z = z_k$ -ban. Ekvivalens következtetésekkel haladtunk: *tényleg léteznek* a megfelelő A_k számok, sőt, meg is kaptuk őket. Az előző első példa így megoldva:

$$\frac{3z^2 - 8}{z(z-1)(z-4)} = \frac{1}{z} \cdot \underbrace{\frac{3z^2 - 8}{(z-1)(z-4)} \Big|_{z=0}}_{=-2} + \frac{1}{z-1} \cdot \underbrace{\frac{3z^2 - 8}{z(z-4)} \Big|_{z=1}}_{=5/3} + \frac{1}{z-4} \cdot \underbrace{\frac{3z^2 - 8}{z(z-1)} \Big|_{z=4}}_{=10/3}, \quad \text{kész.}$$

3. Ha az N -edfokú nevezőnek **többszörös zérushelyei is** vannak, akkor is N darab parciális tört lesz, és a többszörös gyökök minden a multiplicitásuknál nem nagyobb fokszámmal előkerülnek:

Ha a $Q(z)$ polinomnak a z_k gyöke m_k -szoros, azaz $Q(z) = \dots \cdot (z - z_k)^{m_k} \cdot \dots$,

akkor a parciális törtes alak ilyen:
$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \dots + \frac{A_k^{(1)}}{z - z_k} + \frac{A_k^{(2)}}{(z - z_k)^2} + \dots + \frac{A_k^{(m_k)}}{(z - z_k)^{m_k}} + \dots$$

azaz m_k darab különböző tagban szerepel z_k . Itt is közös nevezőre hozunk, és tagonként megköveteljük, hogy visszakapjuk a számlálót: lineáris egyenletrendszer adódik az A -kra. **Példa:**

$$R(z) = \frac{4x^3 - 4x}{x^4 + 8x^2 + 16}. \quad \text{A nevező: } x^4 + 8x^2 + 16 = (x^2 + 4)^2 = (x - 2i)^2(x + 2i)^2, \text{ ennek tehát két darab kétszeres zérushelye van.}$$

Az elvárt alakot közös nevezőre hozzuk, és összehasonlítjuk a megkövetelt számlálóval:

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{a}{x-2i} + \frac{b}{(x-2i)^2} + \frac{c}{x+2i} + \frac{d}{(x+2i)^2} \stackrel{\text{köz.név.}}{=} \\ &= \frac{(a+c)x^3 + [2i(a-c) + b+d]x^2 + (4ib - 4id + 4a + 4c)x + 4[2ia - 2ic - b - d]}{(x-2i)^2(x+2i)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad &\begin{aligned} a+c &= 4, & a &= 2, \\ 2ia-2ic+b+d &= 0, & b &= i, \\ 4ib-4id+a+c &= -4, & c &= 2, \\ 2ia-2ic-b-d &= 0 & d &= -i, \end{aligned} \Rightarrow R(z) = \frac{2}{x-2i} + \frac{i}{(x-2i)^2} + \frac{2}{x+2i} - \frac{i}{(x+2i)^2}. \end{aligned}$$

Többszörös zérushelyű nevező esetén is felírható egyfajta „általános” megoldás: ez belesimul a később előkerülő *Laurent-sor* nevű fogalomba, addig pihentetjük.

1.4. Hatványsorok

- A „végtelenedfokú polinomokat” hatványsoroknak hívjuk; közelebbről, az ilyen függvénysorokat:

$$f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (1.21)$$

vagy a 0 helyett egy adott z_0 középpontot rögzítve hatványsornak hívjuk az ilyen függvénysort is:

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (1.22)$$

Itt z_0 , illetve minden $n \in \mathbb{N}_0^+$ indexre az a_n -ek adott (komplex) számok: a hatványsor **középpontja** illetve **együtthatói**.

Ez a hatványsorokkal foglalkozó szakasz remélhetőleg önmagában is megáll, de a B függelék sok alapismeretet részletesebben tárgyal: sorokról, sorozatokról, *konvergenciáról*, függvénysorokról. Kiegészítésképpen (vagy ha valami nem érthető) elolvashatjuk a függeléket persze most is; részletesebben bevezetjük ott az alapfogalmakat.¹⁰

• Végtelen összegnél kérdés, hogy létezik-e (a *sorösszeg konvergencia-e*). Ilyen *függvénysoroknál* ez a z változó értékétől függ. Biztos létezik az összeg $z=z_0$ -ban, ahol a_0 -n kívül minden tag nulla, így $f(z=z_0) = a_0$. **Kérdés:** mi egy hatványsor mint függvénysor **konvergenciahalmaza**, azaz milyen z -kre létezik a kijelölt végtelen összeg. Ez az együtthatóktól függ.

Az adhat ötletet, hogy egy egyszerű hatványsorról mindig is tudtuk, hogy mikor konvergens:

$$1+z+z^2+z^3+\dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n. \quad \begin{array}{l} \text{Ha } |z| < 1, \text{ akkor konvergens (és értéke } \frac{1}{1-z}), \\ \text{Ha } |z| \geq 1, \text{ akkor pedig nem konvergens.} \end{array}$$

Ezt ugye **geometriai** vagy *mértani sornak* hívjuk.¹¹ Ezt tudva esetleg általános hatványsort is eszünkbe jut úgy írni, hogy az majdnem olyan legyen, mint a geometriai sor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sqrt[n]{a_n} \cdot (z-z_0) \right]^n.$$

Az $n=0$ -s tag persze így nem értelmes; ezen most (és alábbi (1.23) egyenletben) ne akadunk fent.

Azon fog múlni a dolog, hogy „az $\sqrt[n]{a_n} \cdot (z-z_0)$ abszolútértéke kisebb-e 1-nél”. Ennek persze így nincs értelme: alapból az $\sqrt[n]{a_n}$ számok minden n -re mások. A sorösszeg *létezésébe* akárhány *véges sok* tag nem szól bele: érezzük, hogy az $\sqrt[n]{a_n}$ számoknak, sőt csak a nagyságuknak az $n \rightarrow \infty$ esetben való viselkedése a perdöntő. Ha az $|\sqrt[n]{a_n}|$ -ek ilyen homályos értelmű „végtelen n -beli értékét” $1/R$ -rel jelöljük, akkor olyan z -re, amire $|z-z_0| > R$, a $|\sqrt[n]{a_n}(z-z_0)|$ abszolútérték „ $n \rightarrow \infty$ -beli értéke 1-nél nagyobb”: a sorösszegünk bizonyára nem létezik, de ha $|z-z_0| < R$, talán igen.

• Ennyi mellébeszélés után jöjjön az R rendes definíciója:

$$\begin{array}{l} \text{A } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ hatvány-} \\ \text{sor } \mathbf{konvergenciasugara:} \end{array} \quad R := \frac{1}{\limsup_n (\sqrt[n]{|a_n|})}, \quad (1.23)$$

és ha a nevező 0 vagy ∞ , akkor értelemszerűen $R = \infty$ illetve $R = 0$ értendő. Természetesen mivel az abszolútérték valós szám, $\sqrt[n]{|a_n|} = |\sqrt[n]{a_n}|$.

A \limsup még nem ismerős esetleg: *valós számok* b_n sorozatára $\limsup_n b_n$ a sorozat úgynevezett *felső határértéke*: „a legkisebb” szám (de lehet $+\infty$ is), aminél a sorozatnak csak véges sok tagja nagyobb. (Rendesebben és példákkal ld. a B.1. függelékben.) Azaz bármilyen x -re ha $x > \limsup_n b_n$, akkor x -nél a b_n sorozatnak csak véges sok tagja nagyobb-egyenlő, ha viszont $x < \limsup_n b_n$, akkor x -nél végtelen sok tag nagyobb. Kigondolható ebből, hogy (valós értékű) konvergens b_n sorozatra a felső határérték megegyezik a határértékkel: $\limsup_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

¹⁰Mindenesetre vannak ott még esetleg ott is túlkapásnak számító bizonyítások is...

¹¹Ezt régen esetleg csak valós számokra ismertük, de a véges $\sum_{k=0}^{N-1} z^k$ összeg \mathbb{C} -ben is $\frac{1-z^N}{1-z}$ (ez csak a testműveleteken múlik), és \mathbb{C} -ben nézve is a z^N -nek éppen $|z| < 1$ esetén van $N \rightarrow \infty$ határértéke (és az nulla).

- A hatványsorok konvergenciatulajdonságaira vonatkozó alaptétel pedig a következő.

$$\begin{array}{ll} \text{Cauchy-Hadamard-tétel:} & \bullet \text{ divergens (nem összegezhető), ha } |z-z_0| > R, \\ a \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ hatványsor} & \bullet \text{ pontonként abszolút konvergencia, ha } |z-z_0| < R, \\ & \bullet \text{ a } z_0 \text{ körüli } r \text{ sugarú körlapon egyenletesen} \\ & \text{konvergens bármilyen } r < R \text{ érték esetén.} \end{array} \quad (1.24)$$

A **bizonyítás** a fentebbi rávezetést követi; a B.4. függelék elején olvasható. A használt fogalmakat is bevezetjük a B.2. és a B.3. függelékben. Egy sor abszolút konvergencia, ha a tagok *abszolútértékeinek* létezik a végtelen összege: ebből már következik (pontosabban ld. a B.4. függelékben), hogy maguknak a tagoknak is létezik az összege (ami persze magában is, abszolútértékezeve is általában más, mint az abszolútértékek összege). Az ilyen z -k esetén tehát a hatványsor összege egy jól definiált szám: értelmes a z -hez ezt rendelő függvény, a hatványsor *összeg(függvény)e*. Hogy a hatványsor mint függvény egy halmazon egyenletesen is konvergál (tart) ehhez a függvényhez, az azt jelenti, hogy a halmazon nézve a tőle való „legnagyobb eltérés” is nullához tart.

- Minden hatványsor **konvergenciahalmaza** tehát egy **kör** a \mathbb{C} síkon, aminek a kifejező nevű *konvergenciasugár*, R a sugara. Előfordulhat, hogy $R=0$: egy ilyen hatványsor semmilyen $z \neq z_0$ esetén nem konvergens. Az is lehet, hogy $R=\infty$: ilyen hatványsor minden $z \in \mathbb{C}$ esetén konvergens. Ilyen hatványsor bármilyen „ ∞ -nél kisebb r ”, azaz bármilyen véges sugarú körlapon (és emiatt minden korlátos halmazon is) egyenletesen is konvergens, de *az egész \mathbb{C} -n nem*.¹²

Ha a hatványsor értelmezési tartományát leszűkítjük a valós számokra (és $z_0 \equiv x_0$ is valós), akkor a konvergenciakör az $[x_0-R, x_0+R]$ szakaszt jelenti (illetve az egész \mathbb{R} -et, ha $R=\infty$).

- A Cauchy-Hadamard-tétel nem mond semmit a konvergenciakör határáról ($0 < R < \infty$ esetén): különféle hatványsorok esetén lehet, hogy a határon a sorösszeg mindenhol abszolút konvergencia, lehet, hogy néhol csak konvergencia (de nem abszolút, azaz: „feltételesen”, ld. a B.2. függelékben), lehet, hogy néhol divergens is (és az is, hogy mindenhol az).

Másrészt véges R esetén sokszor találhatunk egy bővebben értelmezett differenciálható függvényt, ami a konvergenciakörön belül megegyezik a hatványsor összegével (ld. később, **analitikus elfolytatás** címen). A hatványsor körvonalon való viselkedésének alapvetően **semmi köze** ahhoz, hogy a „kiterjesztett” függvény hol értelmes és hol nem. A C.5. függelékben visszatérünk ide.

- Látszik az R konvergenciasugár definíciójából, hogy ha gyorsan nőnek az a_n együtthatók (abszolútértékei), akkor R bizonyára kisebb. Fontos, hogy az n -edik gyök jó „simító”: nem túl gyorsan növekvő a_n -ekre lehet, hogy $\sqrt[n]{|a_n|}$ nem is nő. Eleinte érdemes konkrétan megvizsgálgatni, hogy mennyinek adódik R ; mindjárt látunk példákat. Később a 4.3. szakaszban viszont kiderül, hogy sokszor egyszerűbben kitalálható egy függvény hatványsorának konvergenciasugara.

Ugye $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$ akkor is létezik, ha a $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|}$ nem, ha viszont utóbbi (a határérték) létezik, akkor az ugyanannyi, mint az előbbi (a \limsup). Néha könnyít az életen a következő

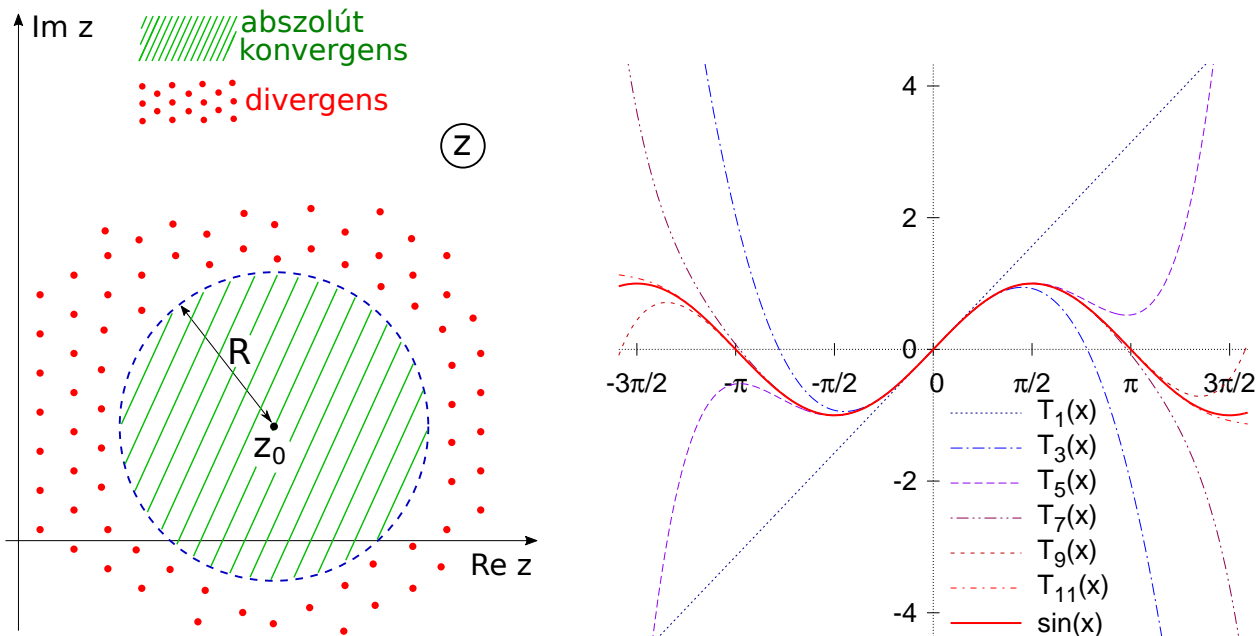
$$\begin{array}{ll} \text{Állítás:} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}, \quad \text{akkor} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \quad \text{és ekkor} \\ \text{ha létezik} & \text{létezik} \quad \text{egyenlők.} \end{array} \quad (1.25)$$

¹²Ennek (és a konvergencia „gyorsaságának” további részleteinek) gyakorlati jelentősége is van bőven, amikor egy hatványsorral értelmezett függvényt szeretnénk numerikusan kiszámítani. Általában szinte sosem elég azt mondani egy számítógépes programnak, hogy adja össze a tagokat és kész; a hatványsor összegfüggvényéről szinte mindig ki kell deríteni valami további tulajdonságot, ami a kiszámítást bizonyos z -kre egyszerűbbé teszi. Olyasmire gondolhatunk, hogy például a \sin függvényről kiderül, hogy periodikus 2π szerint: ez ilyen „plusz” tulajdonság.

Persze ehhez kell, hogy $a_n \neq 0$ legyen legalábbis egy indextől kezdve. Sokszor egyszerűbb kezelni ezt a hányados-határértéket, mint a $\sqrt[n]{|a_n|}$ -eket. (Bizonyítást ld. a B.1. függelék szakasz végén.)

• Véges sok tag összeadása kommutatív, több indexre való összegzés esetén is mindegy, milyen sorrendben összegzünk; a szorzás disztributív az összeadásra. Végtelen összegek tudhatnak furcsaságokat. A hatványsor viszont (ahol konvergencia, ott) *abszolút konvergens*: ebből következik (ld. a B.2. függelékben), hogy ilyenkor a végtelen összegre is igazak a véges összegre vonatkozó jó tulajdonságok: a tagokat cserélgethetjük, két sort összeszorozva mindegy, milyen sorrendben adjuk össze a tagok szorzatait; a tagokat két csoportba rendezve is összeadhatjuk. Ezeket a gyakorlatban rutinszerűen használjuk; jó tudni, hogy hatványsoroknál *tényleg* minden rendben.

Az $r < R$ sugarú körlapon való egyenletes konvergencia, és hogy mindegyik részletösszeg (polinom) folytonos, eredményezi, hogy a hatványsor **összegfüggvénye is folytonos** itt. A bizonyítást a B.3. függelékben leírtam. Ha a nem folytonos függvényeket „amúgy is utáljuk”, akkor elég tudni, hogy egy hatványsornál nem lehet gond: konvergenciakörén *belül* folytonos függvényt állít elő.



2. ábra. Balra: hatványsor konvergenciaköre a \mathbb{C} síkon (véges R esetén). Jobbra: példa $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hatványsor konvergenciájára: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots$, egyre magasabb fokú közelítő polinomokkal. Itt $R = \infty$: a sor mindenhol pontonként konvergens, de az egész \mathbb{R} -en nem egyenletesen, mert bármely részletösszegtől a legnagyobb eltérés ∞ . Minden véges szakaszon viszont a legnagyobb eltérés elég kicsivé válik elég magas fokú közelítő polinom esetén.

• Véges összeget deriválhatunk tagonként, végtelen összeget nem mindig. Azonban **hatványsor** összegfüggvénye **differenciálható is**, ahol értelmes, és lehet tagonként deriválni. Konkrétan:

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + a_4(z-z_0)^4 + \dots \\ \Rightarrow f'(z) &= a_1 + 2a_2(z-z_0) + 3a_3(z-z_0)^2 + 4a_4(z-z_0)^3 + \dots, \end{aligned}$$

vagy tömören, szummajellel felírva

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \Rightarrow \quad f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}.$$

A deriváltakból összerakott függvénysor **is hatványsor**. A lehetséges nyugtalanító kérdések:

- 1.) Az eredeti konvergenciakörön belül a tagok deriváltjaiból álló hatványsor konvergens-e?
- 2.) Ha az, összege egyenlő-e az eredeti hatványsorösszeg deriváltjával (ami tényleg létezik-e)?

• Mindkét válasz *igen*. Az elsőhöz: legyen R az eredeti sor, R_1 a derivált sor konvergenciasugara:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}, & \text{Állítás: hatványsornak és deriváltjának} \\ \frac{1}{R_1} &:= \limsup_n \sqrt[n]{n|a_n|}. & \text{ugyanaz a konvergenciaköre: } \underline{\underline{R = R_1}}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

A lényeg: az R és az R_1 felírt alakja közötti különbség „felszívódik”, ami azon múlik, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Ezt „ki is próbálhatjuk” (számológéppel), de be is látható, hogy tényleg igaz.¹³ Ha még azt is tudjuk (ld. a B.1. függelék végét is), hogy \mathbb{R} értékű c_n és d_n sorozatokra ha c_n konvergens, és $0 < \lim c_n < \infty$, akkor $\limsup_n (c_n d_n) = (\lim c_n)(\limsup_n d_n)$, tényleg ugyanannyinak adódik R és R_1 , ahogy állítottuk (most c_n szerepére $\sqrt[n]{n}$ -et véve).

A második „igen” választ (hogy a deriváltak hatványsor-összege *tényleg* az eredeti hatványsor-összeg deriváltját állítja elő) a B.4. függelékben bizonyítjuk. Szőrözösebb; csak érdeklődőknek!

• **A lényeg:** hatványsor összefüggvénye **differenciálható**, és lehet **tagonként** deriválni. Viszont az így kapott derivált maga is egy hatványsor ugyanazzal a konvergenciakörrel, így *rá is elmondhatjuk ugyanezt*. Sőt, akkor már akárhányszor, azaz akárhanyadik deriváltra is. Hatványsor tehát a konvergenciakörön belül **végtelenszer is differenciálható** („sima”) függvényt állít elő.

A derivált sorokat is tömören felírhatjuk, és ki is értékelhetjük őket a z_0 középpontban:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \Rightarrow \quad f(z_0) = a_0, & \text{mivel az } n=0\text{-s tag ennyit ad,} \\ & & \text{ } z_0\text{-ban pedig a többi tag nulla.} \\ f'(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1} \quad \Rightarrow \quad f'(z_0) = a_1. & \text{Az } a_0\text{-s tag itt nullával szorzódik, az} \\ & & \text{ } a_1\text{-es adja ezt, a többi nulla } z_0\text{-ban.} \\ f''(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (z-z_0)^{n-2} \quad \Rightarrow \quad f''(z_0) = 2a_2. & a_0 \text{ és } a_1 \text{ 0-val szorzódnak, } a_2\text{-ből} \\ & & \text{ez jön, a többi nulla } z_0\text{-ban.} \\ f'''(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n (z-z_0)^{n-3} \quad \Rightarrow \quad f'''(z_0) = 3 \cdot 2 \cdot a_3. & \text{Itt csak az } a_3\text{-as tag} \\ & & \text{lesz nem nulla } z_0\text{-ban.} \end{aligned}$$

Fix $m \geq 0$ -ra az m -edik derivált sor kényelmesen faktoriálissal írható, amit z_0 -ban kiértékelhetünk:

$$\begin{aligned} \text{Gondoljuk ki, hogy } f^{(m)}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} a_n (z-z_0)^{n-m} \quad \Rightarrow \\ & \Rightarrow \quad \underline{\underline{f^{(m)}(z_0) = m! \cdot a_m}}. \end{aligned}$$

• Ezek alapján egy hatványsor együtthatóit a deriváltak z_0 -beli értékeivel kifejezve is írhatjuk:

$$\text{Hatványsor más alakja: } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n. \quad (1.27)$$

Ez **majdnem** az, ami **Taylor-formula** névre hallgat. Itt azt láttuk be, hogy *ha* $f(z)$ -t hatványsor

¹³Adott $\varepsilon > 0$ -ra a binomiális tételből $(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}n(n-1) + \dots + \varepsilon^n \geq 1 + \frac{\varepsilon^2}{2}n(n-1)$, ahol nagyvonalúak voltunk. Ha n elég nagy (hogy $n\varepsilon^2 > 2$ legyen), akkor $1 + \varepsilon^2 n(n-1)/2 > n$, emiatt ekkor $(1+\varepsilon)^n > n$, azaz $1+\varepsilon > \sqrt[n]{n}$. Bármilyen $\varepsilon > 0$ -ra tehát elég nagy n -től kezdve $\sqrt[n]{n}$ kisebb $1+\varepsilon$ -nál, de 1-nél még nagyobb: a határértéke tényleg 1.

állítja elő (a konvergenciakörön belül), *akkor* az együtthatókat beazonosíthatjuk így, a deriváltakal. Az igazi kérdés: egy *másképp* megadott f függvény *felírható-e* ilyen hatványsorként adott z_0 pont körül. Később kiderül, hogy sok fontos esetben igen, de érdemes óvatosan bánni ezzel.

• Két hatványsor esetén *ha* minden együttható ugyanaz, *akkor* a sorösszegek is nyilván egyenlők. Lehet-e, hogy két különböző hatványsor mégis ugyanazt a függvényt állítja elő; hátha a végtelen összegzés tud ilyen trükköket... Nem: *ha* egy hatványsor konvergenciasugara $R > 0$, akkor *értelmesekek* a deriváltjai, és az előállított f függvényből az együtthatók egyértelműen kiadódnak (azaz: nem lehetnek mások), mint az imént is látott módon az f megfelelő deriváltjaiból adódóak.

1.5. Elemi függvények, egyszerű hatványsorok

• Keressünk olyan hatványsort, aminek a deriváltja önmaga (ugye ez lesz az $\exp(z)$ függvény):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad f = f' \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}. \quad (1.28)$$

Következő lépésben **átjelöljük** a jobb oldali n összegzőindexet $n-1$ -re: a legutóbbi jobb oldalon az $n=0$ -s tag kiesik, vagyis ott $n-1$ -től fut ∞ -ig, így $n-1$ fut 0 -tól ∞ -ig. A lényeg: az átjelölés után a két oldali hatványsor a z -hatványok szerint ugyanúgy rendezett alakban áll előttünk:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n. \quad (1.29)$$

Láttuk, hogy két hatványsor pont akkor állítja elő ugyanazt a függvényt, ha az együtthatóik egyenként megegyeznek. Alkalmazzuk ezt a mostani esetben az utolsó alak két oldalára:

$$(n+1)a_{n+1} = a_n \text{ minden } n \in \mathbb{N}_0^+ \text{-ra, így } a_0 \text{-ból kijön sorban a többi:} \\ a_1 = \frac{1}{1} a_0, \quad a_2 = \frac{1}{2} a_1 = \frac{a_0}{2!}, \quad a_3 = \frac{1}{3} a_2 = \frac{a_0}{3!}, \quad \dots \quad a_n = \frac{a_0}{n!}. \quad (1.30)$$

• Az **exponenciális függvény** egyértelműen adódik az előzőekből $a_0=1$ -et választva:

$$\exp(z) := 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (1.31)$$

Eddig azt tudhatjuk tehát, hogy $\exp(0) = 1$, és $\frac{d}{dz} \exp(z) = \exp(z)$. A **konvergenciasugár** itt ∞ . Emlékezve a fenti (1.23) definícióra, ehhez azt kell belátni, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0. \quad (1.32)$$

Rögzített $A > 0$ számra $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A^n}{n!} = 0$.¹⁴ Szavakban: *a faktoriális gyorsabban nő minden exponenciálisnál*. Emiatt bármilyen kicsi $\varepsilon > 0$ esetén ha n elég nagy, akkor $(\frac{1}{\varepsilon})^n \frac{1}{n!} < 1$, vagy átrendezve: $\varepsilon \cdot \sqrt[n]{n!} > 1$, azaz $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \varepsilon$. Emiatt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$, azaz $\limsup_n \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$; kész.

Megjegyzés: ha felidézünk az előző szakaszbeli (1.25) állítást, akkor az $\sqrt[n]{|a_n|}$ helyett elég az

¹⁴Ez érezhető, hiszen ahogy n -et növeljük, a nevezőbe egyre nagyobb plusz tényezők kerülnek, a számlálóba pedig csak újabb A -k. Rendesen: legyen $m \in \mathbb{N}^+$, $m > A+1$ rögzített szám. Ha $n > m$, akkor $\frac{A^n}{n!} = \frac{A^m}{m!} \cdot \frac{A}{m+1} \cdot \frac{A}{m+2} \cdot \dots \cdot \frac{A}{n}$, ebből pedig (nagyvonalúan csak az utolsó tényezőt megtartva) ilyenkor $\frac{A^n}{n!} \leq \frac{A^m}{m!} \cdot \frac{A}{n}$, de még így is látszik, hogy $n \rightarrow \infty$ esetén ez a jobb oldal nullához tart, így a (pozitív és ennél kisebb) bal oldal is: $\lim_{n \rightarrow \infty} (A^n/n!) = 0$.

$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ sorozat konvergenciáját vizsgálni: most $a_n = \frac{1}{n!}$, így $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{n+1}$, amiről rögtön látszik, hogy nullához tart. Ebből következik az iménti (1.32) határérték is, és a konvergenciasugár ∞ volta is.

- A (sorával definiált) exponenciális függvény tehát az egész \mathbb{C} -n értelmes. **Alaptulajdonsága:**

$$\exp(z) \exp(w) = \exp(z+w), \quad \text{minden } z, w \in \mathbb{C} \text{ esetén.} \quad (1.33)$$

Ezt most kétféleképpen is beláthatjuk; mindkettő „jobban csúszik” már az előző szakaszban (és a B függelékben) előkerült megalapozásokkal. Első: rögzített z_0 és „változó” z esetén

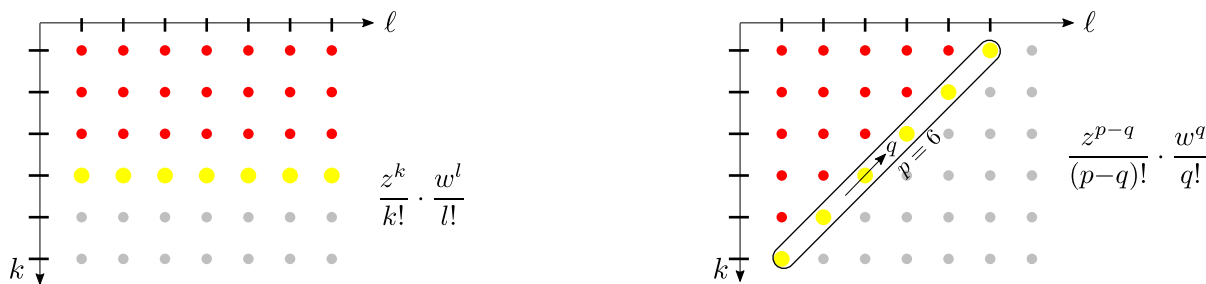
$$\begin{aligned} &\text{Csak abból, hogy } \exp' = \exp, \text{ és a szorzat} && \frac{d}{dz} (\exp(z) \cdot \exp(z_0-z)) = 0. \\ &\text{deriválási szabályából ellenőrizzük, hogy} \end{aligned}$$

Emiatt az $\exp(z) \cdot \exp(z_0-z)$ mint z függvénye konstans, ez a konstans pedig $z=0$ -ban való kiértékeléssel (mivel $\exp(0) = 1$) nyilván $\exp(z_0)$. Vagyis $\exp(z) \exp(z_0-z) = \exp(z_0)$ minden z_0 és z esetén; ha z_0 -t átnevezzük $w+z$ -nek, pont a fenti alakban kapjuk az alaptulajdonságot.

A másik módszer az $\exp(z)$ és $\exp(w)$ sorai szorzatának manipulálása. *Abszolút konvergencia esetén* (azaz most is) a végtelen összegeket is cserélgethetjük. Most az a (külön ezért a B.2. függelékben megvizsgált) eset kell, amikor a tagok szorzatait más sorrendben adjuk össze.

$$\begin{aligned} \text{Egyrészt: } \exp(z) \cdot \exp(w) &= && \text{Másképp: } \exp(z+w) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(z+w)^p}{p!} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{w^l}{l!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^k w^l}{k! l!}, && = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{q=0}^p \frac{p! z^{p-q} w^q}{(p-q)! q!} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^p \frac{z^{p-q}}{(p-q)!} \frac{w^q}{q!}. \end{aligned}$$

A két színes kifejezés egyenlő,¹⁵ mert ugyanazon „kétindexes végtelen összeg” felírásai: az első soronként majd oszloponként megy, a második pedig az átlókon. A binomiális tétel is kellett.



3. ábra. Az $\exp(z)$ alaptulajdonságának sorösszeggel való levezetéséhez (kb. tavalyról áttemelve).

- Az (1.33) tulajdonság miatt lehet ugye bevezetni az $e^z := \exp(z)$ definícióval az $e := \exp(1)$ szám akármilyen hatványát, majd bármilyen komplex számét, ahogy fentebb (is) felidéztek az (1.11) egyenletben. Továbbá tudva, hogy abszolút konvergens sorokat tényleg kettébonthatunk, a többi elemi függvényt bevezethetjük az \exp sorának páros vagy páratlan részeiként:

$$\begin{aligned} \text{ch } z &:= \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} + \frac{z^{10}}{10!} + \frac{z^{12}}{12!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \\ \text{sh } z &:= \frac{e^z - e^{-z}}{2} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} + \frac{z^{11}}{11!} + \frac{z^{13}}{13!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \end{aligned}$$

¹⁵Ez a Vektorszámítás jegyzet 8. fejezetében is szerepel. Újdonság, hogy most már (az itteni függeléket is átrágván) tudhatjuk, hogy *tényleg* nem csinálunk disznóságot, amikor itt végtelen sorösszegek tagjait cserélgetjük.

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \frac{z^{10}}{10!} + \frac{z^{12}}{12!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n},$$

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} - \frac{z^{11}}{11!} + \frac{z^{13}}{13!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

Ha még szokatlan, ellenőrizzük, hogy helyesen írtuk fel szummával a kijelölt sorösszegeket! Ezen hatványsorok konvergenciasugara is ∞ : egyrészt mert az $\exp(z)$ -ből származnak, de közvetlenül is kijön: az, hogy minden második együttható nulla, nem rontja el a $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$ -re kapottat.

• Ezen definíciókból és az exponenciális alaptulajdonságából a \sin , \cos , sh , ch függvények *minden* tulajdonsága kijön; ellenőrizzük újra ezeket! Például: hogy teljesül az $\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z)$ Euler-formula, az addíciós és pitagoraszai összefüggések (\sin/\cos -ra és sh/ch -ra is); ld. a Vektorszámítás jegyzet 2.4. szakaszában, de remélhetőleg ezek egyre inkább vérünké válnak.

Mivel hatványsorösszegek, és mindenhol értelmesek, a bevezetett függvények *tényleg* folytonosak és akárhányszor differenciálhatók (ez most már *bizonyított tény* lett!). Azt is ellenőrizzük újra, szummás jelöléssel és anélkül is, hogy (megtámogatva elméletileg azzal, hogy szabad) tagonkénti deriválással valóban az ismert $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$, $\text{sh}' = \text{ch}$, $\text{ch}' = \text{sh}$ összefüggéseket kapjuk!

Ha $z \equiv x \in \mathbb{R}$ valós szám, akkor (mivel a sor együtthatói valósak) nyilván valósak e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\text{sh} x$, $\text{ch} x$ értékei is. A hatványsor alapján $\cos(0) = 1$, és azt is megállapíthatjuk (például $x=2$ -t kiszemelve), hogy $\cos(2) < 0$, és hogy a \cos függvény monoton csökken $x=0$ és $x=2$ között.¹⁶

Ezek miatt tehát 0 és 2 között pontosan egyetlen jól meghatározott valós szám van, ahol a \cos függvény nullát vesz fel. *Nevezzük el ezt a számot $\pi/2$ -nek!* Így **vezethetjük be a π számot** rendszeren. A π -re tehát $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, és a $\sin^2 + \cos^2 = 1$ pitagoraszai összefüggés miatt $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ (és nem -1 , mert \sin itt ugye pozitív). Ezek után a trigonometrikus függvényeknek a π -t használó azonosságai (periodikusság, speciális értékek, zérushelyek) már kijönnek az addíciós képletekből.

• A $\sin(z)$ függvény **zérushelyei** tehát tényleg $\dots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$, a $\cos(z)$ -é pedig $\dots -\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \dots$. Ezeket persze régóta tudjuk; most rendszeren bevezettük a π -t is. Érdeemes külön hangsúlyozni, hogy a $\sin(z)$ és $\cos(z)$ függvényeknek komplex z -kre **sincsnek további** zérushelyei: a \sin zérushelyei **komplex számok között is** pontosan csak az $n \cdot \pi$ alakú valós számok, a \cos -é pedig az $(n + \frac{1}{2})\pi$ alakú valós számok, ahol $n \in \mathbb{Z}$ lehet. Ellenőrzés:

$$z = x + iy \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |\sin(x+iy)|^2 = \dots = \sin^2 x + \text{sh}^2 y, \\ |\cos(x+iy)|^2 = \dots = \cos^2 x + \text{sh}^2 y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{ha } y \neq 0, \text{ akkor ezek po-} \\ \text{zítívák, így nem nullák.} \end{array}$$

• Foglalkozzunk más hatványsorokkal is! A geometriai sort deriválással és integrálással is továbbfejleszthetjük. Hatványsorösszeg deriváltja a tagok deriváltjainak összege, így az összegfüggvényeket is felírhatjuk. A kapott sorokról már tudhatjuk, hogy mind ugyanott konvergensek. Néhány lehetőség következik; a z_0 középpontot 0-ból máshova is tehetnénk z helyébe $z - z_0$ -t írogatva.

¹⁶Az, hogy „a \cos grafikonjából látszanak ezek”, nem megnyugtató: egyelőre *csak* a hatványsort használhatjuk grafikonrajzoláshoz is, és a sor sokadik tagjai esetleg elronthatnák a látványosan teljesülő következtetést. A hatványsorból viszont minden kijön. $\cos(2) = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!} - \dots = 1 - \frac{2^2}{4} (1 - \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 4}) - \frac{2^6}{6!} (1 - \frac{2 \cdot 2}{7 \cdot 8}) - \frac{2^6}{6!} (1 - \frac{2 \cdot 2}{7 \cdot 8}) - \dots$ Utóbbi felírásban az első két tag összege $-\frac{1}{3}$, aztán pozitívakat vonunk ki: garantáltan $\cos(2) < 0$. Hasonlóan $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots = x(1 - \frac{x \cdot x}{2 \cdot 3}) + \frac{x^5}{5!} (1 - \frac{x \cdot x}{6 \cdot 7}) + \dots$: ha $x \in]0, 2[$, akkor csupa pozitív számot összegzünk, így itt $\sin(x) > 0$. Emiatt mivel $\cos' = -\sin$, a $\cos(x)$ tényleg monoton csökken legalábbis $x=0$ és $x=2$ között.

Példák:	Tagonként:	Tömören:	A konvergenciakörön belül:
$f_1(x) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + \dots$	$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n$	$R=1,$	$f_1(x) = \frac{1}{1-z}.$
$f_2(x) = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + z^6 - \dots$	$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$	$R=1,$	$f_2(x) = \frac{1}{1+z}.$
$f_3(x) = 1 + 2z + 4z^2 + 8z^3 + 16z^4 + 32z^5 + \dots$	$= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$	$R=\frac{1}{2},$	$f_3(x) = \frac{1}{1-2z}.$
$f_4(x) = z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + 5z^5 + 6z^6 + \dots$	$= \sum_{n=0}^{\infty} n z^n$	$R=1,$	$f_4(x) = \frac{z}{(1-z)^2}.$
$f_5(x) = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{6}z^6 + \dots$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$	$R=1,$	$f_5(x) = -\text{Ln}(1-z).$

Az első a geometriai sor: triviálisan $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, azaz $R=1$; ebből indultunk ki a Cauchy-Hadamard-tétel bevezetésekor. Ha z -t $-z$ -re cseréljük, f_2 -t kapjuk: az $|a_n|$ -ek ugyanazok, így is világos, hogy ott is $R=1$. Az f_3 ugyanaz, mint f_1 , ha $2z$ -t tekintjük változónak. Így nyilván z -re nézve itt $R=\frac{1}{2}$, ami az első R fele. És valóban: $\sqrt[n]{2^n} = 2$, így $\frac{1}{2}$ jön ki az R limsup-os kifejezéséből is. A konvergenciasugár definíciója tehát konzisztens a változó ilyen fajta átjelölésével.

Az f_5 deriváltja f_1 , így az f_5 sorösszege az $\frac{1}{1-z}$ első összegfüggvény ($z=0$ -ban $f_5(0)=0$ -t felvevő) primitív függvénye: tudva, hogy a vágáson kívül $\frac{d}{dz} \text{Ln } z = \frac{1}{z}$, tényleg a mondott sorösszeget kapjuk. *Figyelem!* Az $\text{Ln}(1-z)$ függvénynek vágása van (nem differenciálható) az $[1, \infty) \subset \mathbb{R}$ félegyenesen: visszatérünk erre, mindenesetre $\text{Ln}(1-z)$ az egységkörön (azaz a $|z| < 1$ körön) belül értelmes, differenciálható, és deriváltja tényleg $\frac{1}{1-z}$: igaz a felírt következtetésünk.

Az f_4 sor az f_1 elsőnek a deriváltja (z -vel szorozva): így adódik f_4 sorösszege. A derivált sorokról tanultak miatt világos, hogy f_4 és f_5 ugyanott konvergens, mint f_1 , azaz $R=1$ rájuk.

• Nézzük meg az $f(z) = (1-z)^{-\alpha}$ általános **hatványfüggvény** hatványsorát is! Itt a rögzített $\alpha \in \mathbb{C}$ bármilyen szám lehet (még komplex is); $\alpha = 1$ a geometriai sort adja vissza. **Állítás:**

$$\frac{1}{(1-z)^\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}z + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1 \cdot 2}z^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}z^3 + \dots, \quad \text{ha } |z| < 1. \quad (1.34)$$

A z^n -es tag számlálójában tehát n darab 1-gyel arrébbi szám szorzata van (és a nulladfokú tag 1; ezt beleértik ebbe a jelölésbe). A formula lényegében a függvényünk Taylor-sora: mivel

$$f(z) = (1-z)^{-\alpha}, \quad f'(z) = \alpha \cdot (1-z)^{-(\alpha+1)}, \quad f''(z) = \alpha(\alpha+1) \cdot (1-z)^{-(\alpha+2)}, \quad \dots$$

ezen $z=0$ -beli értékeiből a szisztémát felismerve az (1.27) Taylor-képlet a felírt sort adja. Később látjuk be, hogy ez *tényleg előállítja* a megadott $f(z)$ függvényünket a konvergenciakörön belül.

Külön kiemeljük az $\frac{1}{2}$ -edik hatvány fontos és gyakori esetét: a páros szorzatokkal ($2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots$ -tal) bővítve ellenőrizhetjük, hogy az együtthatók az alábbi alakban írhatók fel itt:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \dots \cdot \left(n - \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^n n!} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} z^n. \quad (1.35)$$

• Ha $\alpha = -m$ nempozitív egész ($m \in \mathbb{N}_0^+$), akkor nem végtelen az iménti (1.34) sor (mert ekkor

az összes $n > m$ -es együttható nulla). Ilyenkor (1.34) a binomiális tétellel is megkapható m -edfokú polinomot adja. **Ha viszont $\alpha \notin \mathbb{Z}_0^-$, akkor a konvergenciasugár $R = 1$.** Beláthatjuk ezt az R limsup-pal megadott képlete alapján. (Érezhető az eredmény, mert az a_n számlálójában is és nevezőjében is hasonló ütemben növekvő szorzatok vannak.) Ha $\alpha = m$ pozitív egész, akkor a geometriai sor $m-1$ -edik deriváltjáról van szó, amiről tudjuk, hogy rá $R = 1$. Ha $\Re(\alpha) > 0$, akkor van olyan $m \in \mathbb{N}_0^+$, amire $\Re(\alpha) < m$, és ekkor tetszőleges n -re lássuk be, hogy $n < |n+\alpha| < n+m$. Emiatt az ilyen α -hoz tartozó $\sqrt[n]{|a_n|}$ -eket beszoríthatjuk a geometriai sorhoz és annak m -edik deriváltjához tartozó $\sqrt[n]{|a_n|}$ -ek közé, és utóbbiak sorozata mindkét esetben 1-hez tart; kész. Az α -hoz tartozó ilyen sor deriváltja az $\alpha+1$ -hez tartozóval arányos: ha $\Re(\alpha) < 0$, a sort elégszer deriválva visszavezetődünk a már kipipált $\Re(\alpha) > 0$ esetre (ugye a derivált sor konvergenciasugara ugyanannyi marad): minden esetre beláttuk tehát a konvergenciasugárra mondottat.

Ha pont $\alpha = -m$, azaz polinomunk volt, akkor ez azonosan eltűnne ennyi deriválástól, így ez a(z előbb is kiemelt) speciális eset is belesimul ebbe a mondott gondolatmenetbe.

Megjegyzés: az (1.25) állítással dolgozva egyszerűbben megkapjuk a konvergenciasugarat (most az $\alpha = -m$ lehetőséget kizárva, amikor is m index után az együtthatók nullák lennének, és úgysem használhatnánk a hányados-határértéket):

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{n!} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha+n|}{|n+1|} = 1, \quad (1.36)$$

ebből pedig $R = 1$ rögtön adódik.

- Az arctg és az Arth függvények sorai a logaritmussal kifejezett alakjaikból kaphatók:¹⁷

$$\text{Arth } z = \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{1+z}{1-z} \quad \Rightarrow \quad (\text{Arth } z)' = \frac{1}{1-z^2}, \quad (1.37)$$

$$\text{arctg } z = \frac{1}{2i} \text{Ln} \frac{1+iz}{1-iz} \quad \Rightarrow \quad (\text{arctg } z)' = \frac{1}{1+z^2}. \quad (1.38)$$

Akár az $\frac{1}{1 \pm z^2}$ fentebbről kapható sorainak tagonkénti primitív függvényét keresve, akár a logaritmusokat szétbontva,¹⁸ majd $\text{Ln}(1 \pm z)$ fentebbi sorait használva az adódik, hogy

$$\text{Arth } z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad \text{ha } |z| < 1, \quad (1.39)$$

$$\text{arctg } z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad \text{ha } |z| < 1; \quad (1.40)$$

és valóban mindkettő sorra $R=1$. Tagonkénti primitívfüggvény-kereséssel az Arsh és az arcsin ilyen sorait is megkaphatjuk (valós x -re; a sort aztán kiterjeszthetjük komplex z -kre is):

$$\begin{aligned} (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \quad \Rightarrow \quad \arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \\ (\text{Ar sh } x)' &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \quad \Rightarrow \quad \text{Ar sh } x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \end{aligned}$$

¹⁷Ha még nem rutin, ellenőrizzük, hogy a megadott képletek valóban helyesen adják meg a th és a tg inverzeit, illetve a sh, ch hasonló inverzeit is helyesen adtuk meg!

¹⁸Valós $|x| < 1$ -re biztos igaz, hogy $\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$. Komplex számokra a fázisugrás miatt nem mindig igaz, hogy $\text{Ln} \frac{a}{b} = \text{Ln } a - \text{Ln } b$, mindazonáltal $|z| < 1$ -re mégiscsak $\text{Ln} \frac{1+z}{1-z} = \text{Ln}(1+z) - \text{Ln}(1-z)$. Később majd látunk a fázisok végiggondolásánál egyszerűbb módszereket is eme utóbbinak belátására.

Megjegyzés: $\operatorname{Ar sh} z$ -t (és abból kiindulva $\arcsin z$ -t is) kifejezhetjük logaritmussal is:

$$\operatorname{Ar sh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1}), \quad \arcsin z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}). \quad (1.41)$$

Tovább: $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, az $\operatorname{Ar ch}$ viszont \mathbb{R} -ben nem értelmes $x=0$ környékén.

* * *

Ebben a fejezetben elmélyítve átismételtünk komplex változós függvényeket. A következő fejezetekben következnek azok a témakörök, amelyeket ténylegesen komplex függvénytanak hívnak: a lényeg, hogy össze kell kapcsolni a komplex differenciálhatóságot \mathbb{C} sík-voltával, „geometriájával”. Az így szerzett ismeretek az eddig tárgyalt függvények jobb megértését is elősegítik.

2. Komplex differenciálhatóság és egyszerű következményei

Ideje rátérni az „igazi” komplex függvénytanra. Az *értelmezési tartomány* tehát \mathbb{C} (vagy részhalmazai); az *érkezési halmaz* sokféle \mathbb{V} vektortér is lehetne, de a legalapvetőbb eset az, amikor ez is a komplex számok \mathbb{C} halmaza: innentől $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényekkel foglalkozunk.

2.1. Komplex differenciálhatóság

- Tudjuk, hogy mit jelent, hogy egy $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény differenciálható:

$$f \text{ differenciálható } z\text{-ben, ha létezik ez a határérték: } \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} := f'(z). \quad (2.1)$$

Akkor áll szilárdan az építmény, ha azt is megköveteljük, hogy ez a z az értelmezési tartomány **belső pontja** legyen, azaz $\text{Dom } f$ a z mellett még annak (legalább egy kis) körlap-környezetét is tartalmazza. Továbbá azt mondjuk, hogy f *differenciálható*, ha $\text{Dom } f$ minden pontjában az.

- **Egyfelől** ha \mathbb{C} -re mint számhalmazra gondolunk, a valós függvényekre megszokott (és a számműveleteket használó átalakításokkal belátható) differenciálási szabályok **érvényben maradnak**:

1. Ha f és g differenciálhatóak z -ben, akkor

- (a) minden $\lambda \in \mathbb{C}$ számra λf is differenciálható z -ben, és $(\lambda f)'(z) = \lambda \cdot f'(z)$,
- (b) $f + g$ is differenciálható z -ben, és $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$,
- (c) fg is differenciálható z -ben, és $(fg)'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$,
- (d) Az előző kettő értelemszerűen véges sok tag illetve tényező esetére is szokásosan igaz,
- (e) Ha $f(z) \neq 0$, akkor $\frac{1}{f}$ is differenciálható z -ben, és $(\frac{1}{f})'(z) = -\frac{f'(z)}{(f(z))^2}$.
- (f) Ha $g(z) \neq 0$, akkor (c)-ből és (e)-ből $\frac{f}{g}$ is differenciálható z -ben, és $(\frac{f}{g})'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2}$.

2. Ha f differenciálható z -ben, g pedig $f(z)$ -ben, akkor a kompozíció, $g \circ f$ is differenciálható z -ben, és $(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z)$. Szokásos tömörséggel: $\frac{df}{dz} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dz}$.

3. Ha f folytonosan differenciálható z egy környezetében, és $f'(z) \neq 0$, akkor f injektív a z egy (esetleg szűkebb) környezetében, f^{-1} differenciálható $f(z)$ -ben, és $(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$ igaz.¹⁹

4. Az identitás-függvény, $f(z) = z$ differenciálható, és $f' = 1$ (konstans 1). Minden konstans $f(z) = c$ függvény differenciálható, és $f'(z) = 0$. Az \exp , \sin , \cos , sh , ch elemi függvények deriváltjai a fenti 1.4. szakaszban átismételt hatványsoraikat tudva tényleg azok, amiket ismerünk.

Ezekből építkezve kijön a deriválási szabály-gyűjtemény. Kis pongyolással: ha egy elemi függvényekkel, műveletekkel, törtekkel-szorozattal, stb. felírt valós $f(x)$ függvény differenciálható, akkor ha „az x -et z -re cseréljük”, így kiterjesztve \mathbb{C} -re, differenciálható $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt kapunk.

- **Másfelől** \mathbb{C} -re mint *síkra* gondolva: a (differenciálhatóság definíciójában, (2.1)-ben kijelölt) határérték fogalmában benne van, hogy akkor létezik, ha **akárhogyan** tartunk is w -vel z -hez, a hányados **ugyanahhoz** az $f'(z)$ komplex számhoz tart. A valós differenciálásnál legfeljebb balról és jobbról, a komplex síkon azonban már igen sokféleképpen közelíthetünk w -vel z -hez. A differenciálhatóság feltétele így nézve igen erős.²⁰ Nem is teljesül minden „egyszerű” függvényre.

¹⁹Az inverz deriváltjának *képlete* ugye kijön abból, hogy $f^{-1}(f(z)) = z$, és ekkor $w \rightarrow z$ esetben f^{-1} deriváltja $\frac{w-z}{f(w)-f(z)}$ -ből jön. Az viszont, hogy a mondott feltétel elég, komolyabb tétel. Esetleg visszatérünk rá.

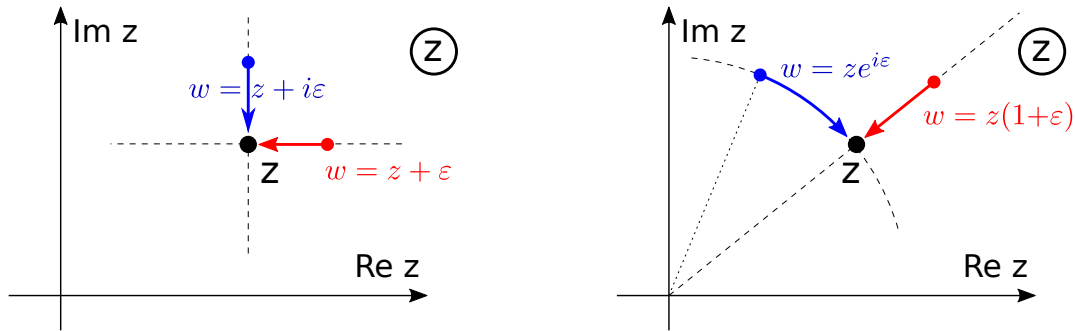
²⁰Olyannyira, hogy (a következményeket látva) majd felmerülhet, hogy nem lőttünk-e vele túl a célon. Megnyugtató: a továbbiakban meglátjuk, hogy hasznos elmélet virágzik ki a komplex differenciálhatóság definíciójából.

• **Intő példák:** egyszerű $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvények, amelyek mindenhol folytonosak, de sehol sem differenciálhatók. Utóbbihoz elég belátni, hogy *minden* z esetén *létezik kettő* irány, amelyek mentén w -vel z -hez tartva *nem egyforma* a megkövetelt (2.1) határérték (ha létezik is).

A vizsgált f függvény	A deriválthoz kellő különbségi hányados határértéke, $\lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$
Komplex konjugálás, $f(z) = z^*$	Valós irányban, $w = z + \varepsilon$: $\frac{(z + \varepsilon)^* - z^*}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \rightarrow 1$. Képzetes irányban, $w = z + i\varepsilon$: $\frac{(z + i\varepsilon)^* - z^*}{i\varepsilon} = \frac{-i\varepsilon}{i\varepsilon} \rightarrow -1$.
Valós rész képzése, $f(z) = \Re(z)$	Valós irányban, $w = z + \varepsilon$: $\frac{\Re(z + \varepsilon) - \Re(z)}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \rightarrow 1$. Képzetes irányban, $w = z + i\varepsilon$: $\frac{\Re(z + i\varepsilon) - \Re(z)}{i\varepsilon} = \frac{0}{i\varepsilon} \rightarrow 0$.
Képzetes rész képzése, $f(z) = \Im(z)$	Valós irányban, $w = z + \varepsilon$: $\frac{\Im(z + \varepsilon) - \Im(z)}{\varepsilon} = \frac{0}{\varepsilon} \rightarrow 0$. Képzetes irányban, $w = z + i\varepsilon$: $\frac{\Im(z + i\varepsilon) - \Im(z)}{i\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{i\varepsilon} \rightarrow -i$.
Abszolútérték képzése, $f(z) = z $	$z \neq 0$, sugárirányban: $w = z(1 + \varepsilon)$ $\frac{ z(1 + \varepsilon) - z }{z\varepsilon} = \frac{ z }{z} \rightarrow e^{-i \arg z}$. $z \neq 0$, körirányban: $w = ze^{i\varepsilon}$ $\frac{ ze^{i\varepsilon} - z }{z(e^{i\varepsilon} - 1)} = \frac{0}{z(e^{i\varepsilon} - 1)} \rightarrow 0$.

Itt ε pozitív valós nullához tartó szám, a határértékek $\varepsilon \rightarrow 0$ -t jelentenek. Gondoljuk végig mindet! (Például hogy tényleg $\frac{0}{\varepsilon}$, noha $\varepsilon = 0$ -ban nem értelmes, $\varepsilon \rightarrow 0$ -ra *nullához tart*). Az abszolútértékre írtak $z \neq 0$ -ra értelmesek; $z = 0$ -ban ő már \mathbb{R} -re leszűkítve sem differenciálható.

A felsorolt függvényekhez tehát semmilyen z -re nem létezik a különbségi hányados határértéke, mert minden z -re találtunk két irányt, amelyek mentén nem ugyanannyi.²¹



4. ábra. Bal oldal: az $f(z) = z^*$, $f(z) = \Re(z)$, $f(z) = \Im(z)$ függvények nem differenciálhatóságának belátásához használt irányok. Jobb oldal: az $f(z) = |z|$ -hez a sugárirányú és a szögirányú irány.

• Az imént vizsgált $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvények tehát **sehol sem differenciálhatók**. Elég megjegyezni, hogy a **komplex konjugálás nem differenciálható**: ebből következik, hogy a többi felsorolt sem az, mivel $f(z) = z$ differenciálható, de $\Re(z) = \frac{1}{2}(z + z^*)$, $\Im(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*)$, $|z|^2 = zz^*$.

2.2. A Cauchy-Riemann-egyenletek

• **Bevezetés:** hasznos lesz, ha **minden** $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (azaz: komplex számokon értelmezett és komplex értékeket felvevő) **függvényhez** két darab két valós változós, valós értékeket felvevő,

²¹Ha ez nem elég meggyőző, kipróbálhatunk más irányú ráközelítéseket is: világos lesz, hogy valóban nincs értelmes határérték egyik esetben sem semmilyen z -re, mert változtatós értékeket kaphatunk különböző irányokból.

tipikusan $U(x, y)$ -nal és $V(x, y)$ -nal jelölt függvényt társítunk. Ezek f **valós és képzetes részeit** fogják jelenteni: ha a z komplex változót $x+iy$ módon ($x, y \in \mathbb{R}$) adjuk meg, akkor az eredmény $f(z)$ -értéknek vehetjük a valós és képzetes részeit, amelyek z -n keresztül x -től és y -től függenek.

$$\text{Tömören: ha } z \equiv x+iy, \text{ akkor } f(z) \equiv f(x+iy) = U(x, y) + iV(x, y). \quad (2.2)$$

• Ha adott $f(z)$ -hez U és V a kérdés, akkor legtöbbször konkrétan be kell írni $z = x+iy$ -t, és addig alakítani (tudva komplex számokat összeadni, szorozni, hatványozni, az elemi függvények addíciós tételeit használni, stb.), amíg ki nem derül az eredmény valós és képzetes része. Jó „állóképesség-növelő edzés” az is, ha próbáljuk az eredményt egyszerű szép alakra hozni.

Példák jönnék; ellenőrizzük őket! Itt $c \equiv a+ib$ adott konstans komplex számot jelent.

$f(z) = z^*$,	$U(x, y) = x,$ $V(x, y) = -y.$	$f(z) = cz,$	$U(x, y) = ax-by,$ $V(x, y) = bx+ay.$
$f(z) = \Re(z),$	$U(x, y) = x,$ $V(x, y) = 0.$	$f(z) = z^2,$	$U(x, y) = x^2-y^2,$ $V(x, y) = 2xy.$
$f(z) = \Im(z),$	$U(x, y) = y,$ $V(x, y) = 0.$	$f(z) = z^3,$	$U(x, y) = x^3-3xy^2,$ $V(x, y) = 3x^2y-y^3.$
$f(z) = z ^2,$	$U(x, y) = x^2+y^2,$ $V(x, y) = 0.$	$f(z) = \text{Ln } z,$	$U(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2),$ $V(x, y) = \arg(x+iy).$
$f(z) = c,$	$U(x, y) = a,$ $V(x, y) = b.$	$f(z) = e^z,$	$U(x, y) = e^x \cos y,$ $V(x, y) = e^x \sin y.$
$f(z) = z,$	$U(x, y) = x,$ $V(x, y) = y.$	$f(z) = \sin z,$	$U(x, y) = \sin x \text{ ch } y,$ $V(x, y) = \cos x \text{ sh } y.$
$f(z) = iz,$	$U(x, y) = -y,$ $V(x, y) = x.$	$f(z) = \cos z,$	$U(x, y) = \cos x \text{ ch } y,$ $V(x, y) = -\sin x \text{ sh } y.$
$f(z) = \text{sh } z,$	$U(x, y) = \text{sh } x \cos y,$ $V(x, y) = \text{ch } x \sin y.$	$f(z) = \frac{1}{\sin z},$	$U(x, y) = \frac{\sin x \text{ ch } y}{\sin^2 x + \text{sh}^2 y},$ $V(x, y) = \frac{-\cos x \text{ sh } y}{\sin^2 x + \text{sh}^2 y}.$
$f(z) = \frac{1}{z},$	$U(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2},$ $V(x, y) = \frac{-x}{x^2+y^2}.$	$f(z) = \text{tg } z,$	$U(x, y) = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \text{sh}^2 y},$ $V(x, y) = \frac{\text{sh } y \text{ ch } y}{\cos^2 x + \text{sh}^2 y}.$
$f(z) = \frac{1}{z+c},$	$U(x, y) = \frac{x+a}{(x+a)^2+(y+b)^2},$ $V(x, y) = \frac{-(y+b)}{(x+a)^2+(y+b)^2}.$	$f(z) = \text{th } z,$	$U(x, y) = \frac{\text{sh } x \text{ ch } x}{\text{sh}^2 x + \cos^2 y},$ $V(x, y) = \frac{\sin y \cos y}{\text{sh}^2 x + \cos^2 y}.$

A látott nem differenciálható függvényeket pirossal kiemeltük. Az Ln képzetes része, $\arg(x+iy)$ így maradt (ld. az előző fejezetben, az (1.11) egyenlet környékén). Utolsó példaként jöjjön \sqrt{z} :

$$f(z) = \sqrt{z} \quad \Rightarrow \quad U(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{x^2+y^2} + x}, \quad V(x, y) = \frac{\text{sgn}(y)}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{x^2+y^2} - x}, \quad (2.3)$$

ehhez nem $z = x+iy$ -t behelyettesítve alakítunk, hanem ki kell fejezni valós és képzetes részekkel a négyzetgyökvonás eredményét (ld. a korábbi (1.17) egyenletet és környékét).

• Legyen tehát egy $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény $f(z) \equiv U(x, y) + iV(x, y)$ alakban adott (ugye $z = x + iy$, vagyis x és y a \mathbb{C} síkon a Descartes-koordináták). Ha f differenciálható, az komoly feltételeket jelent az U és V függvényekre; nemcsak annyit, hogy ők is differenciálhatók (ami sejtető).

Állítás: f pontosan akkor differenciálható $z \equiv x + iy$ -ban, ha U és V is differenciálhatók (x, y) -ban, és teljesülnek a **Cauchy-Riemann-egyenletek:**

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}. \quad (2.4)$$

Jól jegyezzük meg őket; „szép szimmetrikusak”. Ha $f(z)$ egy kiterjedt halmazon differenciálható, a Cauchy-Riemann-egyenletek nem triviális *differenciálegyenletek*. Nem bármilyen U és V függvény lehet tehát egy differenciálható $f(z)$ valós és képzetes része. Minden differenciálható $f(z)$ viszont automatikusan olyan U -t és V -t ad, amelyek teljesítik a Cauchy-Riemann-egyenleteket.

• *Próbáljuk ki* néhány (a fentebbi táblázatban látott) differenciálható $f(z)$ függvényre ezt!

<p>Példa: $f(z) = z^3$ mindenhol differenciálható. $U(x, y) = x^3 - 3xy^2$, $V(x, y) = 3x^2y - y^3$</p>	\Rightarrow	$\begin{aligned} \partial_x U &= 3x^2 - 3y^2, \\ \partial_y U &= -6xy, \\ \partial_x V &= 6xy, \\ \partial_y V &= 3x^2 - 3y^2 \end{aligned}$	\Rightarrow	<p>tényleg igaz, hogy $\partial_x U = \partial_y V$ és $\partial_y U = -\partial_x V$ azonosan teljesülnek.</p>
---	---------------	--	---------------	---

Ha viszont U és V differenciálhatók, de nem elégítik ki a Cauchy-Riemann-egyenleteket, akkor a megfelelő $f(z)$ *nem* differenciálható. (Ilyenek pirosak a fenti táblázatban.) A legfontosabbik:

<p>$f(z) = z^*$ sehol sem differenciálható. Erre $U(x, y) = x$, $V(x, y) = -y$</p>	\Rightarrow	$\begin{aligned} \partial_x U &= 1, \\ \partial_y U &= 0, \\ \partial_x V &= 0, \\ \partial_y V &= -1 \end{aligned}$	\Rightarrow	<p><i>nem igaz, hogy</i> $\partial_x U = \partial_y V$ és $\partial_y U = -\partial_x V$.</p>
---	---------------	--	---------------	---

• A szakasz maradékában **bebizonyítjuk** a Cauchy-Riemann-egyenletes (2.4) állítást. Először is: f differenciálható z -ben, ha létezik egy $f'(z)$ -vel jelölt komplex szám, amivel

$$f(z + \Delta z) \approx f(z) + \Delta z \cdot f'(z), \quad \text{azaz} \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|f(z + \Delta z) - f(z) - \Delta z \cdot f'(z)|}{|\Delta z|} = 0. \quad (2.5)$$

Másrészt \mathbb{C} -re csak mint síkra (azaz a $z = x + iy$ számra mint az $\mathbf{r} \equiv (x, y)$ helyvektorú pontra) gondolva tudhatjuk, hogy az $U(\mathbf{r})$ illetve a $V(\mathbf{r})$ kétváltozós függvényeink differenciálhatók az x, y pontban, ha vannak olyan kétkomponensű, $\nabla U(\mathbf{r})$ illetve $\nabla V(\mathbf{r})$ jelölésű vektorok, amikkel

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) &\approx U(\mathbf{r}) + \nabla U(\mathbf{r}) \cdot \Delta \mathbf{r}, \\ V(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) &\approx V(\mathbf{r}) + \nabla V(\mathbf{r}) \cdot \Delta \mathbf{r}, \end{aligned} \quad \text{azaz} \quad \begin{aligned} \lim_{\Delta \mathbf{r} \rightarrow 0} \frac{|U(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - U(\mathbf{r}) - \nabla U(\mathbf{r}) \cdot \Delta \mathbf{r}|}{|\Delta \mathbf{r}|} &= 0, \\ \lim_{\Delta \mathbf{r} \rightarrow 0} \frac{|V(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - V(\mathbf{r}) - \nabla V(\mathbf{r}) \cdot \Delta \mathbf{r}|}{|\Delta \mathbf{r}|} &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

A skalárszorzat itt a szokásosat jelenti, a gradiensvektorokra és a $\Delta \mathbf{r}$ -re komponensenként gondolva:

$$\nabla U(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \partial_x U(x, y) \\ \partial_y U(x, y) \end{pmatrix}, \quad \nabla V(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \partial_x V(x, y) \\ \partial_y V(x, y) \end{pmatrix}, \quad \Delta \mathbf{r} \equiv \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}.$$

• **Most jön a lényeg:** szétírjuk valós és képzetes részekre a komplex differenciálhatóság feltételét. Az f függvénynek is és a megkövetelt $f'(z)$ deriválnak is van határozott valós és képzetes része

(utóbbiak jele legyen ideiglenesen A és B), a z -é pedig éppen x és y , azaz:

$$z \equiv x+iy, \quad \Delta z \equiv \Delta x+i\Delta y, \quad f(z) \equiv U(x,y) + iV(x,y), \quad f'(z) \equiv A + iB.$$

Ezeket mind be kell írni az f differenciálhatóságát megadó (2.5) feltételbe:

$$\begin{aligned} f(z+\Delta z) &\approx f(z) + \Delta z \cdot f'(z) \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow U(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}) + iV(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}) \approx U(\mathbf{r}) + iV(\mathbf{r}) + (\Delta x+i\Delta y) \cdot (A+iB). \end{aligned}$$

Ez viszont pontosan akkor teljesül, ha **a valós és a képzetes részre külön-külön is**. Elvégezve az egy darab szorzást arra jutunk, hogy követelményünk az alábbi két feltétellel ekvivalens:

$$\begin{aligned} \text{A valós részből: } &U(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx U(x,y) + A \cdot \Delta x - B \cdot \Delta y, \\ \text{A képzetesből: } &V(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx V(x,y) + B \cdot \Delta x + A \cdot \Delta y. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ezek viszont éppen azt jelentik, hogy az U és V mint kétváltozós függvények az x, y helyen differenciálhatók, hiszen kicsit odébbmenve a megváltozásuk tényleg a differenciálható függvényektől elvárható fenti (2.6) alakú. Sőt: konkrétan leolvashatjuk, hogy mik a parciális deriváltak:

$$\partial_x U(x,y) = A, \quad \partial_y U(x,y) = -B, \quad \partial_x V(x,y) = B, \quad \partial_y V(x,y) = A. \quad (2.8)$$

Az U, V függvények felől nézve nem tudjuk, hogy mennyi az A és a B (az $f'(z)$ komplex szám valós és képzetes részei), de megállapíthatjuk a felírt összefüggésekből, hogy az U és V parciális deriváltjai tényleg *egymással* egyenlők a megfelelő kiosztásban, azaz **tényleg teljesül**, hogy

$$\partial_x U(x,y) = \partial_y V(x,y), \quad \text{és} \quad \partial_y U(x,y) = -\partial_x V(x,y). \quad \mathbf{Kész.}$$

• A precízebb, határértékes fogalmazásban is befejezhetjük a levezetést; a lényeg ugyanez a valós-képzetesrészes átírás. Arra kell csak ráébredni, hogy Δz pontosan akkor tart nullához, ha Δx és Δy is. Így tényleg arra jutunk az $f(z)$ differenciálhatóságára vonatkozó feltételből, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|f(z+\Delta z) - f(z) - \Delta z \cdot f'(z)|}{|\Delta z|} = 0 &\quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{|U(x+\Delta x, y+\Delta y) - U(x,y) - A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0, \\ \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{|V(x+\Delta x, y+\Delta y) - V(x,y) - B \cdot \Delta x - A \cdot \Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0, \end{cases} &\quad (2.9) \end{aligned}$$

hiszen a valós és képzetes részek behelyettesítése ugyanúgy történik, mint fentebb. Azt is ki kellett persze használni, hogy egy komplex szám (most az $f(z+\Delta z) - f(z) - f'(z) \cdot \Delta z$ szám *elosztva a valós $|\Delta z|$ -vel*) pontosan akkor tart nullához, ha az abszolútértéke is, illetve ha a valós része is és a képzetes része is nullához tart. Ebből is ugyanarra az iménti (2.8) feltétel-csomagra jutunk, amiből most már tényleg a Cauchy-Riemann-egyenletek következnek, precízebben is.

• **Bebizonyítottuk** a Cauchy-Riemann-egyenletes (2.4) állítást. Ekvivalens következtetésekkel haladtunk: **visszafelé is** igaz, hogy ha U és V differenciálhatóak x, y -ban, és $\partial_x U = \partial_y V$ és $\partial_y U = -\partial_x V$, akkor az $f(x+iy) \equiv U(x,y) + iV(x,y)$ függvény differenciálható $z = x+iy$ -ban.

Melléktermékként az is kiderült, hogy hogyan kapcsolódnak az U és V függvények (valós) parciális deriváltjai az $f(z)$ deriváltjához, $f'(z)$ -hez: a fenti (2.8) megfeleltetésből beláthatóan

$$f'(z) = \partial_x U(x,y) + i \cdot \partial_x V(x,y), \quad \text{másképp:} \quad f'(z) = -i(\partial_y U(x,y) + \partial_y V(x,y)).$$

Ez a két alak a Cauchy-Riemann-egyenleteket tudva tényleg egyenértékű (sőt más kiosztással is felírhatjuk f' -t). Az első annak felel meg, amikor az f' -t valós (x irányú) elmozdulás szempontjából nézzük: $\Delta z \equiv \Delta x$, és az x -ben való változási gyorsaság jön elő. A második pedig amikor $\Delta z \equiv i\Delta y$, azaz tiszta képzetes: így az y irányú valós deriváltak kerülnek elő ($\frac{1}{i} = -i$ -vel szorozva).

2.3. Differenciálható függvények mint konform leképezések szemléltetése

• Most is f jelöl egy $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt, és $U(x, y)$ és $V(x, y)$ a valós és képzetes részeit mint a $z = x + iy$ módon beazonosított valós x és y függvényeit. Láttuk, hogy adott helyen $f(z)$ éppen akkor differenciálható, ha U és V is, és ők kielégítik a Cauchy-Riemann-egyenleteket:

$$\begin{aligned} z &\equiv x + iy, & \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial y}, & \frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{\partial V}{\partial x}. \\ f(z) &\equiv U(x, y) + iV(x, y), \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy a függvényeink legalább egy „kövérkés” (=nyílt) halmazon differenciálhatók.

• Az első észrevétel a Cauchy-Riemann-egyenletekből közvetlenül következik; *belátni* egyszerű.

Állítás: ahol f differenciálható, ott $\underline{\underline{\text{grad } U \cdot \text{grad } V = 0}}$.

$$\text{Ugyanis } \begin{pmatrix} \partial_x U \\ \partial_y U \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_x V \\ \partial_y V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x U \\ \partial_y U \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\partial_y U \\ \partial_x U \end{pmatrix} = 0. \quad (2.10)$$

Vagyis differenciálható f esetén U és V kétdimenziós gradiensvektorainak mindenhol nulla a skalárszorzata, azaz merőlegesek. Emiatt az ilyen U és V függvények **szintvonalai** is **merőlegesek** egymásra mindenhol. Az U és a V függvényeket szemléltethetjük is a szintvonalakkal: differenciálható f esetén ezek **ortogonális koordinátarendszert** adnak a síkon. (Sőt, néhány egyszerű f függvény épp néhány korábban megismert ilyen koordinátarendszert ad meg így; ld. alább.)

Az U és a V szintvonalakkal ábrázolásával esetleg *magát az f függvényt is* szemléltethetjük. Valós-valós („ $y = f(x)$ ”) függvényeket grafikonjukkal ábrázolhatunk; $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényekre nincs ilyen lehetőség. Egyszerűbb komplex függvények U, V szintvonal-rendszerei egy idő után esetleg ismerősek lesznek, de nehezebben válnak olyan beidegződéssé, mint a valós függvénygrafikonok.

• Egy $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényre úgy is gondolhatunk, hogy ő a \mathbb{C} sík pontjait (számokat) átvisz más pontokba (számokba): **eltranszformálja** a síkot. Ennek vizualizálásához jelöljük z -vel az f változóját, z' -vel az eredményül kapható számokat, és vizsgálhatjuk például, hogy az f a valós illetve a képzetes tengellyel párhuzamos egyeneseket milyen görbékbe viszi. Kigondolhatjuk, hogy így ugyanazt a görbesereget kapjuk, mintha a z' síkon az f *inverzét*, f^{-1} -et szemléltetnénk az előző pontban mondott módon.²² Így az is nyilvánvaló, hogy differenciálható f esetén egy $\Re(z) = \text{const}$ és egy $\Im(z) = \text{const}$ egyenes képgörbéi a z' síkon is derékszögben metszik egymást. *Figyelem!* Ha mutatnak két (ortogonális) görbesereget, és azt mondják, hogy ez egy f komplex függvény „ábrázolása”, akkor jó tisztázni, hogy mit értenek alatta: az f valós és képzetes részeinek szintvonalait, vagy a koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenesek f általi képeit. (Másképp fogalmazva: nézhetjük azt, hogy az f *milyen görbékbe visz át* a valós illetve képzetes tengelyekkel párhuzamos egyenesekbe, de azt is, hogy a tengelyekkel párhuzamos egyeneseket *milyen görbékbe viszi át*.)

²²Ugyanis (a valós részre megfogalmazva): a z' -ket, amik olyan z -kből kaphatók $z' = f(z)$ -ként, amikre $\Re(z)$ egy adott érték, f^{-1} éppen visszaviszi azokba a z -kbe, amelyekre $\Re(z)$ éppen az adott érték: ezen z' -k halmaza az f^{-1} -nek mint függvénynek a valós részének az egyik szintvonala. Ugyanezt a képzetes részre is megfogalmazhatjuk.

- Ha azt keressük, hogy egy f függvény milyen görbékbe viszi a tengelyirányú egyeneseket, írjuk fel utóbbiak egyenleteit az indulási z -síkon „paraméterezve”:

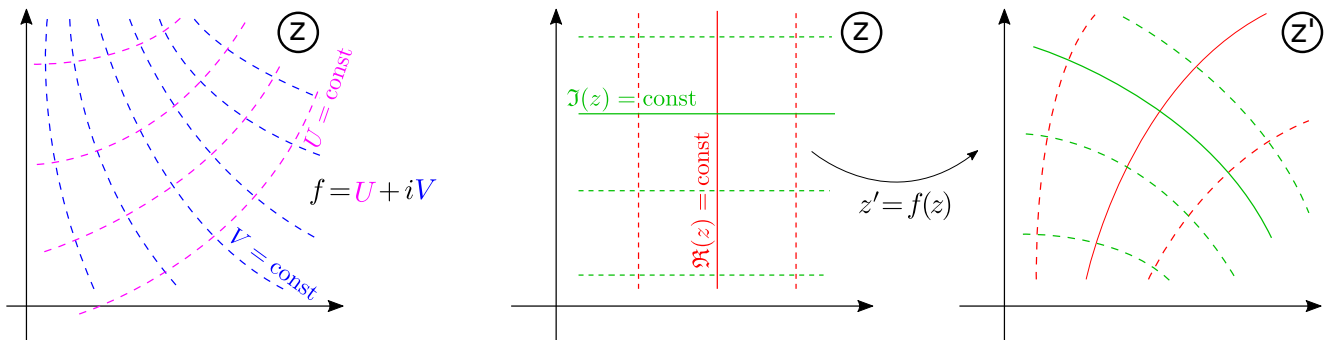
$$\begin{aligned} \text{Egy vízszintes egyenes: } z &= x + ib; & b \text{ rögzített, } x \text{ pedig végigfut } [-\infty, \infty]\text{-en,} \\ \text{Egy függőleges egyenes: } z &= a + iy; & a \text{ rögzített, } y \text{ pedig végigfut } [-\infty, \infty]\text{-en.} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ezeket beírva $f(z)$ -be megkapjuk azon görbék (x -szel illetve y -nal mint paraméterrel) paraméterezett alakjait, amelyekbe f az egyeneseket viszi; a b illetve az a értékei (az eredeti egyenesek képzetes illetve valós tengellyel való metszéspont-helyei) a képgörbékét különbözteti meg egymástól.

$$\text{a kép-görbék egyenletei: } x \rightarrow f(x+ib), \text{ illetve } y \rightarrow f(a+iy). \quad (2.12)$$

A kapott utóbbi kifejezések valós és képzetes részeit alakítgatva sokszor kézzelfoghatóbb alakban megadhatjuk az eredménygörbék egyenletét, azaz felismerhetjük, hogy ők „micsodák”.

Ha pedig az a kérdés, hogy f milyen görbékét visz tengelyirányú egyenesekbe, akkor f valós és képzetes részeinek, U -nak és V -nek a szintvonalait kell keresni, hiszen egy ilyen pont az jellemmez, hogy a rajta lévő számokból kapott eredmény valós (vagy képzetes) része egy adott érték.



5. ábra. Differenciálható $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény ábrázolása. Balra: az U - és V -szintvonalak merőlegesek. Jobbra: a tengelyirányú egyenesek képei is merőlegesek. A két görbesereg általában nem is hasonlít egymáshoz; egyikük az f -hez, másikkak az f^{-1} -hez tartozó valós és képzetes részek szintvonal-seregei.

- Első példa: legyen $\gamma \equiv \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ adott komplex szám ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), és tekintsük a γ -val való szorzás műveletét, azaz legyen $f(z) = \gamma z$. Hova viszi ez a tengelyekkel párhuzamos egyeneseket? Adott b tengelymetszetű vízszintes illetve a tengelymetszetű függőleges egyenesekből indulva

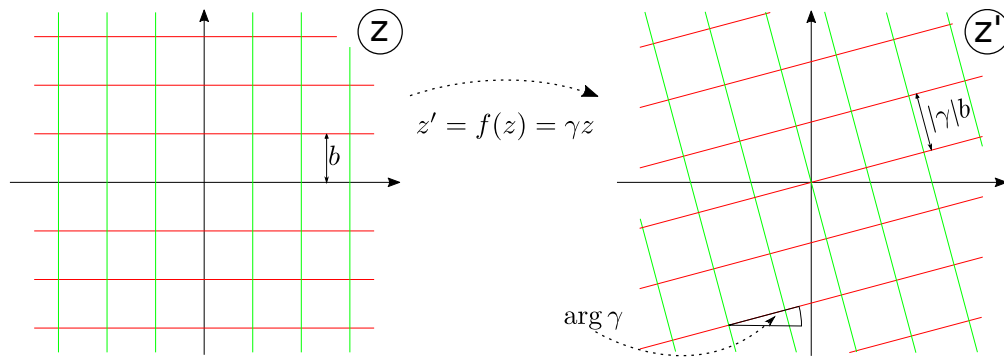
$$\begin{aligned} \text{Vízszintes egyenes: } z &= t + ib & \Rightarrow & \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(f(t+ib)) \\ \operatorname{Im}(f(t+ib)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha t - \beta b \\ \beta t + \alpha b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} -\beta b \\ \alpha b \end{pmatrix}, \\ \Rightarrow f(z) &= \gamma \cdot (t + ib), \\ \text{Függőleges egyenes: } z &= a + iu & \Rightarrow & \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(f(a+iu)) \\ \operatorname{Im}(f(a+iu)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a - \beta u \\ \beta a + \alpha u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix} \cdot u + \begin{pmatrix} \alpha a \\ \beta a \end{pmatrix}. \\ \Rightarrow f(z) &= \gamma \cdot (a + iu), \end{aligned}$$

Ezek is egyenesek egyenletei. A vízszintes egyenesek irányvektora (α, β) lett, a függőlegeseké $(-\beta, \alpha)$. Mindkettő azt jelenti, hogy az eredeti egyenesek elfordultak az (α, β) vektor irányszögével, ami pont $\arg \gamma$. Ellenőrizzük azt is, hogy kapott egyenesek origótól vett távolsága $|\gamma| \cdot b$ és $|\gamma| \cdot a$ lett: a „nagyítás” $|\gamma| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Persze nincs meglepetés: a γ -val való szorzás pont ezeket jelenti.

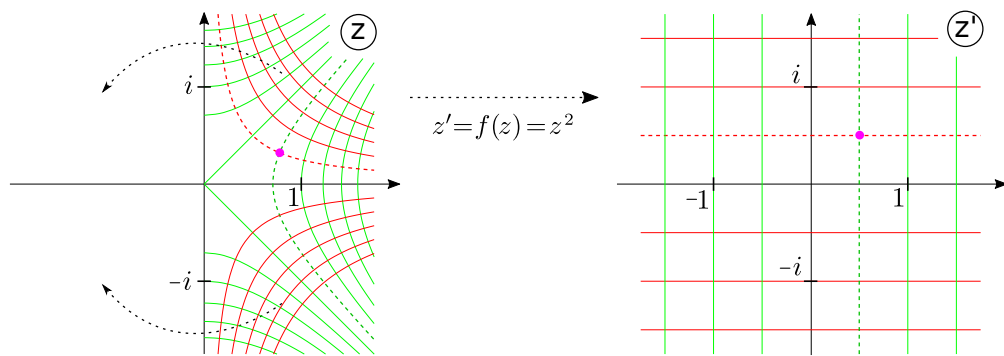
- Következő példa: $f(z) = z^2$. Nézzük először azt, hogy ez milyen görbékét visz át a tengelyekkel párhuzamos egyenesekbe. Ezek ugye a valós illetve a képzetes rész szintvonalai; felidézve:

$$\text{Négyzetre emelés: } \begin{aligned} z &= x + iy, \\ f(z) &= z^2 \end{aligned} \Rightarrow f(x+iy) = \underbrace{x^2 - y^2}_{\equiv U(x,y)} + i \cdot \underbrace{2xy}_{\equiv V(x,y)}. \quad (2.13)$$

Az $U = x^2 - y^2$ szintvonalai 45° -os aszimptotájú **egyenlőszárú hiperbolák**, a $V(x, y) = 2xy$ szintvonalai pedig x és y tengely aszimptotájú egyenlőszárú hiperbolák. Az, hogy ezek mindenhol merőlegesek, abból is következik tehát, hogy ők a differenciálható $f(z) = z^2$ valós illetve képzetes részeinek szintvonalai. A $z' = f(z) = z^2$ leképezés tehát ilyen hiperbolákat visz tengelyirányú egyenesekbe (mindet abba, amelyikhez tartozó valós vagy képzetes rész $x^2 - y^2$ vagy $2xy$ adott értéke). Ha a $\Re(z) > 0$ félsíkból indulunk, a z^2 -tel az egész z' síkot megkapjuk.



6. ábra. Az $f(z) = \gamma z$ függvény ábrázolása (a tengelyirányú egyenesek képei).

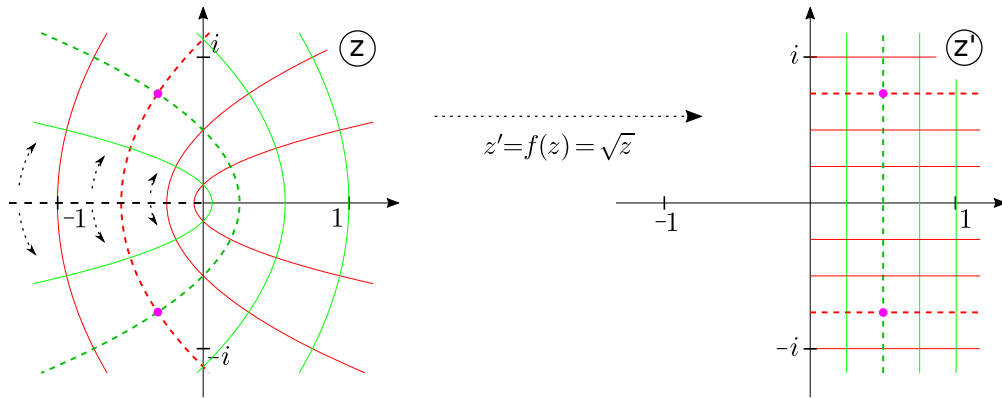


7. ábra. Az $f(z) = z^2$ függvény ábrázolása: a jobb oldali félsíkon rajzolt két sereg egyenlőszárú hiperbolát kihajtogatja tengelyirányú egyenesekbe. (A bal oldali félsíkra rajzolt tükörképekkel is ugyanezt csinálná: z -ből és $-z$ -ből $z' = z^2$ ugyanarra az eredményre vezet ugyebár.)

• A gyökvonás, $f(z) = \sqrt{z}$ a látott hiperbolákba (a $\Re(z') > 0$ félsíkra) viszi a tengelyirányú egyeneseket; milyen görbéket visz tengelyirányú egyenesekbe? A \sqrt{z} -hez tartozó U -t és V -t a fentebbi (2.3) egyenletből másoljuk, és (a konstansokat kényelmesen jelölve) felismerjük a szintvonalakat:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \cdot U(x, y) &= \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x} = \text{const} \equiv \sqrt{a} &\Rightarrow & \sqrt{x^2 + y^2} = a - x, \\ \text{sgn}(y) \cdot \sqrt{2} \cdot V(x, y) &= \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x} = \text{const} \equiv \sqrt{b} &\Rightarrow & \sqrt{x^2 + y^2} = b + x. \end{aligned} \quad (2.14)$$

További rendezéssel is, de rögtön is látható, hogy ezek origó fókuszú, x irányban negatív illetve pozitív irányban nyitott parabolák. (Az $a - x$ illetve a $b + x$ egy az origótól a illetve $-b$ helyzetbe tolt függőleges egyenestől vett távolság: a pontok ugyanolyan messze vannak ezektől, mint az origótól.) Ilyen parabolákat már láttunk *parabolikus koordinátarendszer* címén; most is láthatjuk, hogy ortogonálisak, mert a differenciálható \sqrt{z} valós és képzetes részeinek szintvonalai. A **gyökvonás** tehát ilyen **parabolákat** visz át a $\Re(z') > 0$ félsíkra tengelyirányú egyenesekké; a $z \in \mathbb{R}_0^-$ vágáson átmenő $V = \text{const}$ parabolákat kettészelve és kétfelé hajtogatva.



8. ábra. A \sqrt{z} a felvágott síkot (és a parabolákat) behajtogatja a $\Re(z') \geq 0$ félsíkra (egyenesekké).

• Tekintsük a **reciprokfüggvényt**: $f(z) = \frac{\alpha}{z}$, ahol $\alpha \in \mathbb{R}^+$ adott valós szám. Ez az $f(z)$ önmaga inverze, így nem kell a kétféle ábrázolási lehetőséget külön nézni. A valós és képzetes részek:

$$f(x+iy) = \frac{\alpha}{x+iy} = \alpha \frac{x-iy}{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad U(x,y) = \frac{\alpha x}{x^2+y^2}, \quad V(x,y) = \frac{-\alpha y}{x^2+y^2}.$$

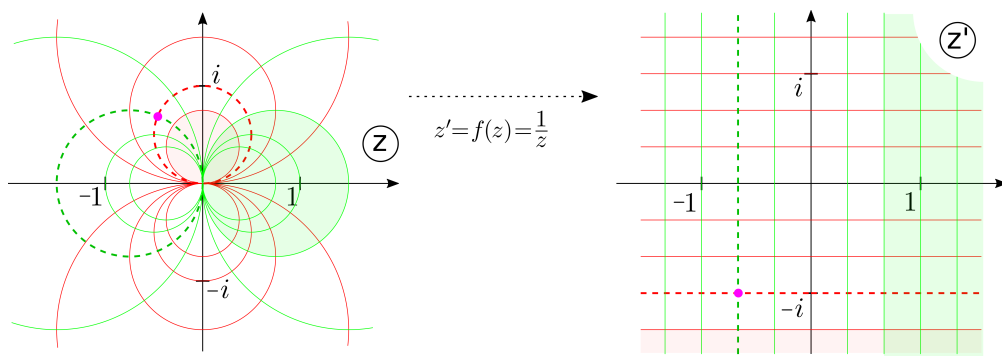
A szintvonal-görbék beazonosításához rögtön kényelmes jelöléssel írjuk az adott értékeket:²³

$$U = \frac{\alpha x}{x^2+y^2} = \text{const} \equiv \frac{1}{2A} \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2-2\alpha Ax = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-\alpha A)^2 + y^2 = (\alpha A)^2,$$

$$V = \frac{-\alpha y}{x^2+y^2} = \text{const} \equiv \frac{1}{2B} \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2+2\alpha By = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + (y+\alpha B)^2 = (\alpha B)^2.$$

Ezek **körök**: az $U=\text{const}$ körök sugara $\alpha|A|$, és középpontja az x tengelyen αA -nál van; ezek az origóban érintik az y -tengelyt. A $V=\text{const}$ körök középpontjai az y tengelyen vannak $-\alpha B$ -nél, sugaruk $\alpha|B|$, így az x -tengelyt érintik az origóban. Ezek a körök is ortogonálisak, mert ők az $\frac{\alpha}{z}$ differenciálható függvény valós és képzetes részeinek szintvonalai.²⁴

A függvény csakis $z=0$ -ban nem értelmes; egyébként *nagyobb* abszolútértékű z reciproka *kisebb* abszolútértékű: ebből kitalálható, hogy melyik *tartomány* hova képeződik. Az ábra ezt is jelöli.



9. ábra. Az $f(z) = \frac{1}{z}$ függvény a köröket egyenesekbe (és az egyeneseket körökbe) képezi.

²³Itt is érvényes az, amit előszóban nem győzők hangsúlyozni: sokadszor csinálva (amikor már tudjuk, hogyan kell) mindent rögtön a „jó” módon kijelölve egyszerűnek tűnik már minden; először az életben nekiállva hosszabb lesz, az ötletek nem rögtön a megfelelő formában jönnek, stb. Érdekes mindennek magunk is nekiállni, próbálkozni!

²⁴Aki ismeri elemi (?) geometriából az *inverzió* („körre tükrözés”) műveletét, annak: a komplex sík most látott leképezése a $\sqrt{\alpha}$ sugarú origó közepű körre való inverzió és a valós tengelyre tükrözés egymásutánja.

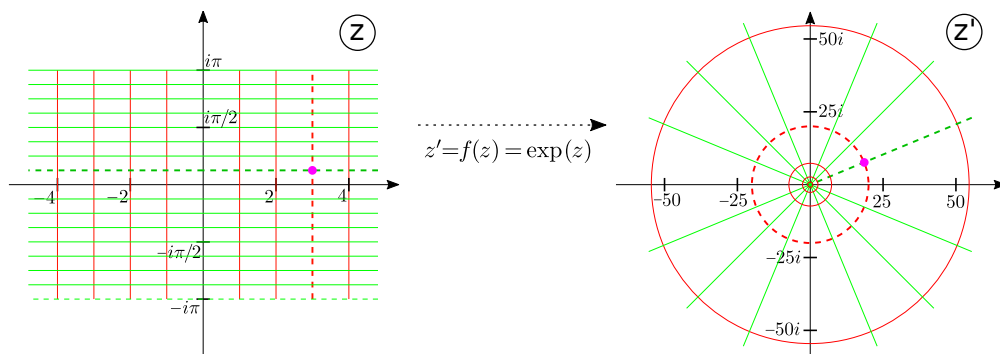
• Állítás: az $f(z) = e^z$ **exponenciális** függvény a tengelyirányú egyeneseket a **polárkoordináta-rendszer** vonalaiba viszi. Mivel $e^{n \cdot 2\pi i} = 1$, mondhatjuk, hogy a komplex exponenciális $2\pi i$ szerint periodikus (azaz z -hez és $z + n \cdot 2\pi i$ -hez ugyanazt rendeli); az indulási halmazban így elég egy képzetes irányban 2π szélességű vízszintes sávot tekinteni. Vegyük a $-i\pi$ és $i\pi$ közöttit; innen indulva (de más ilyen széles sávból indulva is) megkaphatjuk az egész z' síkot:

Vízszintes egyenes: $z = x + ib$, ahol $b \in]-\pi, \pi]$ rögzített, x végigfut \mathbb{R} -en

$\Rightarrow e^z = e^x \cdot e^{ib}$; a képhalmaz b irányszögű, origóból induló félegyenes,

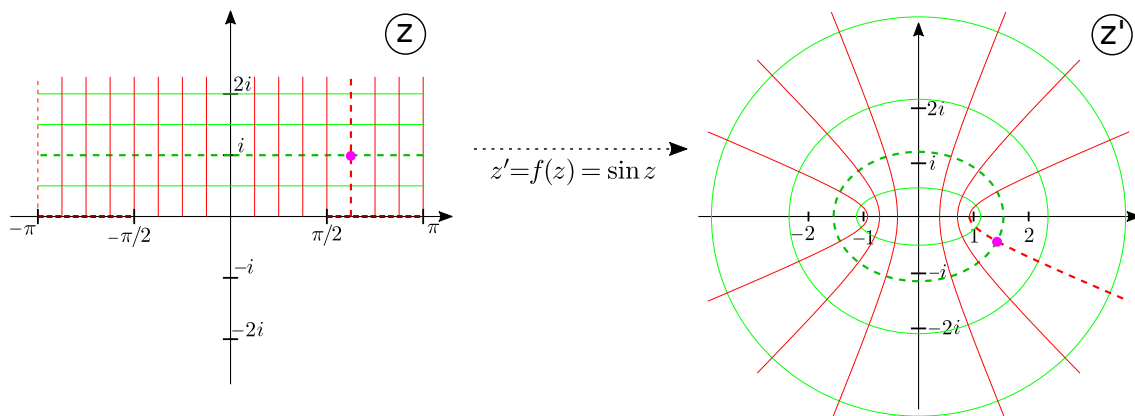
Függőleges egyenes: $z = a + iy$, ahol $a \in \mathbb{R}$ rögzített, y végigfut $]-\pi, \pi]$ -n

$\Rightarrow e^z = e^a \cdot e^{iy}$; a képhalmaz e^a sugarú körvonal (az egységkör nagyítottja).



10. ábra. Az e^z függvény képgörbéinek szemléltetése.

• Következzék a **szinuszfüggvény**, $f(z) = \sin z$. Ez 2π szerint periodikus: az egyértelműség kedvéért szűkítsük le az indulási halmazt a $-\pi$ és π közötti valós részű sávra. Állítás: a $\sin z$ a tengelyirányú egyeneseket az úgynevezett (például a Vektorszámítás jegyzet utolsó, 13.6. szakaszából ismerős) **elliptikus koordináta-rendszer** vonalaiba: az x -tengelyen -1 -ben és $+1$ -ben lévő pontok mint fókuszpontok által fixált ellipszisekbe és hiperbolákba viszi. Ezek is ortogonálisak.



11. ábra. Az $f(z) = \sin z$ ábrázolása.

Kiderül az is, hogy akkor kapunk injektív függvényt (ami egy z' -be csak egy z -t vihet), ha tovább szűkítjük a tartományt. Kezdjük azzal, hogy mik a z síkon vízszintes egyenesek képei:

$$\sin(x+ib) = X(x) + iY(x), \quad \text{ahol} \quad \begin{aligned} X(x) &= \sin x \operatorname{ch} b, \\ Y(x) &= \cos x \operatorname{sh} b. \end{aligned}$$

Ahogy x -szel végigfutunk $-\pi$ -től π -ig (azaz a kijelölt komplex számmal egy adott b képzetes részű vízszintes egyenesdarabon), az eredmény valós és képzetes részére, X -re és Y -ra végig igaz, hogy

$$\frac{X^2}{\operatorname{ch}^2 b} + \frac{Y^2}{\operatorname{sh}^2 b} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{az ilyen } X\text{-ek és } Y\text{-ok egy } \operatorname{ch} b \text{ nagytengelyű és } |\operatorname{sh} b| \text{ kistengelyű ellipszist futnak be.}$$

A fókuszpontok origótól vett távolsága $\operatorname{ch}^2 b - \operatorname{sh}^2 b = 1$, és ha b -vel végigfutunk 0-tól ∞ -ig, meg is kapjuk az összes ilyen ellipszist: az értelmezési tartományt leszűkíthetjük a $-\pi < \Re(z) \leq \pi$ sáv felső félsíkra eső részére. Adott b -nél az x változóban felismerhetjük az ellipszis standard paraméterezéséhez tartozó paramétert (csak most X -ben van $\sin x$ és Y -ban $\cos x$).²⁵

Hasonlóan a függőleges egyenesek képeire (tudva már, hogy elég a felső z -félsíkról indulni):

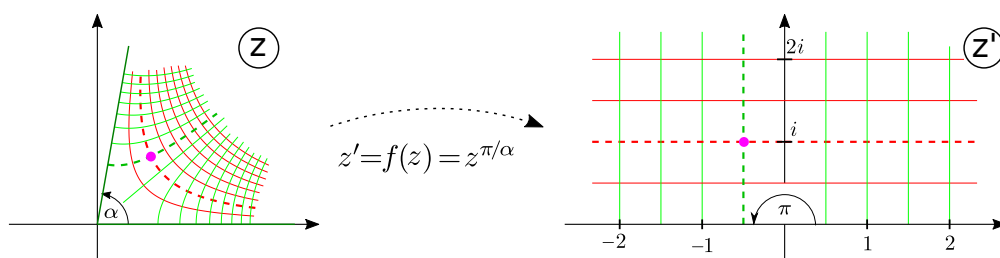
$$\sin(a+iy) = \tilde{X}(y) + i\tilde{Y}(y), \quad \text{ahol} \quad \begin{aligned} \tilde{X}(y) &= \sin a \operatorname{ch} y, \\ \tilde{Y}(y) &= \cos a \operatorname{sh} y, \end{aligned}$$

és ahogy itt y -nal végigfutunk \mathbb{R}_0^+ -on (azaz z -vel egy adott $a \in]-\pi, \pi]$ valós részű függőleges fél-egyenesen), az eredmény valós és képzetes részére, \tilde{X} -re és \tilde{Y} -ra végig igaz, hogy

$$\frac{\tilde{X}^2}{\sin^2 a} - \frac{\tilde{Y}^2}{\cos^2 a} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{az ilyen } \tilde{X}\text{-ok és } \tilde{Y}\text{-ok egy } |\sin a| \text{ nagytengelyű és } |\cos a| \text{ kistengelyű hiperbolaívet futnak be.}$$

Az ilyen hiperbolának is kikereshetjük a fókuszpontjait: ezek az origótól $\sin^2 a + \cos^2 a$, azaz 1 távolságra vannak akármilyen a esetén. Az \tilde{X} és \tilde{Y} iménti kifejezéséből látszik, hogy ha $a \in]-\pi, -\frac{\pi}{2}[$, vagy $a \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$, vagy $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$, vagy $a \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, akkor a z' -síkon rendre az első, a negyedik, a harmadik és a második síknegyedben fekvő hiperboladarabokon futhatunk végig.

- Az eddigiekben „névvel” beazonosíthattuk a görbéket. Néha azt kell majd tudni, hogy egy függvény kényelmesen leképez egy tartományt egy másikra; az csak plusz érdekesség lesz, hogy a szintvonalak merőlegesek. Példa: a z -sík adott α középponti szögű ék alakú tartományát szeretnénk a z' sík felső félsíkjára leképezni. Ismerve a valós kitevőjű hatványozást (az argumentum a kitevővel szorozódik, ld. az 1.2. szakasz végén) begorhat, hogy egy $\frac{\pi}{\alpha}$ kitevőjű hatványozás jó lesz: ez kihajtogatja az ékünket a felső félsíkra (ami π , azaz 180° középponti szögű éknek tekinthető).



12. ábra. Az $f(z) = z^{\pi/\alpha}$ éppen kihajtogatja az ék-tartományt a felső félsíkra.

Keressük meg a szintvonalakat is! Legyen $\beta \equiv \frac{\pi}{\alpha}$; a mondott $f(z) = z^\beta$ függvényt most a komplex számok trigonometrikus alakját használva („polárkoordinátákban”) érdemes keresni:

$$z = \rho e^{i\varphi} \quad \Rightarrow \quad \Re(z^\beta) = \rho^\beta \cos(\beta\varphi), \quad \Im(z^\beta) = \rho^\beta \sin(\beta\varphi),$$

²⁵A $b=0$ eset itt kivétel: ez egy nulla kistengelyű „elfajult ellipszist”, azaz a z' síkon a $[-1, 1]$ szakaszt adja meg, amelyen kétszer mennénk végig, ha x $-\pi$ -től π -ig futna. A kiindulási síkon tehát a valós tengelyen elég csak a fél-teljesszögön végigmenni; az iménti ábrán barnával szaggatva jelöltem itt a kihagyandó részt.

Látjuk, hogy ha $0 \leq \varphi \leq \alpha$, akkor $\beta\varphi$ valóban befutja a $[0, \pi]$ tartományt, azaz tényleg, az ék a felső félsíkra képeződik. Ha az eredmény $z' = z^\beta$ képzetes része állandó $B \geq 0$ érték (ezek a z' síkon a vízszintes egyenesek), akkor (mivel az érdekes tartományon $\sin(\beta\varphi) \geq 0$) azon z -k halmaza, amelyik egy ilyen egyenesbe képeződik, a következő $\rho(\varphi)$ kapcsolattal leírható görbe:

$$\Im(z^\beta) = B \quad \Rightarrow \quad \rho(\varphi) = B^{1/\beta} [\sin(\beta\varphi)]^{-1/\beta}.$$

A z' felső félsíkján a függőleges félegyenesek (amiken $\Re(z^\beta) = A$ konstans) $A \geq 0$ esetén 0 és $\frac{\alpha}{2}$ közé eső φ -kból jöhetnek, ha $A \leq 0$, akkor pedig $\frac{\alpha}{2}$ és α közöttiekből. A két tartományban $\cos(\beta\varphi) \geq 0$ illetve $\cos(\beta\varphi) \leq 0$, úgyhogy külön kell nézni ezt a két lehetőséget, de összefoglalhatjuk:

$$\Re(z^\beta) = A \quad \Leftrightarrow \quad \rho(\varphi) = |A|^{1/\beta} \cdot |\cos(\beta\varphi)|^{-1/\beta}, \quad \text{és} \quad \begin{array}{l} A \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\alpha}{2}, \\ A \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{2} \leq \varphi \leq \alpha, \end{array}$$

és tényleg nem kell negatív valós számot hatványozni (ez nem is igazán értelmes), csak pozitívat.

* * *

- Idézzük fel a **görbe** fogalmát. Később pontosítjuk ezt; általában mondva azonban ha $I \subset \mathbb{R}$ egy valós intervallum, akkor a \mathbb{C} síkon görbének hívjuk egy $I \rightarrow \mathbb{C}$ differenciálható függvény²⁶ (**paraméterezés**) képhalmazát. A paraméterezés mint függvény jele lehet például $z(t)$; ennek valós és képzetes része megadja a t -hez tartozó valós és képzetes részt, azaz a görbe $z(t)$ pontjának Descartes-koordinátáit a \mathbb{C} -n mint síkon.

- Találkoztunk már görbe érintővektorának fogalmával is: ha egy síkgörbét a rajta futó helyvektor paraméterezésével, $\mathbf{r}(t)$ módon adtuk meg, ez a következő volt:

$$\text{Síkgörbe:} \quad \mathbf{r}(t) \equiv \begin{pmatrix} r_x(t) \\ r_y(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \text{érintővektora egy} \\ \text{adott } t \text{ paraméte-} \\ \text{rű } \mathbf{r}(t) \text{ pontban:} \end{array} \quad \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \equiv \begin{pmatrix} \frac{dr_x(t)}{dt} \\ \frac{dr_y(t)}{dt} \end{pmatrix}.$$

Innentől az egy darab valós paraméter szerinti deriváltat sokszor ponttal jelöljük, így: $\dot{\mathbf{r}}(t) \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt}$. Az érintő ugye tényleg az a vektor, ami a görbe adott pontbeli irányába mutat, a közeli $\mathbf{r}(t+\Delta t)$ és $\mathbf{r}(t)$ pontok helyvektor-különbségéből kigondolva. A komplex \mathbb{C} síkon futó görbénél annyi újdonság van, hogy a kétdimenziós érintővektor komponenseit is összerakhatjuk egy *komplex számmá*:

$$\begin{array}{ll} \text{Görbe a } \mathbb{C} \text{ síkon: } z(t) \equiv x(t) + iy(t) & \text{ez a } \dot{z}(t) \text{ mint vektor} \\ \Rightarrow \text{ érintője: } \dot{z}(t) \equiv \dot{x}(t) + i\dot{y}(t), & \text{tényleg ugyanaz, mint} \end{array} \quad \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}.$$

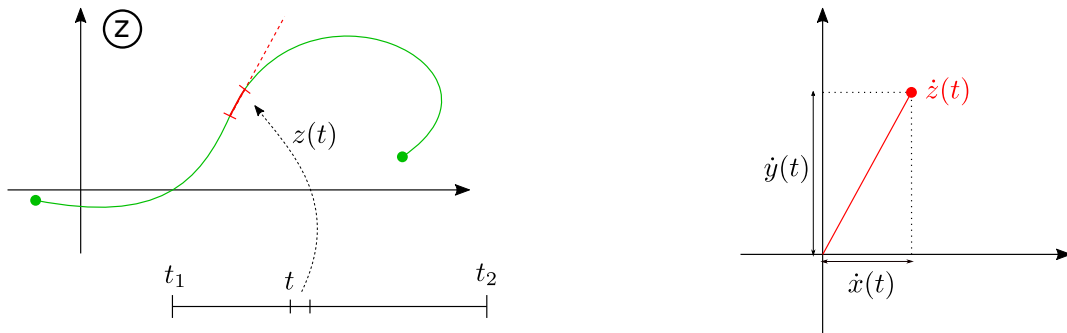
- Láttuk az előzőekben, hogy differenciálható $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ esetén a tengelyekkel párhuzamos (emiatt derékszögben metsző) egyenesek kép-görbéi merőlegesen metszik egymást. **Több is igaz:**

$$\begin{array}{ll} \text{Állítás: ha a } \gamma_1 \text{ és} & \mathbb{C}\text{-t egy } z' = f(z) \text{ differenciálható függvény-} \\ \text{a } \gamma_2 \text{ görbék } \alpha \text{ szög-} & \text{nyel leképezve (ha } f' \neq 0 \text{ sehol) a kép-görbék} \\ \text{ben metszik egymást} & \text{a } z' \text{ síkon is } \alpha \text{ szögben metszik egymást.} \end{array} \quad (2.15)$$

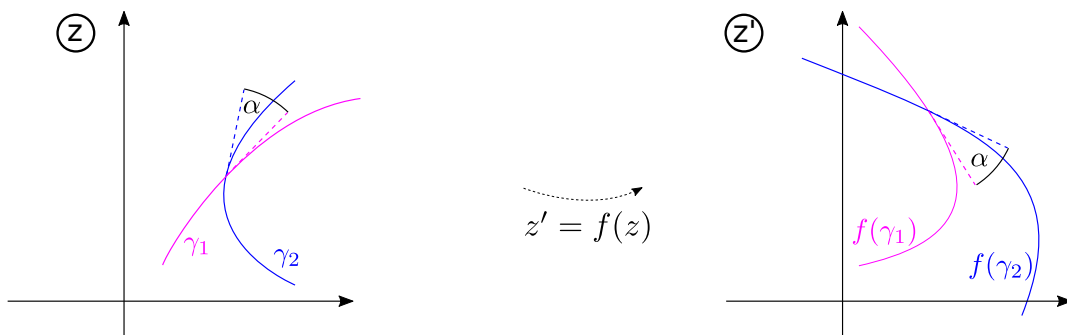
Röviden mondva: differenciálható függvény mint a \mathbb{C} sík transzformációja **szögtartó**. Az ide kívánczoló elnevezés a szakasz címében volt: a sík olyan leképezései, amelyek az imént mondott

²⁶Figyelem: a *valósból komplexbe* menő $z(t)$ differenciálhatósága kell; ez egyenértékű azzal, hogy $x(t)$ és $y(t)$ mint $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények differenciálhatók. Itt tehát eszünkbe ne jussanak például Cauchy-Riemann-egyenletek: utóbbiak \mathbb{C} értelmezési tartományú függvényekhez valók.

értelemben szögtartók, **konform leképezések** névre hallgatnak. Ezzel a szóhasználattal élve: minden komplex differenciálható függvény a sík valamilyen konform leképezését valósítja meg.²⁷



13. ábra. Görbe a komplex síkon; az érintővektora itt most komplex számnak is tekinthető.



14. ábra. Komplex differenciálható függvény mint leképezés szögtartó (azaz: konform leképezés).

- Az állításunk **bizonyításához** jelöljük $\gamma_1(t)$ -vel és $\gamma_2(s)$ -sel a két görbe paraméterezését ($\mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ függvényeket), $G_1(t)$ -vel illetve $G_2(s)$ -sel pedig a képeiket, melyeket $z'=f(z)$ csinál belőlük:

Két görbe a	$\gamma_1(t)$,	A $z'=f(z)$ leképezés-	$G_1(t) = f(\gamma_1(t))$,
$z \in \mathbb{C}$ síkon:	$\gamma_2(s)$,	sel kapott kép-görbék:	$G_2(s) = f(\gamma_2(s))$.

Az f az egész \mathbb{C} síkot eltranszformálja: ő a kapcsolat az eredeti γ_1, γ_2 és a kép-görbéket megadó G_1, G_2 között. γ_1 és γ_2 metszik egymást: van olyan t_0 és s_0 , amikre igaz, hogy $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(s_0)$. Az érintővektorok mint komplex számok a paraméter szerinti deriválással adódnak:

A görbéink érintői	$\dot{\gamma}_1(t_0)$,	A képei-	$\dot{G}_1(t_0) = \frac{d}{dt}f(\gamma_1(t_0)) = f'(\gamma_1(t_0)) \cdot \dot{\gamma}_1(t_0)$,
a metszéspontban:	$\dot{\gamma}_2(s_0)$,	ké pedig:	$\dot{G}_2(s_0) = \frac{d}{ds}f(\gamma_2(s_0)) = f'(\gamma_2(s_0)) \cdot \dot{\gamma}_2(s_0)$.

Itt használtuk ki, hogy f differenciálható: közvetett függvényt deriválhattunk. Továbbmenve:

$$\text{Mivel } \gamma_1(t_0) = \gamma_2(s_0), \text{ az} \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{\gamma}_1(t_0)}{\dot{\gamma}_2(s_0)} = \frac{\dot{G}_1(t_0)}{\dot{G}_2(s_0)}. \quad (2.16)$$

előzőekből adódik, hogy

Kigondolhatjuk, hogy (értelemszerű jelöléssel) ha $z = ae^{i\varphi}$ és $w = be^{i\chi}$, akkor $z/w = a/b \cdot e^{i(\varphi-\chi)}$, azaz két komplex szám hányadosának argumentuma éppen a számok bezárt szöge. Az előző (2.16) eredmény tehát azt jelenti, hogy az érintővektorok *tényleg* ugyanakkora szöget zárnak be itt és ott.

²⁷A szakasz korábbi részeiben ábrázolt függvények is ilyenek tehát. Mondanunk sem kell, hogy a szögtartásból nem következik, hogy egy ilyen transzformáció geometriailag „egyszerű”: láttuk, hogy változatos alakú görbéket vihet át másfajta görbékbe; a szögtartás nem vonatkozik például „távoli” pontok alkotta háromszögekre.

Az, hogy $f' \neq 0$, ahol a görbék futnak (azaz f legalább azon a tartományon nem konstans függvény), ott kellett, hogy \dot{G}_1 és \dot{G}_2 ne lehessenek nullák; úgy értelmetlen lenne a \dot{G}_1/\dot{G}_2 hányados. Ha egy tartományon $f'=0$, azaz innen f mindent ugyanoda képez, nyilván nem igaz a szögtartás.

- A differenciálható leképezések szögtartását tudva visszánézve még nyilvánvalóbb, hogy a z^* , $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$ függvények nem lehetnek differenciálhatók. A komplex konjugálás minden bezárt szöget -1 -szeresére cserél, a többi pedig mindent a valós tengelybe képez: biztos nem lehet igaz ezekre a függvényekre, hogy két görbe képe változatlan szögben metszi egymást. Továbbmenve az is nyilvánvaló, hogy olyan $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény, aminek a képhalmaza egydimenziós részhalmaz (mint például $|z|$ -re, $\operatorname{Re} z$ -re, $\operatorname{Im} z$ -re a valós tengely), az nem lehet komplex differenciálható függvény.

2.4. Laplace-egyenlet, U és V harmonikus pár, „varázsformula”

- Sok alapvető fizikai törvény van, amiből az származtatható, hogy a szereplő fizikai mennyiségre mint skalármezőre teljesül a *Laplace-egyenlet*. Ugye a Δ Laplace-operátor egy $\Psi(\mathbf{r})$ skalármezőre hathat, és $\Delta\Psi \equiv \operatorname{div}(\operatorname{grad} \Psi) = \partial_x^2\Psi + \partial_y^2\Psi + \partial_z^2\Psi$. Most olyan esetekkel foglalkozunk, amikor Ψ csak két változótól, x -től és y -től függ: vagy mert eleve kétváltozós függvény szerepel a fizikai problémában, vagy mert a szereplő függvény eredendően háromváltozós lenne, de a kitézőt feladatnak a harmadik, z -vel jelölt tengely mentén való eltolásra vett szimmetriája miatt tudhatjuk, hogy $\Psi(x, y)$ függés van csak, Ψ nem függ z -től (és így ∂_z deriváltjai nullák). Ilyenkor érvényes tehát a

$$\text{Kétdimenziós Laplace-egyenlet:} \quad \Delta\Psi \equiv \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = 0. \quad (2.17)$$

Néhány kiragadott fizikai **példa**, amelyből ilyen Laplace-egyenletre jutunk (most indoklás nélkül):

1. Zárt síkgörbe alakú drótkeretben kifeszülő szappanhártya is sík; ha a keretet a harmadik irányban kicsit deformáljuk, a hártya alakja is módosul: a (kis) függőleges kitérést mint az x, y függvényét az határozza meg, hogy ő a kétdimenziós Laplace-egyenletnek tesz eleget.
 2. Ha homogén hővezető (de hőt nem termelő) test határán ismert a hőmérséklet-eloszlás, és az időben állandó, akkor a test *belsejében* a $T(\mathbf{r})$ hőmérséklet-eloszlásra Laplace-egyenlet vonatkozik. Ha az elrendezés z irányban eltolásszimmetrikus (például egy igen hosszú házfal és alapozás), akkor kétdimenziós a Laplace-egyenlet is.
 3. Összenyomhatatlan ideális folyadék sebességmezője sokszor egy skalármező gradienseként származtatható, és ez a skalármező (a *sebességpotenciál*) Laplace-egyenletnek tesz eleget. Kétdimenziós Laplace-egyenlettel tehát „kétdimenziós”, azaz a harmadik irányban nem folyó és attól nem függő sebességmezőjú folyadékáramlásokat tanulmányozhatunk.
 4. Elektrosztatikában az \mathbf{E} elektromos mező a(z elektromos) potenciál gradiense, a potenciálra vákuumban Laplace-egyenlet vonatkozik. Hasonlóan, ahol nem folyik áram, ott lokálisan a \mathbf{B} mágneses mező az úgynevezett mágneses skalárpotenciálnak a gradiense; utóbbira is Laplace-egyenlet érvényes. „Kétdimenziós” a feladat, ha az elrendezés harmadik irányban igen hosszú.
- Előkerülhet tehát az a feladat, hogy keressünk olyan függvényeket, amelyek kielégítik a kétdimenziós Laplace-egyenletet (és még más, a vizsgált problémára jellemző további feltételeket). A komplex differenciálható függvények egy érdekes alkalmazási lehetőséget kapnak itt: minden

komplex **differenciálható** függvény **valós része** is és **képzetes része** is olyan függvény, ami a kétdimenziós Laplace-egyenletet **automatikusan kielégíti**.

Állítás: ha $f(z) \equiv U(x, y) + iV(x, y)$ differenciálható egy nyílt tartományon, akkor ott

$$\Delta U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad \text{és} \quad \Delta V \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \quad (2.18)$$

• Mielőtt ezt bebizonyítjuk, nézzünk példákat! Első lépésként ellenőrizzük, hogy valóban helyesen írtuk fel $U(x, y)$ -t és $V(x, y)$ -t a példáinkban (ld. a korábbi 2.2. szakasz eleji táblázatot is), és hogy leülepedjen, konkrétan a deriváltakat is számítsuk ki magunk is (csak részeredményeket írok le).

Első példa: $f(z) = z^2. \quad \Rightarrow \quad U(x, y) = x^2 - y^2, \quad V(x, y) = 2xy.$

A deriváltak a következők:

$$\begin{aligned} \partial_x U &= 2x, & \partial_x^2 U &= 2, & \partial_x V &= 2y, & \partial_x^2 V &= 0, \\ \partial_y U &= -2y, & \partial_y^2 U &= -2, & \partial_y V &= 2x, & \partial_y^2 V &= 0, \end{aligned}$$

amiből tehát tényleg

$$\text{teljesül, hogy} \quad \Delta U = \partial_x^2 U + \partial_y^2 U = 0 \quad \text{és} \quad \Delta V = \partial_x^2 V + \partial_y^2 V = 0.$$

A **második példa** bonyolultabb; U és V kifejezéseit érdemes most a kétszeres szögek függvényeire vonatkozó képletekkel egyszerűsíteni ahhoz képest, mint ahogy például a korábbi táblázatban szerepel. Ez a deriválások elvégzését is könnyíti (persze erre tipikusan utólag jön rá az ember...):

$$f(z) = \operatorname{tg} z \quad \Rightarrow \quad U(x, y) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x) + \operatorname{ch}(2y)}, \quad V(x, y) = \frac{\operatorname{sh}(2y)}{\cos(2x) + \operatorname{ch}(2y)}.$$

Számítsuk ki itt is a deriváltakat; már némi egyszerűsítéssel a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} \partial_x U &= 2 \frac{1 + \cos(2x) \operatorname{ch}(2y)}{[\cos(2x) + \operatorname{ch}(2y)]^2}, & \partial_x^2 U &= 4 \frac{\sin(2x) [\cos(2x) \operatorname{ch}(2y) + 2 - \operatorname{ch}^2(2y)]}{[\cos(2x) + \operatorname{ch}(2y)]^3}, \\ \partial_y U &= \frac{-2 \sin(2x) \operatorname{sh}(2y)}{[\cos(2x) + \operatorname{ch}(2y)]^2}, & \partial_y^2 U &= -4 \frac{\sin(2x) [\cos(2x) \operatorname{ch}(2y) + \operatorname{ch}^2(2y) - 2 \operatorname{sh}^2(2y)]}{[\cos(2x) + \operatorname{ch}(2y)]^3}, \\ \partial_x V &= \frac{2 \sin(2x) \operatorname{sh}(2y)}{[\cos(2x) + \operatorname{ch}(2y)]^2}, & \partial_x^2 V &= 4 \frac{\operatorname{sh}(2y) [\cos^2(2x) + 2 \sin^2(2x) + \cos(2x) \operatorname{ch}(2y)]}{[\cos(2x) + \operatorname{ch}(2y)]^3}, \\ \partial_y V &= 2 \frac{1 + \cos(2x) \operatorname{ch}(2y)}{[\cos(2x) + \operatorname{ch}(2y)]^2}, & \partial_y^2 V &= 4 \frac{\operatorname{sh}(2y) [\cos^2(2x) - \cos(2x) \operatorname{ch}(2y) - 2]}{[\cos(2x) + \operatorname{ch}(2y)]^3}. \end{aligned}$$

Némi további egyszerűsítéssel ezekből már leellenőrizhetjük, hogy valóban itt is

$$\text{teljesül, hogy} \quad \Delta U = \partial_x^2 U + \partial_y^2 U = 0 \quad \text{és} \quad \Delta V = \partial_x^2 V + \partial_y^2 V = 0.$$

• Ehhez képest a fenti általános állításunk **bizonyítása viszonylag egyszerű**: következik a Cauchy-Riemann-egyenletekből (és a vegyes parciális deriváltak szimmetriájából, azaz a Young-tételből). Az f differenciálható, így fennállnak a Cauchy-Riemann-egyenletek, amik miatt:

$$\begin{aligned} \partial_x^2 U + \partial_y^2 U &= \partial_x(\partial_x U) + \partial_y(\partial_y U) = \partial_x(\partial_y V) + \partial_y(-\partial_x V) = \partial_x \partial_y V - \partial_y \partial_x V = 0, \\ \partial_x^2 V + \partial_y^2 V &= \partial_x(\partial_x V) + \partial_y(\partial_y V) = \partial_x(-\partial_y U) + \partial_y(\partial_x U) = -\partial_x \partial_y U + \partial_y \partial_x U = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Megjegyzés: mostani szintünkön külön fel kell(ene) tenni, hogy f (és így U is és V is) kétszer is differenciálható. Valós, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények ugye lehetnek olyanok, hogy valahányszor differenciálhatók, de többször már nem. Nagy eredmény lesz majd, hogy ha egy *komplex*, $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény egy nyílt halmazon differenciálható, akkor akárhányszor (*végtelenszer*) is differenciálható. Emiatt tehát a többszöri differenciálhatóság követelménye lényegében nem is plusz megszorítás most.

- Összegezve néhány eddigi eredményt: differenciálható $f(z)$ valós és képzetes részeire, $U(x, y)$ -ra és $V(x, y)$ -re fennállnak a Cauchy-Riemann-egyenletek, és ebből következőleg U és V szintvonalai ortogonálisak, valamint $\Delta U = 0$ és $\Delta V = 0$. Az olyan függvényeket, amelyekre $\Delta \Psi = 0$, azaz megoldják a Laplace-egyenletet, ilyen kontextusban **harmonikus függvényeknek** hívják. Ezzel az elnevezéssel tehát differenciálható $f(z)$ függvény valós és képzetes részei harmonikus függvények. Újabb elnevezéssel élve: az olyan $U(x, y)$ és $V(x, y)$ elég sima függvényeket, amelyek kielégítik a Cauchy-Riemann-egyenleteket, **harmonikus pár** névvel illetjük.²⁸ Pontosan ilyen U és V esetén tehát az $f(x+iy) \equiv U(x, y) + iV(x, y)$ függvény komplex értelemben differenciálható.

Megjegyzés: ezt az „elég sima” kitélt (mely a végtelenszer differenciálhatóságnál kicsit többet jelent) később, a 4.1. szakaszban pontosítjuk; most ne aggódjunk túlzottan, „általában” teljesül.

- Adott U és V függvényekről deriválásokkal kiderül, hogy harmonikus párt alkotnak-e. Érdekesebb kérdés, hogy ha adott *egy darab* elég sima $U(x, y)$ függvény, akkor **van-e U -nak harmonikus párja?** Persze ellenőriznünk kell, hogy $\Delta U = 0$ teljesül; különben semmi nincs.

$$\begin{array}{l} \text{Az } U(x, y) \text{ függvényre} \\ \Delta U \equiv \partial_x^2 U + \partial_y^2 U = 0. \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{létezik-e olyan} \\ V(x, y), \text{ amire} \end{array} \quad \begin{array}{l} \partial_y V = \partial_x U, \text{ és} \\ \partial_x V = -\partial_y U? \end{array} \quad (2.20)$$

Ekkor persze a látottak alapján $\Delta V = 0$ is igaz lesz. A felírt megkövetelt Cauchy-Riemann-egyenletek most a keresett $V(x, y)$ függvényre vonatkozó differenciálegyenletek; a bennük szereplő jobb oldalak adott U esetén adott függvények (az U deriváltjai).

Érdeemes kicsit messzebről is rátekinteni a most felírt típusú differenciálegyenletre: arról van szó, hogy keressük az olyan $V(x, y)$ függvényt, amire teljesül, hogy

$$\partial_x V = F(x, y) \quad \text{és} \quad \partial_y V = G(x, y), \quad \text{ahol } F \text{ és } G \text{ adott függvények.} \quad (2.21)$$

- Az, hogy *a V -re vonatkozólag* igaz a Young-tétel, miszerint $\partial_x(\partial_y V) = \partial_y(\partial_x V)$, a megadható F és G függvényekre jelent feltételt: teljesülnie kell, hogy $\partial_x G = \partial_y F$. Ez a V -re vonatkozó (2.21) differenciálegyenlet *konzisztenciafeltétele*: ha nem teljesül, biztos nincs megoldás.

Visszaközéltve a vizsgálandó (2.20) esetre ott F és G nem akármilyen, hanem konkrétan $F = \partial_y U$ és $G = -\partial_x U$. A feltétel ebből az lesz, hogy $\partial_x^2 U = -\partial_y^2 U$, vagyis $\partial_x^2 U + \partial_y^2 U = 0$ teljesüljön. Körbeértünk: az, hogy $\Delta U = 0$, a keresett harmonikus párra vonatkozó egyenlet konzisztenciafeltétele!

Ha teljesül a konzisztenciafeltétel, találhatunk megoldást primitívfüggvény-kereséssel (ami technikailag lehet probléma, de elvi szempontból működik). Leírom a lépéseket (integrálással jelölve a

²⁸Olyan értelemben, hogy ők harmonikus függvények, és még kellemesen „párban” is vannak. A mondott következményekből (harmonikusság és ortogonalitás) nem következne rögtön visszafelé, hogy U és V a Cauchy-Riemann-egyenleteket is kielégítik; mindazonáltal mégis igaz egy „fordított” állítás: ha az U és V függvényekre $\Delta U = 0$, $\Delta V = 0$ és $\nabla U \cdot \nabla V = 0$, akkor igaz az is, hogy $\partial_x U = \alpha \partial_y V$ és $\partial_y U = -\alpha \partial_x V$, ahol α konstans szám. Ezek *majdnem* a Cauchy-Riemann-egyenletek; ha itt V -t elosztjuk α -val, olyan függvényt kapunk, ami U -val együtt már „igazi” harmonikus pár. *Lényegében* tehát a merőleges szintvonalak és a harmonikusság elegendő feltétel, hogy harmonikus párról beszélhessünk. Az említett állítás bizonyítása nem olyan bonyolult, mint amilyen hosszadalmas (a különféle deriváltakat kell kombinálni és afelé evezni, hogy tényleg kihasználhassuk az összes feltételt); most nem írom le.

primitív függvény megkeresését); a példákból talán jobban leülepszik majd. Tehát:

$$\begin{aligned} \text{Kezdjük a } \partial_x \text{ deriválttal:} & \Rightarrow V(x, y) = \int_{x_0}^x d\xi F(\xi, y) + \chi(y), \\ \text{a feltétel: } \partial_x V = F(x, y) & \end{aligned}$$

vagyis először az x változóban keresünk primitív függvényt (az integráljel alatti változót ildomos volt más betűvel jelölni). Az x_0 alsó határ és az x szempontjából additív konstans $\chi(y)$ egyváltozós függvény most még tetszőleges. A másik (∂_y -ra vonatkozó) feltételbe már ezt az alakot írjuk:

$$\begin{aligned} \partial_y V = \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_{x_0}^x d\xi F(\xi, y) + \chi(y) \right] & \stackrel{!}{=} G(x, y) \quad \stackrel{!}{\Rightarrow} \quad \int_{x_0}^x d\xi \partial_y F(\xi, y) + \chi'(y) \stackrel{!}{=} G(x, y) \quad \stackrel{2}{\Rightarrow} \\ & \stackrel{2}{\Rightarrow} \quad \int_{x_0}^x d\xi \partial_x G(\xi, y) + \chi'(y) \stackrel{!}{=} G(x, y) \quad \Rightarrow \quad G(x, y) - G(x_0, y) + \chi'(y) \stackrel{!}{=} G(x, y). \end{aligned}$$

Itt az 1. lépésben „bederiváltunk” az integráljel mögé (láttunk már ilyet), a 2. lépésben kihasználtuk a konzisztenciafeltételt (F és G deriváltjai között), amivel végül ebben az alakban deriváltat integrálhattunk x szerint, és látjuk, hogy ha χ -t jól választjuk, tényleg teljesülhet a feltételünk:

Ha most $\chi(y)$ olyan, hogy $\chi'(y) = G(x_0, y)$, akkor készen vagyunk: megkaptuk a $V(x, y)$ -t. *Tényleg kellett a konzisztenciafeltétel teljesülése!*

Egyszerűbb esetekben lehet, hogy a lépéseket tömörebben áthidalhatjuk, kevesebb lépésben „ráérezve” a részeredményekre és/vagy a keresett V függvényre.²⁹

- Nézzünk példákat harmonikus pár keresésére (mindegyik már látott példákat „követ”):

$$\begin{array}{ll} \mathbf{1. példa:} & \text{keressünk } V(x, y) \\ U(x, y) = x^2(x+3) - 3y^2(x+1), & \text{harmonikus párt!} \end{array}$$

Első lépés kiszámolni a deriváltakat. *Ellenőrizzünk mindent*, csak az eredményeket írom le:

$$\begin{aligned} \partial_x U = 3x^2 + 6x - 3y^2, & \quad \partial_x^2 U = 6(x+1), \\ \partial_y U = -6y(x+1), & \quad \partial_y^2 U = -6(x+1). \end{aligned}$$

Először is: értelmes a feladat, mert a megadott U -ra tényleg $\Delta U = \partial_x^2 U + \partial_y^2 U = 0$, ahogy kell. Következőnek felírjuk a keresett V -re vonatkozó (Cauchy-Riemann-féle) differenciálegyenleteket:

$$\begin{array}{llll} V = ?, & \partial_x V = -\partial_y U, & \text{azaz most} & \partial_x V = 6xy + 6y, \\ \text{amire} & \partial_y V = \partial_x U, & \text{konkrétan:} & \partial_y V = 3x^2 + 6x - 3y^2. \end{array}$$

Az első egyenletből (x -ben primitív függvényt keresve) kiderül, hogy itt V csak ilyen alakú lehet:

$$\partial_x V = 6xy + 6y \quad \Rightarrow \quad V(x, y) = 3x^2y + 6xy + \chi(y),$$

ezután ezt a második egyenletbe behelyettesítve az adódik, hogy

$$\partial_y V = 3x^2 + 6x + \chi'(y) \stackrel{!}{=} 3x^2 + 6x - 3y^2 \quad \Rightarrow \quad \chi'(y) = -3y^2 \quad \Rightarrow \quad \chi(y) = -y^3 + K.$$

²⁹Ugyanilyen jellegű feladat volt az (ld. a Vektorszámítás jegyzet 12.3. szakaszát), amikor térbeli $\Phi(\mathbf{r})$ skalármezőt kerestünk abból, hogy a gradiense adott $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektormező: $\partial_x \Phi = v_x$, $\partial_y \Phi = v_y$, $\partial_z \Phi = v_z$, ahol v_x , v_y , v_z adott függvények. Utóbbiakra is volt ilyenkor konzisztenciafeltétel (és az is a Young-tételen múltott): hogy $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ azonosan teljesüljön. Ez pont ugyanolyan típusú feltétel volt, mint a mostani problémánkban. A megoldás menete (ott három, itt kettő adott parciális deriváltból visszafejteni a függvényt), illetve az, ahogyan a konzisztenciafeltételen múltott, hogy ezt tényleg megtehetjük, szintén lényegében azonos a két problémában.

Itt nyilvánult meg, hogy a feladat konzisztens: a $\chi(y)$ -ra kapott feltételből x kiesett, tényleg csak y -t tartalmazó rész maradt, azaz létezhetett megfelelő $\chi(y)$ függvény. Így viszont készen vagyunk:

$$U(x, y) = x^2(x+3) - 3y^2(x+1) \quad \text{harmonikus párja} \quad \underline{\underline{V(x, y) = 3x^2y + 6xy - y^3 + K.}}$$

- A következő példa sem sokkal bonyolultabb; ismerős is lehet már valahonnan:

$$\mathbf{2.p\acute{e}lda:} \quad U(x, y) = \sin x \operatorname{ch} y, \quad \text{harmonikus pár} \quad V(x, y) = ?$$

Most már nagyobb léptekben haladva a megoldással:

$$\begin{aligned} \partial_x U &= \cos x \operatorname{ch} y, & \partial_x^2 U &= -\sin x \operatorname{ch} y, & \Rightarrow & \text{tényleg teljesül, hogy} \\ \partial_y U &= \sin x \operatorname{sh} y, & \partial_y^2 U &= \sin x \operatorname{ch} y & \Rightarrow & \Delta U = \partial_x^2 U + \partial_y^2 U = 0. \end{aligned}$$

A V -re vonatkozó differenciálegyenlet(ek)ből a következőkre jutunk:

$$\begin{aligned} \partial_x V &= -\partial_y U = -\sin x \operatorname{sh} y & \Rightarrow & \quad V(x, y) = \cos x \operatorname{sh} y + \chi(y); \quad \text{beírjuk a másikba.} \\ \text{Így } \partial_y V &= \partial_x U & \Rightarrow & \quad \partial_y(\cos x \operatorname{sh} y + \chi(y)) = \cos x \operatorname{ch} y & \Rightarrow & \quad \chi'(y) = 0 & \Rightarrow & \quad \chi(y) = K. \end{aligned}$$

Az egyik lépésben persze a konzisztenciafeltétel jó gyümölcsöt termelt. Az eredmény tehát:

$$U(x, y) = \sin x \operatorname{ch} y \quad \text{harmonikus párja:} \quad \underline{\underline{V(x, y) = \cos x \operatorname{sh} y + K.}}$$

- Az előző példában az $f(z) = \sin z$ komplex függvény valós részéből kiindulva lényegében a képzetes részt találtuk meg. Utolsó példaként közelítsünk így rá az $\frac{1}{z}$ függvényre (melynek valós és képzetes részeit már korábban is kiszámoltuk is és használtuk is az ábrázoláshoz; ld. ott):

$$\mathbf{3.p\acute{e}lda:} \quad U(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \text{keressünk harmonikus párt!}$$

A menet ugyanaz, mint eddig. Először elvégezzük a deriválásokat (*csináljuk is meg!*):

$$\partial_x U = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \partial_y U = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \partial_x^2 U = \frac{2x(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3}, \quad \partial_y^2 U = \frac{2x(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3}.$$

Láthatólag igaz, hogy $\partial_x^2 U + \partial_y^2 U = 0$; értelmes a feladat. A V -re vonatkozó egyik egyenletből:

$$\partial_x V = -\partial_y U \quad \Rightarrow \quad \partial_x V = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad \Rightarrow \quad V(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} + \chi(y).$$

Visszahelyettesíthetjük ezt a kapott eredményt a másik $\partial_y V = \partial_x U$ egyenletbe; arra jutunk, hogy

$$\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \chi'(y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \Rightarrow \quad \chi(y) = K \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{V(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} + K.}}$$

Az eredmény tényleg az lett, amit az $\frac{1}{z}$ valós és képzetes része alapján vártunk.³⁰

Gyakorlásképpen mindhárom példában ellenőrizhetjük még egyszer, hogy teljesülnek a Cauchy-Riemann-egyenletek, és külön azt is, hogy a kapott $V(x, y)$ -ekre tényleg teljesül, hogy $\Delta V = 0$.

- Általánosan és példákkal is láttuk, hogy ha egy (elég sima) $U(x, y)$ függvényre $\Delta U = 0$, akkor megtalálhatjuk az ő $V(x, y)$ harmonikus párját. Ilyen U és V egy komplex differenciálható függvény valós és képzetes részei; kérdés lehet, hogy ezt az $f(z)$ -t rekonstruálhatjuk-e U -ból és V -ből.

³⁰Megjegyzés: az itt $\partial_x V$ -re felírt egyenletből V -t x szerinti primitívfüggvény-kereséssel megkapni persze akkor a legegyszerűbb, ha (ismerve az $\frac{1}{z}$ függvényt) *tudjuk előre*, hogy mi is a keresett $V(x, y)$. Ha nem tudjuk előre, akkor egy változócserevel számíthattuk ki az $\int dx$ határozatlan integrált: $x \rightarrow t$ úgy, hogy $x = y\sqrt{t}$. Próbáljuk ki!

Egyszerű esetekben (ismerve egyszerű függvényeket) *kitalálhatjuk*: a fenti 2. és 3. példában ezek (említettük is) a $\sin z$ és az $\frac{1}{z}$ voltak, az 1. példában pedig visszatekintve beláthatjuk, hogy a z^3+3z^2 függvény valós részéből találtuk ki a képzetes részt harmonikuspár-kereséssel.³¹

Általános képletet is adhatunk, emlékezve, hogy mi a kapcsolat z és az x, y koordináták között:

$$\begin{aligned} \text{Ha } z = x+iy &\Rightarrow x = \frac{1}{2}(z+z^*) \text{ és } y = \frac{1}{2i}(z-z^*), & \text{és ebből} \\ f(z) = U(x, y) + iV(x, y) &\Rightarrow f(z) = U\left(\frac{z+z^*}{2}, \frac{z-z^*}{2i}\right) + iV\left(\frac{z+z^*}{2}, \frac{z-z^*}{2i}\right), \end{aligned} \quad (2.22)$$

azaz U és V konkrét alakjaiba x és y ilyen kifejezéseit beírva megkapjuk az $f(z)$ -t mint z függvényét. Megjegyezhet a z^* megjelenése, amiről ugye tudjuk, hogy nagyon is *nem* differenciálható; mindenesetre az eredményként várt $f(z)$ -ről *tudjuk, hogy* differenciálható: emiatt (pláne ha sikerül az U -vel és V -vel utolsónak írt kifejezést algebrailag egyszerűsíteni) biztosak lehetünk, hogy $f(z)$ tényleg csak z függvényeként fog adódni, z^* -tól ilyen értelemben nem fog függeni.

- Nézzük meg így az előző példákat (ezeknél sikerülni fog egyszerűsíteni):

$$\begin{aligned} \text{A fenti 1.példában:} \quad U(x, y) &= x^3+3x^2-3xy^2-3y^2, \\ V(x, y) &= 3x^2y+6xy-y^3. \end{aligned}$$

$$\text{a megfelelő komplex függvény: } f(z) = U\left(\frac{z+z^*}{2}, \frac{z-z^*}{2i}\right) + iV\left(\frac{z+z^*}{2}, \frac{z-z^*}{2i}\right),$$

behelyettesítve majd elvégezve, amit el lehet:

$$\begin{aligned} \underline{f(z)} &= \left[\frac{z+z^*}{2}\right]^3 + 3\left[\frac{z+z^*}{2}\right]^2 - 3\left[\frac{z+z^*}{2}\right]\left[\frac{z-z^*}{2i}\right]^2 - 3\left[\frac{z-z^*}{2i}\right]^2 + \\ &+ i\left\{3\left[\frac{z+z^*}{2}\right]^2\left[\frac{z-z^*}{2i}\right] + 6\left[\frac{z+z^*}{2}\right]\left[\frac{z-z^*}{2i}\right] - \left[\frac{z-z^*}{2i}\right]^3\right\} = \dots = \underline{\underline{z^3+3z^2}}. \end{aligned}$$

Kijön az elvárt (és utólag visszafelé is ellenőrizhető) eredmény; akkor értékeljük ezt, ha most az összes közbülső lépést (a lényegét, azaz a le nem írt egyszerűsítéseket is) megcsináltuk. Tovább:

$$\text{A fenti 2.példában: } U(x, y) = \sin x \operatorname{ch} y, \quad V(x, y) = \cos x \operatorname{sh} y.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{ a komplex függvény: } \underline{f(z)} &= U\left(\frac{z+z^*}{2}, \frac{z-z^*}{2i}\right) + iV\left(\frac{z+z^*}{2}, \frac{z-z^*}{2i}\right) = \\ &= \sin\left(\frac{z+z^*}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{z-z^*}{2i}\right) + i \cos\left(\frac{z+z^*}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{z-z^*}{2i}\right) = \dots = \underline{\underline{\sin z}}. \end{aligned}$$

Itt a \sin , \cos , sh , ch (komplexben is minden további nélkül igaz) addíciós tételait és az i -szeres argumentum szabályait (például hogy $\sin(iz) = i \operatorname{sh} z$) kellett nyaklól nélkül alkalmazni.

Az utolsó fenti példát is megcsinálhatjuk: most kicsit trükkösebben rövidebben írrom le:

$$\begin{aligned} \text{A fenti 3.példában: } U(x, y) &= \frac{x}{x^2+y^2}, \quad V(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}. \\ \Rightarrow \underline{f(z)} &= U(x, y) + iV(x, y) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{z^*}{zz^*} = \underline{\underline{\frac{1}{z}}}. \end{aligned}$$

Mindhárom fenti példában megkaptuk tehát az U -ból és a V -ből a megfelelő $f(z)$ függvényét, „konstruktívan”, azaz a felírt, általánosnak mondható (2.22) módszert követve is.

³¹Mindig U -val jelöltük a kiinduló függvényt, és V -vel a keresett harmonikus párt. A „harmonikuspár-ság” nem teljesen, de „majdnem szimmetrikus” fogalom a következő értelemben: ha $f(z)$ valós része U és képzetes része V , akkor az $i \cdot f(z)$ függvény valós része $-V$, képzetes része U , így ha U és V harmonikus pár, akkor $-V$ és U is az.

* * *

• Az eddigiek alapján ha egy $U(x, y)$ elég sima függvényre $\Delta U=0$, akkor úgy kaphatjuk meg azt az $f(z)$ komplex differenciálható függvényt, aminek U a valós része, hogy a Cauchy-Riemann-egyenletekkel megkeressük a harmonikus párt, majd ezekből (felismeréssel vagy a (2.22) recepttel) kihozzuk $f(z)$ -t. Ez általánosan ismert módszer, és más matematikai trükkök „előzménye” is.

Létezik egy kevésbé ismert képlet, ami az $U(x, y)$ -ből egy lépésben megadja a megfelelő $f(z)$ -t, átugorva azt, hogy (differenciálegyenlet-megoldással, azaz lényegében integrálással) megkeresnénk $V(x, y)$ -t. *Nem tudom*, hogy honnan származik ez a képlet, vagy hogy lenne valamilyen általánosan ismert neve; a budapesti (ELTE fizika BSc) folklórban „varázssformula” néven fut pár éve.³²

• Legyen $U(x, y)$ legalábbis egy nyílt halmazon elég sima, és legyen $\Delta U=0$. Vegyünk egy olyan x_0, y_0 pontot, ahol U értelmes; ekkor igaz a

Varázssformula: az az $f(z)$, amire $\operatorname{Re} f(z) = U(x, y)$, a következő:

$$f(z) = 2 \cdot U\left(x = \frac{z+z_0^*}{2}, y = \frac{z-z_0^*}{2i}\right) - U(x_0, y_0), \quad \text{ahol} \quad \begin{array}{l} z \equiv x+iy, \\ z_0 \equiv x_0+iy_0. \end{array} \quad (2.23)$$

Ezzel a képlettel tehát olyan $f(z)$ komplex differenciálható függvényt kapunk, aminek valós része $U(x, y)$, a szokásos $f(x+iy) \equiv U(x, y) + iV(x, y)$ értelemben. Ahogy jelöltük, U -ba az x és az y változók helyére a z -t és z_0 -t tartalmazó megadott kifejezéseket kell írni: egyszerű esetekben ez nem okoz gondot (mint az alábbi példákban sem); az elvi kérdést (hogy mit is jelent, hogy eredendően valós változók helyére komplex változókat írunk) később tisztázzuk.

• Érdekes, hogy a formula minden elég sima $U(x, y)$ esetén megad egy $f(z)$ komplex differenciálható függvényt; akkor is, ha $\Delta U \neq 0$. Ekkor viszont a kapott $f(z)$ valós része *nem* a megadott $U(x, y)$; az $f(z)$ valós részéről ugyanis *tudjuk*, hogy kielégíti a Laplace-egyenletet. Megnézve tehát, hogy a kapott $f(z)$ valós része tényleg a kiindulási $U(x, y)$ függvény-e, ellenőrizhetjük azt is, hogy az U kielégíti-e a Laplace-egyenletet: ha $f(z)$ -ből visszkapjuk U -t, akkor biztosak lehetünk ebben, úgy, hogy közben egyetlen deriválást sem kellett elvégezni.

Az is érdekes, hogy *bármilyen* z_0 -t, azaz x_0, y_0 helyet választhatunk (ahol U sima). Sok esetben (ha $U(x, y)$ jól viselkedik az $x=0, y=0$ helyen, ami gyorsan végiggondolható) a legegyszerűbb a $z_0=0$ választás. Az állítás része az is, hogy különböző z_0 -kat választva a mostani szempontból *lényegében* ugyanazt az $f(z)$ -t kapjuk: a különbség mindössze az lesz, hogy a kapott $f(z)$ *képzetes részéhez*, azaz a szokásos jelölésünkkel: $V(x, y)$ -hoz a z_0 választásától függően más és más *konstans érték* adódik. Ez konzisztens azzal, hogy egy adott U függvény harmonikus párja, V egyértelmű; legfeljebb egy konstans adhatunk hozzá úgy, hogy a „harmonikuspársa” ne romoljon el.

• Nézzünk meg (részben már látott) példákat! Elsőként tegyük fel, hogy nem hallottunk még az $f(z) = z^2$ függvény valós és képzetes részéről, viszont élénk rakják az alábbi $U(x, y)$ -t:

$$U(x, y) = x^2 - y^2, \quad \text{minek a valós része ez?}$$

³²Ez a formula tehát egy kis „plusz”: a nemzetközi mezőnyben is kevesen ismerik. Előre nem látható esetben esetleg előnyt jelenthet tudni; számomra pedig különösen kedves. Egy egyszerűsített ($z_0=0$ -t vevő, ld. rögtön) verziót hallottam Dávid Gyulától (ő pedig saját bevallása szerint egy 1950-es években írt orosz hidrodinamikakönyvben olvasta), $z_0 \neq 0$ -ra sikerült általánosítanom és bebizonyítanom. Később olvastam egy másfajta bizonyítást a következő cikkben: W. T. Shaw, SIAM Review **46** 4, 717 (2004). Ez a szerző sem ad eligazítást afelől, hogy eredetileg honnan, kitől származik a formula; hogy a témáról 2004-ben cikket írtak (pedig a komplex függvénytan a Cauchy-Riemann-egyenletekkel együtt jó 200 éve művelt terület), mutatja, hogy mennyire nem általánosan ismert dologról van szó.

A fenti varázssformula itt a következőt nyújtja:

$$\begin{aligned} \underline{f(z)} &= 2 \cdot \left\{ \left[\frac{z+z_0^*}{2} \right]^2 - \left[\frac{z-z_0^*}{2i} \right]^2 \right\} - (x_0^2 - y_0^2) = 2 \cdot \left[\frac{z^2}{4} + \frac{zz_0^*}{2} + \frac{z_0^{*2}}{4} + \frac{z^2}{4} - \frac{zz_0^*}{2} + \frac{z_0^{*2}}{4} \right] - x_0^2 + y_0^2 = \\ &= z^2 + z_0^{*2} - x_0^2 + y_0^2 = z^2 + (x_0 - iy_0)^2 - x_0^2 + y_0^2 = \underline{\underline{z^2 - 2ix_0y_0}}. \end{aligned}$$

Tényleg működik: megkaptuk az $f(z) = z^2$ -et, *amiről most újra ellenőrizni kellene, hogy a valós része tényleg a kiindulási U* ; ezt már sokszor megcsináltuk mostanra, úgyhogy nem húzom vele az időt. Így viszont az is világos, hogy noha most nem ellenőriztük, hogy $\Delta U = 0$, erről is tudhatjuk, hogy biztos teljesül. Másrészt a z_0 , azaz az x_0, y_0 választása (ami most teljesen tetszőleges, mivel a kiinduló $U(x, y)$ függvényünk *mindenhol* elég sima) tényleg csak az eredményül kapott $f(z)$ képzetes részében jelentkezik, és ahhoz is csak egy konstans ad. Persze most akár rögtön $z_0 = 0$ -t is választhattunk volna; úgy még egyszerűbb lett volna gyorsan rekonstruálni $f(z) = z^2$ -et.

- Az $f(z) = z$ és az $f(z) = iz$ függvényekre is működik a varázssformula: visszakapjuk őket az $U = x$ és az $U = y$ valós részekből. Ezek egyszerűek, de segítenek memorizálni, hogy z_0^* előjelei hogyan szerepelnek: kipróbálhatjuk, hogy ha másképp lennének, már ezeken a függvényeken elbuknánk.
- Egy összetettebb példa (amiről rögtön elárulom, hogy az $f(z) = \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$ valós része):

$$U(x, y) = \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y} \quad ??? \quad (2.24)$$

Mit kapunk a varázssformulával? Itt *szinte* akárhol lehet $z_0 \equiv x_0 + iy_0$, de például $z_0 = 0$ -ba biztos nem: az $U(x, y)$ ott nem értelmes. Általános z_0 -t beírva kell haladunk. Érdekes itt is a kétszeres szögek képleteit ($\sin(2X) = 2 \sin X \cos X$, $\cos(2X) = 1 - 2 \sin^2 X$, $\operatorname{ch}(2X) = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 X$) használni:

$$U(x, y) = \frac{\sin(2x)}{\operatorname{ch}(2y) - \cos(2x)} \quad \Rightarrow \quad f(z) = \frac{2 \sin(z+z_0^*)}{\operatorname{ch}\left(\frac{z-z_0^*}{i}\right) - \cos(z+z_0^*)} - \frac{\sin(2x_0)}{\operatorname{ch}(2y_0) - \cos(2x_0)}.$$

Kész; azért ha van szépérzékünk, érdemes tovább alakítani, hogy kicsit kibontva elénk álljon a függvény, másrészt hogy megnyugodjunk afelől, hogy a z_0 különféle választásai tényleg csak a képzetes részt tolják el konstanssal. Nyilván az addíciós tételket kell használni, közben esetleg ízlésesen visszatérni a $z_0 \equiv x_0 + iy_0$ -lal az x_0 és y_0 használatára. Próbáljuk meg! Tömören leírok egy lehetséges utat (ami nyilván már a többedik próbálkozásom...). Először az első törtet alakítva:

$$\begin{aligned} \frac{2 \sin(z+z_0^*)}{\operatorname{ch}\left(\frac{z-z_0^*}{i}\right) - \cos(z+z_0^*)} &= 2 \frac{\sin z \cos z_0^* + \cos z \sin z_0^*}{\cos(z-z_0^*) - \cos(z+z_0^*)} = \frac{\sin z \cos z_0^* + \cos z \sin z_0^*}{\sin z \sin z_0^*} = \frac{\cos z}{\sin z} + \frac{\cos z_0^*}{\sin z_0^*} = \\ &= \operatorname{ctg} z + \frac{\cos(x_0 - iy_0)}{\sin(x_0 - iy_0)} = \operatorname{ctg} z + \frac{\cos x_0 \operatorname{ch} y_0 + i \sin x_0 \operatorname{sh} y_0}{\sin x_0 \operatorname{ch} y_0 - i \cos x_0 \operatorname{sh} y_0} = \operatorname{ctg} z + \frac{\cos x_0 \sin x_0 + i \operatorname{sh} y_0 \operatorname{ch} y_0}{\sin^2 x_0 + \operatorname{sh}^2 y_0} = \\ &= \operatorname{ctg} z + \frac{\sin(2x_0)}{\operatorname{ch}(2y_0) - \cos(2x_0)} + i \frac{\operatorname{sh}(2y_0)}{\operatorname{ch}(2y_0) - \cos(2x_0)}. \end{aligned}$$

Visszavéve a fenti kifejezés második tört tagját is, a varázssformula itt azt adta, hogy

$$U(x, y) = \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y} \quad \Rightarrow \quad f(z) = \operatorname{ctg} z + i \frac{\operatorname{sh}(2y_0)}{\operatorname{ch}(2y_0) - \cos(2x_0)}, \quad (2.25)$$

azaz z_0 választása itt is tényleg csak a képzetes részbe szól bele egy konstans erejéig. Megint: gömb-érzékfejlesztés végett érdemes újra konkrétan ellenőrizni, hogy a kapott $\operatorname{ctg} z$ valós része tényleg a kiindulási $U(x, y)$; ezzel egyúttal ugye azt is belátjuk (egyetlen deriválás nélkül), hogy $\Delta U = 0$.

• A példák alapján elhithetjük, hogy működik a varázsformula. **Most nem bizonyítjuk be:** noha a szükséges algebrai lépések nem nehezek, és elérhető közelségben lennének, van a komplex függvények lelkivilágának egy aprónak tűnő részlete (ld. nemsokára, „analitikusság” hívószóval), ami mintegy habarcsként összeragasztja majd a bizonyítást. A C.3. függelékben visszatérünk ide.

2.5. Jellemző függvénytípusok és elnevezések

A kétdimenziós Laplace-egyenletre megoldásokat kínáló alkalmazásokhoz (is) visszatérünk majd, amikor *kicsit* többet tudunk már általában komplex differenciálható függvényekről. A mostani szakasz mindenfajta további függvényvizsgálathoz való kiegészítő bevezetés.

• A „függvény” általános fogalmába a hozzárendelési utasítás („képlet”) mellett beletartozik az érkezési halmaz és az indulási halmaz megadása is. Legtöbbször (ha nem kötjük ki másképp) úgy értünk egy függvényt, hogy mindenhol értelmezett, ahol az őt megadó képlet értelmes.

Láttuk már, és messzemenően fogjuk is, hogy váratlan erősebb következményekkel jár, ha egy komplex függvény differenciálható.³³ A következő fejezetekben (is) olyan tételek jönnek majd, ahol a kikötés mindig az, hogy a vizsgált $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény egy nyílt halmazon, azaz egy „kövérkés tartományon” legyen differenciálható. Az ábrákon is sokszor kijelölünk egy krumpli alakú ilyen tartományt. A tipikus esetekben azonban a differenciálhatóság mintegy automatikusan teljesül a \mathbb{C} sík „legnagyobb részén”, kivéve esetleg például egy-két pontot vagy vonaldarabot. Ilyen „kisebbségi” részhalmazok megjelenése (ahol a függvényünk nem differenciálható) alaposan módosíthatja a levonható következtetéseket. Ezért tehát fontos lesz, hogy egy képlettel adott $f(z)$ függvényről eldöntsük, hogy mi a „természetes” értelmezési tartománya, hol differenciálható (és hol *nem* az). Most ide való példákat és a függvények egyéb „globális” tulajdonságait vizsgáljuk.

• **Egészfüggvények** névre hallgatnak az olyan függvények, amelyek az *egész* \mathbb{C} komplex síkon (egy pontot sem kihagyva) mindenhol differenciálhatók. **Példák:** a konstans függvények, az $f(z) = z$ identitás, az $f(z) = z^2$, sőt: minden polinom, továbbá az e^z , a $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$. Viszont a tangensfüggvény *nem* egészfüggvény: $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$, és nem értelmes ott, ahol $\cos z = 0$. A valós $\operatorname{tg} x$ grafikonjából is tudjuk, hogy ő a \cos zérushelyeiben, azaz $\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ -ben nem értelmes. A valós $\operatorname{th} x$ függvény mindenhol értelmesnek tűnik, a $\operatorname{th} z$ komplex függvény viszont szintén *nem* egészfüggvény: $\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$, és a $\operatorname{ch} z$ -nek nagyon is vannak (tisztá képzetes) zérushelyei: $i \cdot (\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi)$.

• Érdekes állítások vonatkoznak egészfüggvényekre; az egyiket már most idehozzuk:

Liouville tétele: *Korlátos egészfüggvény konstans.*

Azaz ha egy $f(z)$ egészfüggvényről tudjuk, hogy van olyan $K \in \mathbb{R}_0^+$, amivel (2.26)
 $|f(z)| \leq K$ mindehol teljesül, akkor csakis $f(z) = c$ konstans függvény lehet.

³³Komplex függvénytanban használják a „differenciálható” helyett szinte azonos értelemben a „**holomorf**” szót is. (Görögösen *holo*: „egészen”, *morf*: (szép)„alakú”). Az említett körülmény (hogy egy nyílt halmazon komplex differenciálható függvény sok egyebet is tud lehet a külön elnevezés létjogosultsága. A „holomorf” jelzőbe beleértik, hogy egy nyílt halmazon is igaz a differenciálhatóság (amit mi eddig is szinte mindig kikötöttünk); hogy egy függvény egy nyílt tartományon holomorf, az pont ugyanazt jelenti, mint hogy differenciálható ott. Általában viszont a „holomorf” megjelölés még nem mondja meg, hogy a függvény közelebről milyen tartományon differenciálható. Az ezek okozta kétértelműségek miatt (is) a magam részéről nem igazán használom a „holomorf” szót; maradok a „(komplex) differenciálható” megjelölésnél, ahol a „komplex” előtag hozzámondása hívja be gondolatilag azt, hogy minden egyéb, a differenciálhatóságból következő kellemes tulajdonságot tud a függvény.

Természetesen ez nem igaz valós függvényekre: nyilván tudunk olyan nem konstans de korlátos végtelenszer differenciálható $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt mondani; ilyen például az $f(x) = \operatorname{th} x$.

- A Liouville-tételt később bizonyítjuk be; addig is megmutatjuk rá alapozva **az algebra alaptételének** egy közkézen forgó **bizonyítását**. Tegyük fel, hogy a $P(z)$ nem nulladfokú polinom sehol nem vesz fel nullát. Ekkor $1/P(z)$ is (differenciálható) egészfüggvény lenne. Tudjuk (ld. a korábbi 1.3. szakaszban is), hogy ha $|z| \rightarrow \infty$ (akármilyen irányban menve z -vel), akkor $|P(z)| \rightarrow \infty$. Egy adott $K \in \mathbb{R}^+$ szám esetén mindenképpen van tehát olyan zárt körlap, hogy ha $|z|$ azon kívül van, akkor már $|1/P(z)| < K$. Viszont $1/P(z)$ folytonos, így a zárt körlapon felveszi az ottani maximumát. Összetéve ezeket $1/P(z)$ korlátos egészfüggvény lenne, így konstans kellene, hogy legyen. Ellentmondásra jutottunk: tarthatatlan a feltevés, hogy $P(z)$ sehol sem nulla.

Megjegyzés: *van sok* nem polinom egészfüggvény, aminek nincsen zérushelye (például az e^z); zavaró lehet, hogy mintha a bizonyításunk nem is igazán használta volna ki, hogy $P(z)$ polinom. *Egyetlen* dologhoz kellett a polinomság: hogy ha $|z| \rightarrow \infty$, akkor $|P(z)| \rightarrow \infty$ (és ebben ugye benne van, hogy bármilyen irányba távolodhatunk a z -vel). A későbbiekben talán megvilágosodik az, hogy ez a tulajdonság az egészfüggvények közül *kizárólag a polinomokra igaz*. Ellenben például az e^z függvényre: ha $z \in \mathbb{R}$, és $z \rightarrow \infty$, akkor $|e^z| \rightarrow \infty$, de ha $z \rightarrow -\infty$, akkor $|e^z| \rightarrow 0$.

- Sok függvénynek *izolált szingularitása(i)* van(nak) itt-ott; az alkalmazások szempontjából különösen fontos, hogy ezeket beazonosítsuk. (Később *osztályozzuk* is a lehetséges típusokat.)

Egy $z_0 \in \mathbb{C}$ pont egy $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvénynek **izolált szingularitása**, ha f nem értelmezett z_0 -ban, de van egy (legalábbis nem nulla sugarú) körlap z_0 körül, amin f differenciálható (z_0 -t kivéve). (2.27)

Ha izolált (=„elszigetelt”) szingularitásra gyanakszunk, ellenőrizzük, hogy létezik a megkövetelt „kipontozott” körlap. Ez biztos igaz, ha *izolált* (egymástól véges távolságra lévő) pontokat kivéve a függvény differenciálható. Például az $\frac{1}{z}$ -nek a $z_0 = 0$ izolált szingularitása: a függvény mindenhol máshol differenciálható, egy (sőt most: akármilyen) $z_0 = 0$ körüli kipontozott körlapon is.

- Némely $f(z)$ függvénynek **vágása(i)** van(nak). Ezek olyan, két kijelölt perempont közötti sima (egyenes vagy görbe) vonalak, amelyek pontjaiban f nem differenciálható, de a vonalat tartalmazó nyílt halmazon (a vonalat kivéve) igen, és a vonal „belső” (azaz: nem a perem-)pontjaihoz z -vel a két oldal felől tartva f -nek és deriváltjainak értelmes véges határértékei vannak, melyek legalább valamelyik deriváltra különböznek a két oldal felől. Azt is megengedjük, hogy az egyik perempont a „végtelenben” legyen valamerre.³⁴ A vágások perempontjait (később megértendő okból) a függvény **elágazási pontjainak** hívjuk (angolul: *branch(ing) point*). Ezekben a függvény (és/vagy deriváltjai) tarthatnak véges vagy végtelen határértékhez, vagy lehet, hogy nincs határértékük (ha különböző „határértékeket” kapnánk különböző irányokból).

Vigyázat! egy elágazási pont (noha az ilyet is hívják „szingularitásnak”, „szinguláris pontnak”) a fentebbiek tükrében **nem izolált szingularitás**: minden köré rajzolt nemnulla sugarú körlapon átfut a vágás, így *nincs olyan körlap*, amin a függvény (a pontot kivéve) differenciálható lenne.

- A legalapvetőbb példa vágásos függvényre: az $f(z) = \operatorname{Ln} z$ logaritmusnak az \mathbb{R}_0^- negatív valós tengely vágása, hiszen emlékszünk: $\operatorname{Ln} z$ képzetes része $+\pi$ -hez illetve $-\pi$ -hez tart, ha z -vel

³⁴Ha *mindkét* perempont a végtelenben lenne, azaz egy vágás kettészelné a síkot, akkor az ilyen függvény ténylegesen „két darabból” állna: ekkor nem igazán lényeges, hogy *öt egy jól definiált függvénynek* tekintsük.

felülről illetve alulról tartunk egy negatív valós számhoz. Itt a $z=0$ elágazási pontban az $|\operatorname{Ln} z|$ végtelenhez tart (hiszen a valós rész, $\ln |z|$ valós $-\infty$ -hez tart itt).

A logaritmus vágása „öröklődik” az általános kitevőjű $f(z) = z^\alpha$ hatványfüggvényre (ha $\alpha \notin \mathbb{Z}$, azaz nem valós egész szám), hiszen ugye $z^\alpha \equiv \exp(\alpha \cdot \operatorname{Ln} z)$, így ennek is különböző lesz a határértéke az \mathbb{R}_0^- tengely fölöttről illetve alatról (hacsak α nem egész szám). A $z=0$ elágazási pontban ezen $f(z)$ határértéke 0, ha $\Re(\alpha) > 0$; ha pedig $\Re(\alpha) < 0$, akkor a $|z^\alpha|$ abszolútérték ∞ -hez tart itt.

• Nézzünk **példákat** (útmutatásokkal) különféle függvények „struktúrájára”! Szokjunk hozzá, hogy az effajta vizsgálatot minden előkerülő függvényre mindig elvégezzük. Jó szokás ábrákat is rajzolni.

1. $f(z) = e^{1/z}$.

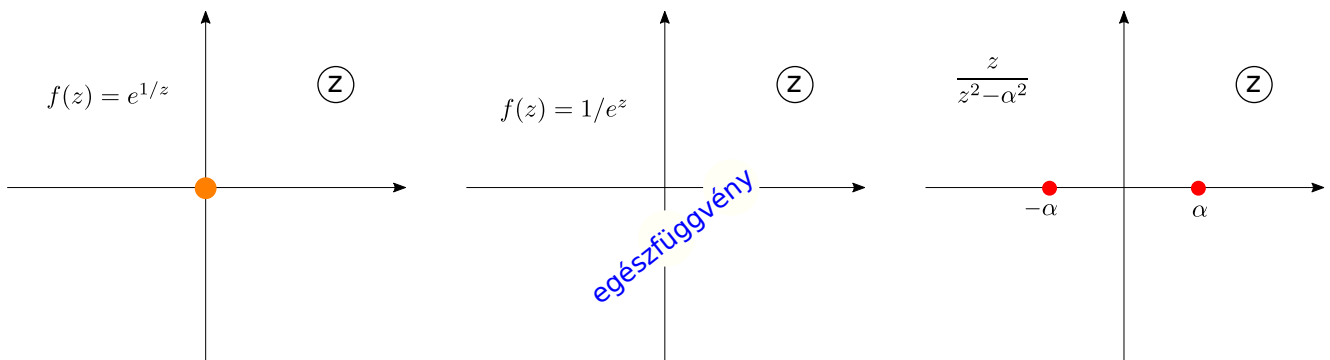
Ez szinte mindenhol differenciálható; egyedül $z=0$ -ban nem értelmes, így ez izolált szingularitás.

2. $f(z) = 1/e^z$.

Ez mindenhol differenciálható egészfüggvény; e^{-z} -vel egyenlő. (Ugye e^z sehol sem nulla.)

3. $f(z) = \frac{z}{z^2 - \alpha^2}$, ahol $\alpha > 0$ pozitív valós szám.

Minden z -re differenciálható, kivéve α -t és $-\alpha$ -t (itt a nevező nulla): ezek izolált szingularitások.



15. ábra. Példák függvények szingularitásaira, vágásaira.

4. $f(z) = \frac{1}{z^2 + \beta^2}$, ahol $\beta > 0$ pozitív valós szám.

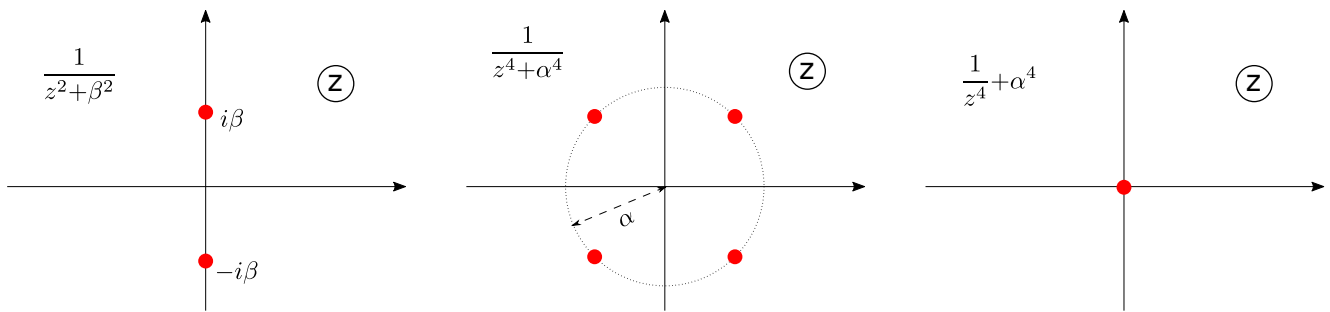
A valós számok között ugye a nevezőnek nincs zérushelye, komplex számok között viszont nagyon is van: két darab, a $z=i\beta$ és a $z=-i\beta$. Ezek izolált szingularitások tehát.

5. $f(z) = \frac{1}{z^4 + \alpha^4}$, ahol itt is $\alpha > 0$ pozitív valós.

A nevező a lényeg. Négy olyan z van, amire $z^4 = -\alpha^4$, az egyik $\alpha \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ (merthogy $(\frac{1+i}{\sqrt{2}})^2 = i$, és $i^2 = -1$), a másik három pedig ugye egy négyzet többi csúcsa. Ezek izolált szingularitások.

6. $f(z) = \frac{1}{z^4} + \alpha^4$.

Ne csapódjunk be: ez csak $z=0$ -ban nem differenciálható; a $z=0$ tehát izolált szingularitás.



16. ábra. Példák függvények szingularitásaira, vágásaira.

7. $f(z) = \frac{\sin z}{z}$.

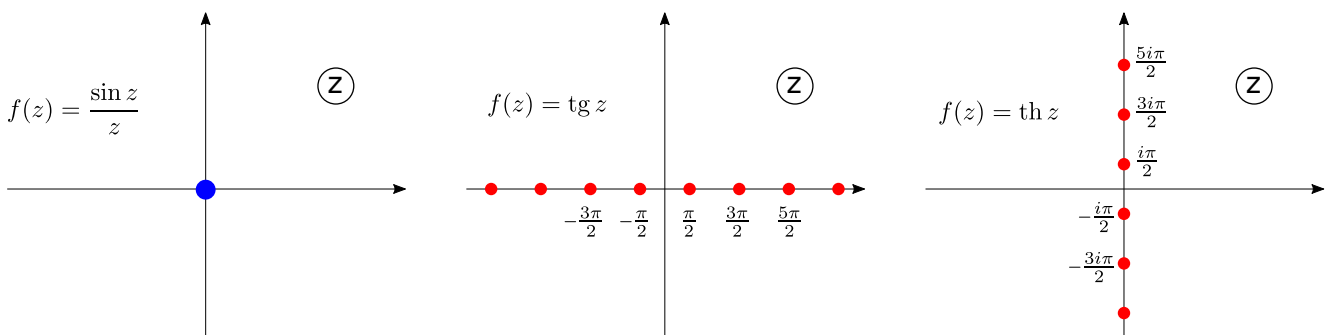
A $\sin z$ egészfüggvény, a nevező csak $z=0$ -ban nulla: itt is $z=0$ az egy izolált szingularitás.

8. $f(z) = \operatorname{tg} z$.

Mivel $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$, ahol $\cos z = 0$ (végtelen sok, de izolált, azaz egymástól legalább véges távolságra lévő pont, a $\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ valós számok, mások nem) ott lesznek a $\operatorname{tg} z$ -nek szingularitásai, izoláltak.

9. $f(z) = \operatorname{th} z$.

Itt viszont $\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = -i \operatorname{tg}(iz)$: így is, úgy is kijön, hogy $\operatorname{ch} z$ zérushelyeiben, azaz a tiszta képzetes $\frac{i\pi}{2} + n \cdot i\pi$ számokban vannak szingularitások; izoláltak.



17. ábra. Példák függvények szingularitásaira, vágásaira.

10. $f(z) = \frac{\operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2 + \alpha^2}$, ahol $\alpha > 0$ pozitív valós szám.

A nevezőből $\pm i\alpha$ két izolált szingularitás (nem valósak). A számláló is tört: $\operatorname{ctg}(\pi z) = \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$, és $\sin(\pi z)$ zérushelyei éppen a valós *egész számok*. Ezek is izolált szingularitások itt.

11. $f(z) = \frac{1}{z^4 + 5z^2 + 4}$.

A nevező szorzattá alakításával: $z^4 + 5z^2 + 4 = (z^2 + 1)(z^2 + 4) = (z - i)(z + i)(z - 2i)(z + 2i)$. Négy izolált szingularitás van tehát: i , $-i$, $2i$ és $-2i$, máshol minden rendben.

12. $f(z) = \operatorname{Ln} z$.

Ez az alapvető vágásos függvény: $z=0$ elágazási pont, vágás az \mathbb{R}_0^- tengelyen.

13. $f(z) = \text{Ln}(-z)$.

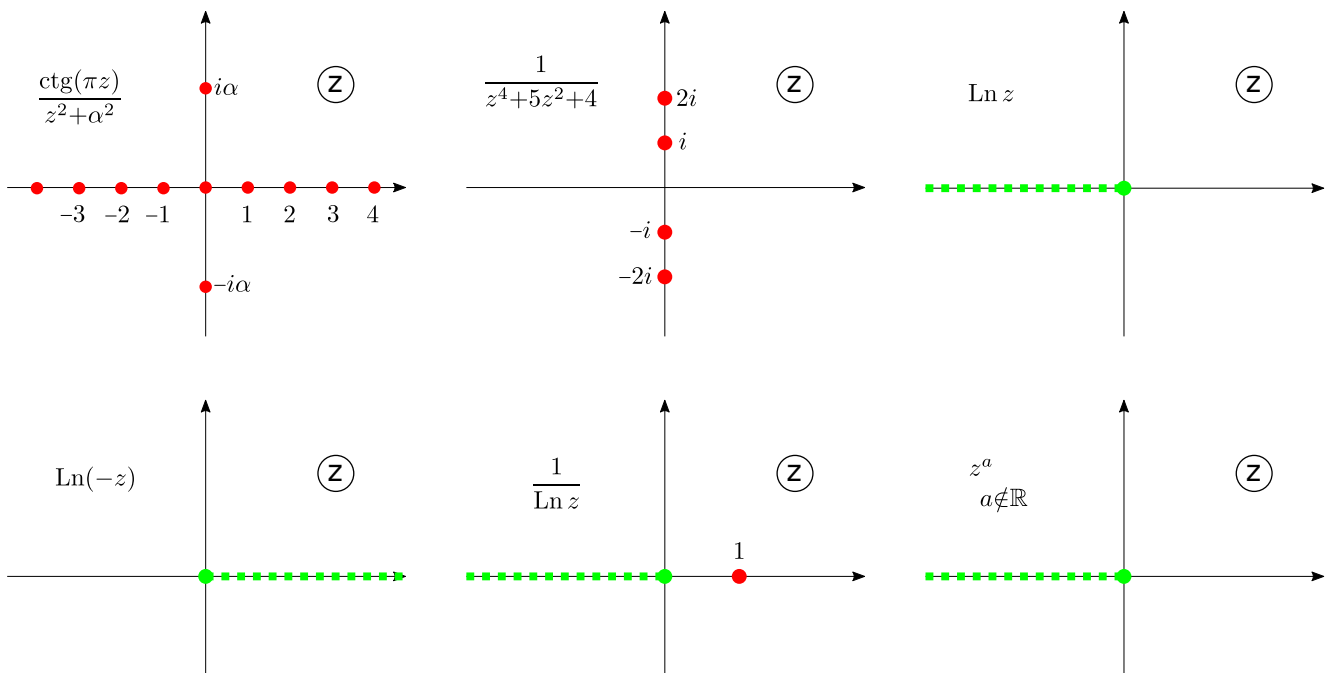
Az Ln lényege vágások szempontjából, hogy ott okoz vágást, ahol a „hasába” nem pozitív valós szám kerül. Emiatt most az \mathbb{R}_0^+ pozitív valós tengelyen lesz vágás ($z=0$ pedig elágazási pont).

14. $f(z) = \frac{1}{\text{Ln } z}$.

Mint fent, vágás \mathbb{R}_0^- -on. Továbbá a nevező $\text{Ln } z$ nullává válhat: ez pontosan a $z=1$ -ben lesz, ami (mivel a vágástól jó távol van) izolált szingularitás.

15. $f(z) = z^a$, ahol a akármilyen (akár komplex) szám.

Ha $a \in \mathbb{N}_0^+$, akkor ugye egészfüggvény. Ha $a \in \mathbb{Z}^-$, akkor $z=0$ -ban izolált szingularitás van. Egyéb esetekben vágás fut az \mathbb{R}_0^- tengelyen. Érdekes most már egyszer tényleg konkrétan kigondolni, hogy ezen függvény határértéke ekkor (ha $a \notin \mathbb{Z}$) tényleg más a vágás két oldalán.



18. ábra. Példák függvények szingularitásaira, vágásaira.

16. $f(z) = (-z)^\alpha$, ahol α határozottan nem egész szám.

Ott van ugye vágás, ahol a *hatványalap* \mathbb{R}_0^- eleme; mint fent $\text{Ln}(-z)$ -nél, (sőt abból következően) most is az \mathbb{R}_0^+ pozitív valós tengelyen lesz vágás.

17. $f(z) = \sqrt{z}$.

Ez a z^α általános kitevős hatványozás speciális esete, de külön kiemeljük. Vágás van \mathbb{R}_0^- -on (és mint korábban láttuk, a függvény onnan kiindulva kétfelé „félbehajtogat”).

18. $f(z) = \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{z+1}{z-1}$.

Milyen z -k esetén lesz nempozitív valós szám Ln hasában? Ha $\frac{z+1}{z-1} = -r$, és $r \in \mathbb{R}_0^+$, akkor (ellenőrizzük!) $z = \frac{r-1}{r+1} = 1 - \frac{2}{r+1}$. Az ilyen z -k tehát valósak: felrajzolva ezen $z(r)$ függés grafikonját, és tudva, hogy az $r \in \mathbb{R}_0^+$ eset kell, kiderül, hogy a vágás a $z \in [-1, 1]$ valós szakaszon van. Közben afelől is megnyugszunk, hogy ennyi, semmi több: az Ln hasába végtelen kerül $z=1$ -ben, de ez „már” az egyik elágazási pontunk, illetve nulla kerül $z=-1$ -ben; ez pedig a másik.

19. $f(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}$.

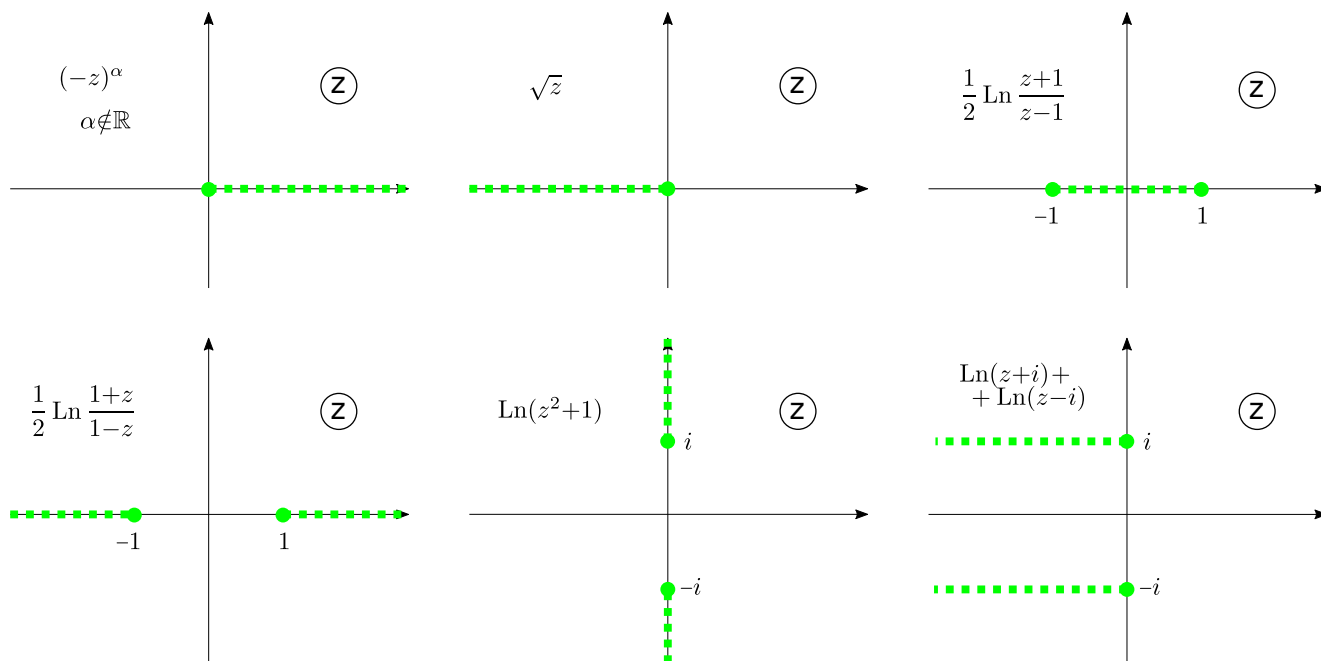
Az előző módszerrel adódik, hogy itt két vágás lesz: a $]-\infty, -1] \subset \mathbb{R}$ és az $[1, \infty[\subset \mathbb{R}$ félegyenesek.

20. $f(z) = \operatorname{Ln}(z^2+1)$.

A logaritmus hasában lévő z^2+1 ott negatív valós, ahol $z^2 \in]-\infty, -1]$: ez két vágást eredményez a képzetes tengelyen: érthető jelöléssel $[i, i\infty[$ és $[-i, -i\infty[$; gondoljuk végig!

21. $f(z) = \operatorname{Ln}(z+i) + \operatorname{Ln}(z-i)$.

Az egyik tag vágása $-i$ -ből, a másik i -ből induló negatív valós irányú félegyenes. Érdekes lesz majd ezt összevetni az előzővel: $(z+i)(z-i) = z^2+1$, és rémlik, hogy $\operatorname{Ln}(AB) \stackrel{?}{=} \operatorname{Ln} A + \operatorname{Ln} B$.



19. ábra. Példák függvények szingularitásaira, vágásaira.

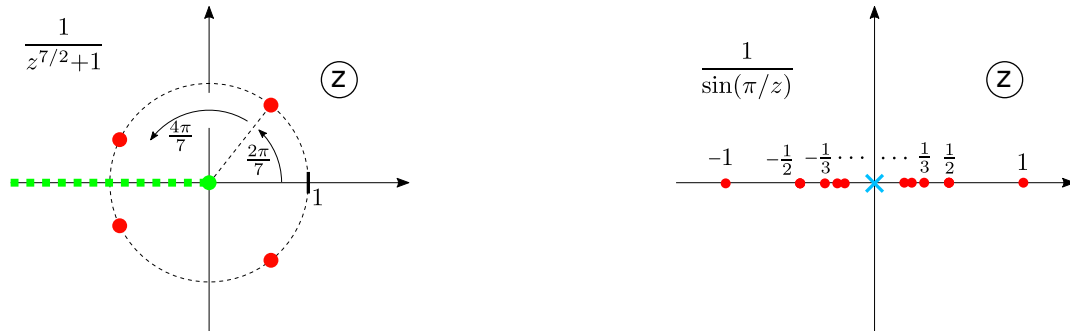
22. $f(z) = \frac{1}{z^{7/2}+1}$.

Nehezebb. Vágás van a törtekitevő miatt \mathbb{R}_0^- -on, emellett pedig gondoljuk ki, hogy a nevező *négy helyen* is nulla (mind az egységkörön); ezek izolált szingularitások.

23. $f(z) = \frac{1}{\sin(\pi/z)}$.

Elsőre ott van gond, ha a sin nullát vesz fel: ez itt akkor lesz, ha $z = \frac{1}{n}$, ahol $n \in \mathbb{Z}$, de persze $n \neq 0$. Akármekkora is n , az $1/n$ -től az előző és a következő *nemnulla távolságra* van, úgyhogy ezek

mind izolált szingularitások. Van viszont egy torlódási pontjuk, a $z=0$: itt sem értelmes ez az $f(z)$. Ez a $z=0$ most „vad” szingularitás, *nem izolált*:³⁵ bármely kicsi kipontozott környezetében még mindig *végtelen sok* izolált szingularitás van, ahol $f(z)$ nem differenciálható.



20. ábra. Példák függvények szingularitásaira, vágásaira.

• Újabb kérdéskör, hogy egy adott $f(z)$ függvény korlátos marad-e, vagy végtelenhez tart-e, ha $z \rightarrow \infty$ -be tartunk bizonyos irányokban. Ismertnek vesszük a különféle **valós**, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **függvényekről** (növekedésről, csökkenésről) tudott „**hierarchiát**”; néhány fontos pont:

1. Valós nem nulladfokú $P(x)$ polinomok $x \rightarrow \pm\infty$ -re abszolútértékben végtelenhez tartanak.
2. Polinomok hányadosa $\pm\infty$ -hez, nullához, vagy konstanshoz tart, ha $x \rightarrow \pm\infty$, ha a nevező fokszáma kisebb, egyforma, vagy nagyobb a számlálónál. Azt is mondjuk, hogy például ha a nevező kettővel magasabb fokú, mint a számláló, akkor a tört „ $1/x^2$ szerint” tart nullához: ez azt is jelenti, hogy ő még bármilyen kettőnél kisebb fokú polinommal beszorozva is nullához tart. Sokszor használjuk ezt a fajta fogalmazást; barátkozzunk vele!
3. A valós logaritmus, $\ln x$ végtelenhez tart $x \rightarrow \infty$ -re, de *minden hatványfüggvényénél lassabban*: bármilyen (kicsi) $\alpha > 0$ kitevőre $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^{-\alpha} \cdot \ln x) = 0$.
4. Az exponenciális függvény *gyorsabban nő* $x \rightarrow \infty$ -re, mint akármilyen hatványfüggvény vagy polinom: bármilyen (nagy) $\beta > 0$ kitevőre és bármilyen (kicsi) $\alpha > 0$ szorzóra $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^\beta \cdot e^{-\alpha x}) = 0$, vagy másképp ugyanez: $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^{-\beta} \cdot e^{\alpha x}) = \infty$.

Ezeket (is) tudva komplex függvényekre is levonhatunk következtetéseket. Néhány fontos példa:

1. Polinomokra és hányadosaikra ugyanaz érvényes akármilyen irányban való $z \rightarrow \infty$ határesetben, mint valósban: a számláló és a nevező fokszámai határozzák meg, hogy egy tört 0-hoz, konstanshoz vagy ∞ -hez tart-e (és hogy *milyen gyorsan*, azaz z -nek milyen hatványa szerint).
2. Az exponenciális függvényt érdemes külön megvizsgálni: ha $z = x + iy$, akkor $|e^z| = |e^x e^{iy}| = e^x$, azaz ha úgy tartunk z -vel végtelenbe, hogy z valós része $+\infty$ -be tart, akkor $|e^z|$ végtelenhez tart, ha x a $-\infty$ -be tart, akkor pedig nullához. Ha x véges marad, ahogy z -vel (képzetes irányban „elszállva”) a végtelenbe megyünk, akkor $|e^z|$ véges marad.

³⁵Nem is igazán találkozunk ilyen fajta szingularitásokkal; csak a példa kedvéért hoztam ide, hogy ilyen is van.

3. Sok alkalmazásban fontos a *képzetes exponenciális*: valós x -re az $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ függvény abszolútértéke 1, azaz korlátos $x \rightarrow \pm\infty$ felé menve. Az e^{iz} függvény viszont, (ahol z lehet komplex), már tudhat ehhez képest extrákat. (Már most mondjuk, hogy sokszor még egy például ω -val jelölt valós paraméterrel szorzott kitevővel kerül ez elő: amikor majd $e^{i\omega z}$ -ket látunk, emlékezzünk vissza ide!...) Ha például $z \equiv x+iy$ -nal úgy tartunk végtelenbe, hogy közben $y \rightarrow +\infty$, akkor $|e^{iz}| = |e^{i(x+iy)}| = e^{-y}$ miatt e^{iz} nullához tart (y -ban nézve *exponenciálisan*). Ha viszont $y \rightarrow -\infty$, akkor $|e^{iz}|$ ugyanemiat *exponenciálisan növekszik*. Az e^{-iz} függvényre fordítva fogalmazhatjuk meg ugyanezt; gyakorlásképpen mondjuk végig!
4. A $\sin z$, $\cos z$ függvények valós esetben, $z \equiv x$ -re korlátosak, komplexben viszont abszolútértékben exponenciálisan nőnek, ha z képzetes részével *akár $+\infty$ -hez, akár $-\infty$ -hez tartunk*. Indoklás: $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} + e^{-iz})$ és $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, és mindkettőnél a mondott esetben az egyik tag biztosan exponenciálisan nő, a másik pedig csökken (azaz „nem számít”). Másképp: $|\sin(x+iy)|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y$, és $|\cos(x+iy)|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y$, innen is látszik, amit mondtunk.
5. A tg és a th (noha periodikusan izolált szingularitásaik vannak, amiknél végtelenhez tartanak) olyanok, hogy ha a tengelytől eltávolodunk, *abszolútértékük* konstans 1-hez tart. Tényleg:

$$|\operatorname{tg}(x+iy)|^2 = \dots = \frac{\operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x}{\operatorname{sh}^2 y + \cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad \text{ha } y \rightarrow \infty, \text{ 1-hez tart.} \quad (2.28)$$

Ugye $\operatorname{th}(z) = i \operatorname{tg}(-iz)$, így 90° -kal elforgatva hasonlóakat mondhatunk th -ra is.

3. Vonalintegrálok

A komplex differenciálható függvények lelkivilágának megismerésében váratlanul hasznos lépcsőfok a *komplex vonalintegrál* bevezetése. Előbb azonban következzenek *két léktömögő közjáték*.

3.1. Közjáték: görbefogalmak

• Néhány fogalmat pontosítunk, hogy nyugodtan alhassunk. Az alkalmazásokhoz ez kevésbé fontos; később is visszatérhetünk. *Görbe* az, aminek van differenciálható paraméterezése. Pontosabban:

$$\begin{aligned} &\text{Ha } I \equiv]t_a, t_b[\subset \mathbb{R} \text{ nyílt intervallum (ahol } t_a < t_b; \text{ lehetnek} \\ &\pm\infty\text{-ek is), és egy } p: I \rightarrow \mathbb{C} \text{ függvény (a } \textit{paraméterezés}) \\ &I\text{-n folytonosan differenciálható, injektív, inverze folytonos,} \\ &\text{és } \dot{p}(t) \neq 0 \text{ sehol, akkor } p \text{ képhalmaza } \mathbf{görbe} \text{ a } \mathbb{C} \text{ síkon.} \end{aligned} \quad (3.1)$$

A plusz követelmények sokszor kapásból teljesülnek, de elvileg függetlenek. Egy görbének sok paraméterezése lehet. Két paraméterezés, $p_1(t)$ és $p_2(t)$ *egyforma*, vagy *ellentétes irányítású*, ha a $\dot{p}_1(t)$ -re és $\dot{p}_2(t)$ -re $\frac{\dot{p}_1(t)}{\dot{p}_2(t)}$ pozitív vagy negatív valós (a p_1 -ből és a p_2 -ből számolt érintővektorok ugyanabba vagy ellentétes irányba mutatnak) *az egész görbén*.³⁶ **Irányított** a görbe, ha az azonos irányítású paraméterezések egyik halmazát kitüntetjük mint *irányítást*.

• Kicsit módosítva a definíciót adódik a természetes következő fogalom:

$$\begin{aligned} &\text{Ha } I \equiv [t_a, t_b] \text{ korlátos zárt intervallum, } p(t): I \rightarrow \mathbb{C} \text{ in-} \\ &\text{jektív, } I\text{-n folytonosan differenciálható (} t_a\text{-ban és } t_b\text{-ben} \\ &\text{féloldali deriváltakat tekintve), és } \dot{p}(t) \neq 0, \text{ akkor } p \text{ kép-} \\ &\text{halmaza } \mathbf{peremes görbe}, p(t_a) \text{ és } p(t_b) \text{ a } \textit{perempontjai}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Peremes görbék is *irányíthatók*. Nyilvánvaló(nak tűnik, és tényleg belátható), hogy a perempontok más paraméterezést véve is ugyanazok. Egyszerűbb esetekben görbe *lezártja* peremes görbe.³⁷

$$\begin{aligned} &\text{Ha annyit lazítunk, hogy } \textit{szakaszos folytonos differenciál-} \\ &\textit{hatóságot} \text{ követelünk meg (azaz } I \text{ néhány belső pontjában} \\ &\text{a bal- és a jobb oldali deriváltak különbözhetnek), akkor a} \\ &\mathbf{szakaszos} \text{ görbe illetve peremes görbe fogalmaihoz jutunk.} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ezek is fontosak alkalmazásokban; ilyenek például a töröttvonalak. A *zárt* görbék vannak hátra:

$$\begin{aligned} &\text{Ha a szakaszos peremes görbe definíciójában } p: [t_a, t_b] \rightarrow \mathbb{C} \text{ injektív-} \\ &\text{se helyett azt kötjük ki, hogy } p \text{ a } [t_a, t_b] \text{ zárt-nyílt intervallumon injek-} \\ &\text{tív legyen, és } p(t_a)=p(t_b) \text{ legyen, } \mathbf{szakaszos zárt görbét} \text{ kapunk. Ha} \\ &\text{visszatérünk a folytonos (nem szakaszos) differenciálhatósághoz, és azt} \\ &\text{is megköveteljük még, hogy } \dot{p}(t_a)=\dot{p}(t_b) \text{ legyen, } \mathbf{zárt görbét} \text{ kapunk.} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ilyenek a „hurkok”: az I intervallum végei ugyanoda képződnek. A „zárt görbe” szép sima, az összevarrásnál is, oda ezért kell a $\dot{p}(t_a)=\dot{p}(t_b)$ követelmény, ami az érintővektorok (mint \dot{p} komplex számok) irányát összeilleszti. „Szakaszos zárt görbe” lehet tített-törött; az összevarrásnál is.

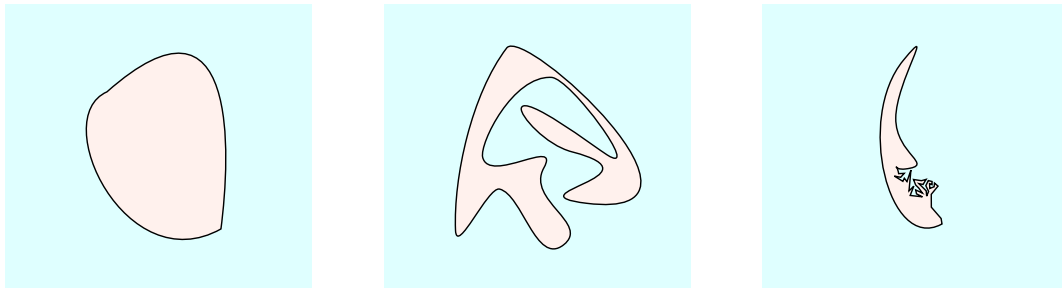
³⁶Itt be kell, és lehet is bizonyítani a definícióból, hogy más lehetőség nincs is; ezzel most nem foglalkozunk.

³⁷A perempontokat hívják a görbe „határpontjainak” is. Nyílt/zárt halmazok tekintetében a „határpont” mást jelent; jó az egyértelmű „perem-” megjelölés. Ugyanígy: a *zárt halmaz* másképp értendő, mint a *zárt görbe*.

- A következőkben az egyszerűség kedvéért mindig „görbét” és „zárt görbét” mondunk; a tételek ilyenkor mindig a fenti definíció szerinti „szakaszos peremes görbékre” illetve „szakaszos zárt görbékre” vonatkoznak. Minden szakasznak van külön differenciálható paraméterezése; ha majd egy képletben az egyszerűség kedvéért *egy* paraméterezést írunk egy görbéhez, akkor igazából a szakaszokra vett külön paraméterezésekre és az azokra is vett összegre kell gondolni.
- Idézzük fel (például a „Vektorszámítás” jegyzet 12.2. szakaszából) az **egyszeresen összefüggőség** fogalmát: \mathbb{C} egy részhalmaza egyszeresen összefüggő, ha bármilyen két benne fekvő zárt görbét folytonosan át lehet vinni egymásba a részhalmazból nem kilépve. (Egy körlap egyszeresen összefüggő, egy körgyűrű nem az.) Igen fontos az úgynevezett

Jordan-Schönflies-tétel: ha γ folytonos zárt görbe a síkon, akkor γ komplementterének két összefüggő komponense van. Az egyik (a görbén **kívüli** rész) nem korlátos, a másik (a görbén **belüli** rész) korlátos és egyszeresen összefüggő. (3.5)

Ez akkor is igaz, ha nem követelünk meg semmilyen differenciálhatóságot a paraméterezésről, hanem csak folytonosságot; a matematikusok természetesen foglalkoznak ezzel az esettel is.



21. ábra. Görbe belseje és külseje (azaz a Jordan-Schönflies-tétel illusztrálása).

Noha a tétel elsőre annyira nyilvánvalónak tűnik, hogy talán nem is érthető, mire a nagy felhajtás, és állandóan támaszkodunk rá (például amikor arról beszélünk majd, hogy egy zárt görbe milyen pontokat „kerül meg”; éppen a görbén belülieket); mégis, meglepően *nehéz bizonyítani*.³⁸

- Zárt görbénél **pozitív** (\odot) illetve **negatív** (\ominus) **irányításról** szoktunk beszélni. Mindig azonosítsuk be ezeket; „szép kövér” görbékre könnyű, de összevissza kunkorodókra nehezebb lehet.

3.2. Közjáték: az integrálfogalom finomságai, becslések, Lebesgue-tétel

Valós (\mathbb{R} vagy részhalmazai) értelmezési tartományú függvények integrálásának részleteit vesszük elő, jobbra bizonyítások nélkül. Az *érkezési halmaz* itt \mathbb{R} vagy \mathbb{C} . Az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ függvények speciális esetei, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ függvények valós és képzetes részei viszont $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények.

- Előkerülhetett már, hogy az $\int_a^b dx f(x)$ integrálfogalom többféleképpen bevezethető. A „darabolás, darabhossz függvényértékkel szorzása, összeadás majd finomítás” a **Riemann-féle** integ-

³⁸Ugyanaz a helyzet, mint ami sokszor: egyszerű esetekre gondolva nyilvánvaló az állítás; mégis, ha egyszer általánosan bebizonyította valaki, akkor jó tudni, hogy tényleg mindig igaz, olyan (fél-meddig „patologikus”) esetekben is, amikre esetleg nem is gondoltunk elsőre. (A fentebbi görbe-definíciók elég „szorosnak” tűnnek; mégis sok „vad” eset belefér, főleg a nem differenciálható de folytonos esetben: *fraktálok, pozitív területű görbék*, stb.)

rálfogalomra vezet. A **Lebesgue-féle** integrálfogalom máshogy indít: az integrandust *egyszerű lépcsős függvényekkel* (=véges sok fokozatú „dobogókkal”) megközelítve utóbbiak területeinek határértékét tekinti. A Lebesgue-integrálfogalom általánosabb: „szinte minden” (minden úgynevezett *mérhető*) függvény³⁹ szóba jön abból a szempontból, hogy integrálható-e vagy nem. A Riemann-értelemben integrálható függvények Lebesgue-értelemben is azok, és az integráljuk ugyanaz. Lebesgue-integrálban az értelmezési tartomány **nulla mértékű** (=„összhosszúságú”) részhalmazai (például néhány pont halmaza) nem számítanak. Azt, hogy *majdnem mindenhol, majdnem minden x -re* teljesül(nie kell) valami(nek), úgy értjük, hogy „ahol nem teljesül, az legfeljebb egy nulla mértékű halmaz”.

• Az alábbi alapvető állítások az integrálra mint görbe alatti területre gondolva nyilvánvalónak tűnnek; igazak is, rendes bizonyításukhoz viszont rendesen fel kellene építeni az integrálfogalmat.

- 1.) Egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ vagy $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor integrálható, ha $|f|$ is az.
- 2.) Ha g integrálható, és $|f| \leq |g|$ majdnem mindenhol, akkor $|f|$ is (és f is) integrálható.
- 3.) Megfordítva: ha $|f| \geq |g|$ majdnem mindenhol, és g nem integrálható, akkor f sem az.

Ezek jók, mert **abszolútértékekkel** sokszor könnyebb „bánni”, másrészt olyan függvényeket, amelyeknek egyszerű bizonyítani (vagy cáfolni) az integrálhatóságát, a g szerepében felül- vagy alulbecsléshez használva bonyolultabb függvények integrálhatóságát is eldönthetjük. Az a kitétel, hogy létezen integrálható $|g|$, ami nagyobb-egyenlő f -nél, latinosan így hangzik: létezen g integrálható **majoránsa** f -nek, igével: olyan integrálható g , ami **majorálja** f -et. (*Maior*=„nagyobb”).

Megjegyzés: a Lebesgue-integrálban az alapvető az egész \mathbb{R} -re vett integrálhatóság; véges szakaszokra vett integrálokhoz a szakaszon kívül „kinullázott” függvényeket kell elgondolni.

• Tisztázzuk az **improprius integrál** fogalmát! Riemann-értelemben minden olyan integrál *improprius* (=„nem valódi”), ahol egyik határ $\pm\infty$, vagy a függvény a határnál ∞ -hez tart. Lebesgue-értelemben sok ilyen integrál „valódi”, és *állításként kimondható* két nyilvánvalónak tűnő dolog:

- 1.) Ha létezik $\int_a^b f(x)dx$, akkor minden a', b' -re, amire $a < a' < b' < b$, létezik $\int_{a'}^{b'} f(x)dx$, és ahogy várjuk: $\lim_{a' \rightarrow a, b' \rightarrow b} \left(\int_{a'}^{b'} f(x)dx \right) = \int_a^b f(x)dx$.
- 2.) Ha $x \in]a, b[$ esetén $f(x) \geq 0$, továbbá $a < a' < b' < b$, és legalábbis egy konkrét $a' \rightarrow a$, $b' \rightarrow b$ határátmenetet véve léteznek az $\int_{a'}^{b'} f(x)dx$ integrálok és $\lim_{a', b' \rightarrow a, b} \int_{a'}^{b'} f(x)dx$ határértékük, akkor létezik az $\int_a^b f(x)dx$ integrál is, és egyenlő az előző határértékkel.

Az a, b határok lehetnek $\pm\infty$ -k is, vagy lehet, hogy a (véges) határoknál $f(x)$ végtelenhez tart. A második állítás érdekesebb: tipikusan eset, hogy egy adott a -tól b -ig (például $-\infty$ -tól ∞ -ig) vett integrálhatóságot szeretnénk tudni abból, hogy ismerjük a véges $[a', b']$ rész-szakaszokra (például Newton-Leibniz-formulával) kiszámolt integrálokat: ha a *függvényünk pozitív valós*, már levonhatjuk a kívánt következtetést az $a' \rightarrow a$, $b' \rightarrow b$ határértékből. Például az \int_0^∞ integrálra következtethetünk abból, hogy létezik-e és mennyi a $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R$ határérték).

Ha nem igaz, hogy $f \geq 0$, akkor előfordulhat például, hogy f és $|f|$ ugyan nem integrálható Lebesgue-értelemben sem 0-tól ∞ -ig, de létezik a $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x)dx$ határérték. Ekkor ezt f 0-tól ∞ -ig vett improprius integráljának hívjuk. Azért érdemes ezt külön kezelni, mert a valódi

³⁹ *Tényleg* „szinte minden” függvény mérhető: nem ilyenek *sosem* fordulnak elő a gyakorlatban (sőt, a létezésük sem magától értetődő). A következőkben mindig minden függvényhez hozzáértjük, hogy mérhető.

(nem improprius) integrálok jóval biztosabb lábakon állnak, erősebb állítások vonatkoznak rájuk, kellemesebben kezelhetők, mint a „csak” improprius értelemben létezők.⁴⁰

Végül némely függvények impropriusan sem integrálhatók \mathbb{R} -re, de véges $[a, b]$ -re igen, és a -val és b -vel egy határozott módon tartva $\pm\infty$ -hez létezik az integrál határértéke. **Példák:**

1. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Itt $f = \arctg'$, így $\int_a^b f(x) dx = \arctg a - \arctg b$. Itt $f > 0$, és léteznek a határértékek: $\lim_{b \rightarrow -\infty} \arctg b = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{a \rightarrow \infty} \arctg a = \frac{\pi}{2}$. f tehát Lebesgue-értelemben *integrálható* $-\infty$ -tól ∞ -ig, és π az eredmény. Riemann-értelemben ezt az $\int_{-\infty}^{\infty} f$ integrált impropriusnak mondják.
2. Legyen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \chi_{[n, n+1]}(x)$, ez 0-tól ∞ -ig váltakozó előjelű, $1/n$ módjára csökkenő „lépcsőkből” áll. Ismert (ld. a B.2. függelék is), hogy az $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots$ sorösszeg véges érték (és $\ln 2$): ebből kiindulva itt létezik $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x) dx$ (és $\ln 2$ -vel egyenlő). Az abszolútértékre viszont nem, mivel az $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots$ sorösszeg nem létezik, végtelen. Emiatt ez az f Lebesgue-értelemben mondva is csak impropriusan integrálható 0-tól ∞ -ig.
3. Legyen $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$; erre $\int_a^b f(x) dx = \ln \frac{1+a^2}{1+b^2}$. Itt nem létezik (egyértelmű) $a \rightarrow -\infty$, $b \rightarrow \infty$ határérték: ez az f impropriusan sem integrálható \mathbb{R} -re. Azonban a $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$ határérték létezik (és nulla); így érthetik, ha azt találják mondani, hogy itt $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = 0$.

- Az iméntiekkel gyakran találkozunk **hatványfüggvényekkel** kapcsolatban. Tudjuk, hogy

$$\begin{array}{l} \text{Ha } \alpha > 0 \text{ valós, és } f(x) = x^{-\alpha} \\ \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ hatványfüggvény,} \\ \text{akkor } 0 < a < b < \infty \text{ esetén} \end{array} \quad \int_a^b dx x^{-\alpha} = \begin{cases} \frac{b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{ha } \alpha \neq 1, \\ \ln b - \ln a, & \text{ha } \alpha = 1, \end{cases} \quad (3.6)$$

Az $a \rightarrow 0$ és a $b \rightarrow \infty$ határértékeket vizsgálva itt kiderül, hogy 1.) fix b esetén $\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^b x^{-\alpha} dx$ pontosan akkor létezik, ha $\alpha < 1$, és 2.) fix a esetén $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b x^{-\alpha} dx$ pontosan akkor létezik, ha $\alpha > 1$. Mivel itt pozitív f függvényről van szó, ezekből a határértékekből rögtön megállapíthatjuk a 0-tól véges b -ig, vagy véges a -tól ∞ -ig való *integrálhatóságot* is. Összerakva:

$f(x) = 1/x$ nem integrálható sem 0-tól véges b -ig, sem véges a -tól ∞ -ig.

Ha $\alpha > 1$, $x^{-\alpha}$ integrálható véges a -tól ∞ -ig, de 0-tól véges b -ig nem. (Például: $\frac{1}{x^2}$.)

Ha $\alpha < 1$, $x^{-\alpha}$ integrálható 0-tól véges b -ig, de véges a -tól ∞ -ig nem. (Például: $\frac{1}{x}$.)

- Az előbb látottakból más függvények integrálhatóságára is sokszor következtethetünk (anélkül esetleg, hogy az integráljukat konkrétan kiszámolnánk). Gyakran előkerülő tipikus esetek:

1. Ha az f függvény egy x_0 hely környékén „olyasmi, mint $\frac{1}{(x-x_0)^n}$ ” valamilyen n pozitív egész számmal; konkrétan: ha $(x-x_0)^n f(x)$ az x_0 -ban véges határértékű és a környékén folytonos, akkor $|f|$ -et itt *alulbecsülhetjük* valamilyen K konstans véve $\frac{K}{|x-x_0|^n}$ -nel. Ez az alulbecslő függvény ezen a környéken nem integrálható, úgyhogy f sem lehet az. Példa: racionális törtfüggvény, és x_0 legyen a nevező polinomnak (n -szeres) zérushelye.
2. Ha $|f|$ egy véges szakaszon korlátos, máshol pedig fölülbecsülhető valamilyen $K \cdot x^{-\alpha}$ -val, ahol $\alpha > 1$, akkor f integrálható \mathbb{R} -re. Példa: racionális törtfüggvény, ahol a nevezőnek nincs valós zérushelye, és a nevező *legalább kettővel* magasabb fokú, mint a számláló (ekkor $\alpha = 2$ -t választhatunk). Innen is leszűrhetjük $\frac{1}{1+x^2}$ integrálhatóságát, még mielőtt tudnánk, hogy ő \arctg' .

⁴⁰Például a *Fubini-tétel*, ami a kétdimenziós integrálra vonatkozik, csak „rendes” sorrendi integrálhatóság esetén működik, improprius integrálra semmi sem biztos többszörös (=„többdimenziós”) integrálhatóság szempontjából.

• Általánosan is igen fontos dolog **integrálok becslése**. „Ösztönösen” érthető a következő, először kissé pongyolán megfogalmazott megállapítás: ha $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ „megfelelő” függvény, akkor

$$\left| \int_a^b dx f(x) \right| \leq \int_a^b dx |f(x)| \leq |b-a| \cdot \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|. \quad (3.7)$$

Az első egyenlőtlenség akkor is érvényes, ha a vagy b nem véges, hanem $\pm\infty$; a második csak véges szakaszra nem semmitmondó. Persze a függvény lehet valós értékű is.

A Riemann-féle integrálfogalomban az indoklás lényege: összeg abszolútértéke legfeljebb az abszolútértékek összege, és mindegyik abszolútértékét felülbecsülhetjük „a legnagyobbbal”:

$$\left| \sum_j \Delta x_j \cdot f(x_j) \right| \leq \sum_j |\Delta x_j| \cdot |f(x_j)| \leq \left(\sum_j |\Delta x_j| \right) \cdot \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| = |b-a| \cdot \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Ez felosztásfinomítással a fenti egyenlőtlenségeket adja (és megjegyezhetővé is teszi az állítást).

Precízebben, és a Lebesgue-féle integrálfogalomban gondolkodva ki kell kötni, hogy f *mérhető* legyen (de ez a gyakorlatban *mindig*) igaz, és mivel f pontosan akkor integrálható, ha $|f|$ is, ha létezik a második integrál, akkor az első is (és igaz is az első egyenlőtlenség). Ha pedig az utolsó jobb oldal véges, akkor (mert ekkor a konstans $\sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$ értékű függvény integrálható majoráns), akkor tényleg létezik minden integrál.⁴¹

• **Függvénysorozat** határértékfüggvényének integrálja *általában nem* egyenlő az integrálok határértékével (és ez tényleges buktató lehet). A most bizonyítás nélkül kimondott *Lebesgue-tétel* egy plusz feltétellel már kisegít: ha van olyan *integrálható* függvény, ami *majorálja* az *összes* függvényt.

Lebesgue-tétel: *ha* az $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ függvények integrálhatók (\mathbb{R} -re), majdnem minden x -re létezik a függvényértékek $\lim_n f_n(x)$ határértéke, és van olyan integrálható $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény, amivel minden n -re és majdnem minden x -re $|f_n(x)| \leq |g(x)|$, (3.8)

akkor az $\int_{\mathbb{R}} dx f_n(x)$ integrálok sorozata konvergensi, az $f := \lim_n f_n$ pontonkénti határérték-függvény is integrálható, és igaz, amit „várunk”:

$$\int_{\mathbb{R}} dx f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} dx f_n(x).$$

Ugyanez igaz olyan határértékekre is, amikor az integrandusban nem egy n index tart ∞ -hez, hanem egy folytonos paraméter tart valahova (mint a lentebbi 3. példában is). A tételt **domináns konvergencia tételének** is hívják: az integrálható majoráns „leuralja” a határérték rakoncátlankodásait. A Lebesgue-tétel tehát jól használható integrálok határértékeinek vizsgálatához; fogjuk is használni. Tipikus eset, hogy ismert az f_n függvénysorozat $f = \lim_n f_n$ pontonkénti határértékfüggvénye és annak integrálja (például hogy $f \equiv 0$, így $\int_a^b f dx = 0$), és kérdés, hogy az $\int_a^b f_n dx$ integrálok $\int_a^b f dx$ -hez tartanak-e (például a mondott esetben: nullához). *Ha nincs* kellő g integrálható majoráns, akkor a Lebesgue-tétel nem tud dönteni; ha viszont van, akkor igen a válasz. Megfelelő g -t találni hol könnyű, hol nehezebb, de ezzel együtt ha van megfelelő g , akkor sok esetben az $|f_n|$ -ek „nagyvonalú” felülbecslése is célra vezethet. Persze *ha nem igaz a kívánt következtetés*, akkor hiába is keresünk megfelelő $g(x)$ -et. **Nézzünk példákat;** lentebb rajzolok!

⁴¹Lebesgue-féle integrált tekintve nulla mértékű halmaz nem számít. Az egyenlőtlenség jobb oldalán ilyenkor az úgynevezett „lényeges szuprémumot” kellene írni: ez az a legkisebb érték (azaz: azon számok alsó határa), aminél nagyobb függvény(abszolút)értékek már csak nulla mértékű halmazon fordulnak elő. (Ha például egy amúgy folytonos f függvényt egyetlen pontban úgy értelmezünk, hogy ottani értéke igen nagy legyen, az nem változtatja az integrál értékét, és nem is növeli a függvény lényeges szuprémumát.)

1.) **Véges szakaszon** integrálható f_n -ek **egyenletesen konvergens** sorozatára $\lim_n \int_a^b f_n = \int_a^b f$, ahol $f \equiv \lim_n f_n$; az is biztos ekkor (azaz nem kell külön feltenni), hogy ez az f határértékfüggvény is integrálható. Ugyanis a mondott feltételek teljesülése esetén egy adott $K > 0$ számhoz van olyan N_K küszöbindex, hogy ha $n \geq N_K$, akkor $|f(x) - f_n(x)| \leq K$ minden szóba jövő x -re. Így a háromszög-egyenlőtlenség miatt $|f_n - f_{N_K}| \leq |f_n - f| + |f - f_{N_K}| \leq 2K$, amiből következik, hogy $|f_n| \leq |f_{N_K} + 2K| \leq |f_{N_K}| + 2K$. Ez utóbbi felülbecslő integrálható a szakaszra: ő jó lesz g -nek.

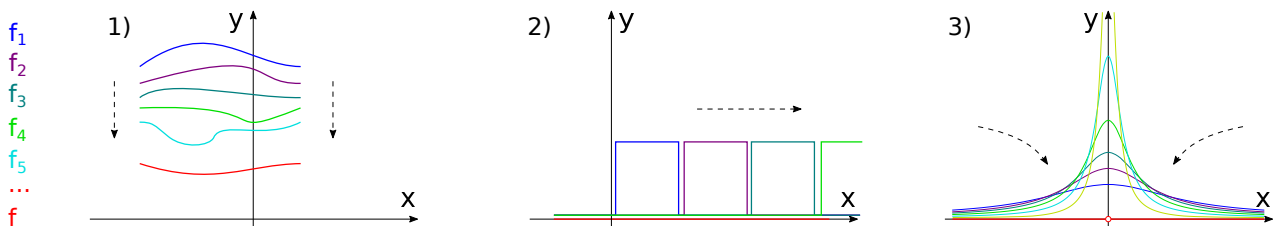
2.) Legyen $f_n(x) = \chi_{[n, n+1]}(x)$. Mindegyik f_n -re $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$, így ezen integrálok $n \rightarrow \infty$ határértéke is 1. Viszont az $f_n(x)$ -ek pontonkénti határértéke most $f \equiv 0$, aminek integrálja nulla. Mégsincs paradoxon: olyan g majoráns, amire minden n -re $|f_n| \leq |g|$ lenne mindenhol, legalábbis az \mathbb{R}^+ -on konstans 1 függvény lehetne, de ez nem integrálható \mathbb{R}^+ -ra (és semmilyen ennél nagyobb függvény sem); nem teljesülhet a Lebesgue-tétel feltétele.

3.) Még érdekesebb, ha a konvergencia tényleg „vadabb”, mint következő vizsgált példában is.

Legyen $\alpha > 0$ fix érték,
 $\lambda > 0$ pedig paraméter,

$$f_\lambda(x) := \frac{\lambda^\alpha}{\lambda^2 + x^2}.$$

Kérdés a $\lambda \rightarrow 0$ eset; elég
 egy fix λ_0 -tól „indítani”.



22. ábra. Integrálok határértéke egyenlő-e a határértékfüggvény integráljával. 1.) véges szakaszon egyenletes konvergencia esetén igen. 2.) az odébbtolós ellenpélda, 3.) a bonyolultabb példa egy része. (A határértékfüggvények pirosak; az utolsóban nem indexek nőnek, hanem a szövegben mondott $\lambda \rightarrow 0$ esetről van szó; a *pontonkénti határérték* tényleg majdnem mindenütt nulla.)

Ha $x \neq 0$, akkor $f_\lambda(x)$ nullához tart, ha $\lambda \rightarrow 0$: a pontonkénti határérték tehát az azonosan nulla függvény (esetleg $x=0$ -t kivéve, de ez nulla mértékű halmaz). Kérdés: vajon az $\int_{\mathbb{R}} dx f_\lambda(x)$ integrálok is nullához tartanak-e. Az a baj, hogy nagy értékek felé is „elkirándulhat” $f_\lambda(x)$, mielőtt a nullához közeledne. Ugye *minden λ esetén* az $|f_\lambda(x)| = f_\lambda(x)$ -nél majdnem mindenhol nagyobb $g(x)$ -et keresnénk: nincs mese, minden x -ben meg kell nézni, hogy mi a legnagyobb $f_\lambda(x)$ függvényérték, *ahogy a λ -t változtatjuk*. Lássuk: $\frac{d}{dx} f_\lambda(x) \stackrel{!}{=} 0$, ezt λ -ra megoldva arra jutunk (ellenőrizzük!), hogy adott x -nél az $f_{\lambda_1}(x)$ értéke legnagyobb, ahol $\lambda_1 := \sqrt{\frac{\alpha}{2-\alpha}} |x|$.

Ha $\alpha \geq 2$, nincs is ilyen λ_1 : ekkor $\lambda \rightarrow 0$ közben minden $f_\lambda(x)$ érték mindenhol monoton csökken az indulási λ_0 -tól kezdve is. Ekkor $g(x)$ -nek jó lesz $f_{\lambda_0}(x)$, és ez integrálható; a Lebesgue-tétel alapján ekkor f_λ -k integrálja nullához tart, ha $\lambda \rightarrow 0$. Ha $\alpha < 2$, akkor minden x -re van λ_1 . Azon x -ekre, amelyek elég távol vannak 0-tól, konkrétan: amikre $|x| > \sqrt{\frac{2-\alpha}{\alpha}} \lambda_0$, a kapott λ_1 értékre $\lambda_1 > \lambda_0$, úgyhogy itt már az elejétől monoton csökkenés van: ilyen x -ekre az $f_{\lambda_0}(x)$ jó integrálható majoráns. A lényeg viszont a kisebb x -ek világa: olyan majoráns, ami itt is minden $f_\lambda(x)$ -nél nagyobb, úgy születik, hogy minden x -re összeszedjük $f_{\lambda_1}(x)$ értékét (azaz visszahelyettesítjük λ_1 -et): azt kapjuk, hogy az $|x| \leq \sqrt{\frac{2-\alpha}{\alpha}} \lambda_0$ tartományban a legkisebb lehetséges majoráns az $\frac{1}{2} \alpha^{\frac{\alpha}{2}} (2-\alpha)^{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot |x|^{\alpha-2}$ függvény. Ha $\alpha > 1$, akkor ez (noha $x=0$ -ban végtelenhez tart, mégis) *integrálható*: ekkor tehát a

Lebesgue-tétel miatt az $f_\lambda(x)$ -ek integráljainak sorozata tényleg nullához tart. Ha viszont $\alpha = 1$, vagy még kisebb, akkor a kapott majoráns $x = 0$ körül *nem* integrálható: a Lebesgue-tétel nem biztosítja, hogy $\int_{\mathbb{R}} f_\lambda(x) dx$ -ek nullához tartanának.

Kész vagyunk. Mellesleg most le is ellenőrizhetjük, hogy jól következtettünk-e, ugyanis konkrétan kiszámíthatjuk egyesével az integráljainkat: $\int_{\mathbb{R}} dx f_\lambda(x) = \pi\lambda^{\alpha-1}$. Ha $\alpha > 1$, akkor ezek tényleg nullához tartanak. Egyébként viszont nem. A legérdekesebb az $\alpha = 1$ eset: „egyre szűkebb, egyre magasabb” függvények, az integráljuk konstans, és tényleg, pont ilyen α -ra már nincs integrálható majoráns. Ez az $\alpha = 1$ speciális eset a *Dirac-delta* tárgyalásánál köszön majd vissza.

3.3. Vonalintegrálás a komplex síkon

Következzék a fejezet igazi témája; az előző szakaszokra bármikor visszatérhet, aki akar.

- Komplex $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvények vonalintegráljainak foglalkozunk; ez egészen hasonló fogalom, mint amilyenek skalár- és vektormezők vonalintegráljai voltak. Ha most adott egy γ görbe a \mathbb{C} komplex síkon, akkor egy $f(z)$ komplex függvény erre vett vonalintegrálját (a Riemann-féle integrálfogalom szemléletét követve) a következő lépéseket követve értelmeznénk:

1. felosztjuk a görbét kis darabokra sok (N darab) z_j pont beszúrásával,
2. mindegyik z_j -ben kiértékeljük f -et, a kapott $f(z_j)$ értéket megszorozzuk a kis szakasznak megfelelő $\Delta z_j \equiv z_{j+1} - z_j$ komplex számmal, és a kapott $\Delta z_j \cdot f(z_j)$ számokat összeadjuk,
3. ha ez az összeg tart valahova, ha $N \rightarrow \infty$ és minden kis darab nullához tart, akkor az összeg határértékét hívjuk az $f(z)$ függvénynek a γ görbére vett integráljának.

$$\begin{array}{l} \text{közelítő} \\ \text{összeg:} \end{array} \quad \sum_j f(z_j) \cdot \Delta z_j \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{felosztást végtel-} \\ \text{lenre finomítva:} \end{array} \quad \rightarrow \quad \text{integrál:} \quad \int_\gamma f(z) dz.$$

- A következő lépés ugye áttérni valós (\mathbb{R}) *értelmezési tartományú* integrálra. Ha a $z(t)$ függvény a γ görbénk paraméterezése (azaz ha t végigfut a $[t_a, t_b]$ szakaszon, akkor $z(t)$ végigfut a görbén), akkor a $[t_a, t_b]$ szakaszt felosztva t_j pontokkal a görbe egy felosztását is kapjuk a $z(t_j)$ számokkal. A szakaszt megadó kis komplex számot közelítőleg kifejezhetjük a paraméterezés deriváltjával:

$$\begin{aligned} \Delta z_j = z(t_{j+1}) - z(t_j) &\approx \frac{dz(t_j)}{dt} \cdot (t_{j+1} - t_j) = \dot{z}(t_j) \cdot \Delta t_j &\Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_j f(z_j) \cdot \Delta z_j \approx \sum_j f(z(t_j)) \cdot \dot{z}(t_j) \cdot \Delta t_j, \end{aligned}$$

amiből a t -felosztást finomítva azt szűrhetjük le az integrálra, hogy

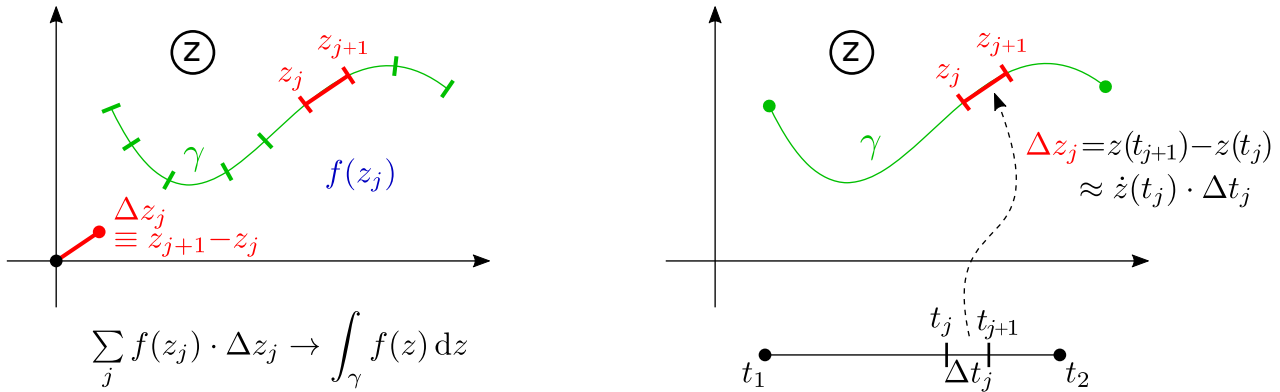
$$\text{Ha } z(t) \text{ a } \gamma \text{ görbe pa-} \quad \int_\gamma f(z) dz = \int_{t_a}^{t_b} f(z(t)) \cdot \frac{dz(t)}{dt} dt. \quad (3.9)$$

raméterezése, akkor

Precízebben (illetve Lebesgue-értelemben) ezen formulával *értelmezzük* a komplex vonalintegrált. A közvetett függvény deriválási szabályát ismerve beláthatjuk, hogy az ilyen integrál (noha most a görbe egy paraméterezésével értelmeztük) mégsem függ a paraméterezéstől; másikat választva (ugyanahhoz a görbéhez) ugyanannyi lesz az $\int_\gamma f(z) dz$ integrál.

- A $z(t)$ paraméterezés a valós szakaszból \mathbb{C} -be menő függvény; deriváltja, $\dot{z}(t)$ egyrészt a \mathbb{C} síkon érintővektor, másrészt komplex szám: a paraméterezett integrál tehát komplex értékű, valós *értelmezési tartományú*, a $[t_a, t_b]$ szakaszra vett integrál. A komplex vonalintegrál eredménye (komplex)

szám. A paraméterhalmazra átírás hasonló itt, mint például $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektormezőök vonalintegráljánál volt; a különbség, hogy ott az adott osztópontbeli $\mathbf{v}(\mathbf{r}_j)$ függvényértéket (vektort) és a $\Delta \mathbf{r}_j$ szakaszdarabot csak például skalárszorzással kombinálhattuk össze, eredményül számot kapva. Mostani esetünkben az $f(z_j)$ -ket és a Δz_j -ket, vagy a paraméterezett alakban $f(z(t))$ -t és $\dot{z}(t)$ -t komplex számokként lehet egymással szorozni, eredményül újra komplex számokat kapva.



23. ábra. Komplex vonalintegrál: értelmezés a görbe szakaszokra való felosztásával (bal oldal), segítség a paraméterezett alakra átíráshoz (jobb oldal).

- Kiemelendő, hogy a **valós integrálfogalom**, azaz esetleg \mathbb{C} értékű, de valós értelmezési tartományú f függvény $[a, b]$ szakaszra vett integrálja, $\int_a^b f(x)dx$ a bevezetett **komplex vonalintegrál speciális esete**: ha a γ görbe éppen az $[a, b]$ szakasz, akkor a Δz_j darabok valós Δx_j számok, a függvényt pedig a valós x_j osztópontokban értékelnénk ki, és tényleg a $\sum_j f(x_j) \cdot \Delta x_j$ összeg határértékét hívtuk valós integrálnak. Ha „paraméterezzük” az $[a, b]$ szakaszt mint „görbét” egy $x(t)$ függvénnyel, ami egy $[t_a, t_b]$ másik intervallumot az $[a, b]$ -re képez, akkor a paraméterezős (3.9) képlet az $\int_a^b f(x)dx = \int_{t_a}^{t_b} f(x(t)) \cdot \frac{dx}{dt} dt$ alakot ölti, amit mint *integrálhelyettesítést* ismertünk.

- Zárt görbére integrálást most is a \oint jelöli. Komplex vonalintegrálokra ugyanazok igazak görbék darabolásait, unióit tekintve, mint mezők *vektori hossz mérték szerinti* vonalintegráljaira (ld. pl. a Vektorszámítás jegyzet 9.5. szakaszát; az ottani ábrák ide is vonatkoznak). A görbe irányítását megfordítva az integrál értéke -1 -szeresre változik. Valóban: megfordul az osztópontok sorrendje, így a Δz_j számok -1 -szeresét kell venni, az összeg -1 -szeres lesz. A paraméterezős (3.9) képletből gondolkodva: a megfordítástól a $\frac{dz}{dt}$ derivált azonosan -1 -gyel szorzódik, így az eredmény is.

Emiatt komplex vonalintegrálokra is igaz, hogy az ellentétes irányítású, de „érintkező” (egybeeső) görbeszakaszokra vett integrálok kiejtik egymást. Ezt (pozitív, \odot irányítású) zárt görbék „feldarabolására” használhatjuk: ha a görbénk több másikkal az uniója úgy, hogy a belső szakaszok érintkeznek, akkor az összes zárt görbére vett integrál összege egyenlő az eredő görbére vettel, mert az érintkező szakaszok közül mindig egyik erre, másik arra irányított lesz.

- **Komplex integrálok beclésére** az előző szakaszban valós integrálokra látott egyszerű (3.7) beclésnek megfelelő érvényes; sőt, legtöbbször elég lesz az ottani „középső fokozatot kihagyva” kapott alábbi képlet. Erre mint „*szokásos integrálbeclés*”-re fogunk hivatkozni.

Állítás: ha $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény, γ pedig görbe $\text{Dom} f$ -ben, akkor

$$\left| \int_{\gamma} dz f(z) \right| \leq \ell(\gamma) \cdot \max_{z \in \gamma} |f(z)|. \quad (3.10)$$

ahol $\ell(\gamma)$ a γ hossza. Szavakban: komplex integrál eredménye abszolútértékben nem nagyobb, mint

a görbehossz szorozva az integrandus abszolútértékének a görbén vett maximumával. Most csak olyan függvényt engedünk meg, ami γ környékén folytonos, de ez (sőt még több: a differenciálhatóság is) szinte mindig teljesül. Folytonos f viszont tényleg integrálható véges hosszú γ görbére, és fel is veszi rajta a görbén értett (véges) maximumát: minden rendben van a becslésünkkel.

Az állításunk „indoklásának” lelke ugyanaz, mint a valós esetben volt:

$$\left| \sum_j \Delta z_j \cdot f(z_j) \right| \leq \sum_j |\Delta z_j| \cdot |f(z_j)| \leq \max_{z \in \gamma} |f(z)| \cdot \sum_j |\Delta z_j|, \quad (3.11)$$

és „finomítás” határesetben az első alak az integrál abszolútértéke, $\sum_j |\Delta z_j|$ pedig az $\ell(\gamma)$. Rendes bizonyítás a γ paraméterezésével, a valós integrálok 3.2. szakaszban látott becsléseivel kapható.

A (3.10) igen durva becslés, mégis hasznos; vessük észbe! Sokszor használjuk, amikor (vonal)integrálok (vagy részeik) nullához tartását akarjuk megállapítani; kigondolhatjuk, hogy ekkor ez lényegében a *Lebesgue-tétel* nagyon speciális „lebutított” változata. Ha viszont ez a becslés nem segít ki (látunk majd ilyet is), visszatérhetünk a komolyabb Lebesgue-tételes vizsgálathoz.

• A komplex integrálok alkalmazásának az lesz a lényege, hogy sokszor „kapásból” egyszerűen kiértékelhetjük őket. Ezért most nem is számolunk ki a (3.9) képletre példaképpen komplex integrálokat valós paraméterre átírva; *pont fordítva* lesz érdekes a dolog. Az elmélet kifejtésének további motiválásához **egyetlen** típusú **integrált érdemes** a (3.9) formulát használva kiszámolni.

$$\begin{array}{ll} \text{Legyen } \gamma \text{ origó középpontú } R & \text{Legyen továbbá} \\ \text{sugarú pozitív irányítású kör.} & f(z) = z^n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{array} \quad \oint_{\gamma} dz f(z) = ?$$

Az n akármilyen egész (pozitív, nulla, negatív) is lehet. A körvonalnak a φ középponti szöggel való paraméterezését könnyen átvihetjük a komplex síkra az Euler-formulával:

$$\begin{array}{ll} \text{Körvonalunk szokás-} & x(\varphi) = R \cos \varphi, \\ \text{os paraméterezése:} & y(\varphi) = R \sin \varphi. \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} z \equiv x+iy \text{ módon a } \mathbb{C} \text{ síkra átvive:} \\ z(\varphi) = R(\cos \varphi + i \sin \varphi) = Re^{i\varphi}. \end{array}$$

Ezzel már kellemesen átírhatjuk a kiszámítandó integrált:

$$\oint_{\gamma} dz f(z) = \oint_{\gamma} dz z^n = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \underbrace{(Re^{i\varphi})^n}_{=f(z(\varphi))} \cdot \underbrace{iRe^{i\varphi}}_{=z'(\varphi)} d\varphi = iR^{n+1} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi e^{i(n+1)\varphi} = (*)$$

Az $e^{i(n+1)\varphi}$ függvény primitív függvénye ugye $\frac{1}{i(n+1)}e^{i(n+1)\varphi}$, de **nagyon fontos** (kb. *minden* ezen múlik), hogy ez csak akkor igaz, ha az n nem egyenlő -1 -gyel, mert akkor a nevezőbeli $n+1$ értelmetlen lenne. Emiatt **külön kell vizsgálni** az $n \neq -1$ összes többi, és **az $n = -1$ esetet**.

A mondott primitív függvényből tehát

$$\text{ha } n \neq -1, \text{ akkor } (*) = \frac{iR^{n+1}}{n+1} e^{i(n+1)\varphi} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{iR^{n+1}}{n+1} \left(\underbrace{e^{i(n+1)\pi}}_{=(-1)^{n+1}} - \underbrace{e^{i(n+1)(-\pi)}}_{=(-1)^{n+1}} \right) = 0.$$

A külön vizsgálandó $n = -1$ eset még egyszerűbb, mert ekkor konstanst kell integrálni:

$$n = -1 \text{ esetben } (*) = i \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi 1 = 2\pi i.$$

Ez az $n = -1$ eset tehát tényleg különleges. A későbbiekben *eszméletlen sokszor* előkerül a $2\pi i$ tényező; látni fogjuk, hogy lényegében ebből az integrálból származóan. Meglátjuk azt is nemsokára, hogy valójában sem ezt, sem a többi n esetét (amikor is nullákat kaptunk) nem kellett volna így

konkrétan paraméterezve kiszámítani; azért csináltuk meg mégis most, hogy minimális motivációt és példát adjon a későbbiekben látandókhhoz. **Összefoglalva az eredményünk:**

Akármilyen sugarú origó középpontú pozitív irányítású körre integrálva

$$\oint_{\gamma} dz z^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \neq -1, \text{ azaz } n = \dots, -3, -2, 0, 1, 2, 3, \dots \\ 2\pi i, & \text{ha } n = -1, \text{ azaz az } \frac{1}{z} \text{ függvényről van szó.} \end{cases} \quad (3.12)$$

Az egész elrendezést egy konstans z_0 komplex számmal eltolva: z_0 középpontú akármilyen sugarú pozitív irányítású körre integrálva

$$\oint_{\gamma} (z-z_0)^n dz = 0, \quad \text{ha } n \neq -1, \quad \text{és} \quad \oint_{\gamma} \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i.$$

3.4. Komplex Newton-Leibniz-formula

• **Idézzük fel** a Newton-Leibniz-formulát és skalármezőkre/vonalintegrálokra vonatkozó (*gradiens-tétel* nevű) megfelelőjét (ld. pl. a Vektorszámítás jegyzet 12.3. szakaszát); értelemszerű jelöléssel:

$$\int_a^b dx F'(x) = F(b) - F(a), \quad \int_{\gamma} d\mathbf{r} \nabla \Phi(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}_b) - \Phi(\mathbf{r}_a).$$

Ne feledjük: $F(x)$ az $[a, b]$ -n, $\Phi(\mathbf{r})$ pedig a (perempontjait, \mathbf{r}_a -t és \mathbf{r}_b -t is hozzáértett) γ görbe egy környezetén *mindenhol* folytonosan differenciálható kell, hogy legyen. A gradiens-tételt visszavezethettük a Newton-Leibniz-formulára a $\nabla \Phi$ vonalintegráljának paraméterezett felírásával.

• Ezeket tudva talán nem meglepő, hogy hasonló igaz komplex vonalintegrálokra:

Állítás (derivált integrálja): ha az $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény legalább a γ görbe egy környezetén *mindenhol* folytonosan differenciálható, akkor

$$\int_{\gamma} dz F'(z) = F(z_b) - F(z_a), \quad \text{ahol a } \gamma \text{ görbe } z_a\text{-tól } z_b\text{-ig fut.} \quad (3.13)$$

Itt *komplex* differenciálhatóság kell. Az állítást hívhatjuk „komplex Newton-Leibniz-formulának”, annyira rokon a valóssal (sőt pont azt kapjuk vissza, ha γ éppen egy valós szakasz). **Indoklásfélé:**

$$\int_{\gamma} dz F'(z) \approx \sum_j F'(z_j) \Delta z_j \approx \sum_j [F(z_{j+1}) - F(z_j)] = \underline{\underline{F(z_b) - F(z_a)}}, \quad (3.14)$$

mert az utolsó lépésben a közbülső pontok járulékaik mind kiesnek, és csak a perempontokéi maradnak. **Rendesebb bizonyítás** a γ paraméterezését (ennek jele most $z(t) : [t_a, t_b] \rightarrow \mathbb{C}$) használva, és a jelölt lépésben az $F(z(t))$ közvetett függvény t szerinti (valós) deriváltját felismerve:

$$\int_{\gamma} dz F'(z) = \int_{t_a}^{t_b} dt \dot{z}(t) \cdot F'(z(t)) \stackrel{(*)}{=} \int_{t_a}^{t_b} dt \frac{d}{dt} F(z(t)) = F(z(t_b)) - F(z(t_a)) = \underline{\underline{F(z_b) - F(z_a)}}.$$

• A gradiens-tételből is az derült ki annak idején, hogy skalármező gradienseinek vonalintegrálja nem függ a vonalalaktól, csak a kezdő- és végponttól. Most is ilyen helyzet állt elő: a fenti (3.13) állításunk azt is mondja, hogy az $F'(z)$ -nek *bármely két* z_a kezdő- és z_b végpontú görbére ugyanannyi az integrálja; természetesen akkor, ha a görbék mindketten teljesítik azt a feltételt, hogy F egy környezetükön folytonosan differenciálható.

• **Zárt görbékre:** a z_a kezdőpont és a z_b végpont (és emiatt az F függvénynek a „két végpontban”

felvett függvényértéke is) megegyezik. Iménti állításunk következménye tehát, hogy

$$\begin{array}{l} \text{Ha } \gamma \text{ zárt görbe és } F \text{ folytonosan} \\ \text{differenciálható } \gamma \text{ egy környezetén} \end{array} \Rightarrow \oint_{\gamma} dz F'(z) = 0. \quad (3.15)$$

Ezt ugye a görbét két darabra vágva is leszűrhetjük: az előzőek miatt az egyikre ugyanynyi az integrál, mint a másikra, így az egyikken oda-, másikon visszamenve integrálva nullát kapunk.

• **Nézzünk vissza** a z^n függvényeknek ($n \in \mathbb{Z}$) az előző szakaszban kiszámolt integráljaira!

$$\text{Első észrevétel: ha } n \neq -1, \text{ akkor } F(z) = \frac{1}{n+1} z^{n+1} \Rightarrow F'(z) = z^n.$$

Ezen $F(z)$ egészfüggvény, ha $n > 0$, ha pedig $n = -2, -3, -4 \dots$, akkor az origóban izolált szingularitása van. Mindkét esetben igaz, hogy ő legalábbis a görbéknek (az origó középpontú körvonalnak) egy környezetében folytonosan differenciálható. **Innen is leszűrhetjük** most már, hogy

$$\text{Ha } n \neq -1: \oint_{\gamma} dz z^n = \oint_{\gamma} dz F'(z) = 0 \quad \text{egy origót megkerülő körre.}$$

Sőt többet is mondhatunk: ha $n \neq -1$, akkor $f(z) = z^n$ körintegrálja nemcsak a köreinkre, hanem *minden zárt görbére is* nulla. (Ha $n < 0$, akkor azért azt meg kell követelni, hogy a görbék ne menjen át a $z=0$ origón; úgy nem létezne az integrál.)

• **Még érdekesebb** az $n = -1$, azaz az $f(z) = \frac{1}{z}$ esete. Kijött, hogy $2\pi i$ az origó középpontú pozitív irányítású körre vett integrál. Emiatt *nincsen* olyan, a körvonal környezetében mindenhol folytonosan differenciálható $F(z)$, amire $F'(z) = \frac{1}{z}$. Az egyik „legsikeresebb” ötlet az lehetne, hogy

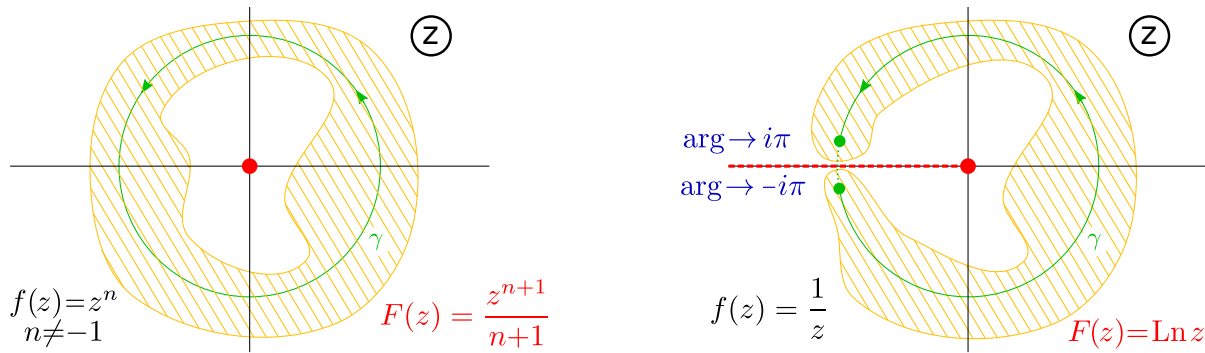
$$F(z) = \text{Ln } z \Rightarrow F'(z) = \frac{1}{z} \quad ??? \quad \text{közben pedig } \oint_{\gamma} dz \frac{1}{z} = 2\pi i. \quad (3.16)$$

A kulcs: az Ln deriváltjának ilyen egyszerű felírásával *éppen a lényeg* vész el. Az $\text{Ln } z$ nemcsak $z=0$ -ban nem differenciálható, hanem az \mathbb{R}^- *vágáson sem*. Akárhogy igyekszünk, nem lesz egy origót megkerülő (így a vágást metsző) körvonalnak olyan környezete, amin $\text{Ln } z$ mindenhol differenciálható. (*Nem is lehet, hiszen* akkor ellentmondásra jutnánk!) Az $(\text{Ln } z)' = \frac{1}{z}$ képletet ugye úgy kell rendesen megfogalmazni, hogy az $\text{Ln } z$ függvény a „felvágott” komplex síkon (a $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ halmazon) folytonosan differenciálható, deriváltja az *ezen halmazra leszűkített* $\frac{1}{z}$ függvény, és utóbbit *ezután* kiterjeszthetjük \mathbb{R}^- -ra is, azaz a $z=0$ -t kivéve mindenhol értelmezett függvénné.

Az $\frac{1}{z}$ körintegrálját (a $2\pi i$ értéket) megkaphatjuk a Newton-Leibniz-formulából, ha óvatossággal bánunk a(z R sugarú) körvonallal. Hagyjunk ki belőle az Ln vágása, az \mathbb{R}^- tengely körül egy kis 2ε középponti szögű darabot, azaz a nyílt körvonal darabunk fusson $z_a \equiv Re^{-i\pi+i\varepsilon}$ -ből $z_b \equiv Re^{i\pi-i\varepsilon}$ -ba (a vágás alatról fölöltre). *Ez a nyílt körvonal darab* bennfoglalható olyan tartományba, ahol $\text{Ln } z$ mindenhol differenciálható, így az integrál értéke itt

$$\int_{z_a}^{z_b} dz \frac{1}{z} = \text{Ln}(z_b) - \text{Ln}(z_a) = [\ln R + i(\pi - \varepsilon)] - [\ln R - i(\pi - \varepsilon)] = 2\pi i - 2i\varepsilon.$$

Most $\varepsilon \rightarrow 0$ -t véve valóban helyesen megkapjuk a $2\pi i$ -t: ez az érték így nézve tehát az Ln függvény fázisvisszaugrásából jön. Az Ln más változatát is használhatnánk: például $\text{Ln}(e^{i\alpha} z)$ vágása az \mathbb{R}^- tengely α szöggel való elforgatottján van, és azon kívül $(\text{Ln}(e^{i\alpha} z))' = \frac{1}{z}$ mindenhol. Itt is a vágást kell kihagyni az előző gondolatmenethez. Akárhogy is: *valahol* vissza kell ugrania a fázisnak $2\pi i$ -t: az integrálra kapott eredmény mindenképpen ennyinek adódik.



24. ábra. Balra: $n \neq -1$ esetben a z^n körintegrálja nulla a komplex Newton-Leibniz-formula miatt. Jobb oldal: az Ln vágása miatt ilyen következtetés nem igaz az $\frac{1}{z}$ függvényre; az integrál $2\pi i$ értékét a görbét a vágás két oldaláról óvatosan bezárva megkaphatjuk Ln ugrásából.

3.5. Komplex integrál útfüggetlensége, Cauchy-tétel

- Mindig érdekes, amikor a vonalintegrál nem függ a görbealaktól. Mostanra azt tudjuk tehát, hogy ha $f(z)$ olyan, hogy σ valaminek a deriváltja, (azaz egy $F(z)$ egy tartományon folytonosan differenciálható, és ott $F' = f$), akkor a tartományon belüli görbéket nézve $f(z)$ komplex vonalintegrálja csak a kezdő- és végponttól függ. Vektoranalízisben ugyanezt láttuk annak idején: ha a vektormező valaminek a gradiense. Utóbbit nem egyszerű közvetlenül vizsgálni, de találtunk egyszerűbben ellenőrizhető feltételt: tartomány egyszeresen összefüggő és $\text{rot } \mathbf{v} = 0$.
- Hasonló a mostani helyzet is: noha a z^n -nél könnyű volt, általában nem egyszerű egy konkrét függvényről eldönteni, hogy σ valaminek a deriváltja-e.⁴² Zseniális felismerés volt, hogy mégis sokszor biztosak lehetünk a vonalintegrál útfüggetlenségében. Ugye egy tartomány *egyszeresen összefüggő*, ha bármely két benne futó zárt görbét egymásba lehet mozgatni folytonosan.

Cauchy-tétel: ha az $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény differenciálható egy egyszeresen összefüggő nyílt halmazon, akkor az ebben futó zárt görbékre

$$\oint_{\gamma} dz f(z) = 0. \tag{3.17}$$

Elég tehát magának az integrandusnak a differenciálhatóságát tudni.

A mondott esetben (a halmazunkban futó) *nem zárt* görbékre f vonalintegrálja csak a kezdő- és végponttól függ. Ekkor az is biztos, hogy *van* olyan F függvény, amire $F' = f$: *definiálhatjuk* úgy, hogy értéke legyen f -nek egy fix z_0 ponttól z -ig vett vonalintegrálja (akármilyen útra).

Tehát ekkor $F(z) := \int_{z_0}^z ds f(s)$ olyan függvény, amire $F'(z) = f(z)$ a Newton-Leibniz-formula miatt. (3.18)

- A tartományra vonatkozó feltétel most erősebb, mint a Newton-Leibniz-formulánál volt: ott nem kellett a görbe vonalát körülvevő halmaznak egyszeresen összefüggőnek lennie, a Cauchy-tételnél igen. A Cauchy-tételből tehát *nem következne*, hogy például $f(z) = \frac{1}{z^2}$ körintegrálja az origót (ami itt izolált szingularitás, így $\text{Dom } f$ nem egyszeresen összefüggő!) megkerülő körre nulla; ezt máshonnan tudjuk. Az $\frac{1}{z}$ ilyen körintegrálja pedig tényleg nem nulla (hanem $2\pi i$).

⁴²Valós, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ esetben sokféle függvényről (például minden folytonosról) tudhatjuk, hogy van primitív függvénye (amit vagy ki lehet fejezni egyszerűen, vagy nem). Komplexben a komplex differenciálhatóság „igényesebb” volta miatt nem lennénk eleve biztosak ebben; láttunk is óvatosságra intő példát, az $f(z) = \frac{1}{z}$ függvényt.

• A (3.17) Cauchy-tétel Cauchy-tól származó **bizonyításához** a **Stokes-tételt** és a **Cauchy-Riemann-egyenleteket** kell ügyesen használni. A γ zárt görbe paraméterezése $z(t) : [t_a, t_b] \rightarrow \mathbb{C}$; írjuk át rá az integrált, és írjuk szét valós és képzetes részekre, amit csak tudunk:

$$\oint_{\gamma} dz f(z) = \int_{t_a}^{t_b} dt \dot{z}(t) \cdot f(z(t)) = (*). \quad z(t) \equiv x(t) + iy(t), \quad f(z) \equiv U(x, y) + iV(x, y).$$

A pötty a t szerinti deriválás jele. Ugye $x(t)$ és $y(t)$ a görbe pontjának koordinátái, az U és V függvényeknek változói is az x, y koordináták. Ahogy $f(z)$ -be az integrálás során az aktuális t paraméterű $z(t)$ -t, az U -ba és a V -be az ennek megfelelő $x(t)$ -t és $y(t)$ -t kell beírni:

$$\begin{aligned} (*) &= \int_{t_a}^{t_b} dt \left(\dot{x}(t) + i\dot{y}(t) \right) \cdot \left(U(x(t), y(t)) + iV(x(t), y(t)) \right) = \quad \text{elvégezve a szorzást:} \\ &= \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\dot{x}(t) \cdot U(x(t), y(t)) + \dot{y}(t) \cdot -V(x(t), y(t)) \right] + \\ &+ i \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\dot{x}(t) \cdot V(x(t), y(t)) + \dot{y}(t) \cdot U(x(t), y(t)) \right] = (**). \end{aligned}$$

Észrevehetjük, hogy „rendes” vektormezők vonalintegráljai kerültek elő az x - y síkon fekvő görbénkre. (Így hál’ Istennek nem is kell a harmadik irányt z -vel jelölni...) Konkrétan legyen

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \equiv \begin{pmatrix} U(x, y) \\ -V(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{r}) \equiv \begin{pmatrix} V(x, y) \\ U(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{és } \gamma \text{ paraméte-} \quad \mathbf{r}(t) \equiv \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix}. \\ \text{rezését is úgy} \quad \text{érthetjük, hogy}$$

Ezekkel beazonosíthatjuk, hogy a komplex vonalintegrálunkat ilyen alakba tudtuk átírni:

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} dz f(z) &= (**) = \int_{t_a}^{t_b} dt \dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) + i \int_{t_a}^{t_b} dt \dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r}(t)) = \\ &= \oint_{\gamma} d\mathbf{r} \mathbf{F}(\mathbf{r}) + i \oint_{\gamma} d\mathbf{r} \mathbf{G}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

A szorzásjel skalárszorozást jelent: a paraméterezett alakokat visszaírhattuk „önálló jogú” vonalintegrálökká. Mármost ha f differenciálható, azaz U -ra és V -re teljesülnek a Cauchy-Riemann-egyenletek, akkor az előkerült \mathbf{F} és a \mathbf{G} vektormezők olyanok, hogy a rotációjuk nulla:

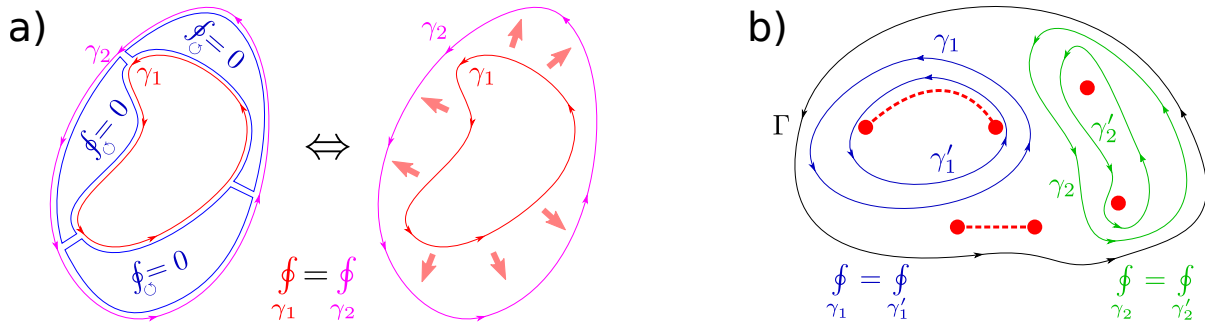
$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\partial_y U - \partial_x V \end{pmatrix}, \quad \nabla \times \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_x U - \partial_y V \end{pmatrix};$$

Ha tehát teljesül, hogy $\partial_x U = \partial_y V$ és $\partial_y U = -\partial_x V$, akkor valóban $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ és $\nabla \times \mathbf{G} = 0$.

A Stokes-tétel miatt viszont ha f , azaz U és V , emiatt \mathbf{F} és \mathbf{G} is a γ zárt görbét tartalmazó egyszeresen összefüggő tartományon *folytonosan differenciálható*, továbbá $\text{rot } \mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{G} = 0$, akkor \mathbf{F} illetve \mathbf{G} körintegráljai (azaz a rotációknak a bezárt felületre vett integrálja) nullák. Az iménti (3.19) alakban tehát a valós és képzetes rész is nulla. **Készen vagyunk.**

• A gyakorlatban legtöbbször az integrandus majdnem mindenhol differenciálható. Olyan tartományokban, ahol nincs se szingularitás, se vágás, se semmi, a kis zárt görbékre vett integrálok nullák a Cauchy-tétel miatt. Ezt úgy „válthatjuk aprópénzre”, hogy ilyen részeken az utat „**átmozgathatjuk**” **másik görbébe**: a különbség zárt görbe hozzáadódó járuléka nulla. Így elég

érdektelenné válik, hogy *pontosan merre* megy az út: **az számít, hogy merről, hogyan kerüli meg** a vágásokat, szingularitásokat. Ezeken már *nem* dobhatjuk át „büntetlenül” az utat, mert az ezeket megkerülő „maradék” integrálok nulla voltában *nem* lehetünk biztosak.



25. ábra. a.) A γ_1 -re és a γ_2 -re vett integrálok egyenlők, ha a ledarabolt (kék) zárt görbékre nullák az integrálok. b.) Az integrandus (piros) szingularitásait adott módon megkerülő görbékre vett integrálok egymással egyenlők: az ábrán a γ_1 -re és γ'_1 -re, illetve a γ_2 -re és a γ'_2 -re vettek, ezeket „át lehet mozgatni” egymásba. A Γ -ra vett integrál egyikükkel sem feltétlenül egyenlő.

• Ezeket tudva van egy hasznos szisztéma **vonaleintegrálok kijelölésére**: zárójelben írjuk (csakis) azon szingularitásokat, amelyeket az út megkerül, és azt is, hogy merről (hallgatólagosan feltéve, hogy az integrandus vágásait, szingularitásait mindenki beazonosította, és hogy az út a differenciálható tartományban fut). Sokszor nem is kell több magyarázat. **Példák** a jelölésre:

$\oint^{(ia+)} dz \frac{1}{z^2+a^2}$	A szingularitások $z=ia$ és $z=-ia$, a kijelölt integrálban az út zárt, és ia -t kerüli meg egyszer pozitív (+) irányban, $-ia$ -t nem. Ez elég.
$\oint^{(ia+,-ia+)} dz \frac{1}{z^2+a^2}$	Az integrandus ugyanaz; most az út olyan zárt görbe, ami mindkét szingularitást ($-ia$ -t is és ia -t is) egyszer pozitív irányban megkerüli. Ez az integrál tehát nem (feltétlenül) ugyanannyi, mint az előző.
$\oint^{(0+,1+)} dz \operatorname{Ln}\left(1-\frac{1}{z}\right)$	Az integrandus a $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ vágást kivéve differenciálható. A zárt út egyszer megkerüli ezt pozitív irányban.
$\int_{-\infty}^{(0-)} dz \frac{z^\alpha}{(1-z)^\beta}$	Vágás \mathbb{R}_0^- -on és $[1, \infty] \subset \mathbb{R}$ -en. A <i>nem zárt</i> út $-\infty$ -ból jön, 0-t megkerüli – irányban, és visszatér $-\infty$ -be, áthaladva a két vágás között.

Ezek az integrálok így egyértelműek: bármilyen útra, amely teljesíti a kikötéseket, ugyanannyik.

• **Kiegészítés:** a Cauchy-tétel látott bizonyításához (a Stokes-tétel alkalmazhatóságához) fel kellett tenni a *folytonos* differenciálhatóságot (a deriváltfüggvény folytonosságát). Egy Émile Goursat-tól származó bizonyítás (ld. a C.1. függelékben) megmutatja, hogy elég *csak* a differenciálhatóságot feltenni a Cauchy-tétel igazságához. A Cauchy-tétel folyománya az (ld. nemsokára), hogy ha egy komplex függvény differenciálható egy nyílt halmazon, akkor végtelen sokszor is az: így minden deriváltja folytonos is. Annyi tehát a különbség a kétféle bizonyítás eredményessége között, hogy kiindulásul feltesszük-e a derivált folytonosságát (ami végülis úgyis igaznak bizonyul).⁴³

⁴³ $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ esetben tehát nincsenek nyílt halmazon differenciálható de nem folytonosan differenciálható függvények; $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények között vannak. (Az $f(x) = |x|$ valós abszolútérték-függvény *nem* jó példa: ez $x=0$ -ban *nem differenciálható*.) Egy ismert példa viszont: $f(x) = x^2 \sin(1/x)$, ha $x \neq 0$, és $f(0) = 0$. Ellenőrizhetjük (külön vizsgálva $x=0$ -t), hogy ez mindenhol differenciálható, de a derivált nem folytonos $x=0$ -ban.

3.6. Integrálok útfüggetlensége: közvetlen alkalmazások

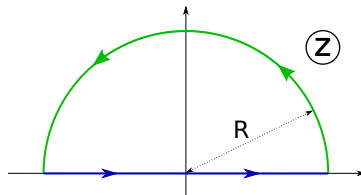
Már az eddigi tudásunk alapján is sok *valós integrált* kezelhetünk. Összetevőink: integrálokat felülbecsülhetünk, határértékeiket vizsgálhatjuk (ld. a korábbi 3.2. szakaszt, illetve vonalintegrálokra a (3.10) képletet), valamint zárt görbére vett integrál nulla, ha az integrandus egy egyszerűen összefüggő környéken differenciálható. Az alábbiakban elővett eredmények bemutatott levezetése-ihhez egyszer *ötlet* kellett; mi most ezeket áttanulmányozva alakítjuk ki az érzéket.

• Első példa: az alábbi integrállal Newton-Leibniz-formulával nem boldogulunk. Persze számítógéppel kiszámolhatnánk, de otthonos érzést nyújt, hogy ismert számra jutunk.

$$\int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} \equiv \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R dx \frac{\sin x}{x} =? \quad \text{Állítás: } \int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}. \quad (3.20)$$

Ez **improprius** integrál (ld. a 3.2. szakaszban is): rendes (Lebesgue-)integrálként nem létezik, csak a felírt $R \rightarrow \infty$ határértékként, de ez nem sok vizet zavar; éppen erre vagyunk kíváncsiak. A levezetés ötlete: egy jól kapcsolódó $f(z)$ függvény és γ zárt integrációs út. Utóbbi legyen az $\Im(z) \geq 0$ félsíkon lévő R sugarú félkörív, bezárva a $[-R, R]$ szakasszal, a függvény pedig

$$\text{legyen } f(z) = \begin{cases} \frac{e^{iz}-1}{iz}, & \text{ha } z \neq 0, \\ 1, & \text{ha } z=0, \end{cases}$$



A $\frac{\sin x}{x}$ függvény $x=0$ -ban véges 1 (határ)értékű; a komplex $f(z)$ szempontjából is egyedül $z=0$ kérdéses, de úgy csináltuk, hogy $z=0$ körül hatványsorba fejthessük: az exponenciális sorából $\frac{e^{iz}-1}{iz} = 1 + \frac{iz}{2!} + \frac{(iz)^2}{3!} + \frac{(iz)^3}{4!} + \dots$. A függvényünknek tényleg létezik $z=0$ -ban határértéke: 1, ezért definiáltuk őt ennyinek itt. Emellett (ld. a korábbi 1.4. hatványsoros szakaszt is) tényleg mindenhol differenciálható, és kapcsolódik is a feladatunkhoz: ha $z \equiv x \in \mathbb{R}$ valós, akkor $\operatorname{Re} f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Továbbá az a körülmény, hogy $|e^{iz}|$ csökken, ha $\Im(z) \rightarrow +\infty$, a most választott, felfelé kitérő integrációs úthoz „illeszkedik”.

A Cauchy-tétel miatt tehát az $f(z)$ függvényünknek nulla a γ -ra vett (pozitív irányítású) vonalintegrálja, amit viszont konkrétan paraméterezve is felírhatunk:

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_\gamma dz f(z) = \int_{-R}^R dx f(x) + \int_{\text{körív}} dz f(z) = \\ &= \int_{-R}^R dx \frac{\sin x}{x} + i \int_{-R}^R dx \frac{1 - \cos x}{x} + \int_0^\pi d\varphi [\exp(iRe^{i\varphi}) - 1]. \end{aligned}$$

A $[-R, R]$ szakaszra vett integrál valós integrál, beírtuk $f(z)$ valós és képzetes részeit. A félkörívet a φ szöggel paramétereztük: $z(\varphi) = Re^{i\varphi}$; a $\frac{dz(\varphi)}{d\varphi}$ éppen kiejti $f(z)$ nevezőjéből $iz(\varphi)$ -t. Az első felírt tag a kérdéses integrál kétszerese (páros függvényről van szó), a második tag pedig nulla, mert páratlan függvény integrálja $-R$ -től R -ig. A harmadik tagban a -1 -es rész integrálja $-\pi$.

Ha még azt is tudnánk, hogy $\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_0^\pi d\varphi \exp(iRe^{i\varphi}) \right] = 0$,

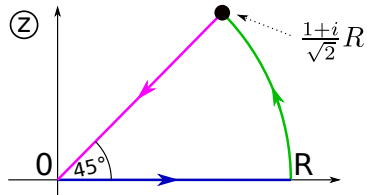
készen is lennénk, mert ezzel arra jutnánk, hogy $0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[2 \int_0^R dx \frac{\sin x}{x} - \pi \right]$,
erről pedig rögtön látható, hogy pont azt mondja, amit be akartunk látni.

A hiányzó láncszem integrandusára $|\exp(iRe^{i\varphi})| = e^{-R\sin\varphi}$. A felső félköríven $\sin\varphi > 0$: emiatt minden adott φ -nél az $R \rightarrow \infty$ esetben az integrandus nullához tart, ahogy céloztunk is erre. Azonban (a határok környéke miatt) az egész szakaszon nem tudunk nullához tartó konstans értékkel felülbecsülni. A *Lebesgue-tétel* kell (ld. a fentebbi 3.2. közjáték-szakaszt): ha van olyan $g(x)$ integrálható függvény, ami mindenhol abszolútértékben nagyobb-egyenlő, mint minden integrandus az $R \rightarrow \infty$ határátmenet során, akkor biztos lehetünk benne, hogy az integrálok határértéke is nulla. Ezzel már nyerünk itt: a konstans 1 integrálható $[0, \pi]$ -n, és nagyobb-egyenlő, mint $e^{-R\sin\varphi}$, minden R -re egyszerre. Emiatt az integrál határértéke tényleg létezik, és egyenlő a határértékfüggvény (a konstans 0) integráljával, ami nulla. **Kész:** bebizonyítottuk (3.20)-at.

• Nézzünk egy bonyolultabb példát, hogy a módszerek vérünnké váljanak. A fénytámban (ernyő széle melletti fényelhajlás tanulmányozásakor) kerülnek elő az úgynevezett **Fresnel-integrálok**:

$$\text{Állítás:} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R dx \cos(x^2) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R dx \sin(x^2) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (3.21)$$

A $\sin(x^2)$ -et és a $\cos(x^2)$ -et összerakhatnánk valamilyen x^2 változójú exponenciálissá, ami esetleg a Gauss-integrálra vezet. Valóban, az a nyerő ötlet, ha a (mindenhol differenciálható) e^{iz^2} függvényt integráljuk egy R sugarú *nyolcadköröcikkre*. Az integrál nulla; ebből kiindulva

$$0 = \oint_{\gamma} dz e^{iz^2} = \int_{1.\text{él}} dz e^{iz^2} + \int_{\text{körív}} dz e^{iz^2} + \int_{2.\text{él}} dz e^{iz^2}.$$


Paraméterezzünk! Az első tag valós értelmezési tartományú integrál 0-tól R -ig, kiírjuk a valós és képzetes részeket. A második tagba a körvonal $z(\varphi) = Re^{i\varphi}$ paraméterezése kerül; ne feledjük $\frac{dz}{d\varphi}$ -t. A harmadikban a 45° -os élen megyünk vissza: az irányt az $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ szám jelöli ki, a paraméterezés tehát $z(t) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}t$, és $t=R$ -től 0-ig fut. A $\frac{dz}{dt}$ derivált itt konstans, rögtön kiemeljük. Összerakva:

$$0 = \int_0^R dx \cos(x^2) + i \int_0^R dx \sin(x^2) + \int_0^{\pi/4} d\varphi iRe^{i\varphi} \exp(i(Re^{i\varphi})^2) + \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_R^0 dt \exp\left\{i\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}t\right)^2\right\}. \quad (3.22)$$

Az utolsó tagban visszafordíthatjuk az irányt egy -1 szorzóval, és elvégezhetjük a kitevőben a négyzetre emelést. Így tényleg a Gauss-integrált kapjuk:

$$-\frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^R dt e^{-t^2}, \quad \text{ennek határértéke az } R \rightarrow \infty \text{ esetben} \quad -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

A köröcikkvonalból jövő középső tag integrandusának abszolútértékére pedig azt kapjuk, hogy

$$|iRe^{i\varphi} \exp(i(Re^{i\varphi})^2)| = R \exp(-R^2 \sin(2\varphi)).$$

Ez olyan, hogy ha $\sin(2\varphi) > 0$, akkor nullához tart $R \rightarrow \infty$ esetén (mivel e^{-R^2} gyorsabban csökken, mint ahogy R nő). Csak abból, hogy ez az integrandus pontonként nullához tart, még nem feltétlenül következne, hogy ezen középső integrál értéke is nullához tart. Viszont a *Lebesgue-tétel* alapján ha találunk integrálható majoránst, azzal együtt már következne ez. Először keressünk

olyan függvényt, ami a φ változónak minden értékére nagyobb-egyenlő, mint az integrandus abszolútértéke minden szóba jövő R esetén (ami ugye valamilyen fix értéktől kezdve ∞ -hez tart). Hasonlóan ahhoz, ahogy a Lebesgue-tételre a 3.2. szakaszban nézett utolsó példa esetén tettük, meg kell keresni, hogy minden adott φ -nél R -et változtatva mi a lehető legnagyobb integrandus-abszolútérték, azaz $Re^{-R^2\sin(2\varphi)}$ maximumát kell megkeresni adott φ -nél az R függvényében. Lásuk: $\frac{d}{dR}(Re^{-R^2\sin(2\varphi)}) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \frac{1}{R} \stackrel{!}{=} 2R\sin(2\varphi)$, vagyis a maximumhely: $R_1 = 1/\sqrt{2\sin(2\varphi)}$, ezt visszahelyettesítve a maximumérték adott φ -nél $1/\sqrt{2e \cdot \sin(2\varphi)}$. Csakis ez a φ -függvény (vagy nagyobb) jön szóba közös majoránsként; megállapíthatjuk róla viszont, hogy noha $\varphi = 0$ körül végtelenhez tart, mégis integrálható.⁴⁴ Van tehát integrálható majoráns: elvarrtunk minden szálát, a fentebbi (3.22)-ben a középső integrál tényleg nullához tart. A többi tag pedig azt adja, hogy

$$0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R dx \cos(x^2) + i \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R dx \sin(x^2) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

ennek valós és képzetes részéből pedig tényleg a fent állított (3.21) egyenlőségeket kapjuk.

A látott gondolatmenet sokadszorra megy ilyen simán. Próbáltam utalgatni a gondolkodás menetére is; ha az ember hasonlókat próbál, „több részletben”, érzésszintű ötletekkel jön rá a megoldásra (például most arra, hogy a középső tag lekezeléséhez használt iménti becslésnél a kapott majoráns integrálható, de még előbb: hogy a körívre vett integrálnak valahogy nullához kell tartania, sőt: hogy éppen emiatt jó a látott integrációs utat választani); a megérzések aztán már vezetik a kezét a bizonyítás kidolgozásához.

• Fontos alkalmazást nyer majd **Gauss-integrálok** általánosítása komplex paraméterekre. Emlék:

$$\text{Ha } \alpha \in \mathbb{R}^+ \text{ pozitív, } \beta \in \mathbb{R} \text{ pedig bármilyen valós szám, akkor } \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha x^2 + \beta x\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} e^{\frac{\beta^2}{2\alpha}}. \quad (3.23)$$

Mi a helyzet, ha β komplex? Állítás: **pontosan ugyanez a képlet** adja meg az eredményt. Ezt később nagyon egyszerűen belátjuk, de a mostani gondolatkörben is levezetjük. Emlék:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}\alpha x^2 + \beta x} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{\alpha}{2}\left(x - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \frac{\beta^2}{2\alpha}} = e^{\frac{\beta^2}{2\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{\alpha}{2}\left(x - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2}, \quad \begin{array}{l} \text{ez valós és komplex} \\ \beta\text{-ra is működik.} \end{array}$$

Ha β/α valós, akkor az $x = t + \frac{\beta}{\alpha}$ módon áttérhettünk a t változóra (azaz: eltolhattuk a változót); ekkor az integrálási határok, $-\infty$ és ∞ ugyanazok maradnak, és a kapott $\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\frac{\alpha}{2}t^2}$ integrál az alapvető Gauss-integrál, $\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}$. Így jött ki annak idején az iménti (3.23) eredmény $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén.

Az $x = t + \frac{\beta}{\alpha}$ helyettesítés problémás komplex β esetén: ekkor az integrálási határookra nem mondanánk, hogy $\pm\infty$ maradnak. Ha $\Im(\beta) \neq 0$, akkor ha x -szel $-\infty$ -ből indulunk és ∞ -be érkezőnk, akkor t -nek úgymond $-\infty - \frac{i}{\alpha}\Im(\beta)$ -ból kell indulnia és $\infty - \frac{i}{\alpha}\Im(\beta)$ -ba érkeznie: az út „képzetes irányban eltolódik”. Pont ilyenekkel foglalkozunk mostanában; azt kellene tehát belátni, hogy

$$\text{nemcsak az igaz, hogy } \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}, \quad \text{hanem még az is, hogy } \int_{-\infty - ib}^{\infty - ib} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}, \quad \text{ahol } b \in \mathbb{R} \text{ adott szám.}$$

⁴⁴Azon múlik ez, hogy az $f(x) = 1/\sqrt{x}$ függvény egy $[0, a]$ véges szakaszra integrálható (noha $x = 0$ körül végtelenhez tart). Nekünk itt a $\varphi = 0$ körüli viselkedés a lényeg: itt $\sin(2\varphi) \approx 2\varphi$, így sejtethetjük, hogy a felírt függvényünk tényleg integrálható. Konkrétabban: 0 és $\pi/4$ között $\sin(2\varphi) \geq \frac{4}{\pi}\varphi$ (ezt a szinuszgörbébe szelőt húzva láthatjuk), emiatt $\frac{1}{\sqrt{2e \cdot \sin(2\varphi)}} \leq \sqrt{\frac{\pi}{8e}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varphi}}$ az érdekes tartományon; utóbbi függvény integrálható, így az előbbi is az.

Az e^{-z^2} egészfüggvény: zárt görbére vett integrálja nulla. Vegyünk egy $-R$ -től R -ig és 0 -tól $-ib$ -ig terjedő téglalapot: konkrétan felírva, az ábrával is segítve értelemszerűen kijelölve a darabokat:

$$\int_R^{-R} dz e^{-z^2} + \int_{-R}^{-R-ib} dz e^{-z^2} + \int_{-R-ib}^{R-ib} dz e^{-z^2} + \int_{R-ib}^R dz e^{-z^2} = 0.$$

(Figyelem: szívesen mondanánk, arra hajazva, hogy *véges zárt* integrációs utakat egymásba átmozgathatunk, hogy a $-\infty$ -től ∞ -ig vett eredeti utat elmozgathatjuk ib -vel lefelé, kész. Mégis jobb most az óvatosság, hiszen most nem zártak a görbék, és nem lenne biztos, hogy a „végtelenben lévő” lezáró szakaszokra vett integrálok tényleg nullák).

Visszatérve a téglalapunkhoz: a két szélső élre vett integrálok nullához tartanak, ha $R \rightarrow \infty$. Valóban: a jobb oldali élén $z = R-it$, és $t \in [0, b]$: itt $|e^{-z^2}| = e^{t^2 - R^2} \leq e^{b^2 - R^2}$, ezen konstansnak a véges szakaszra vett integrálja pedig nullához tart $R \rightarrow \infty$ -nél. Ugyanezt mondhatjuk a bal oldali élre is. Tényleg arra jutottunk tehát (az R -től $-R$ -ig vett integrált megfordítva), hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \int_{-\infty-ib}^{\infty-ib} dx e^{-x^2}, \quad \text{így már következik, amit állítottunk: } \beta \in \mathbb{C} \text{ esetén is (3.23) a Gauss-integrál eredménye.}$$

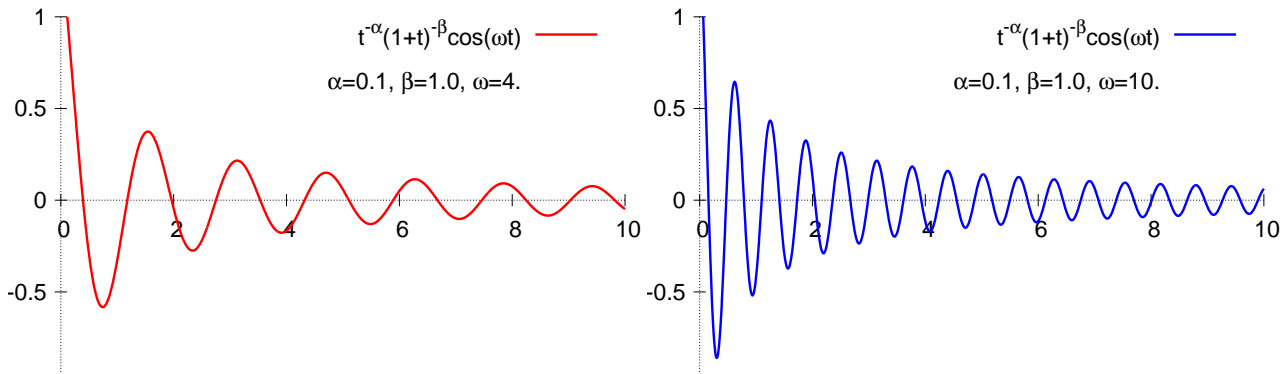
• Bizonyos integrálokat, ha nem is tudunk konkrétan képletek szintjén *kiszámítani*, mégis érdemes lehet *más alakba átírni*, amivel sokszor legalább ugyanannyit „nyerünk”. Például numerikus integrálásnál sem feltétlenül mindegy, hogy mennyire „kellemes” az integrandus. Nem megyünk bele a numerikus integrálás módszereibe, csak egy példát nézünk egy a mostani komplex függvénytani témakörben érdekes lehetőségre (amely *Wick-forgatás* címen köszönhet majd vissza). Tekintsük az $\omega > 0$ valós változó alábbi módon definiált függvényét:

Példa: $\mathcal{I}(\omega) := \int_0^{\infty} t^{-\alpha} (1+t)^{-\beta} \cos(\omega t) dt,$ ahol most α és β valós paraméterek, $\alpha < 1$, de $(\alpha + \beta) > 1$. (3.24)

Az integrálhatóság szempontjából $t=0$ és $t=\infty$ környéke kérdéses. $t=0$ -ban a $t^{-\alpha}$ a gyanús: ha $\alpha \geq 1$, akkor ez nem integrálható 0 -tól, és ezen a többi szorzó sem segít. Ha $\alpha + \beta \leq 1$ lenne, akkor az integrandus nem csökkenne elég gyorsan $t \rightarrow \infty$ felé, nem létezne a (rendes értelmű) integrál. Ezek miatt tettük α -ra és β -ra a felírt kikötéseket.

Az $\mathcal{I}(\omega)$ függvényt (tehát az integrál eredményét) mint ω függvényét nem igazán lehet egyszerű függvényekkel kifejezni. (Vannak olyan, a matematikában jól kitanulmányozott *speciális függvények*, amelyekkel igen, de kis túlzással mondhatjuk, hogy az ilyen függvényeket lényegében a felírt integrálkifejezés *definiálja*: ezeket a függvényeket másképp kiértékelni sem feltétlenül egyszerű, bőven lehet tehát, hogy „nem úszhatjuk meg” a numerikus integrálást már ebben az esetben sem, és főleg nem a hasonló de bonyolultabb esetekben).

Azonban a numerikus integrálás is problémás lehet itt: ha például ω nagyobbacska, $\alpha + \beta$ pedig alig nagyobb 1 -nél, akkor az integrandus lassan csökken, és gyorsan oszcillálgat. Minél nagyobb az ω frekvencia, annál inkább „kompenzálódnak” a váltakozó előjelű területek: az eredmény kicsi lesz. De közben sok-sok nem túl kicsi területet kell összeadni-kivonni. Továbbá ténylegesen ∞ -ig nem tudunk numerikusan integrálni, és a lassú csökkenés miatt nem bizonyos, hogy milyen nagy felső t -határ „elég”. Ezek együtt *numerikusan is* kellemetlenné teszik az integrálunkat.



26. ábra. A tárgyalt integrál integrandusa; látszik, hogy „kellemetlen”.

Ha most a t -t komplex változónak tekintjük, akkor az integrandus többé-kevésbé mindenhol differenciálható, az integrálunk pedig a valós tengelyen futó „vonalintegrál”. Eszünkbe juthat, hogy valós t -re $\cos(\omega t) = \operatorname{Re}(e^{i\omega t})$, az $e^{i\omega t}$ pedig (abszolútértékben) csökkenhet is, ha t -vel lemászunk a valós tengelyről: ha t -vel *felfelé* megyünk a komplex t -síkon, akkor $|e^{i\omega t}|$ exponenciálisan csökken, mert $t \equiv a+ib$ -t írva (ahol $a, b \in \mathbb{R}$) $|e^{i\omega t}| = |e^{i\omega a} e^{-\omega b}| = e^{-\omega b}$, és ha b pozitív és növekszik, akkor ez csökken. (Ugyebár most $\omega > 0$). Emiatt az $e^{i\omega t}$ „jobb”, mint a $\cos(\omega t)$; érdemes tehát ilyen alakba írni az integrált:

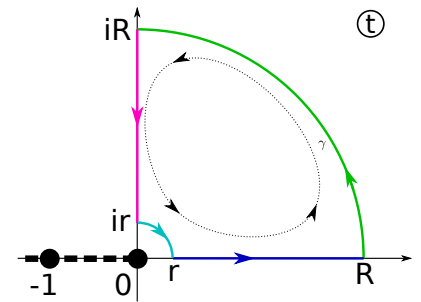
$$\mathcal{I}(\omega) = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty f(t) dt \right\}, \quad \text{ahol } f(t) = t^{-\alpha}(1+t)^{-\beta} e^{i\omega t}. \quad (3.25)$$

Abból, hogy de jó lenne, ha az eredeti helyett egy exponenciálisan csökkenő integrandusunk lenne, eszünkbe jut, hogy a komplex t síkjában egy bekerekített csúcsú *negyedkört* tekintünk, amelyre nulla a körintegrál. Az egyik él adja az eredeti integrált, másik a kívánatosabbat, az ívekre vett integrálok pedig nullához fognak tartani: lényegében tehát „elforgattuk” az integrációs utat.

$$0 = \oint_\gamma dt f(t) = \int_r^R dt f(t) + \int_{\text{nagy ív}} dt f(t) + \int_{iR}^{ir} dt f(t) + \int_{\text{kis ív}} dt f(t).$$

$$\text{Továbbá: } \int_r^R dt f(t) = \int_r^R dt t^{-\alpha}(1+t)^{-\beta} e^{i\omega t},$$

$$\text{és } \int_{iR}^{ir} dt f(t) = -i \int_r^R ds (is)^{-\alpha}(1+is)^{-\beta} e^{-\omega s}.$$



Az \mathbb{R} tengelyen r -től R -ig vett integráldarab $\mathcal{I}(\omega)$ -t adja, ha $r \rightarrow 0$ és $R \rightarrow \infty$, a képzetes tengelyen visszafutót pedig a $t=is$ paraméterezéssel kezeltük. Ha tudnánk, hogy a körívekre vett integrálok nullához tartanak $r \rightarrow 0$ és $R \rightarrow \infty$ esetén, akkor az összeg nullasága miatt írhatnánk, hogy

$$\mathcal{I}(\omega) = \operatorname{Re} \left\{ i^{-\alpha+1} \int_0^\infty ds s^{-\alpha}(1+is)^{-\beta} e^{-\omega s} \right\}, \quad (3.26)$$

ahol még $(is)^{-\alpha}$ -t is kibontottuk. A lényeg már látszik: az oszcilláló és lassan csökkenő eredeti integrandus helyett gyorsan (exponenciálisan) csökkenőt kaptunk. Gondolatmenetünknek tehát ez **az iménti képlet az eredménye** (vagyis az, hogy az eredeti integrált átírhattuk ilyen alakba).

A hiányzó láncszemeket sem nehéz pótolni: most elég lesz a „szokásos integrálbecslés”, ld. a (3.10) képletet. Sőt az abszolútértékeket magukat is nagyvonalúan felülbecsülhetjük. Azt persze

kihasználjuk, hogy a felső félsíkon futó körívünkön $|e^{i\omega t}|$ növekedés helyett csökken, de ezt is csak annyiban, hogy itt $|e^{i\omega t}| \leq 1$. Tudva még, hogy mivel α és β valósak, $|t^{-\alpha}| = |t|^{-\alpha}$, és hogy ha $|t|$ elég kicsi, akkor $|(1+t)^{-\beta}|$ már nem lehet valamilyen konstans K -nál nagyobb, arra jutunk, hogy

$$\int_{\text{kis ív}} dt f(t) \leq \frac{\pi}{2} r \cdot \max_{t \text{ az íven}} \left| t^{-\alpha} (1+t)^{-\beta} e^{i\omega t} \right| \leq K \cdot \frac{\pi}{2} \cdot r^{1-\alpha}, \quad \text{ez pedig nullához tart, ha } r \rightarrow 0.$$

Ugyanígy a nagy íven: ha $|t|$ mindenhol elég nagy, akkor $|(1+t)^{-\beta}|$ felülbecsülhető $K' \cdot |t|^{-\beta}$ -val, ahol K' valamilyen konstans (ezt is gondoljuk végig!), így azt kapjuk, hogy

$$\int_{\text{nagy ív}} dt f(t) \leq \frac{\pi}{2} R \cdot \max_{t \text{ az íven}} \left| t^{-\alpha} (1+t)^{-\beta} e^{i\omega t} \right| \leq K' \cdot \frac{\pi}{2} \cdot R^{1-\alpha-\beta}, \quad \text{és ez is nullához tart, ha } R \rightarrow \infty.$$

1. megjegyzés: a Cauchy-tételt azért használhattuk, mert a görbénk tényleg egy olyan *nyílt* halmazban futott, ahol a komplex $f(t)$ integrandus differenciálható. Az $f(t)$ -nek (az iménti kis ábrán is jelölt módon) a $t^{-\alpha}$ miatt $t=0$ elágazási pontja: ezért kellett oda óvatosan közelíteni.

2. megjegyzés: az $\mathcal{I}(\omega)$ integrál $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R$ értelemben akkor is létezik, ha $\alpha + \beta > 1$ helyett csak $\alpha + \beta > 0$ -t követelünk meg. Ekkor is működik az átalakításunk (sőt, kisebb $\alpha + \beta$ -k esetén még „kívánatosabb” lehet). Annyi különbség lesz, hogy a szokásos integrálbecslés helyett csak a Lebesgue-tétellel derül ki a nagy ívdarab járulékának nullához tartása; lesznek még hasonló példák.

4. Analitikusság, Cauchy-formulák, Laurent-sor

Az alább tárgyaltak a komplex vonalintegrálok témakörének kiteljesítései illetve sokféle alkalmazás előkészítései is. Az első szakasz most is hiánypótlás, motiváció és lelki támasz.

4.1. Függvények analitikussága, analitikus elfolytatás

- Idézzük fel az 1.4. szakaszt! *Hatványsornak* hívjuk az ilyen kifejezést:

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

adott a_n együtthatók és z_0 középpont esetén. A sor az (együtthatók viselkedéséből leszűrhető) R konvergenciasugarú, z_0 középpontú körön, a konvergenciakörön kívül divergens, azon belül viszont jól definiált végtelenszer differenciálható függvényt ad meg, melynek deriváltját a hatványsor tagonkénti deriválásával kapott hatványsor adja meg. Ebből kiderült, hogy az a_n együtthatónak és az n -edik deriváltfüggvény z_0 -beli értékének, $f^{(n)}(z_0)$ -nak a kapcsolata:

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad \Rightarrow \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n. \quad (4.1)$$

- Sok fontos függvényt hatványsorral *definiálunk*, de felmerül az is, hogy egy másképp adott függvényhez van-e olyan hatványsor (adott z_0 pont körül), ami legalábbis z_0 környékén tényleg előállítja a függvényünket. Először is („időhúzásként”) külön fogalomként definiáljuk ezt a tulajdonságot:

Definíció: egy f függvény **analitikus**, ha minden $z_0 \in \text{Dom} f$ pontnak van olyan nemnulla sugarú kör-lap-környezete, amin belül f előállítható egy z_0 középpontú megfelelő hatványsorral. (4.2)

Itt (és egyelőre alább is) az f függvény (noha inkább z -vel jelöljük a változóját) lehet $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény is; \mathbb{R} indulási halmaz esetén a nyílt halmaz, környezet, kör-lap stb. a számegegyenesen lévő fogalmakat jelent ugye. (Például a „körök” itt igaziból szakaszok; valós z_0 középpont esetén egy \mathbb{R} indulási halmazú hatványsor mint függvény konvergenciaköre a $]z_0-R, z_0+R[$ szakasz.)

Analitikus függvény tehát minden $z \in \text{Dom} f$ pont körül **hatványsorba fejthető**. A konvergenciasugarak ekkor minden pontban nullánál nagyobbak, de *egymáshoz képest* eléggé eltérhetnek. Analitikus függvény **értelmezési tartománya nyílt** halmaz (hiszen minden pont körül van olyan környezet, ahol legalábbis *értelmes*); a továbbiakban (ha nem is mondjuk külön) azt is **feltesszük**, **hogy** az értelmezési tartomány **összefüggő** is (azaz nem áll „több darabból”).

- Analitikus függvény nyilván végtelenszer is differenciálható, sőt: egy adott z_0 pont körüli hatványsorának együtthatóit kifejezhetjük a deriváltjaival a (4.1) képlet szerint (és ezt a hatványsort ilyen ráközelítéssel az f z_0 pontbeli *Taylor-sorának* is hívjuk). Az analitikusság mint külön fogalom létjogosultságához mutatni kellene egy végtelenszer differenciálható („sima”) függvényt, ami viszont nem analitikus. A szokásos ilyen **(ellen)példa valós** függvények között:

$$\begin{array}{l} \text{A következő } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ függvény minden-} \\ \text{hol sima, de } x=0\text{-ban nem analitikus:} \end{array} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ e^{-1/x}, & \text{ha } x > 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

A simaság szempontjából egyedül az $x=0$ hely kérdéses. Itt balról a függvény végtelenszer diffe-

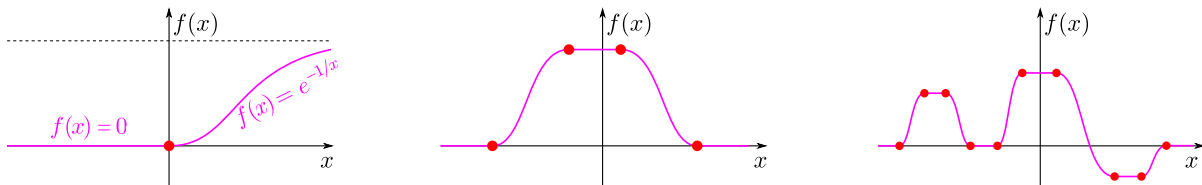
renciálható, és minden deriváltja nulla, jobb oldalról ($x>0$ -ra) pedig az $e^{-1/x}$ -et kell deriválgatni:

$$f(x) = e^{-1/x}, \quad f'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-1/x}, \quad f''(x) = \left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3}\right)e^{-1/x}, \quad f'''(x) = \left(\frac{6}{x^4} - \frac{6}{x^5} + \frac{1}{x^6}\right)e^{-1/x}, \quad \dots$$

$x>0$ -nál minden derivált az $e^{-1/x}$ -nek és az $1/x$ egy polinomjának szorzata, így $x \rightarrow 0$ -ra ezekben az $e^{-1/x}$ tényező a végtelenhez tartó $1/x$ függvényében *exponenciálisan* tart nullához, a maradék pedig $1/x$ függvényében csak *polinom módjára* nő: ezek közül mindig az exponenciális „nyer”, így minden deriváltnak létezik a jobb oldali határértéke is $x=0$ -ban, és az is nulla. Így $f(x)$ tényleg sima: $x=0$ -ban is végtelenszer differenciálható, és minden deriváltja nulla itt.

Emiatt viszont a vizsgált függvényünk $x=0$ körüli Taylor-sorában (ami egyúttal a hatványsora is lenne $x=0$ körül) minden együttható nulla: ez a sor az azonosan nulla függvényt állítja elő. Viszont a vizsgált $f(x)$ függvényünk az $x=0$ *semmilyen kicsi környezetén sem* konstans 0: ő az $x=0$ körül nem fejthető hatványsorba.⁴⁵

Egy ilyen példa már „megnyitja a mélységeket”: *nagyon sok* $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény van, ami sima, de nem analitikus. Például a látott függvényünket továbbfejlesztve gyárthatunk olyanokat, amelyek konstans értékek között „váltakoznak”, simán, de az „indulási pontokban” nem analitikusan.



27. ábra. Végtelenszer differenciálható, de nem analitikus $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények (a „nem analitikus pontok” kiemelve): a tárgyalt példa, valamint az ezt továbbfejlesztve kapható újabbak.

- Optimistább megközelítés: ha *tudjuk*, hogy egy függvény analitikus, akkor erős következtetéseket tehetünk. Az **analitikus függvények „merevek”**, nem „tekergethetjük” őket ide-oda.

Állítás: legyen f analitikus függvény, $U \subset \text{Dom} f$ nemüres nyílt részhalmaz. Ha f az U -n mindenhol nulla, akkor az egész $\text{Dom} f$ -en azonosan 0. (4.4)

Azaz ha bármilyen kicsi nyílt („kövér belsejű”) halmazon egy analitikus függvény nulla, akkor ahova csak összefüggően elterjeszkedhetünk, ott is az. (Más oldalról: ahol egy nulla-függvény „elstartol” nullától, ott garantáltan nem analitikus; ilyen mutatnak az iménti példaábrák.)

Bizonyítás: legyen U' az a legbővebb összefüggő nyílt halmaz, ahol f azonosan nulla; nyilván $U \subset U' \subset \text{Dom} f$. Tegyük fel, hogy $U' \neq \text{Dom} f$. Ekkor lenne olyan $z_0 \in \text{Dom} f$, ami U' -nek *határpontja*, vagyis ezen z_0 semmilyen környezete nincs teljes egészében U' -ben. Az f viszont a z_0 pontnak egy O környezetében is előállna z_0 körüli hatványsorként, de a(z együtthatókat is megadó) deriváltjai z_0 -ban mind nullák lennének, mert U' belseje felől közelítve nullák a különbségi hányadosok, így a határértékük is biztosan az. Emiatt $f \equiv 0$ lenne O -n, így $O \cup U'$ olyan U' -nél bővebb (mivel ugye $O \not\subset U'$) összefüggő nyílt halmaz lenne, amin $f \equiv 0$. Ez ellentmondás, mert U' -ről feltettük, hogy ő a legbővebb ilyen. Végeredményben tehát csak az lehetséges, hogy $U' = \text{Dom} f$.

⁴⁵ *Megjegyzés:* ez a tárgyalt (ellenpélda-)függvény nemcsak ilyen „szőrözésre” jó. A termodinamikában például sokféle *eloszlásfüggvény* a T hőmérséklettől ilyen, $e^{-\alpha/T}$ módon függ (ahol minden előforduló esetben $\alpha > 0$), sőt az is előfordul, hogy az ilyen eloszlásfüggvényeket $T=0$ környékén szeretnénk közelítőleg vizsgálni. Ehhez a (most láttuk, hogy nem működő) szimpla $T=0$ körüli sorfejtés helyett bonyolultabb módszerek kellene majd.

• Tetézhjük: nyílt („kövér”) U részhalmaznál kevesebb is elég. Ugye egy z_0 pont egy H halmaz *torlódási pontja*, ha a z_0 bármilyen (kicsi) nyílt környezetében H -nak végtelen sok pontja van.

Állítás: ha f analitikus, $H \subset \text{Dom} f$ olyan részhalmaz, aminek van torlódási pontja $\text{Dom} f$ belsejében, és f a H -n nulla, akkor $f = 0$ (az egész $\text{Dom} f$ -en). (4.5)

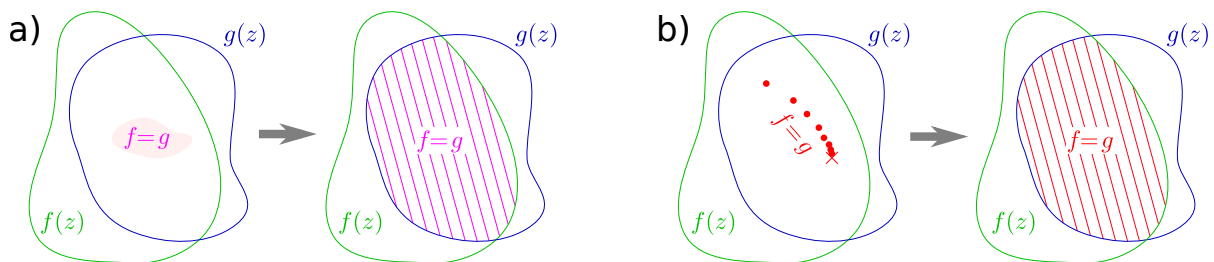
Bizonyítás: $f(z)$ -t $\sum_n a_n(z-z_0)^n$ alakú hatványsor adja meg a z_0 torlódási pont egy O környezetében. Tegyük fel, hogy van az a_n együtthatók között nem nulla: jelöljük a_N -nel a legelső ilyet! (Lehet persze $N=0$ is.) Ekkor az első N darab tag nulla, úgyhogy az $\frac{f(z)}{(z-z_0)^N}$ függvénynek, mivel ez az $O \setminus \{z_0\}$ halmazon $\sum_n a_{n+N}(z-z_0)^n$ alakba írható, azaz ő is egy hatványsor, van határértéke $z=z_0$ -ban, méghozzá a_N , ami nem nulla. Ugyanakkor a z_0 -beli határértéke csakis nulla lehetne, mert z_0 -hoz bármilyen közel is vannak még H -beli pontok, amelyekben $\frac{f(z)}{(z-z_0)^N}$ nulla. Ez ellentmondás. Nem lehetséges tehát, hogy van nemnulla együttható: $f(z)$ az egész O környezeten nulla. Ezzel viszont (mivel O nyílt halmaz) visszavezetődöttünk az előző állításra: készen vagyunk.

Hivatkozni kellett az előző (4.4) állításra; ugyanakkor az eme mostaninak speciális esete is, hiszen egy nyílt $U \subset \mathbb{C}$ halmaznak minden pontja torlódási pont is. Másik tipikus eset, hogy $H = \mathbb{R}$, vagy $H = I \subset \mathbb{R}$ intervallum; ilyenkor is van torlódási pont (minden I -beli pont az).

• Két analitikus függvény, $f(z)$ és $g(z)$ esetén az $f-g$ különbség is analitikus.⁴⁶ Az, hogy $f=g$ valahol, pontosan azt jelenti, hogy $f-g$ nulla itt. Átfogalmazhatjuk tehát az előzőeket:

Állítás: legyenek f és g analitikusak, $\text{Dom} f \cap \text{Dom} g$ nem-üres, nyílt, összefüggő. Legyen a H halmaz olyan, hogy van torlódási pontja $\text{Dom} f \cap \text{Dom} g$ belsejében. (Ha H nyílt részhalmaza $\text{Dom} f \cap \text{Dom} g$ -nek, az tehát bőven jó.) Ha $f=g$ teljesül a H halmazon, akkor $f=g$ igaz az egész $\text{Dom} f \cap \text{Dom} g$ -n. (4.6)

Szavakban: ha két analitikus függvény megegyezik legalább az értelmezési tartományaik közös részének egy mondott fajta részhalmazán, akkor mindenütt megegyeznek, ahol csak értelmezettek.



28. ábra. Analitikus függvények egyenlősége következik szűkebb halmazokon (bal oldalon: nyílt halmazon, jobb oldalon: torlódási pontot tartalmazó halmazon) vett egyenlőségből.

• Ezen alapszik az **analitikus elfolytatás** fogalma. Legyen f analitikus, g is az, és $\text{Dom} f \subset \text{Dom} g$, vagyis g bővebben értelmezett. Ekkor ha g megegyezik f -vel a $\text{Dom} f$ -en, akkor a bővebb $\text{Dom} g$ halmazon értelmezett analitikus függvények közül ő az egyetlen ilyen. (Ha lenne másik, mondjuk

⁴⁶Ugyanis minden z pont környezetének vegyük az f és a g z -beli analitikusságának megfelelő környezetei közül a szűkebbet; ezen belül biztos előállítja $f-g$ -t a két hatványsor különbsége.

g_2 , akkor ez megegyezne g -vel a $\text{Dom}f$ -en, de emiatt mindenhol máshol is.) Átfogalmazva:

Ha analitikus f függvényhez találunk egy bővebb halmazon értelmezett g analitikus függvényt, ami megegyezik f -fel, ahol csak f értelmes, akkor az adott bővebb halmazon az ilyen g egyértelmű. (4.7)

• Ezt a g függvényt ilyenkor az f -nek a bővebb halmazra való *analitikus elfolytatásának* hívjuk. Általában nem „szórakozásból” vesszük szűkebbre $\text{Dom}f$ -et. Tipikus eset, hogy egy f analitikus függvényt értelmezünk valamilyen formulával (például hatványsorral, paraméteres integrállal), ami „természetszerűleg” egy adott halmazon értelmes. *Ha ezután* találunk olyan analitikus g -t, ami bővebben értelmezett, és (több-kevesebb szenvedéssel) belátjuk, hogy $g = f$ a szűkebb $\text{Dom}f$ -en, akkor mondhatjuk, hogy f -et sikerült „analitikusan elfolytatni”. Noha ekkor g a bővebb halmazon létezik és egyértelmű, mégis őt a $\text{Dom}f$ -en kívül általában nem tudjuk megadni az f -et definiáló eredeti formulával (ami tipikusan csak $\text{Dom}f$ -en értelmes). Más módon kellhet tehát g -t „kifejezni”; ez sokszor egy lépésben történik azzal, ahogy egyáltalán „kitaláljuk” a megfelelő g -t.

• Nézzünk egy egyszerű példát, ami közelhozza ezeket! Tegyük fel, hogy már ismerjük a hatványsorokat; azt, hogy az általuk (a konvergenciakörön belül) előállított függvény mindenhol analitikus is, azt is higgyük el (nemsokára most már tényleg belátjuk). Tekintsük az alábbi ismerős függvényt:

$$f(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \text{és } \text{Dom}f = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \right\}.$$

A konvergenciasugár $R = 1$: ezért adódott természetesen, hogy az értelmezési tartomány az origó körüli $R = 1$ sugarú körlap legyen. Itt ez az f analitikus. Ha viszont most valaki megsúgja, hogy ez az $f(z)$ a körlapon belül kifejezhető, mint $\frac{1}{1-z}$, akkor rájöhettünk arra, hogy

$$g(z) = \frac{1}{1-z} \quad \text{az egész } \mathbb{C}\text{-n értelmezhető, kivéve } z=1\text{-et.}$$

Ez a g analitikus, és a $|z| < 1$ körlapon megegyezik az f függvénnyel: ilyen értelemben tehát az így, bővebben értelmezett $g(z) = \frac{1}{1-z}$ függvény az eredeti $f(z)$ -nknek a $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ halmazra való egyértelmű analitikus elfolytatása. A $g(z)$ -t az eredeti $\text{Dom}f$ -en kívül (például $z=2$ -ben) hiába is próbálnánk az f -et megadó eredeti képlettel (a hatványsorral) kiszámolni: $1+2+4+8+16+32+\dots$ nem értelmes. Más formula kell(ett) tehát g -re.

Most esetleg fel sem tűnt a lényeg (mert annyira vérünkben van, hogy az $\frac{1}{1-z}$ a geometriai sorösszeg); bonyolultabb esetekben viszont éppen ez az ugrás (hogy *meztaláljuk* a bővebben is értelmezhető kifejezést) lehet a nemtriviális lépés. A 6. fejezetben a megvizsgáljuk a *gamma-függvényt*, amelynek kapcsán egy összetettebb példát látunk erre az eljárásra.

* * *

Láttuk, hogy \mathbb{R} indulási halmaz esetén a végtelenszer differenciálhatóságból még nem következik az analitikusság. Utaltunk már rá; most kimondjuk: $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvények ha (egy nyílt halmazon) egyszer *differenciálhatók*, akkor *analitikusak is*, emiatt végtelenszer is differenciálhatók. (Az előbbi példabeli $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ differenciálható függvényeink tehát tényleg analitikusak; ezt a tudást előlegeztük meg ott.) Az analitikusság tehát az a korábban pedezetett, a „simaságnál is kicsit jobb” tulajdonság, amivel komplex differenciálható függvények rendelkeznek (és emiatt az „ U és V ” valós és képzetes részeik is kell, hogy rendelkezzenek).

4.2. Cauchy formulái

Rátérünk a fejezet egyik fő témájára, a *Cauchy-formulákra*: ezek az alkalmazásokban is fontosak, de például az analitikusságra mondott iménti állításunk is belőlük bizonyítható. Az alkalmazásokhoz azonban elég *megjegyezni*, hogy differenciálható függvény analitikus, azaz hatványsorba fejthető: ezt tudva memorizálhatók maguk a Cauchy-formulák is. Először ezt az utóbbi — alkalmazáscentrikusabb — utat követjük végig, aztán bizonyítgatunk rendesebben.

• Legyen az $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény egy összefüggő nyílt halmazon differenciálható. *Tegyük fel*, hogy analitikus is, azaz $\text{Dom } f$ minden z_0 belső pontjához létezik hatványsor, ami előállítja őt ekörül:

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

$$a_0 = f(z_0), \quad a_1 = f'(z_0), \quad a_2 = \frac{1}{2!}f''(z_0), \quad a_3 = \frac{1}{3!}f'''(z_0), \quad \dots \quad a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0). \quad (4.8)$$

Ezt fogjuk a z_0 -t megkerülő utakra vett körintegrálokkal összekapcsolni. Eszünkbe juthatnak a $(z-z_0)^m$ függvények körintegráljai (ld. a 3.3. szakasz vége felé). Készítsük el ezért a következő függvényeket, melyek a z_0 -t kivéve mindenhol értelmesek és differenciálhatók:

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{z-z_0} &= \frac{a_0}{z-z_0} + a_1 + a_2(z-z_0) + a_3(z-z_0)^2 + a_4(z-z_0)^3 + \dots, \\ \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} &= \frac{a_0}{(z-z_0)^2} + \frac{a_1}{z-z_0} + a_2 + a_3(z-z_0) + a_4(z-z_0)^2 + \dots, \\ \frac{f(z)}{(z-z_0)^3} &= \frac{a_0}{(z-z_0)^3} + \frac{a_1}{(z-z_0)^2} + \frac{a_2}{z-z_0} + a_3 + a_4(z-z_0) + \dots, \\ \text{továbbá ha } k \in \mathbb{N}_0^+ : \quad \frac{f(z)}{(z-z_0)^k} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-k} = \dots + \frac{a_{k-1}}{z-z_0} + \dots \end{aligned}$$

Emlékszünk: egy z_0 -t megkerülő útra a $(z-z_0)^m$ függvények közül (ahol m bármilyen egész) egyedül az $m=-1$ -nek megfelelő $\frac{1}{z-z_0}$ -nak nem nulla a körintegrálja (hanem konkrétan $2\pi i$). Ha tehát a kijelölt, $z-z_0$ hatványával osztott függvényeinknek egy ilyen, a z_0 -t megkerülő útra vett körintegrálját tekintjük, és feltesszük, hogy integrálhatunk tagonként az előkerült végtelen összegekben, akkor csak az $\frac{1}{z-z_0}$ -s tag nem ad nullát (ezeket emeltük ki pirossal):

$$\begin{aligned} \oint^{(z_0+)} dz \frac{f(z)}{z-z_0} &= \underbrace{\oint^{(z_0+)} dz \frac{a_0}{z-z_0}}_{=2\pi i \cdot a_0} + \underbrace{\oint^{(z_0+)} dz a_1}_{=0} + \underbrace{\oint^{(z_0+)} dz a_2(z-z_0)}_{=0} + \underbrace{\oint^{(z_0+)} dz a_3(z-z_0)^2}_{=0} + \dots, \\ \oint^{(z_0+)} dz \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} &= \underbrace{\oint^{(z_0+)} dz \frac{a_0}{(z-z_0)^2}}_{=0} + \underbrace{\oint^{(z_0+)} dz \frac{a_1}{z-z_0}}_{=2\pi i \cdot a_1} + \underbrace{\oint^{(z_0+)} dz a_2}_{=0} + \underbrace{\oint^{(z_0+)} dz a_3(z-z_0)}_{=0} + \dots, \\ \oint^{(z_0+)} dz \frac{f(z)}{(z-z_0)^3} &= \underbrace{\oint^{(z_0+)} dz \frac{a_0}{(z-z_0)^3}}_{=0} + \underbrace{\oint^{(z_0+)} dz \frac{a_1}{(z-z_0)^2}}_{=0} + \underbrace{\oint^{(z_0+)} dz \frac{a_2}{z-z_0}}_{=2\pi i \cdot a_2} + \underbrace{\oint^{(z_0+)} dz a_3}_{=0} + \dots, \\ \dots \Rightarrow \oint^{(z_0+)} dz \frac{f(z)}{(z-z_0)^k} &= \underbrace{\dots}_{=0} + \underbrace{\oint^{(z_0+)} dz \frac{a_{k-1}}{z-z_0}}_{=2\pi i \cdot a_{k-1}} + \underbrace{\dots}_{=0}. \end{aligned}$$

Meghitelezve a tagonkénti integrálhatóságot arra jutottunk tehát ($2\pi i$ -kkel osztva), hogy

$$a_0 = \oint_{(z_0+)} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z)}{z-z_0}, \quad a_1 = \oint_{(z_0+)} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}, \quad a_2 = \oint_{(z_0+)} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}, \quad \dots$$

$$\dots \quad \text{általános } k \in \mathbb{N}^+ \text{ indexre pedig } a_{k-1} = \oint_{(z_0+)} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z)}{(z-z_0)^k}. \quad (4.9)$$

Már csak arra kell emlékeznünk, hogy az a_0, a_1, a_2, \dots együtthatók értékeit az f -nek és deriváltjainak a z_0 -ban felvett értékei adják meg, ahogy azt az imént, a (4.8) képletben is felidézttük.

• Ezennel el is érkezünk a *Cauchy-formulákhoz*. A nulladikat (az a_0 -t megadót) külön felírjuk:

$$\text{Cauchy-formula:} \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_{(z_0+)} dz \frac{f(z)}{z-z_0} = f(z_0). \quad (4.10)$$

Szavakban: ha f egy halmazon differenciálható, akkor az $\frac{f(z)}{z-z_0}$ -t egy ebben futó olyan zárt görbére integrálva, amely megkerüli z_0 -t, a függvénynek z_0 -ban felvett értékét kapjuk ($2\pi i$ -vel szorozva). Emiatt komplex differenciálható függvény különféle pontokban felvett értékei szorosan összefüggnek: egy görbén felvett értékek már meghatározzák a görbén belüli pontokban felvett értékeket. Emögött mostani gondolatmenetünkben az analitikus függvények „merevsége” rejlik tehát.

A hatványsor többi együtthatójára, vagyis az $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$ beazonosítással f deriváltjainak z_0 -beli értékeire pedig az alábbi *Cauchy-formulák* adódtak (a fenti k -t $n+1$ -gyé átjelölve):

$$\text{Cauchy-formulák:} \quad \frac{n!}{2\pi i} \oint_{(z_0+)} dz \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = f^{(n)}(z_0). \quad (4.11)$$

Ha már elhittük a (4.10) Cauchy-formulát, akkor ez utóbbiak abból is **kiadódnak** z_0 szerint deriválgatva. Az alábbi 1. lépésben a *paraméteres integrál differenciálási szabályával* „bederiválunk” az integráljel alá,⁴⁷ majd a 2. lépésben elvégezzük a z_0 szerinti deriválást, ami egyszerű, mert $f(z)$ nem függ z_0 -tól, és $\frac{\partial}{\partial z_0} \frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{(z-z_0)^2}$, $\frac{\partial}{\partial z_0} \frac{1}{(z-z_0)^2} = \frac{2}{(z-z_0)^3}$, $\frac{\partial}{\partial z_0} \frac{2}{(z-z_0)^3} = \frac{2 \cdot 3}{(z-z_0)^4}$, stb.:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{d^n}{dz_0^n} \oint_{(z_0+)} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z)}{z-z_0} \stackrel{1.}{=} \oint_{(z_0+)} \frac{dz}{2\pi i} \frac{\partial^n}{\partial z_0^n} \frac{f(z)}{z-z_0} \stackrel{2.}{=} \oint_{(z_0+)} \frac{dz}{2\pi i} f(z) \frac{n!}{(z-z_0)^{n+1}}, \quad \text{ebből kész.}$$

* * *

• A Cauchy-formulák egy zárt görbén belül előállítják egy differenciálható f függvénynek és deriváltjainak értékeit, ha f értékei ismertek a görbén. Ez van annyira meglepő, hogy rendesebb bizonyításokat is igényeljük. Nem bizonyos még, hogy differenciálható függvény analitikus, vagy hogy tényleg integrálhattunk tagonként fentebb a végtelen összegekben (ahol csak egy-egy nemel-tűnő tag maradt). Először jöjjön a **Cauchy-formula még egyszer** rendesebben:

$$\text{Állítás:} \quad \text{ha } f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ differenciálható egy egyszeresen összefüggő } U \text{ nyílt halmazon, } \gamma \text{ zárt görbe } U\text{-ban és } z_0 \text{ } \gamma\text{-n belül van, akkor}$$

$$\oint_{(z_0+)} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z)}{z-z_0} = f(z_0). \quad (4.12)$$

⁴⁷Ezt megtehetjük; teljesülnek az ide vonatkozó C.4. függelékbeli tétel feltételei. Ezt nem írom le, úgymint mellékszál most: nemsokára az analitikusságot is belátjuk rendesen, amiből következni fognak ezek a Cauchy-formulák is.

A **bizonyítás** kihasználja, hogy f differenciálható a z_0 pontban: emiatt az f függvényt így írhatjuk:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + \mathcal{O}(z - z_0), \quad \text{és } \mathcal{O}(z - z_0) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\mathcal{O}(z - z_0)}{z - z_0} = 0. \\ \text{olyan, hogy}$$

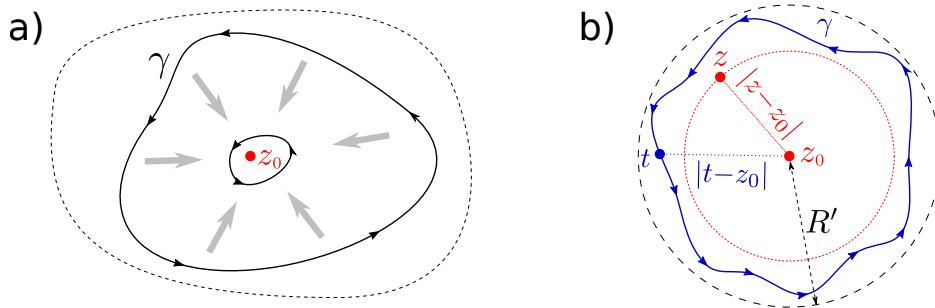
Ez alapján az integrálunkra (kiemelve a konstans $f(z_0)$ és $f'(z_0)$ értékeket) azt írhatjuk, hogy

$$\oint_{\gamma} dz \frac{f(z)}{z - z_0} = f(z_0) \cdot \underbrace{\oint_{\gamma} dz \frac{1}{z - z_0}}_{=2\pi i} + f'(z_0) \cdot \underbrace{\oint_{\gamma} dz 1}_{=0} + \underbrace{\oint_{\gamma} dz \frac{\mathcal{O}(z - z_0)}{z - z_0}}_{= (*)}.$$

Ha belátnánk, hogy a (*)-gal jelölt integrál nulla, $2\pi i$ -vel osztva készen is lennénk. Most ki kell használni, hogy f differenciálható a halmazban a z_0 -on kívül is *mindenhol*: emiatt ugyanitt az $\frac{f(z)}{z - z_0}$ függvény is differenciálható, tehát az integrál útfüggetlenségére vonatkozó *Cauchy-tétel* (és a tartományunk egyszeresen összefüggősége!) miatt a γ görbénket „ráhúzzhatjuk” a z_0 pontra. Közben az eredeti zárt vonalintegrál értéke, így (mivel a többi tagot konkrétan kiszámoltuk) a (*) integrálunk értéke is *ugyanannyi* marad. Viszont a szokásos integrálbecslést alkalmazva

$$\left| \oint_{\gamma} dz \frac{\mathcal{O}(z - z_0)}{z - z_0} \right| \leq \ell(\gamma) \cdot \max_{z \in \gamma} \left| \frac{\mathcal{O}(z - z_0)}{z - z_0} \right|, \quad \text{ahol } \ell(\gamma) \text{ a} \quad (4.13) \\ \text{görbe hossza.}$$

A maximum a γ görbén véve értendő. Mivel $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\mathcal{O}(z - z_0)}{z - z_0} = 0$, ha ráhúzzuk γ -t z_0 -ra, ez a maximumérték is nullához tart, továbbá ekkor $\ell(\gamma) \rightarrow 0$ is igaz. A (*) integrál tehát egyrészt ugyanannyi marad a görberáhúzás közben, másrészt abszolútértékben (durván, de mégiscsak) felülbecsülhettük egy nullához tartó mennyiséggel. Emiatt tehát a (*) integrál *tényleg* nulla: készen vagyunk.⁴⁸



29. ábra. a.) A Cauchy-formula bizonyításához a görbét ráhúzzuk z_0 -ra. b.) Az analitikusság bizonyításához (ld. rögtön) futtathatjuk úgy az utat, hogy a rajta lévő t -kre $|t - z_0| > |z - z_0|$ legyen.

• Következő lépés a z_0 -beli analitikusságot belátni. Állítsuk elő ezért a (most már rendesebben bebizonyított) Cauchy-formulával $f(z)$ -t nemcsak z_0 -ban, hanem egy ettől különböző z -ben is. *Jelölésváltoztatás*: a z_0 körül vizsgálódunk egy másik z -ben, úgyhogy az integrálási változót most t -vel jelöljük. Ugye $z - z_0$ -ban szeretnénk hatványsort kapni, ezért eszünkbe jut, hogy a Cauchy-formulában majdnem úgy szerepel az igazi z változó, mint a geometriai sorösszegben:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} dt \frac{f(t)}{t - z} \quad \Rightarrow \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} dt \frac{f(t)}{t - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{t - z_0}}. \quad (4.14)$$

⁴⁸ *Megjegyzés*: a bizonyításunk annyiban nem precíz, hogy az egyszeres összefüggőség szemléletes értelmére hivatkoztunk, ami alapján világos, hogy *tényleg* működik ez a „ráhúzás”. Úgy is lehetne vezetni a tárgyalást (bevezetve a *görbék indexfüggvénye* néven futó fogalmat), hogy az ilyen topológiai jellegű kérdéseket elkerüljük; ezzel sem most, sem a későbbi hasonló esetekben nem foglalkozunk ebben a jegyzetben.

Utóbbi törtet $z-z_0$ hatványai szerint haladva esetleg geometriai sorba tudjuk fejteni, így:

$$\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{t-z_0}} = 1 + \frac{z-z_0}{t-z_0} + \left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^2 + \left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^3 + \dots; \quad \text{de ez pontosan} \quad \left|\frac{z-z_0}{t-z_0}\right| < 1. \\ \text{akkor igaz, ha}$$

Hogy a feltétel teljesül-e az előkerülő t -kre, az attól függ, merre fut az út: még csak azt tudjuk, hogy megkerüli z -t. Tegyük fel most viszont, hogy f a z_0 pont körül valamilyen R' sugarú nyílt körlapon mindenhol differenciálható, és hogy a z ezen a körlapon belül van! Ekkor az integrál változatlanul maradásával átvihetjük olyan görbébe (*futtathatjuk úgy*) az integrációs utat, hogy a rajta lévő t -kre $|z-z_0| < |t-z_0|$, azaz $\left|\frac{z-z_0}{t-z_0}\right| < 1$ legyen. (Azaz: az út a z_0 körüli $|z-z_0|$ sugarú zárt körlapon kívül, de az R' sugarú nyílt körlapon belül fusson: feltevésünk szerint $|z-z_0| < R'$, így „elfér” ide, ld. az iménti ábrán). Futtassuk így az utat; így az ekkor z_0 -t *is* meg kell, hogy kerülje. Ekkor beírhatjuk az iménti geometriai sorfejtést, és **ha integrálhatunk tagonként**, akkor

$$f(z) = \oint_{(z+, z_0+)} \frac{dt}{2\pi i} \frac{f(t)}{t-z_0} \cdot \left(1 + \frac{z-z_0}{t-z_0} + \frac{(z-z_0)^2}{(t-z_0)^2} + \frac{(z-z_0)^3}{(t-z_0)^3} + \dots\right) = \underbrace{\oint_{(z+, z_0+)} \frac{dt}{2\pi i} \frac{f(t)}{t-z_0}}_{:=a_0} + \\ + (z-z_0) \cdot \underbrace{\oint_{(z+, z_0+)} \frac{dt}{2\pi i} \frac{f(t)}{(t-z_0)^2}}_{:=a_1} + (z-z_0)^2 \cdot \underbrace{\oint_{(z+, z_0+)} \frac{dt}{2\pi i} \frac{f(t)}{(t-z_0)^3}}_{:=a_2} + (z-z_0)^3 \cdot \underbrace{\oint_{(z+, z_0+)} \frac{dt}{2\pi i} \frac{f(t)}{(t-z_0)^4}}_{:=a_3} + \dots, \quad (4.15)$$

vagyis az a_n számok mutatott bevezetésével arra jutunk, hogy olyan z -kre, amikre $|z-z_0| < R'$,

$$f(z) = a_0 + a_1 \cdot (z-z_0) + a_2 \cdot (z-z_0)^2 + a_3 \cdot (z-z_0)^3 + \dots \quad (4.16)$$

• Tisztázni kell(ene), hogy itt *tényleg* integrálhattunk tagonként: ehhez a kitételhez persze akkor hozzátartozik az is (vagyis: az is következmény), hogy az így kapott utóbbi sor *tényleg* konvergens a mondott fajta z -ket véve, és előállítja $f(z)$ -t. Ez egy matematikusi léleknek igen, de az alkalmazások szempontjából nem annyira fontos: a C.2. függelékre hagyjuk.

Ezt meghitelezve viszont beláttuk, hogy az $f(z)$ függvényt z_0 körül *tényleg* $z-z_0$ szerinti hatványsorba fejthetjük, vagyis mivel z_0 bárhol lehetett, ahol egy környezetben f differenciálható, bebizonyítottuk, hogy igaz a már többször ígért

$$\text{\textbf{Állítás:}} \text{ ha az } f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ függvény } \text{\textbf{differenciál-}} \\ \text{\textbf{ható}} \text{ egy nyílt halmazon, akkor } \text{\textbf{analitikus}} \quad (4.17) \\ \text{is ott (és emiatt végtelenszer differenciálható is).}$$

Az előző (4.15)-ben kapottakból az is látszik, hogy az a_n együtthatókat éppen azok az integrálok adják meg, amelyeket a pongyolább (4.9) beazonosításból származtattunk. Az a_n -ek kapcsolatát a deriváltakkal pedig már a hatványsorok ismerete óta tudjuk, úgyszólván valóban:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \oint_{(z_0+)} \frac{dt}{2\pi i} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}, \quad n=0\text{-ra is.} \quad (4.18)$$

Ezek lényegében *tényleg* a (4.11) Cauchy-formulák.

Figyelem: ezen *integrandusokban* csak $t=z_0$ -ban van szingularitás (persze olyan tartományra korlátozódva, ahol f differenciálható); az út *tényleg* elég, ha z_0 -t megkerüli; ki is használja ezt sok alkalmazás. (A z ugye „el is tűnt” kézenközön; belőle lett $(z-z_0)^n$ a hatványsorban.)

4.3. A Cauchy-formulák néhány következménye

• Differenciálható $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény analitikus: $\text{Dom} f$ egy z_0 belső pontja körül **hatványsorba fejthető**. Ilyen hatványsor együtthatóit most már az $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$ képlet mellett a Cauchy-formulákkal (integrálokkal) is kifejezhetjük. Konkrét képlettel felírt függvény esetén az együtthatók konkrét kiszámításához a deriváltas változat célszerűbb; ilyenkor az integrálképlet „túlkapás”. Utóbbiak elmélyültebb fajta vizsgálatokban kapnak szerepet.

Úgy is mondhatjuk, hogy a egyáltalán a Cauchy-formulák (mint a kérdéses pontot megkerülő görbékre vett integrálok) *lehetősége* az, ahol igazán kiütözik az \mathbb{R} és a \mathbb{C} halmazok különbözősége (hogy \mathbb{R} egyenes, \mathbb{C} pedig sík). Innentől kezdve „érthető” tehát, hogy hogyan lehet sok tétel igaz \mathbb{C} indulási halmaz esetén, amihez hasonló nyilván nem igaz \mathbb{R} indulási halmaz esetén.

• Közelebb kerül most, hogy egy differenciálható (azaz analitikus) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény hatványsorának ($\text{Dom} f$ adott z_0 belső pontja körül) **mennyi a konvergenciasugara**. Hatványsor a konvergenciakörén *belül* differenciálható függvényt ad meg: olyan tartomány, ahova f nem folytatható el differenciálható módon (azaz: analitikusan), nem lehet a (z_0 körüli) konvergenciakörön belül. A konvergenciasugár tehát *legfeljebb* annyi, mint amilyen sugarú (z_0 középpontú) körre f analitikusan elfolytatható. Másrészt amilyen sugarú körre elfolytatható, *azon belül* tényleg alkalmazhatjuk a Cauchy-formulák (vagyis: a sorbafejthetőség) fentebb látott levezetését, így itt tényleg konvergencia lesz a hatványsor (ami felől tényleg semmi kétség nem marad, ha az előző szakaszbeli bizonyításnak a függelékekre hagyott kiegészítő lépéseit is áttanulmányozzuk). Összerakva:

$$\begin{aligned} &\text{Differenciálható } f \text{ adott } z_0 \text{ körüli hatványsorának konver-} \\ &\text{genciasugara } \mathbf{az a legnagyobb } R \text{ érték, amilyen sugarú} \\ &z_0 \text{ körüli nyílt körlapra } f \text{ még elfolytatható analitikusan.} \end{aligned} \tag{4.19}$$

Más oldalról: ha egy hatványsor konvergenciasugara véges R , és az itt általa előállított függvényt megpróbáljuk analitikusan elfolytatni bővebb tartományra, akkor egy dolog biztos: van *legalább egy pont* az R sugarú körvonalon, aminek a környezetében nem értelmezhető differenciálható (analitikus) módon az elfolytatás. Az alappélda itt is az $1 + z + z^2 + z^3 + \dots$ sor (melyre $R=1$): az elfolytatás, az $\frac{1}{1-z}$ szinte mindenhol differenciálható, de pont a körvonalon $z=1$ -ben tényleg nem.

• Ha f egészfüggvény, akkor tehát minden pont körül hatványsorba fejthető *végtelen konvergenciasugárral*. Ha f csak izolált szingularitásokban nem differenciálható (amelyek *nem megszüntethetők*, vagyis f nem terjeszthető ki rájuk úgy, hogy ott is differenciálható legyen; ld. alább is), akkor f -nek egy adott (nem szinguláris) pont körüli sorának konvergenciaköre azon legnagyobb nyílt körlap, amit a pontunk köré úgy „felfújhatunk”, hogy épp ne tartalmazzon egy szingularitást se. Ezt így aligha lehetne a konvergenciasugárnak az 1.4. szakaszban látott limsup-os képletéből leszűrni.

Példa: $f(z) = \text{tg}(z)$ differenciálható $z_0=0$ körül, tehát analitikus. Nehézkes megadni az itteni hatványsorát (ld. e jegyzet legeslegeslegutolsó képletét), de a konvergenciasugár biztos $\frac{\pi}{2}$: ilyen messze van(nak) a legközelebbi szingularitás(ok), a valós $\pm \frac{\pi}{2}$ számok. A $z_0=0$ körüli sorának konvergenciasugara is $\frac{\pi}{2}$: itt a legközelebbi szingularitások a képzetes tengelyen $\pm \frac{i\pi}{2}$ -ben vannak.

• Egyszerű de érdekes dolog az úgynevezett **maximum-elv** alábbi legegyszerűbb változata.

$$\begin{aligned} &\mathbf{Állítás:} \text{ nyílt halmazon differenciálható } f \\ &\text{függvény esetén az } |f| \text{ abszolútértéknek a hal-} \\ &\text{mazon } \mathbf{belül nincs lokális maximumhelye.} \end{aligned} \tag{4.20}$$

Bizonyítás: ha z_0 a $\text{Dom}f$ akármelyik belső pontja, akkor ekörül van olyan (kis) körvonal, ami ő maga is, és minden ennél kisebb sugarú körvonal is teljes egészében $\text{Dom}f$ -ben van. Ha a t integrálási változó egy ilyen (r sugarú) körön fut, akkor $\left|\frac{1}{t-z_0}\right|$ értéke azonosan $\frac{1}{r}$. Ezt tudva az erre a körre mint γ görbére felírt Cauchy-formulában alkalmazhatjuk a szokásos integrálbecslést:

$$|f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} dt \frac{f(t)}{t-z_0} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \max_{t \in \gamma} \left| \frac{f(t)}{t-z_0} \right| \leq \frac{2\pi r}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \cdot \max_{t \in \gamma} |f(t)| = \max_{t \in \gamma} |f(t)|.$$

A kapott egyenlőtlenség viszont nem fér össze azzal, hogy z_0 az $|f|$ lokális maximumhelye, mivel ha az lenne, akkor lenne olyan körünk, amin már $|f(t)|$ mindenhol kisebb, mint $|f(z_0)|$. Kész.

Az állítást másképp is megfogalmazhatjuk: differenciálható f függvény értelmezési tartományának egy *zárt* (a határát tartalmazó) részhalmazán az $|f|$ a **maximumát a határon veszi fel**. Pongyolán fogalmazva: ha egy nem konstans differenciálható f függvényt egyre messzebb elfolytatunk, biztos, hogy az összes „korábban már felvett” $|f|$ -értéknél nagyobbval is találkozunk.

• Ha f (nem konstans) egészfüggvény, akkor tehát „egyre messzebb menve egyre nagyobb értékeket is felvesz”. Ennek a gondolatnak mintegy a megfordítása a(z algebra alaptételének bizonyításához a 2.5. szakaszban már kihasznált) **Liouville-tétel**, miszerint *korlátos egészfüggvény konstans*. Mostani tudásunkkal már **bebizonyíthatjuk** ezt. Ha f egészfüggvény, akkor akármilyen z_0 pont körül hatványsorba fejthető, a hatványsor konvergenciasugara végtelen (mindenhol előállítja f -et), és az együtthatókat megadják a Cauchy-formulák:

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint dt \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}.$$

Mivel f mindenhol differenciálható, akármilyen (z_0 -t megkerülő) zárt γ görbét használhatunk. Legyen most γ egy R sugarú, z_0 középi kör (és majd az $R \rightarrow \infty$ eset lesz érdekes). Ha t ezen a körön fut, akkor $\left|\frac{1}{(t-z_0)^{n+1}}\right|$ értéke azonosan $\frac{1}{R^{n+1}}$. Az a_n együtthatót ezen körre vett integrállal előállítva, majd a szokásos integrálbecslést alkalmazva tehát

$$|a_n| = \left| \oint_{\gamma} \frac{dt}{2\pi i} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi R \cdot \max_{t \in \gamma} \left| \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}} \right| = R \cdot \frac{1}{R^{n+1}} \cdot \max_{t \in \gamma} |f(t)|,$$

amiből azt kapjuk tehát, hogy

$$|a_n| \leq \frac{1}{R^n} \cdot \max_{t \in \gamma} |f(t)|. \quad \text{Így ha van olyan } K > 0, \text{ amivel } |f| \leq K \text{ mindenhol, akkor} \quad a_n \leq \frac{K}{R^n}.$$

R akármilyen nagy lehet: ha $n \neq 0$, akkor $a_n = 0$ lehet csak. Csak a_0 nem feltétlenül nulla: kész.

• A látott bizonyítási módszer (az úgynevezett **együtthatóbecslés**) egyéb érdekességeket is nyújt. Az alábbi állítás ilyen módon a Liouville-tétel egyfajta általánosítása: ha egy egészfüggvény legfeljebb olyan gyorsan nő, mint egy polinom, akkor ő polinom.

Állítás: ha f egészfüggvény, és léteznek $N \in \mathbb{N}_0^+$ és $K \in \mathbb{R}^+$ számok, amikkel $|f(z)| \leq K \cdot |z|^N$ egy korlátos halmazon kívül mindenhol teljesül, akkor f egy legfeljebb N -edfokú polinom. (4.21)

A bizonyítás az előző másolata; a különbség: most érdemes a $z_0=0$ -t rögtön kiszemelni, és itt az elég nagy körvonalon felvett $|f(t)|$ értékeket K helyett $K \cdot |z|^N = KR^N$ -nel becsülhetjük felül. Ebből az $a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, \dots$ együtthatókra adódik, hogy nullák: tényleg polinom a maradék.

4.4. Izolált szingularitások, Laurent-tétel, reziduomtétel

Sok függvénynek vannak *izolált szingularitásai* (ld. a 2.5. szakaszt): ilyen pontban a függvény nem értelmes, de körülötte egy „kipontozott” körlapon differenciálható. Ilyen pontokban a *hatványsorba* fejthetőség helyett az úgynevezett *Laurent-tétel* illetve **Laurent-sorfejtés** tesz rendet.

• Először most is „motiváló módon” közelítünk. Alapötlet: az $\frac{1}{z-z_0}$, $\frac{1}{(z-z_0)^2}$, $\frac{1}{(z-z_0)^3}$ stb. függvények olyanok, hogy z_0 izolált szingularitásuk. Differenciálható függvény $a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + \dots$ alakú sorként áll elő; ha a függvényünknek ehelyett izolált szingularitása van z_0 -ban, akkor esetleg az előbbieket szellemében negatív kitevős tagok is szerepelnek. Így próbálkozva:

$$f(z) \stackrel{?}{=} \dots + \frac{c_{-3}}{(z-z_0)^3} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n.$$

Ez a sorfejtés lesz a *Laurent-sor*. Az együtthatók pozitív, nulla és negatív indexűek is lehetnek (ezért is jelöltük másképp őket). Idézzük fel az alapvető hurokintegrálokat: egész $n \in \mathbb{Z}$ esetén

$$\begin{aligned} \text{ha } n \neq -1, \text{ akkor } \oint^{(z_0+)} dz (z-z_0)^n &= 0, \\ \text{ellenben } \oint^{(z_0+)} dz (z-z_0)^{-1} &= 2\pi i. \end{aligned}$$

Erre gondolva (mint a Cauchy-formulák bevezetésénél) készítsük el a következő sorokat:

$$\begin{aligned} \dots, \\ (z-z_0)^2 f(z) &= \dots + \frac{c_{-3}}{z-z_0} + c_{-2} + c_{-1}(z-z_0) + c_0(z-z_0)^2 + c_1(z-z_0)^3 + \dots \\ (z-z_0) f(z) &= \dots + \frac{c_{-3}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-2}}{z-z_0} + c_{-1} + c_0(z-z_0) + c_1(z-z_0)^2 + \dots \\ f(z) &= \dots + \frac{c_{-3}}{(z-z_0)^3} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots \\ \frac{f(z)}{z-z_0} &= \dots + \frac{c_{-3}}{(z-z_0)^4} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^3} + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_0}{z-z_0} + c_1 + \dots \\ \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} &= \dots + \frac{c_{-3}}{(z-z_0)^5} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^4} + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)^3} + \frac{c_0}{(z-z_0)^2} + \frac{c_1}{z-z_0} + \dots \\ \dots \text{ és a többi,} \end{aligned}$$

majd **integráljuk** ezeket egy **a z_0 körüli zárt görbére!** *Feltéve*, hogy tagonként integrálhatunk, az $\frac{1}{z-z_0}$ -t tartalmazó (pirossal kiemelt) tagok a megfelelő együttható $2\pi i$ -szeresét adják, a többi pedig nullát: arra jutunk ($2\pi i$ -kkel osztva), hogy az együtthatókat ilyen vonalintegrálok adják meg:

$$\begin{aligned} \dots \quad c_{-3} &= \frac{1}{2\pi i} \oint^{(z_0+)} dt f(t) \cdot (t-z_0)^2, & \text{vagy összefoglalva az össze-} \\ c_{-2} &= \frac{1}{2\pi i} \oint^{(z_0+)} dt f(t) \cdot (t-z_0), & \text{set (ahol itt tehát az } n \text{ in-} \\ c_{-1} &= \frac{1}{2\pi i} \oint^{(z_0+)} dt f(t), \quad !!! & \text{dex pozitív, nulla és nega-} \\ c_0 &= \frac{1}{2\pi i} \oint^{(z_0+)} dt \frac{f(t)}{t-z_0}, & \text{atív egész értékű is lehet):} \\ c_1 &= \frac{1}{2\pi i} \oint^{(z_0+)} dt \frac{f(t)}{(t-z_0)^2}, \quad \dots & \end{aligned} \tag{4.22}$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,$$

$$\Rightarrow c_n = \oint^{(z_0+)} \frac{dt}{2\pi i} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}.$$

Látni fogjuk, hogy akkor működik ez (és akkor viszont tényleg működik), ha a görbe a z_0 -t kivéve csak olyan pontokat kerül meg, ahol f differenciálható. Ha például f -nek van z_0 -on kívül más szinguláris pontja is, akkor azt biztosan nem szabad a görbének megkerülnie.

• Rendes hatványsornál nem voltak negatív indexű c_n -ek. A c_0, c_1, c_2, \dots együtthatókat most is a Cauchy-formulákkal megegyező alakú integrálok adják meg. **Hatványsor** együtthatóit a z_0 -beli **deriváltakkal** is megkaphattuk; **itt ez így eleve esélytelen**, mert a függvényünk első körben nem is értelmes z_0 -ban. Más módszerekkel kellhet a c_n -eket meghatározni; ekkor majd azt is *tudhatjuk*, hogy a kapott c_n -ek tényleg ugyanannyik, mint az őket megadó felírt integrálok (amelyek elvi jelentőségűek; konkrétan kiszámítani őket általában reménytelen lenne).

• A *Laurent-tétel* az lesz, hogy adott f függvény adott z_0 izolált szingularitásában *valóban létezik* és egyértelmű az f ottani Laurent-sora, ami elő is állítja (=tökéletesen jellemzi) a függvényt a z_0 környékén. **Elnevezések:** adott f függvény adott z_0 izolált szingularitása esetén z_0 az f -nek

- **megszüntethető szingularitása**, ha f -nek z_0 körüli Laurent-sorában a negatív indexű c_n együtthatók mind nullák: $c_{-1} = c_{-2} = c_{-3} = \dots = 0$,
- **m -edrendű pólusa**, ha az itteni Laurent-sorban az m -edik negatív $c_{-m} \neq 0$, de a többi negatívabb indexűek már mind nullák: $c_{-(m+1)} = c_{-(m+2)} = \dots = 0$, (4.23)
- **lényeges szingularitása**, ha f z_0 körüli Laurent-sorában végtelen sok negatív indexű nem nulla c_n együttható van.

Más lehetőség nincs is. Igen sokszor előkerül az **elsőrendű pólus** esete: ez tehát az, amikor $c_{-1} \neq 0$, de $c_{-2} = c_{-3} = c_{-4} = \dots = 0$. A megszüntethető szingularitást néha *nulladrendű pólus*nak is hívják (bár ez félrevezethet, ld. később, a zérushelyek osztályozásánál).

• Egy z_0 izolált szingularitás körüli Laurent-sort (és így z_0 típusát) feltáró módszerek alapja az, hogy *mivel* az itteni Laurent-sor egyértelmű, ezért ha z_0 környékén sikerül a függvényt egy látott alakú, $n \in \mathbb{Z}$ indexeken végigfutó sorösszeggel előállítani, akkor az *tényleg* a keresett Laurent-sor.

Példák következnek; mindenhol csak egy z_0 izolált szingularitás van. (Lássuk is be ezt rögtön!)

$f(z) = \frac{\sin z}{z}$.	$z \neq 0$ esetén $\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots$ a \sin függvény hatványsorából kiindulva: ez a kellő Laurent-sor. Most $c_n = 0$, ha $n < 0$: itt tehát $z_0 = 0$ megszüntethető szingularitás .
$f(z) = \frac{1 - e^{1-z}}{(1-z)^2}$.	Az \exp függvény hatványsorából $z \neq 1$ esetén $\frac{1 - e^{1-z}}{(1-z)^2} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2} + \frac{z-1}{3!} - \frac{(z-1)^2}{4!} + \dots$, ez most a Laurent-sor. $c_{-1} = 1$, de $c_{-n} = 0$, ha $n > 1$, ezért itt $z_0 = 1$ elsőrendű pólus .
$f(z) = \frac{1}{(1+z)^3}$.	$\frac{1}{(z-(-1))^3}$ alakba írva látszik: ez így, ahogy van, egy egyetlen tagból álló Laurent-sor $z_0 = -1$ körül, ami tehát most harmadrendű pólus , mert csak $c_{-3} \neq 0$.
$f(z) = e^{-1/z}$.	$z \neq 0$ esetén $e^{-1/z} = \dots - \frac{z^{-5}}{5!} + \frac{z^{-4}}{4!} - \frac{z^{-3}}{3!} + \frac{z^{-2}}{2!} - \frac{1}{z} + 1$: ez tehát a $z_0 = 0$ körüli Laurent-sor. Végtelen sok negatív indexű c_{-n} nem nulla: $z_0 = 0$ lényeges szingularitás most. (Ez a függvény viszonylag standard példa erre az esetre.)

- Jöjjön néhány tudnivaló az izolált szingularitások típusairól; részben most bizonyítás nélkül.
1. **Ha z_0 megszüntethető szingularitás**, akkor az ekörüli Laurent-sor ugyanúgy néz ki, mint egy „rendes” hatványsor: $f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots$. Emiatt a függvényt kiterjeszthetjük z_0 -ba is, ott c_0 -nak értelmezve (ami a határértéke ott): **„megszüntethetjük”** a szingularitást. E kiterjesztésnek ugyanez a sor a *hatványsora*, és z_0 -ban is differenciálható. Egy megszüntethető szingularitás tehát olyan, mintha z_0 -ban „kilyukasztottak” volna egy szép analitikus függvényt; a szingularitás megszüntetésével „visszaállíthatjuk” ezt. A fenti példában $\frac{\sin z}{z}$ ilyen: ha a Laurent-sorral (ami tehát itt rögtön hatványsornak tekinthető) $1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$ alakban írjuk, akkor rögtön értelmeződik $z_0=0$ -ban is.
- Sok esetben ki sem írjuk** ezt a gondolati lépést: ha egy függvénynek megszüntethető szingularitása van valahol, akkor azt a mondott módon rögtön megszüntetjük.
2. **Ha z_0 (m -edrendű) pólus**, akkor ha $z \rightarrow z_0$, akkor $|f(z_0)| \rightarrow \infty$, hiszen az itteni Laurent-sorban $c_{-m}(z-z_0)^{-m}$ az első tag: $(z-z_0)^m$ -nel szorozva olyan sort kapunk, aminek nulladfokú együtthatója c_{-m} , negatív pedig nincs, így z_0 -ban véges c_{-m} határértéke van. A $(z-z_0)^m$ -nel visszaosztva kapott $f(z)$ tehát végtelenhez tart. Pólusba tehát nem folytatható el a függvény analitikusan.
 3. **Ha z_0 lényeges szingularitás**, akkor $f(z)$ -nek z_0 -ban sem véges, sem végtelen határértéke nincs, mindenképpen van sok olyan $z \rightarrow z_0$ ráközelítés, ami mentén „összevisszán viselkedik”. Az úgynevezett *nagy Picard-tétel* szerint ha z_0 lényeges szingularitás, akkor f a z_0 körül bármilyen kicsi kipontozott körlapon legfeljebb egy kivétellel minden komplex szám értéket végtelen sokszor felvesz. Ebből következik a történetileg korábbi *Casorati-Weierstrass-tétel* is, miszerint minden adott $w \in \mathbb{C}$ szám esetén van olyan z_0 -hoz tartó z_n sorozat, amire az $f(z_n)$ függvényértékek a w -hez tartanak: ilyen „határértékként” tehát bármilyen w számot kaphatnánk.⁴⁹
- Kiemelt szerepe (és erre a szerepre is utaló külön neve) van a Laurent-sor c_{-1} együtthatójának.

Az f függvény adott z_0 izolált szingularitásbeli **reziduuma** az ottani Laurent-sorának -1 -es indexű **c_{-1} együtthatója**:

$$\text{Ha } f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad \text{akkor } \text{Res } f(z) \Big|_{z=z_0} := c_{-1}. \quad (4.24)$$

Más néha a jelölés; általában egyértelmű, ha erre gondol a költő. A reziduum egy adott izolált szingularitásban értendő: ha f -nek több ilyenje is van, akkor ezek körül más és más lehet az ő Laurent-sora, tehát a reziduumok is alapvetően mások és mások.

Reziduum = „maradék”. Amint már láttuk is, az $f(z)$ -t egy z_0 -t megkerülő görbére integrálva a Laurent-sorból csak a -1 -es indexű tag „marad” (=ad nem nulla járulékot); még egyszer részletesen:

$$\oint_{(z_0+)} dt f(t) = \oint_{(z_0+)} dt \left\{ \dots + \frac{c_{-2}}{(t-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{t-z_0} + c_0 + c_1(t-z_0) + c_2(t-z_0)^2 + \dots \right\} =$$

⁴⁹Ez a helyzet az iménti példa $e^{-1/z}$ függvényével is, aminek $z_0=0$ lényeges szingularitása. Azzal, hogy ennek mint $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvénynek nincs határértéke $z_0=0$ -ban, tökéletesen összefér az, hogy itt a pozitív valós tengely (azaz az \mathbb{R}^+) mentén vett határértéke 0. Ezt is kihasználtuk a fejezet elején a 4.1. szakaszban, amikor példát gyártottunk végtelenszer differenciálható de nem analitikus $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre. Nyilvánvaló a mondottakból, hogy az a függvény nem terjeszthető ki úgy, hogy ugyanilyen tulajdonságú $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény lehessen (amilyen ugye nincs is).

$$= \dots + c_{-2} \underbrace{\oint_{(z_0+)} \frac{dt}{(t-z_0)^2}}_{=0} + c_{-1} \underbrace{\oint_{(z_0+)} \frac{dt}{t-z_0}}_{=2\pi i} + c_0 \underbrace{\oint_{(z_0+)} dt}_{=0} 1 + c_1 \underbrace{\oint_{(z_0+)} dt}_{=0} (t-z_0) + c_2 \underbrace{\oint_{(z_0+)} dt}_{=0} (t-z_0)^2 + \dots;$$

emlékezve, hogy egyelőre feltettük a tagonkénti integrálhatóságot. Az eredmény itt az, hogy valóban, a függvényünk ilyen zárt görbére vett körintegrálját a z_0 -beli reziduum adja meg:

$$\oint_{(z_0+)} \frac{dt}{2\pi i} f(t) = c_{-1} = \text{Res } f(z) \Big|_{z=z_0}. \tag{4.25}$$

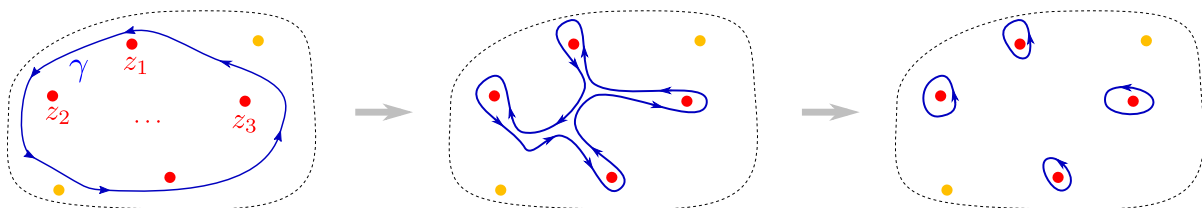
• A görbe itt meg kellett kerülje a vizsgált z_0 izolált szingularitást, de mint fentebb is mondtuk, más olyan pontot nem szabad megkerüljön, ahol $f(z)$ nem differenciálható. Gyakran előfordul, hogy a vizsgált függvénynek több izolált szingularitása is lehet, és egy integrációs út ezeket valamilyen előírt módon megkerüli. Erre az esetre vonatkozik az eddigiek alapján eléggé kézenfekvő

Reziduomtétel: ha a γ önmagát nem metsző zárt görbe olyan nyílt halmazban fut, amiben f differenciálható véges sok z_k izolált szingularitást kivéve, és (4.26)

a γ pozitív irányítású, akkor:
$$\oint_{\gamma} dz f(z) = 2\pi i \cdot \sum_{z_k \in \text{Int}\gamma} \text{Res } f(z) \Big|_{z=z_k}.$$

Szavakban: ilyen zárt görbére vett integrál értékét a megkerült szingularitások reziduumainak összegei adják meg ($2\pi i$ -vel szorozva). Az $\text{Int}\gamma$ itt a γ görbén belüli részt jelenti: csak az itt található izolált szingularitások adnak járulékot.

A bizonyítás lényege: a görbénket a Cauchy-tétel alapján csakis differenciálható tartományokon át mozgatva „szétdarabolhatjuk” olyan görbéké, amelyek az eredetileg megkerült szingularitások közül már csak egyet-egyét kerülnek meg. Az integrál így az ezekre vetek összege lesz, egy ilyen darab-görbére vett integrált pedig megad az iménti (4.25) képlet: $2\pi i$ -vel átszorozva kész.



30. ábra. A reziduomtételhez és bizonyításához: a zárt görbét, ami a szingularitásokat megkerüli, átdarabolhatjuk olyanokba, amelyek egy szingularitást kerülnek meg. Bejelöltem olyanokat is, amelyeket a görbe nem kerül meg: ezek nem szerepelnek az integrál eredményében.

• A reziduomtételt sokszor használjuk; újra kiemelünk néhány körülményt. Sok esetben vannak olyan szingularitások is, amelyeket a kijelölt görbe nem kerül meg: még egyszer hangsúlyozzuk, hogy **csak azon szingularitások** reziduumait kell összeadni, **amelyeket a görbe megkerül!** (Ugyebár *kikötöttük*, hogy ezek csak véges sokan lehessenek.) A felírt alak *pozitív irányítású* görbére igaz (végső soron mert az $\frac{1}{z-z_0}$ integrálja pozitív irányítású körre $2\pi i$); negatív irányítású görbére vett integrál a pozitív irányításúnak -1 -szerese. **Figyeljünk tehát az irányításra is!**

• **Kitekintés:** ha a vizsgált függvénynek vágásai (is) vannak, akkor ugye azok végpontjai (=az elágazási pontok) *nem izolált szingularitások*. Ezek körül *nem értelmes a Laurent-sor*, és semmi,

ami rá épül: például a reziduomtétel sem működik. Ha egy zárt görbe egy véges hosszú vágást is megkerül, akkor az ilyenre vett integrált „nem ússzuk meg” reziduumokkal (amik, mint láttuk, az izolált szingularitásokra való „rádarabolásból” jönnek be): kezelni kell a vágást (de mást nem) megkerülő körintegrált is. Erre nincs olyan általános recept, mint amilyen az izolált szingularitások körüli körintegrált megadó (4.25) képlet volt, azonban bizonyos esetekben (ld. később) vágásokra is „ráhúzhatjuk” az integrációs utat, egyszerűsítve ezzel a kiszámolandó integrált.

* * *

• Eddig csak *feltettük*, hogy a Laurent-sorba fejtés működik izolált szingularitás környékén. A jó hír: *tényleg*. Jelölje $G_r(a)$ az $a \in \mathbb{C}$ pont körüli R sugarú nyílt körlapot.

Állítás (Laurent-tétel): legyen z_0 az $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény izolált szingularitása és $R > 0$ olyan, hogy f differenciálható a $G_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ halmazon. Ha z ebben a halmazban van, akkor $f(z)$ -t előállítja a következő sor:

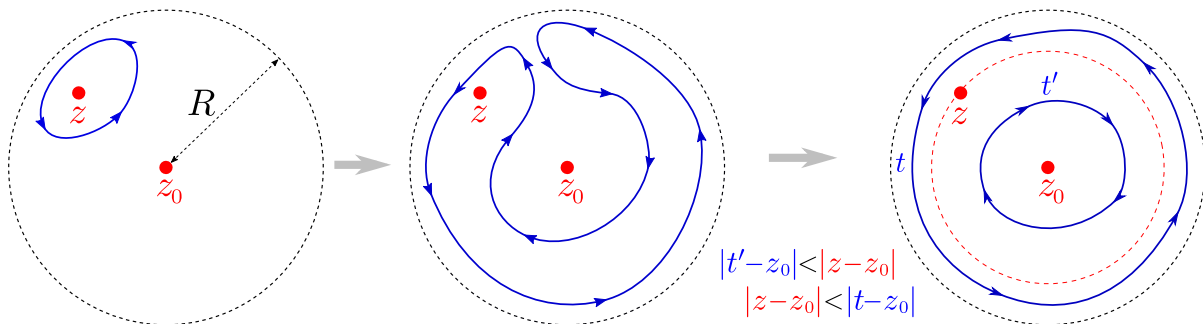
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad \text{ahol } c_n = \oint_{(z_0+)} \frac{dt}{2\pi i} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}. \quad (4.27)$$

A sor abszolút konvergens, és egyenletesen is konvergens minden $r_1 > 0$ belső és $r_2 < R$ külső sugarú körgyűrűben (az indexhatárok $-\infty$ -hez és ∞ -hez tartásában külön). Adott f és z_0 esetén a c_n együtthatók egyértelműek, azaz f -et ilyen sor alakban előállítani csakis ezen c_n -ekkel lehet.

• A bizonyításhoz állítsuk elő $f(z)$ -t a Cauchy-formulával egy z -t igen, de z_0 -t nem megkerülő görbével, majd azt „lassószerűen dobjuk át” két darabban z_0 -t megkerülő görbékbe. A belső, csak z_0 -t megkerülő görbe negatív irányítású lett; pozitív irányításra -1 -gyel szorozva térhetünk át:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(z+)} dt \frac{f(t)}{t-z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(z+,z_0+)} dt \frac{f(t)}{t-z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{(z_0+)} dt' \frac{f(t')}{t'-z}. \quad (4.28)$$

Mivel $|z-z_0| < R$, a külső (t -vel jelölt integrálási változójú) görbét futtathatjuk a körlapon belül, de a z_0 körüli $|z-z_0|$ sugarú körön kívül: ekkor $|t-z_0| > |z-z_0|$ minden t -re igaz lesz. Hasonlóan, mivel $|z-z_0| > 0$, a belső (most t' -vel jelölt változójú) görbét futtathatjuk a $|z-z_0|$ sugarú körlapon belül, hogy $|t'-z_0| < |z-z_0|$ legyen minden t' -re. Tegyük is így; ekkor minden t -re és t' -re $|\frac{z-z_0}{t-z_0}| < 1$ illetve $|\frac{t'-z_0}{z-z_0}| < 1$. Emiatt a fenti integrandusokban (a z_0 -t ügyesen beszúrva) ezen kombinációk szerint geometriai sorba fejthetünk (ahogy korábban a Cauchy-formulák bizonyításánál is tettük).



31. ábra. A Laurent-tétel bizonyításához használt görbeátdobás illetve út-megszorítás.

A fenti (4.28) kifejezésből így arra jutunk (figyelve a második tag előjelére), hogy

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{(z+, z_0+)} dt \frac{f(t)}{t-z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{t-z_0}} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{(z_0+)} dt' \frac{f(t')}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{t'-z_0}{z-z_0}} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{(z+, z_0+)} dt \frac{f(t)}{t-z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{t-z_0} \right)^n + \frac{1}{2\pi i} \oint_{(z_0+)} dt' \frac{f(t')}{z-z_0} \cdot \sum_{n'=0}^{\infty} \left(\frac{t'-z_0}{z-z_0} \right)^{n'}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

ahol most tömören, szummajellel írtuk a geometriai sort. Most is integrálhatunk tagonként a végtelen összegekben (ezt is a C.2. függelékben bizonyítjuk részletesen): így viszont a tagokból kiemelhetjük a $z-z_0$ szorzókat, így tényleg $z-z_0$ hatványai szerint haladó sor(oka)t kapunk:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \cdot \oint_{(z+, z_0+)} dt \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{1}{(z-z_0)^{n'+1}} \cdot \oint_{(z_0+)} dt' f(t') \cdot (t'-z_0)^{n'}.$$

Az első tag együtthatóiban az integrálokban most is észrevehetjük, hogy az δ szempontjuktól már nem lényeges, hogy az út megkerülje z -t, elég, ha z_0 -t megkerüli. Mindkét összegben a pozitív és a negatív hatványokat megfelelően felismerve valóban arra jutottunk, hogy

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n, \quad \text{ahol minden } n \in \mathbb{Z}\text{-re tényleg } c_n = \oint_{(z_0+)} \frac{dt}{2\pi i} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}.$$

Az együtthatók egyértelműségének bizonyítása lényegében az, ahogyan a szakasz elején bevezettük az őket megadó integrálképleteket: ha z_0 egy környezetében $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, akkor

$$\oint_{(z_0+)} dz \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}} = \oint_{(z_0+)} dz \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^{n-m-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \underbrace{\oint_{(z_0+)} dz (z-z_0)^{n-m-1}}_{=2\pi i \cdot \delta_{nm}} = \underline{\underline{2\pi i \cdot c_m}}, \quad (4.30)$$

hiszen csak a $(z-z_0)^{-1}$ integrálja ad nemnulla (hanem $2\pi i$) járulékot, így csak egy tag marad az összegből. (A Kronecker-deltás felírás pont ezt követi le.) A látott alakú sorban szereplő c_n együtthatók tehát egyértelműen meghatározottak: akárhogy is találtuk meg őket, tényleg ezekkel a (már többször felírt) integrálokkal kell, hogy egyenlőek legyenek.

A lényeg persze az, hogy ki kellett használnunk, hogy itt (4.30)-ban is *tényleg* integrálhatunk tagonként a végtelen összegben. Ennek (illetve a további részleteknek: a sor *abszolút* konvergenciájának és a mondott körgyűrűkön való egyenletes konvergenciájának) bizonyítását is a C.2. függelékben olvashatja, akit érdekel; tanulságos bizonyos szempontokból.

- A Laurent-tétel és sorfejtés látott levezetése működik bármilyen olyan R sugarú (kipontozott) körlapon belül, ahova f differenciálható (azaz: analitikus) módon elfolytatható. Hasonló igaz tehát a Laurent-sor konvergenciájára, mint a Cauchy-formulákat tudva hatványsoréra: adott z_0 pont körüli Laurent-sor konvergencia azon legnagyobb R sugarú kipontozott körlapon, amire f még analitikusan elfolytatható. Például az $e^{-1/z}$ függvény (mely a $z_0=0$ -n kívül mindenhol differenciálható) Laurent-sora tényleg mindenhol konvergencia. Az $\frac{1}{\sin z}$ függvénynek a $z_0=0$ pólus körüli Laurent-sorának konvergenciasugara $R = \pi$, mert szingularitások (mégpedig elsőrendű pólusok, ld. alább is) vannak $n\pi$ -ben, ahol $n \in \mathbb{Z}$, vagyis a 0-hoz legközelebbiek $\pm\pi$ -ben vannak.

4.5. Pólusok és reziduumaik

• A reziduúmtételt sokszor használjuk; „belépőként” meg kell tudni határozni adott f függvény adott z_0 izolált szingularitásbeli reziduúmat. Mindent megtudhatunk, ha rekonstruáltuk a z_0 körüli Laurent-sort; ez azonban nehézkes is lehet. Jó hír tehát, hogy *pólusokban* egyszerűbb a helyzet. Előfeltétel, hogy (esetleg szintén a teljes Laurent-sor ismerete nélkül) beazonosítsuk, hogy a vizsgált z_0 valóban pólus (és hanyadrendű). Idézzük fel: egy pólus rendje a „legnegatívabb index” értéke:

$$z_0 \text{ } n\text{-edrendű pólus, ha} \quad f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \dots + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots,$$

ott a Laurent-sor ilyen:

vagyis $c_{-n} \neq 0$, de a negatívabb indexűek nullák (a többi pedig lehet nulla is, nem is). Speciálisan z_0 elsőrendű pólus, ha ott a Laurent-sor ilyen: $f(z) = c_{-1}(z-z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots$

• Kézenfekvően **bevezethetjük zérushelyek rendjét** is. Ha a $g(z)$ függvény a z_0 körül *hatványsorba* fejthető, azaz $g(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$, akkor ha $a_0 \neq 0$, akkor z_0 nem is zérushely, ha viszont legalábbis $a_0 = 0$, akkor z_0 legalábbis *egyszeres* zérushely. A hatványsorokat (és deriváltjaikat) ismerve gondoljuk ki, hogy az alábbi megfogalmazások tényleg ekvivalensek:

- *első megfogalmazás*: z_0 -t a $g(z)$ függvény n -szeres zérushelyének mondjuk, ha g z_0 körüli hatványsorában az első nemnulla tag $a_n(z-z_0)^n$,
- *második megfogalmazás*: z_0 a g -nek n -szeres zérushelye, ha $\frac{g(z)}{(z-z_0)^n}$ véges értékhez tart, ha $z \rightarrow z_0$, de $\frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ végtelenhez; ez azzal egyenértékű itt, hogy $\frac{g(z)}{(z-z_0)^n}$ véges nemnulla értékhez tart, ha $z \rightarrow z_0$ (ez az érték éppen a_n),
- *harmadik megfogalmazás*: z_0 a g függvény n -szeres zérushelye, ha $g(z_0) = 0$, $g'(z_0) = 0$, \dots , $g^{(n-1)}(z_0) = 0$, de az n -edik deriváltra már $g^{(n)}(z_0) \neq 0$.

Polinomokra a zérushely rendjének mostani definíciója **ugyanazt** jelenti, mint amit polinom gyökeinek multiplicitásának (azaz az egyszeres, kétszeres stb. gyökök) már ismert fogalma, hiszen (az iménti második megfogalmazást használva) ha g polinom, z_0 pedig annak a (korábbi értelmezés szerint) m -szeres gyöke, akkor pont $(z-z_0)^m$ szerepel a gyöktényező alakban, vagyis $\frac{g}{(z-z_0)^m}$ véges nemnulla határértékhez (a többi gyöktényező szorzatának z_0 -beli értékéhez) tart $z \rightarrow z_0$ esetén.

Nem polinom, sőt nem is hatványsorként adott függvényre viszont a harmadik megfogalmazást kézenfekvő vizsgálni: annyi a z_0 zérushely rendje, ahányadik z_0 -beli derivált az első nem eltűnő.

Speciálisan: jegyezzük jól meg, hogy **egyszeres a zérushely, ha $g(z_0) = 0$, de $g'(z_0) \neq 0$** .

• A gyakorlatban legfontosabb eset az, amikor a vizsgálandó f két (most g -vel és h -vel jelölt) függvény hányadosa, amelyek differenciálhatók (azaz analitikusak) egy nyílt U tartományon:

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \quad \Rightarrow \quad f \text{ az } U\text{-n mindenhol differenciálható, kivéve ahol } h\text{-nak zérushelyei vannak: ezek } f \text{ izolált szingularitásai lesznek.}$$

Ha h az egész U -n differenciálható és a zérushelyeinek van torlódási pontja, akkor az e körüli hatványsort kigondolva (ahogy korábban az analitikus függvények egyértelműségére vonatkozó (4.5) állításnál láttuk) h azonosan nulla lenne U -n, ez pedig nem érdekes eset most. Ezért tehát úgy vesszük, hogy h zérushelyeinek nincs torlódási pontja U -n, így az $f = \frac{g}{h}$ függvényünk bármelyik szingularitása (ahol tehát h -nak zérushelye van) tényleg *izolált* szingularitás: körülötte valamilyen nemnulla sugarú kipontozott körlapon a h nem nulla, vagyis az f értelmes és differenciálható.

- Az így kapott szingularitások annyiadrendű pólusok, ahányszoros a nevező zérushelye, levonva annyit, ahányszoros zérushelye esetleg a számlálónak van ugyanott (ami ezzel „kompenzálhat”).

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Ha egy } z_0 \text{ a } h \text{ nevezőnek } N\text{-szeres, a } g \text{ számlálónak pedig} \\ S\text{-szeres zérushelye, akkor ez a } z_0 \text{ az } f\text{-nek } N-S\text{-edrendű} \\ \text{pólusa (ha } N \geq S\text{), vagy } S-N\text{-szeres zérushelye (ha } S \geq N\text{).} \end{array}$$

Persze a felírt függvény úgy, ahogy van, még $S \geq N$ esetben sem értelmes z_0 -ban, de ekkor megszüntethető ez a szingularitása: ha megszüntetjük, akkor kapjuk a mondott fajta zérushelyet. Ahogy sejtjük: ahol nincs zérushely, az „nullaszeres zérushelynek” tekintendő, és a nulladrendű pólus (vagy nullaszeres zérushely) véges nemnulla határértékű megszüntethető szingularitást jelent.

Az alábbi indoklás egyúttal megjegyezhetővé is teszi a mondottakat:

ha z_0 a h -nak N -szeres zérushelye, akkor van z_0 -nak egy olyan kipontozott környezete, amin belül h sehol sem nulla, és felírható $a_N \neq 0$ együtthatóval kezdődő hatványsorként:

$$h(z) = a_N(z-z_0)^N + a_{N+1}(z-z_0)^{N+1} + \dots = (z-z_0)^N \left[a_N + a_{N+1}(z-z_0) + \dots \right],$$

ha z_0 a g -nek S -szeres zérushelye, akkor egy (esetleg másik) kipontozott környezetben egy $b_S \neq 0$ együtthatóval kezdődő hatványsorként áll elő:

$$g(z) = b_S(z-z_0)^S + b_{S+1}(z-z_0)^{S+1} + \dots = (z-z_0)^S \left[b_S + b_{S+1}(z-z_0) + \dots \right],$$

emiatt a kisebbik (de még mindig nemnulla sugarú) kipontozott környezetben biztosan igaz, hogy

$$\Rightarrow \quad f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = (z-z_0)^{S-N} \cdot \frac{b_S + b_{S+1}(z-z_0) + \dots}{a_N + a_{N+1}(z-z_0) + \dots}.$$

A kiemelés után maradt tört olyan, hogy az ő z_0 -beli Laurent-sora pontosan a nulladfokú taggal kezdődik, mert neki z_0 -ban nem nulla, nem végtelen $\frac{b_S}{a_N}$ határértéke van. Emiatt az eredeti f itteni Laurent-sora a $(z-z_0)^{S-N}$ -es taggal kezdődik. Ez pontosan a mondottakat jelenti, akár $S > N$ (ekkor a szingularitást megszüntetve z_0 zérushely maradt), akár $N < S$ (ekkor pólust kaptunk).

- Az iménti típusú függvényekkel kapcsolatban be szoktak vezetni egy külön elnevezést:

$$\begin{array}{l} \text{Az } f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ differenciálható függvényt } \mathbf{meromorf-} \\ \mathbf{nak} \text{ mondjuk, ha } \text{Dom } f \text{ nyílt halmaz izolált szingu-} \\ \text{laritások kivételével, melyek legfeljebb pólusok.} \end{array} \quad (4.31)$$

A görögös szó jelentése kb. „részben+(szép)alakú”. Az, hogy „legfeljebb pólusok”, úgy értendő, hogy nem lényeges szingularitások. (Szingularitások torlódási pontjai, vágások, elágazási pontok pláne nem megengedettek itt.) Meromorf függvényekre alappéldák olyan törtek, ahol a számláló egészfüggvény és a nevező polinom: ezeknek véges sok pólusuk van (a nevező zérushelyeiben). Ha egy meromorf függvénynek az egész \mathbb{C} -n végtelen sok pólusa van is, $\text{Dom } f$ korlátos zárt részhalmazan biztosan csak véges sok van: ekkor őt beszorozhatjuk olyan polinommal, aminek pont ugyanezeneken a helyeken ugyanolyan rendű zérushelyei vannak; ezzel tehát a mondott részhalmazon mindenhol értelmezett differenciálható függvényt kapunk. Meromorf függvények tehát korlátos zárt halmazon mindig előállnak egy ott mindenhol differenciálható függvény és egy polinom hányadosaként. Az imént vizsgált $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ alakú függvények tehát lényegében éppen a meromorf függvények.

- Rátérünk arra, hogy ha tudjuk, hogy egy f függvénynek a z_0 pólusa (és azt is, hogy hanyadrendű), akkor hogyan kaphatjuk meg a z_0 -beli reziduumot, azaz a z_0 körüli Laurent-sor c_{-1} együtthatóját.

Elsőrendű pólusban csak ez az egy negatív indexű tag van, így egy $z-z_0$ -al való szorzással

$$\text{Elsőrendű pólusban } (z-z_0)f(z) = c_{-1} + c_0(z-z_0) + c_1(z-z_0)^2 + \dots$$

A jobb oldal folytonos függvényt ad meg, $z \rightarrow z_0$ határértékben a $z=z_0$ -beli értékét adja, amiben a c_{-1} -en kívüli többi, legalább egyszer $z-z_0$ -al szorzódó tag mind nullát ad. Leszűrjük tehát, hogy

$$\text{Ha a } z_0 \text{ (legfeljebb) elsőrendű pólus: } \quad \underline{\underline{\text{Res } f(z) \Big|_{z=z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z-z_0)f(z)]}}. \quad (4.32)$$

Nem írhattuk, hogy *értékeljük ki* $(z-z_0)f(z)$ -t a z_0 helyen, mert ha z_0 tényleg f pólusa, akkor f kifejezése általában önmagában nem értelmes z_0 -ban. A felírt határérték viszont elsőrendű pólusban biztos létezik; konkrét esetben minél nyilvánvalóbb, hogy mennyi a $(z-z_0)f(z)$ elfolytatásának értéke z_0 -ban, annál nyilvánvalóbb, hogy tényleg ez az érték épp a megkövetelt határérték lesz.

A gondolatmenetből látszik, hogy a (4.32) képlet tényleg csak *legfeljebb* elsőrendű pólusban működhet; magasabbrendű pólusban vagy lényeges szingularitásban nem létezik ez a határérték. Ha viszont működik a képlet, és kiderül, hogy $c_{-1}=0$, akkor a szingularitás nem pólus, hanem megszüntethető: csak c_0, c_1, \dots együtthatók szerepelnek a Laurent-sorban.

• A talán **legfontosabb speciális eset** az, amikor mint fent, $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ alakban adott, továbbá $g(z_0) \neq 0$, és $h(z_0) = 0$, de $h'(z_0) \neq 0$, vagyis z_0 **a számlálónak nem zérushelye, a nevezőnek pedig egyszeres zérushelye**. **Ekkor** tudhatjuk, hogy z_0 az f -nek elsőrendű pólusa, és

$$\underline{\underline{\text{Res } f(z) \Big|_{z=z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(z-z_0) \frac{g(z)}{h(z)} \right] = g(z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z-z_0}{h(z)-h(z_0)} g(z) = \underline{\underline{\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}}}}, \quad (4.33)$$

hiszen $h(z_0)$ -t büntetlenül beírhattuk (mert $\neq 0$). Ez a képlet kényelmesen alkalmazható sok esetben.⁵⁰ **Figyelem:** tényleg kellett, hogy z_0 a nevező *egyszeres* zérushelye legyen; ha netán alkalmazás közben azt találnánk, hogy $h'(z_0) = 0$, *akkor rosszul gondoltuk*: nem egyszeres a zérushely.

• Kicsit bonyolultabb hasonló képlet írható fel n -edrendű pólusokban, ha $n > 1$ (de persze az $n=1$ esetben, mint látható lesz, visszakapjuk belőle az elsőrendű pólusra vonatkozó iménti (4.32)-t). A mutatott levezetés emellett gyorsan rekonstruálható, segít a memorizálásban.

A trükk: beszorzunk $z-z_0$ megfelelő (n -edik) hatványával, hogy létezhessen a $z \rightarrow z_0$ határérték, majd megfelelő számúszor ($n-1$ -szer) deriválunk, hogy pont a c_{-1} -et „hámozhassuk ki”. Konkrétan: ha tudjuk, hogy z_0 az f -nek legfeljebb n -edrendű pólusa, akkor z_0 egy kipontozott környezetében

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots, \\ \Rightarrow (z-z_0)^n f(z) &= c_{-n} + c_{-n+1}(z-z_0) + \dots + c_{-1}(z-z_0)^{n-1} + c_0(z-z_0)^n + \dots \\ \Rightarrow \left(\frac{d}{dz} \right)^{n-1} [(z-z_0)^n f(z)] &= (n-1)! \cdot c_{-1} + \frac{n!}{1!} c_0(z-z_0) + \frac{(n+1)!}{2!} c_1(z-z_0)^2 + \dots \end{aligned} \quad (4.34)$$

Tényleg éppen jó így, mert az $n-1$ darab deriválástól az $n-1$ -nél kisebb fokú (a c_{-2}, \dots, c_{-n} -es) tagok kinullázódnak, a $c_{-1}(z-z_0)^{n-1}$ tag éppen konstans $(n-1)! \cdot c_{-1}$ lesz, a magasabb fokúak pedig még mindig $z-z_0$ pozitív hatványait fogják tartalmazni. A kapott kifejezésnek már vehetjük

⁵⁰Adott $f = \frac{g}{h}$ esetén a g és a h szétválasztása nem egyértelmű. Gondoljuk ki, hogy ugyanazt adja a képlet akkor is, ha g -t és h -t is egy z_0 -ban nem nulla sima $\chi(z)$ -vel szorozzuk, más szóval: „átrakunk egy részt” g -ből h -ba.

a $z \rightarrow z_0$ határértékét, amivel c_{-1} -et, azaz a keresett reziduumot kapjuk. Összefoglalva tehát:

$$\text{Ha a } z_0 \text{ (legfeljebb)} \\ n\text{-edrendű pólus:} \quad \underline{\underline{\text{Res } f(z) \Big|_{z=z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{n-1} \left[(z-z_0)^n f(z) \right] \right]}}. \quad (4.35)$$

• Ha tudjuk, hogy legfeljebb n -edrendű pólusról van szó, akkor a Laurent-sor többi együtthatóját is megkaphatjuk az iménti (4.34) átalakításhoz hasonló módszerrel. Ugyanúgy haladva, csak más számúszor deriválva (hogy c_{-1} helyett egy másik együtthatót hámozzunk ki) ellenőrizzük, hogy

$$\text{Ha } z_0 \text{ legfeljebb } n\text{-edren-} \\ \text{dű pólus, akkor az ottani} \quad c_{-m} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{1}{(n-m)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{n-m} \left[(z-z_0)^n f(z) \right] \right]. \quad (4.36) \\ \text{Laurent-sor együtthatói:}$$

Itt m legfeljebb annyi lehet, mint n ; nincs gond az $(n-m)!$ faktoriállal. A gondolatmenetből az is látszik, hogy ha legfeljebb n -edrendű pólusról van szó, akkor ennél nagyobb n -et beírva is működik a képlet. Sőt, noha pólusokban és a Laurent-sor negatív indexű tagjaira van „kihegyezve”, érvényes negatív m -re (azaz pozitív indexű együtthatókra) is, még akkor is, ha nem is Laurent-sorról, hanem rendes hatványsorról van szó (azaz z_0 nem is pólus; ekkor n akár nullának is választható).

Figyelem: remélhetőleg nyilvánvaló (a mutatott gondolatmenetből is), de azért kiemeljük: itt a (4.36)-ban és a fentebbi (4.35)-ben is az egész $(z-z_0)^n f(z)$ szorzat mint függvény (megfelelő számúadik) deriváltjáról van szó, nemcsak külön f -éről!

• Ha f racionális törtfüggvény, akkor meromorf véges sok pólussal. Parciális törtekre bontva, a nevező egyik z_0 zérushelyét kiszemelve a *többi zérushelyhez tartozó* parciális törtek z_0 környékén analitikus függvények, melyeknek itteni hatványsorait geometriai sorral megtalálhatjuk.

Példa: $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$, keressük meg a Laurent-sort $z_0=i$ körül!

$$\Rightarrow \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right] = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{z-i} - \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{(z-i)+2i} = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{z-i} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{i}{2}(z-i)} = \\ = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{z-i} + \frac{1}{4} \left[1 + \frac{i}{2}(z-i) + \left(\frac{i}{2} \right)^2 (z-i)^2 + \left(\frac{i}{2} \right)^3 (z-i)^3 + \dots \right].$$

ez pedig már éppen a kellő $(z-i)$ hatványai szerint rendezett, azaz a $z_0=i$ körüli) Laurent-sor.

• Racionális törtfüggvény esetén tehát a nevező egy z_0 zérushelye körüli Laurent-sor negatív indexű tagjai éppen a parciális törtek közül a z_0 -ra koncentráltak. Ezeknek (a parciális törtekre bontás során ismeretlen) együtthatóit megadja az iménti (4.36) képlet: erre mint általános megoldására céloztunk korábban az 1.3. szakasz végén. Az egyszeres zérushelyű nevező esetére ott felírt (1.20) képlet éppen az itteni fentebbi (4.32). Azt mondhatjuk tehát, hogy a parciális törtekre bontás lényegében a Laurent-sorfejtés alkalmazása racionális törtfüggvényekre.

• Következzék **néhány példa** a szakaszban látottakra. Kérdés: hol vannak a szingularitások,ők mik, és mennyik a reziduumok (ez újdonság a 2.5. szakaszhoz képest). Számoljuk át őket!

$$1. \quad f(z) = \frac{1}{z^2-1}.$$

A nevező másodfokú, és két zérushelye van: $z=1$ és $z=-1$, emiatt (is) mind a kettő egyszeres. (Ez úgy is kiderül, hogy a nevező deriváltja $2z$, és ez egyik helyen sem nulla.) A reziduumokra a (4.33) képletet alkalmazhatjuk: ebből $\text{Res } f(z) \Big|_{z=1} = \frac{1}{2}$, $\text{Res } f(z) \Big|_{z=-1} = -\frac{1}{2}$.

$$2. f(z) = \frac{e^z - 1}{z}.$$

A nevezőnek csak a $z=0$ zérushelye, és itt a deriváltja (ami a konstans 1) nem nulla, úgyhogy így is látszik, hogy egyszeres zérushely (ki gondolta volna...). Viszont a számláló is nulla itt, de annak deriváltja, e^z már nem, úgyhogy $z=0$ a számlálónak is egyszeres zérushelye: a $z=0$ itt tehát megszüntethető szingularitás (1 határértékkel); a reziduum természetesen nulla.

$$3. f(z) = \frac{z^2}{z^4 - \alpha^4}, \quad \text{ahol } \alpha > 0 \text{ pozitív valós szám.}$$

A nevezőnek négy z_k ($k = 1, 2, 3, 4$) zérushelye van: $z_1 = \alpha$, $z_2 = -\alpha$, $z_3 = i\alpha$ és $z_4 = -i\alpha$. A nevező deriváltja $4z^3$, semelyik z_k -ban sem nulla: innen (is, és abból is, hogy negyedfokú polinomnak négy zérushelye lett) látszik, hogy mindegyik zérushely egyszeres. A számláló nem nulla egyikben sem: mindegyik z_k elsőrendű pólus. A (4.33) képlet alapján tehát $\text{Res } f(z)|_{z_k} = \frac{1}{4z_k}$.

$$4. f(z) = \frac{z^2 + 2}{z^4 + 5z^2 + 4}.$$

A nevező zérushelyeit kell kitalálni: szorzattá alakítva $(z^2+1)(z^2+4)$, innen látszik, hogy négy darab lesz: i , $-i$, $2i$, $-2i$. Már a darabszámból is tudhatjuk, hogy egyszeresek, de abból is, hogy a nevező deriváltja, $4z^3+10z$ nem nulla egyikben, sem (hanem rendre: $6i$, $-6i$, $-12i$, $12i$). A számláló értékei pedig rendre: 1 , 1 , -2 , -2 , ezek sem nullák: elsőrendűek a pólusok. A reziduumok a (4.33) képletből rendre: $-\frac{i}{6}$, $\frac{i}{6}$, $-\frac{i}{6}$, $\frac{i}{6}$.

$$5. f(z) = \text{tg } z. \quad \text{Első lépés észrevenni, hogy ez is a mostani típusú tört: } \text{tg } z = \frac{\sin z}{\cos z}.$$

A nevező $\cos z$ zérushelyei: $(n + \frac{1}{2})\pi$, ahol $n \in \mathbb{Z}$ egész szám lehet. Ezekben a nevező deriváltja (ami $\sin z$) nem nulla (így ezek tényleg a nevező egyszeres zérushelyei), és a számláló (ami most szintén $\sin z$) sem nulla: emiatt ezek a $\text{tg } z$ elsőrendű pólusai. A reziduumok a törtből így úgy adódnak, hogy a $\frac{\sin z}{\cos' z}$ -t, azaz $\frac{\sin z}{-\sin z} = -1$ -et kell itt kiértékelni: mindegyik reziduum -1 .

$$6. f(z) = \text{th } z.$$

$\text{th } z = \frac{\text{sh } z}{\text{ch } z}$; a nevező zérushelyei: $(n + \frac{1}{2})i\pi$, a nevező deriváltja sem nulla ezekben, és a számláló sem: elsőrendű pólusokról van szó (persze ezt vártuk a tg alapján, hiszen szoros a kapcsolat: $\text{th}(iz) = i \text{tg } z$); a reziduumok a $\frac{\text{sh}}{\text{ch}} = \frac{\text{sh}}{\text{sh}}$ -t kiértékelve mind 1-nek adódnak.

$$7. f(z) = \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + \alpha^2}, \quad \text{ahol } \omega \in \mathbb{R} \text{ valós szám és } \alpha > 0 \text{ valós szám.}$$

A számláló sehol sem nulla, a nevezőnek egyszeres zérushelyei vannak $i\alpha$ -ban és $-i\alpha$ -ban: ezek így elsőrendű pólusok lesznek, a reziduumok pedig úgy számolhatók ki, mint eddig: az adódik, hogy $\text{Res } f(z)|_{z=i\alpha} = \frac{-i}{2\alpha} e^{-\omega\alpha}$ és $\text{Res } f(z)|_{z=-i\alpha} = \frac{i}{2\alpha} e^{\omega\alpha}$.

$$8. f(z) = \frac{\sin(\omega z)}{z^4 + 2\alpha^2 z^2 + \alpha^4}, \quad \text{ahol } \omega \in \mathbb{R} \text{ valós szám, } \alpha > 0 \text{ valós szám.}$$

A nevező: $(z^2 + \alpha^2)^2 = (z - i\alpha)^2 (z + i\alpha)^2$, azaz itt $i\alpha$ is és $-i\alpha$ is a nevező kétszeres zérushelyei; a számláló pedig nem nulla itt: másodrendű pólusaink vannak. Emiatt a reziduumokra a (4.33) képlet helyett itt a bonyolultabb (4.35)-öt kell használni: $n=2$ -vel arra jutunk, hogy

$$\text{Res } f|_{-i} = \lim_{z \rightarrow -i} \left((z + i\alpha)^2 f(z) \right)' = \lim_{z \rightarrow -i} \left(\frac{\sin(\omega z)}{(z - i\alpha)^2} \right)' = \dots = \frac{\text{sh}(\omega\alpha) - \omega\alpha \text{ch}(\omega\alpha)}{4\alpha^3},$$

$$\text{Res } f|_i = \lim_{z \rightarrow i} \left((z - i\alpha)^2 f(z) \right)' = \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{\sin(\omega z)}{(z + i\alpha)^2} \right)' = \dots = \frac{\text{sh}(\omega\alpha) - \omega\alpha \text{ch}(\omega\alpha)}{4\alpha^3}, \quad \text{ugyanannyi.}$$

5. Alkalmazások, további ismeretek

Ebben a fejezetben már alkalmazáscentrikus új ismeretek kerülnek elő: rákanyarodunk a reziduum-tétel alkalmazásaira (integrálok kiszámításához), az analitikus elfolytatás használati lehetőségeire, illetve mindenféle, az eddigi tudásunkkal már megoldható „vegyesfelvágott” feladattípusokra.

5.1. Az analitikusság hasznosításai

- Az analitikus elfolytatás egyértelműségét tudva a logaritmus- és hatványfüggvények körében sok esetben egyszerűen kideríthetjük, hogy a „problémás” **átalakítások mikor működnek**:

$$\operatorname{Ln}(ab) \stackrel{?}{=} \operatorname{Ln} a + \operatorname{Ln} b, \quad (ab)^c \stackrel{?}{=} a^c b^c.$$

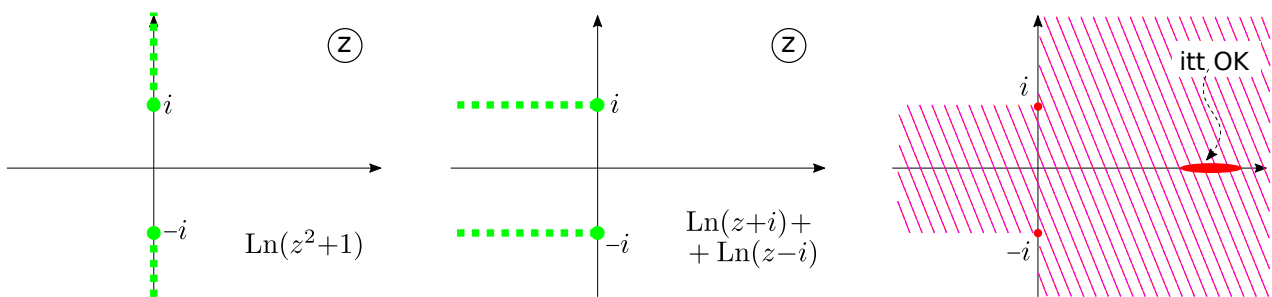
Ugye akkor, ha $\arg(ab) = \arg a + \arg b$, azaz nincs $\pm 2\pi$ különbség („átbukásból”). Ha a, b, c például egy z változó függvénye, akkor z különféle értékeire nehézkes lehet ezt ellenőrizni. De ha belátjuk az egyenlőséget a z változóban egy „egyszerű helyen” egy „kicsi”, de torlódási pontot tartalmazó (például egy nyílt) halmazon, akkor ahová *mindkét* oldalt analitikusan elfolytathatjuk (amit sokszor rögtön a felírt függvényalakok „megtesznek” nekünk odáig, ahova úgy eljuthatunk, hogy nem kell például vágásokon átmenni), ott fennáll az egyenlőség.

Példa:

$$z^2+1 = (z+i)(z-i), \text{ node igaz-e, hogy } \quad \text{vagyis: milyen}$$

$$\operatorname{Ln}(z^2+1) \stackrel{?}{=} \operatorname{Ln}(z+i) + \operatorname{Ln}(z-i), \quad \text{z-kre igaz ez?}$$

Ha z nagy pozitív valós szám, akkor a logaritmusok hasában lévő számok fázisai alig térnek el 0-tól: biztos nincs „átbukás”, igaz az egyenlőség. Vehetünk erre felé olyan halmazt, aminek van torlódási pontja: emiatt ahova innen úgy eljuthatunk, hogy nem megyünk át semelyik oldal vágásain sem, oda analitikusan elfolytatódik mindkét oldal, azaz igaz az egyenlőség.



32. ábra. Az Ln-es kifejezésünk átalakításának analitikus elfolytatással való „lekövetéséhez”: a csíkozott tartományon egyenlő a kétféle alak, mert oda mindkét alak ugyanúgy elterjeszhető.

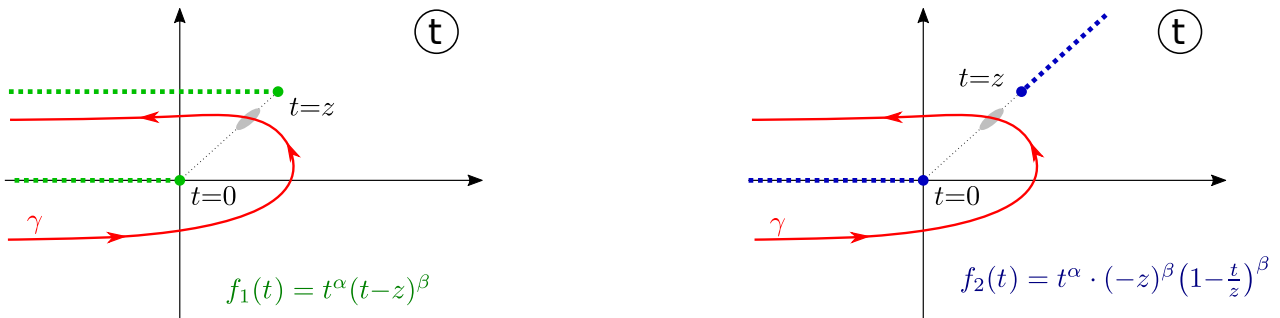
- Az analitikus elfolytatás lokális egyértelműsége tehát „kompenzálhatja” a hatványozás és a logaritmus valósban megszokott összefüggéseinek komplex számok közötti kényelmetlenségét. Sokszor például komplex vonalintegrálokban akarnánk így átalakítani: ha az út egy pontjának (kicsi, de nyílt) környezetében igaz az átalakítás, és az út mentén mindkét függvényalak analitikus (ami tipikusan annyi követelményt jelent, hogy az út ne messe egyiknek a vágásait sem), akkor a kétféle függvény értékei az út mentén megegyeznek: az integrál szempontjából megengedett az átalakítás.

Példa: legyen t a változó, α, β nem egész számok, $z \notin \mathbb{R}$ adott komplex szám, amire $\Im(z) \neq 0$, és

$$f_1(t) := e^t t^\alpha (t-z)^\beta, \quad f_2(t) := e^t t^\alpha \cdot (-z)^\beta \left(1 - \frac{t}{z}\right)^\beta; \quad \text{„majdnem” ugyanazok.}$$

Ugye t a változó; a nem egész kitevők miatt ahol a hatványalapok negatív valósak, ott lesznek vágások. (Vázoljuk is fel a két függvény „szerkezetét”!) A kérdés: ha f_1 -et illetve f_2 -t egy olyan γ útra integráljuk, ami $-\infty$ -ból jön, oda is tér, és elkerüli a $t \in \mathbb{R}_0^-$ vágást, megegyeznek-e az integrálok. Látni való, hogy $t=0$ mellett $t=z$ is elágazási pont mindkét alakban; az utóbbiból induló vágás iránya más itt és ott. Hogy az út az analitikus tartomány(ok)ban haladjon, az kell, hogy az $f_1(t)$ -re gondolva az út egyik „szára” a két vágás között fusson. (Ez tényleg lehetséges, mert kikötöttük, hogy $\Im(z) \neq 0$. Az ábrán $\Im(z) > 0$, de a gondolatmenet ugyanígy működne $\Im(z) < 0$ -ra is).

Az integrálok egyenlőségére a válasz: igen, ha legalább egy „kis” helyen tényleg megegyeznek az integrandusok. Ez pedig a jelölt pont (satírozott) környékén biztos igaz lesz, mert ott $1 - \frac{t}{z}$ éppen valós, így ott $(-z)^\beta \left(1 - \frac{t}{z}\right)^\beta = (t-z)^\beta$ tényleg teljesül. Következtetés: megegyeznek az integrálok, azaz másképp mondva: a látott módon átalakíthatjuk az $f_1(t)$ integrandust $f_2(t)$ -vé.



33. ábra. Kétféle módon felírt integrandus vágásai a t változó függvényében; az adott integrációs útra vett integráljuk egyenlő, mert az integrandusok a (szürkével) jelölt hely környékén biztos megegyeznek, máshova pedig az út mentén elfolytathatók.

- Sokféle, adott függvények közötti **azonosság** is olyan, hogy tartalmaz egy (komplex) változót vagy paramétert, amelynek függvényében differenciálható (azaz: analitikus). Ha az ilyen változó valamilyen (az értelmezési tartományában torlódási pontot tartalmazó) értékeire belátjuk az egyenlőséget, akkor ahol csak értelmes (és differenciálható) mindkét oldal, ott igaz az egyenlőség.

„Ösztönösen” használjuk ezt sokszor; jöjjön egy butácska példa. Ugye $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ igaz minden $x \in \mathbb{R}$ -re. A \sin -t és a \cos -t azonban mint $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényeket is megismertük. Az analitikus elfolytatásokkal kapcsolatban úgy mondhatjuk: *egyedül az ismert $f(z) = \sin z$ függvény olyan, hogy komplex differenciálható, és \mathbb{R} -re leszűkítve az ismert valós szinuszfüggvényt adja vissza. A \cos -ra ugyanilyet mondhatunk. Innen nézve is meggyőződhetünk, hogy az egész \mathbb{C} -n is igaz a pitagoraszsi összefüggés, hiszen a bal oldal (a $\sin^2 z + \cos^2 z$ függvény) és a jobb oldal (a konstans 1) is komplex differenciálhatóak, tehát ha a szűkebb \mathbb{R} halmazon (aminek mint \mathbb{C} részhalmazának nagyon is van torlódási pontja) megegyeznek, akkor a bővebb \mathbb{C} -n is.*

- Az alábbi fejtegetések a **paraméteres integrál differenciálási szabálya** néven futó gondolat-kört hasznosítják. Emlék: a paraméter szerinti differenciálást „bevihetjük” az integráljel alá:

$$F(x) := \int_a^b dt f(t, x) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} F(x) = \int_a^b dt \frac{\partial f(t, x)}{\partial x}. \quad (5.1)$$

Ez könnyen megjegyezhető és természetesnek tűnik. Az „indoklás” lelke ugyebár:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_a^b f(t, x) dt &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{\int_a^b f(t, y) dt - \int_a^b f(t, x) dt}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \int_a^b dt \frac{f(t, y) - f(t, x)}{y - x} \stackrel{?}{=} \\ &\stackrel{?}{=} \int_a^b dt \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(t, y) - f(t, x)}{y - x} = \int_a^b dt \frac{\partial f(t, x)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

A kijelölt lépés a kérdéses (hogyan az integrálok határértéke egyenlő-e a határérték integráljával). A pontos megfogalmazáshoz kell egy kis plusz feltétel, ami (noha „általában” nem teljesül) *a gyakorlatban szinte mindig teljesül*, ha csak a nyilvánvaló feltételek teljesülnek $f(x, t)$ -re, amelyek ahhoz kellenek, hogy egyáltalán értelmes legyen a dolog: hogy $f(t, x)$ és $\partial_x f(t, x)$ minden előkerülő x -re t -ben integrálhatóak legyenek és $f(x, t)$ majdnem minden t -re x szerint differenciálható legyen.

A pontosan megfogalmazott **állítás** viszont kifejezetten **kimondja, hogy** a paraméteres integrál eredménye, $F(x)$ **tényleg differenciálható** x szerint (és a deriváltjára a fenti képlet igaz). Ez azért jó, mert tipikusan az $f(t, x)$ a jól kezelhető függvény, és így az integrál eredményéről, amit esetleg egyáltalán nem tudunk egyszerűen kiszámítani, mégis tudhatjuk, hogy differenciálható. Az ide tartozó részleteket (és a szükséges plusz feltételt) a C.4. függelékben olvashatjuk.

- A paraméteres integrál *differenciálhatóságát* és differenciálható komplex függvények analitikusságát összerakva különféle **integrálok eredményeit kiterjeszthetjük** komplex paraméter-értékek közé. Bevezető példa: valós $\alpha > 0$ -ra teljesen egyszerűen kijön, hogy

$$\text{Valós } \alpha > 0 \text{ esetén} \quad \int_0^\infty dt e^{-\alpha t} = \frac{1}{\alpha}. \quad (5.3)$$

Valós α -ra pontosan akkor létezik az integrál, ha $\alpha > 0$, továbbá komplex α -kra is értelmes lehet: tudjuk, hogy egy f függvény pontosan akkor integrálható, ha $|f|$ is az, továbbá (ahol is most $\alpha \in \mathbb{C}$, de $t \in \mathbb{R}$) az integrandus abszolútértéke $|e^{-\alpha t}| = \sqrt{e^{-\alpha t} e^{-\alpha^* t}} = e^{-\frac{1}{2}(\alpha + \alpha^*)t} = e^{-\Re(\alpha) \cdot t}$, emiatt

$$\int_0^\infty dt e^{-\alpha t} \text{ pontosan akkor létezik, ha } \int_0^\infty dt e^{-\Re(\alpha) \cdot t} \text{ is, azaz ha } \Re(\alpha) > 0.$$

A paraméteres integrállal így előállított függvényről (anélkül, hogy konkrétan felírnánk az eredményét) kiderül, hogy ő mint a komplex α függvénye (komplex értelemben) differenciálható az $\Re(\alpha) > 0$ halmazon, amiből következik, hogy analitikus is. *Az a helyzet, hogy a gyakorlatban ezt a következtetést szinte mindig ösztönösen feltesszük, és szinte sosem tévedünk*: ahhoz viszont, hogy ténylegesen belássuk, a mondott C.4. függelék szakaszbeli tételt kell használni. Ott konkrétan megmutatjuk a tételnek erre a mostani példára való alkalmazását is.

A bal oldalon felírt integrál eredménye tehát tényleg a komplex α analitikus függvénye, ha csak $\Re(\alpha) > 0$. Valós $\alpha > 0$ -ra, azaz $\alpha \in \mathbb{R}^+$ esetben pedig *igaz* a felírt eredmény, aminek jobb oldala, $\frac{1}{\alpha}$ is (persze, hogy) analitikus α -ban, ahol csak értelmes. Emiatt (mivel az \mathbb{R}^+ halmaz nagyon is tartalmaz torlódási pontot \mathbb{C} -ben) a valós α -ra kiszámolt eredményből

$$\text{Komplex } \alpha \in \mathbb{C}\text{-re is: ha } \Re(\alpha) > 0, \text{ akkor } \int_0^\infty dt e^{-\alpha t} = \frac{1}{\alpha}. \quad (5.4)$$

- A **Gauss-integrálokat** is még a már látottaknál is messzemenőbben kiterjeszthetjük. Ugyebár

$$\text{Valós } \alpha > 0 \text{ és } \beta \in \mathbb{R} \text{ esetben} \quad \int_{-\infty}^\infty dt e^{-\alpha t^2 + \beta t} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\beta^2/4\alpha}. \quad (5.5)$$

A felírt integrál maga azonban értelmes lehet komplex α és β értékekre is: gondoljuk át (az előző példa esetéhez hasonlóan), hogy ez pont akkor áll fenn, ha $\Re(\alpha) > 0$. Ha viszont ez fennáll, akkor mint fentebb, itt is leszűrhető a paraméteres integrál differenciálhatóságából (és ezt is konkrétan megmutatjuk a C.4. függelék szakaszban), hogy az integrál eredménye mint a komplex α és β függvénye külön-külön az α és a β komplex változók szerint differenciálható, azaz mint az α függvényük analitikus. (Úgy érve, hogy akármilyen fix megengedett α esetén β -ban analitikus, és akármilyen fix megengedett β (azaz most bármilyen $\beta \in \mathbb{C}$) esetén α -ban analitikus a megengedett halmazon.) Emellett a mondott fajta α, β értékek esetén (azaz: ha $\Re(\alpha) > 0$) az (5.5)-ben felidézett eredmény (a jobb oldal) szintén α és β analitikus függvénye (ugyanilyen értelemben).

Ezek miatt az integrál eredményét a megengedett komplex α és β értékek esetén is ugyanez a formula adja meg, hiszen ez az, ami komplex α -k és β -k megengedett tartományaira analitikus módon elfolytatja a valós esetben levezetett eredményt:

$$\text{Ha } \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \text{ és } \Re(\alpha) > 0, \text{ akkor } \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\alpha t^2 + \beta t} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\beta^2/4\alpha}. \quad (5.6)$$

A felírt jobb oldalnak mint α függvényének $\alpha \in \mathbb{R}_0^-$ -on vágása van, de az integrál pont nem értelmes ilyen α -kra, úgyhogy a jobb oldalt az integrál szempontjából sosem kell a vágáson kiértékelni.

A mostani módszerrel tehát még a 3.6. szakaszban látottnál is tovább általánosíthatjuk a Gauss-integrált; egyúttal az ott mondott ugyanilyen jellegű eredményt is egyszerűen visszakaptuk.

5.2. Integrálok kiszámítása reziduúmtétellel

A komplex függvénytan *kiemelt alkalmazási területe*, egyben sok eddigi tudásunk összetételét igényli az, hogy bizonyos integrálokat a reziduúmtétellel kezelhetünk (utóbbi most „plusz” a korábbi 3.6. szakaszhoz képest). Ez egyszerű számítást tesz lehetővé sokszor, és olyankor is hasznos lehet, amikor primitív függvényt keresve nem boldogulnánk.

• **Egyszerű példával kezdjük**, amit amúgy is tudhatunk, ismerve az arctg függvény deriváltját:

$$\text{Kérdés: } \mathcal{I}_1 := \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{1+x^2} = ? \quad (5.7)$$

$$\text{Válasz: } \int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \arctg b - \arctg a \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

Ezt a végeredményt vezetjük le reziduúmtétellel is. Ez ebben az egyszerű esetben (pláne elsőre) bonyolultabbnak tűnik, azonban a módszer szinte minden lényeges lépését megismerhetjük így.

Első észrevétel: az integrandust tekinthetjük „szép kis” (most: meromorf) $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvénynek:

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{elsőrendű pólus } z=-i \text{-ben, } \text{Res } f(z)|_{z=-i} = -\frac{1}{2i}, \\ \text{másik ugyanilyen } z=i \text{-ben; } \text{Res } f(z)|_{z=i} = \frac{1}{2i}. \end{array} \quad (5.8)$$

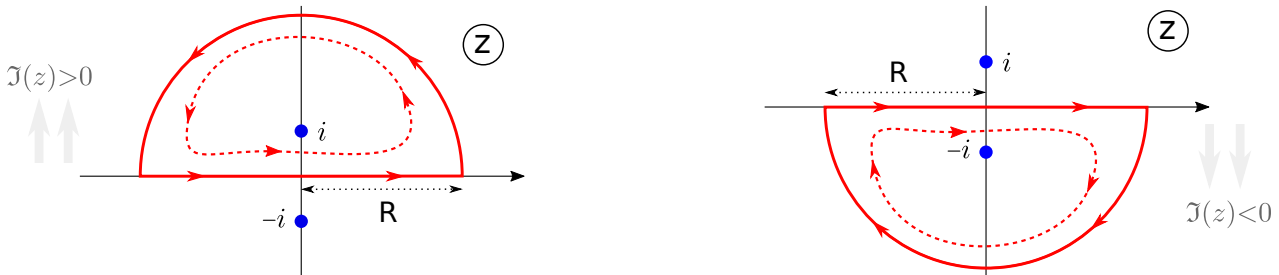
A reziduúmtétel megadja $f(z)$ vonalintegráljait zárt görbékre: minden olyanra, ami a $z=i$ pólust (de a másikat nem!) egyszer pozitív irányban megkerüli, ez $2\pi i \cdot \text{Res } f|_{z=i} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi$, és minden görbére, ami csak a $z=-i$ pólust kerüli meg *negatív irányban*, $-1 \cdot 2\pi i \cdot \text{Res } f(z)|_{z=-i} = -2\pi i \cdot \frac{-1}{2i} = \pi$.

Következő összetevő: $|z| \rightarrow \infty$ -re $\frac{1}{1+z^2}$ elég gyorsan nullához tart *minden irányban*: úgy, mint $1/|z|^2$. Ezt ugye úgy értjük, hogy $|z^2 \cdot \frac{1}{1+z^2}|$ is konstanshoz tart $|z| \rightarrow \infty$ -re (most éppen 1-hez). Emiatt van olyan $K > 0$ szám, hogy ha $|z|$ egy megfelelő R_1 értéknél már nagyobb, akkor $|\frac{1}{1+z^2}| \cdot |z|^2 < K$,

azaz $|\frac{1}{1+z^2}| < K/|z|^2$ teljesül.⁵¹ Így $\frac{1}{1+z^2}$ -nek egy R sugarú félkörívre vett integráljáról a szokásos integrálbecsléssel kiderül, hogy nullához tart $R \rightarrow \infty$ esetén (hiszen ezen mindenhol $|z|=R$):

A mostani esetben az $\Im(z) > 0$
 és az $\Im(z) < 0$ félsíkon futó
 félkörívek esetén is igaz, hogy

$$\left| \int_{\text{körív}} dz \frac{1}{1+z^2} \right| \leq \underbrace{\pi R}_{=\ell} \cdot \frac{K}{R^2} = \frac{\pi K}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$



34. ábra. Az $\frac{1}{1+x^2}$ integráljának levezetéséhez. A körintegrálokat a reziduummétellel tudhatjuk bármilyen (az egyik illetve a másik pólust megkerülő) görbékre; ezek közül a valós tengelyen futó integrált felfelé illetve lefelé bezáródódó félkörívvel kiegészítő görbék kellene most.

Ha tehát a $z=i$ pólust megkerülő zárt görbének olyat veszünk, ami a valós $[-R, R]$ szakaszból és egy felfelé visszatérő R sugarú félkörívből áll, akkor a körintegrál eredményét *tudjuk* a reziduummétellel (ld. fentebb), másrészt az $R \rightarrow \infty$ esetben a $[-R, R]$ szakaszra vett integrál a keresett $\int_{-\infty}^{\infty}$ valós integrálhoz tart, a félkörívre vett pedig nullához. Így tehát célhoz érünk:

Az $\Im(z) > 0$ félsíkon
 záródó félkörívből:

$$\pi = \underbrace{\int_{-R}^R dx \frac{1}{1+x^2}}_{\rightarrow \mathcal{I}_1, \text{ ha } R \rightarrow \infty} + \underbrace{\int_{\text{körív}} dz f(z)}_{\rightarrow 0, \text{ ha } R \rightarrow \infty} \Rightarrow \underline{\underline{\mathcal{I}_1 = \pi}}. \quad (5.9)$$

Ugyanerre jutunk most az $\Im(z) < 0$ félsíkon záródó félkörívből is: a reziduummétellel kijött, hogy ilyen görbére (mint minden, a $z=-i$ pólust *negatív irányban* megkerülő görbére) is ugyanennyi, π az integrál. (Figyelem: látható, hogy azért volt jó ez utóbbi esetben negatív irányítást venni, hogy a valós $[-R, R]$ szakaszra vett integrál a kellő irányban, $-R$ -től R -ig fusson, és ne fordítva.)

- **Ugyanígy** kezelhetjük más **racionális törtfüggvények** \mathbb{R} -re vett integrálját is. Feltételek:
 - 1.) *a nevező legalább kettővel magasabb fokú legyen a számlálónál*, különben nem lenne integrálható a függvény, mert csak $1/x$ módjára csökkenne, vagy nem is csökkenne $\pm\infty$ felé,
 - 2.) *ne legyen pólus \mathbb{R} -en*, mert annak környékén a függvény \mathbb{R} mentén is $\frac{1}{(x-x_0)^n}$ módjára viselkedne, ahol $n > 0$: ilyenkor nem létezik az integrál. (Felidézhetjük a 3.2. szakaszt.)

Újabb példa: $\mathcal{I}_2 := \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} = ?$ (5.10)

Az integrandus itt $f(z) \equiv \frac{P(z)}{Q(z)}$, ahol most $P(z) = z^2+1$, $Q(z) = z^4+z^2+1$. A nevező $Q(x)$ nem nulla, ha x valós, továbbá Q kettővel magasabb fokú P -nél: minden rendben. A $Q(z)$ nevező zérushelyeire $z^2 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} = e^{\pm 2\pi i/3}$, ebből megkapjuk őket (az egységkört felvázolva). Egyszeresek; a nevező

⁵¹Nagyobb R_1 -től vizsgálódva K -nak a határértéket (most: az 1-et) egyre jobban (felülről) megközelítő értéket is választhatunk. Figyelem: z komplex, ezért **nem igaz, hogy** $|1+z^2| > |z|^2$, és emiatt $|\frac{1}{1+z^2}| < \frac{1}{|z|^2}$ teljesülne. Ezért kellett körülményesebben érvelnünk, hogy az ezutáni becslésben használhassuk ezt az $1/|z|^2$ szerinti csökkenést.

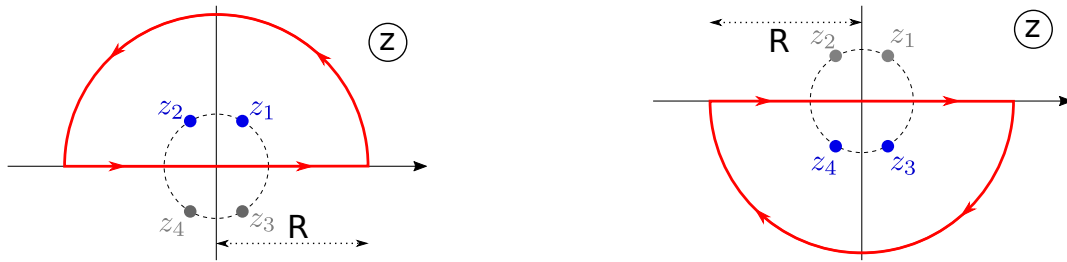
deriváltja, $Q'(z) = 4z^3 + 2z$ nem nulla bennük. A reziduumok így $\frac{P(z_k)}{Q'(z_k)}$ módon adódnak (ld. a korábbi (4.33) képletet és környékét egyszeres zérushelyű nevezőjű meromorf függvényekre):

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{i\pi/3}, & z_2 &= e^{2i\pi/3}, & z_3 &= e^{-i\pi/3}, & z_4 &= e^{-2i\pi/3}. \\ Q'(z_1) &= -3 + \sqrt{3}i, & Q'(z_2) &= 3 + \sqrt{3}i, & Q'(z_3) &= -3 - \sqrt{3}i, & Q'(z_4) &= 3 - \sqrt{3}i. \\ \text{Res } f|_{z_1} &= -\frac{\sqrt{3}}{6}i, & \text{Res } f|_{z_2} &= -\frac{\sqrt{3}}{6}i, & \text{Res } f|_{z_3} &= \frac{\sqrt{3}}{6}i, & \text{Res } f|_{z_4} &= \frac{\sqrt{3}}{6}i. \end{aligned}$$

Mint az előbb is, bezárjuk a $[-R, R]$ szakaszra vett integrált félkörívvel. Akár felfelé, akár lefelé tesszük ezt, az $R \rightarrow \infty$ esetben az ívre vett integrál nullához tart, mert most is az integrandus minden irányban $1/|z|^2$ módon csökken, azaz van olyan R_1 és $K > 0$, hogy ha $|z| > R_1$, akkor

$$|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^2} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Ha } R > R_1} \quad \left| \int_{\text{körív}} dz f(z) \right| \leq \underbrace{\pi R}_{=\ell} \cdot \frac{K}{R^2} = \frac{\pi K}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \quad (5.11)$$

Figyelem: z_1 és z_2 a felső, z_3 és z_4 az alsó félsíkon van! Elég nagy R sugarú felfelé záródó félkörgörbe már megkerüli a felső félsíkon lévő pólusokat: ezek most z_1 és z_2 ; hasonlóan, elég nagy lefelé záródó félkörgörbe megkerüli azokat a pólusokat, amikre $\Im(z) < 0$: ezek most z_3 és z_4 .



35. ábra. Az újabb példa-integrál kiszámításához: azokat a pólusokat kell figyelembe venni, amelyekre a görbe megkerüli. Most is (mint az előbb is) mindkét irányú görbével dolgozhatunk.

A reziduumtétellel tehát arra jutunk, hogy a felső félsíkon záródó görbére

$$\oint_{\gamma, \circlearrowleft} dz f(z) = 2\pi i \left(\text{Res } f|_{z_1} + \text{Res } f|_{z_2} \right) = 2\pi i \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}i - \frac{\sqrt{3}}{6}i \right) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\pi,$$

másrészt $R \rightarrow \infty$ -re a $[-R, R]$ -re vett integráldarab a keresett \mathcal{I}_2 -höz tart, a körívre vett járulék pedig a fentiek szerint nullához, úgyhogy a most írt eredmény éppen a keresett \mathcal{I}_2 -nek bizonyul:

$$\oint_{\gamma} dz f(z) = \int_{-R}^R dz f(z) + \int_{\text{körív}} dz f(z). \quad \begin{array}{l} \text{Az első } \mathcal{I}_2\text{-höz, a másik} \\ \text{nullához tart } R \rightarrow \infty\text{-re:} \end{array} \quad \underline{\underline{\mathcal{I}_2 = \frac{2}{3}\sqrt{3}\pi.}} \quad (5.12)$$

A lefelé záródó félkörgörbével is dolgozhattunk volna: ez z_3 -at és z_4 -et kerüli meg *negatív irányban*; utóbbi miatt egy -1 szorzó kerül a reziduumtétellel kapott eredménybe. A körintegrál eredménye pedig ugyanúgy a keresett integrálunk értéke lesz $R \rightarrow \infty$ esetén, és így is ugyanaz jön ki:

$$\text{az alsó félsíkon} \quad \oint_{\gamma} dz f(z) = -1 \cdot 2\pi i \left(\text{Res } f|_{z_3} + \text{Res } f|_{z_4} \right) = -2\pi i \left(\frac{\sqrt{3}}{6}i + \frac{\sqrt{3}}{6}i \right) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\pi.$$

záródó görbére

és $R \rightarrow \infty$ -re ugyebár itt is azt kapjuk, hogy ez éppen \mathcal{I}_2 -vel lesz egyenlő.

• **Gyakorlásképpen még** kiszámíthatjuk a következőket is; itt $a \in \mathbb{R}^+$.

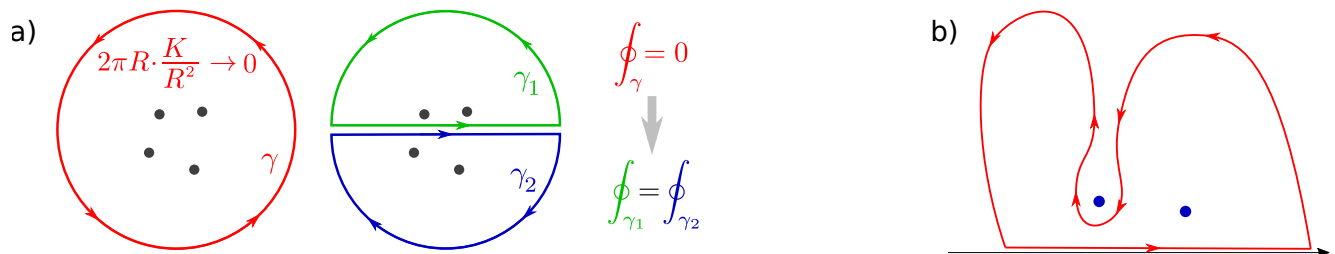
$$\mathcal{I}_3 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^2}{x^6 + a^6} = \frac{\pi}{3a^3}, \quad \mathcal{I}_4 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^8 + a^8} = \frac{\pi}{2a^7} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

• **Néhány megjegyzés az eddigiekhez:**

1. Nem varázslat, hogy a vizsgált racionális törtfüggvények esetében ugyanazt az eredményt adják a felfelé és a lefelé záródó görbék. (Fájdalmas is lenne, ha két helyes módszer különböző eredményekre vezetne.) Ha egy ilyen függvény legalább $1/|z|^2$ szerint csökken, akkor egy nagy (összes pólusát megkerülő) *egész körívre* biztos nulla az integrálja, ugyanis a szokásos integrálbecslés nem hagy más lehetőséget: a kört „felfújhatjuk” (és közben a rá vett integrál nem változik), és a kör kerülete $2\pi R$, az integrandus pedig $\frac{K}{R^2}$ -tel becsülhető felül, ha $|z|=R$, és már R valamilyen R_1 -nél nagyobb; ezek miatt az integrál ezek $\frac{2\pi K}{R}$ szorzatával becsülhető felül abszolútértékben, de még ez is nullához tart, ha $R \rightarrow \infty$: tényleg nulla a mondott nagy körre vett integrál.

Emiatt viszont a kétféle (az egész nagy kört az egyenes szakaszok kiesése miatt unióként kiadó) félkörgörbére vett integrálok összege nulla, vagyis ha az egyik irányítását negatívnak vesszük (ahogy tettünk a lefelé záródval), akkor arra jutunk, hogy a két ilyen két integrál tényleg megegyezik. (Újra kiemeljük, hogy *figyeljünk a félkörgörbéink irányítására!*)

2. Látva, hogy a végeredményeket a megkerült pólusok reziduum-értékei „állítják be”, első ismerkedéskor felmerülhet, hogy nem lehet-e több pólus esetén olyan görbével zárni, ami nem kerüli meg mindegyiket, és így más eredményt levezetni ugyanarra az eredetileg keresett integrálra. Nem: ilyen bezáró görbét nem tudnánk úgy deformálni, hogy rajta *mindenhol* működjön az $1/|z|^2$ -es becslés, ami alapján tudhatnánk, hogy a visszatérő görbe járuléka nullához tart, és kijönne, hogy a (reziduummétellel kiszámolt) körintegrál értéke az eredeti, \mathbb{R} -re vett integrál eredménye. Valóban: éppen a meg nem került pólusok járuléka hiányozna.



36. ábra. a.) Ha a nagy körintegrál nulla, a lefelé és felfelé záródó félkörök tényleg ugyanannyit adnak. b.) Meg kell kerülni az összes pólust, hogy tényleg a végtelenbe vihessük a visszatérő utat.

3. Az a feltétel, ami miatt létezik az \mathbb{R} -re vett integrál (legalább kettővel magasabb fokú nevező, mint számláló) ugyanaz, mint ami „lehetővé teszi” a félkörívvel bezárás módszert: a legalább $1/|z|^2$ -es csökkenés biztosítja az ív járulékanak nullához tartását. Az eredeti integrál létezéséhez az is kellett, hogy az integrandusnak ne legyen pólusa \mathbb{R} -en. Ez is jól jön a komplex módszerünk szempontjából: emiatt lesz egyértelmű, hogy melyik pólust kerülni meg, és melyiket nem.
4. A fentebbi példákban egyszeresek voltak a pólusok (így az $f = \frac{g}{h} \Rightarrow \text{Res} f = \frac{g}{h'}$ képletet használhattuk); ne ijedjünk meg attól sem, ha valamikor a nevezőnek többszörös zérushelyei (és így többrendű pólusok) lesznek: ekkor is kiszámíthatjuk a reziduumokat (ld. a 4.5. szakaszt).
5. Ha páratlan függvény \mathbb{R} -re vett integrálját keressük, eleve tudhatjuk, hogy az nulla. Valós függvény integrálja \mathbb{R} -re a „komplexezés” után mégis **valósnak kell, hogy adódjon**, illetve ha az integrandus minden $x \in \mathbb{R}$ -re pozitív, az integrálja is az; ezek jó önellenőrzési lehetőségek.

6. Az eddigi fajta integrálok Newton-Leibniz-formulával is kiszámíthatók (parciális törtekkel); ez lényegében a most látott módszer eredményeit rekonstruálja, de „áttekinthetlenebb” módon.

* * *

• Jöjjenek olyan **példák**, amelyeknél **nem mindegy**, hogy melyik irányba zárjuk az utat! Az első ilyen (ami azért is érdekes, mert nem lehet zárt alakban kiszámolni Newton-Leibniz-formulával):

$$\begin{array}{l} \text{Legyenek } a, \omega \text{ valós számok,} \\ a > 0, \text{ de } \omega \geq 0 \text{ és } \omega \leq 0 \text{ is lehet.} \end{array} \quad \text{Kérdés:} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{i\omega x}}{x^2 + a^2} = ? \quad (5.13)$$

Az integrandust kiterjesztjük $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényre: $f(z) = \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + a^2}$. Ez egészfüggvények hányadosa, és a nevezőnek van két egyszeres zérushelye $z = \pm ia$ -ban, emiatt a függvényünk meromorf, és

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + a^2} \Rightarrow \begin{array}{l} z_1 = -ia \text{ elsőrendű pólus, } \text{Res } f|_{-ia} = \frac{g(-ia)}{h'(-ia)} = \frac{e^{-\omega a}}{-2ia}, \\ z_2 = ia \text{ is elsőrendű pólus, } \text{Res } f|_{ia} = \frac{g(ia)}{h'(ia)} = \frac{e^{-\omega a}}{2ia}. \end{array}$$

Hasonló a recept, mint fent: a reziduomtétellel tudhatjuk a pólusokat megkerülő utakra vett kör-integrált, másrészt ha az utat ráigazítjuk \mathbb{R} -re, a maradék járulékot pedig a szokásos becsléssel nullaként beazonosíthatjuk, akkor leszűrhetjük, hogy a reziduomtételből a keresett, \mathbb{R} -re vett integrálunkat kaptuk meg. Itt is egy a $[-R, R]$ szakaszt R sugarú félkörívvel záró út fog kelleni:

$$\begin{array}{ll} \text{felfelé záródó, így } z_1 = ia\text{-t pozi-} & \text{lefelé záródó } (z_2 = -ia\text{-t megkerülő} \\ \text{tív irányban megkerülő félkörre} & \text{negatív irányítású) félkörre pedig} \\ \oint^{(z_1^+)} dz f(z) = 2\pi i \cdot \text{Res } f|_{ia} = \frac{\pi}{a} e^{-\omega a}, & \oint^{(z_2^-)} dz f(z) = -2\pi i \cdot \text{Res } f|_{-ia} = \frac{\pi}{a} e^{\omega a}. \end{array} \quad (5.14)$$

Ha $\omega \neq 0$, ezek *nem egyenlők*. Kérdés, hogy melyik esetben (ha egyáltalán valamelyikben) működhet az ív járulékának nullához tartását biztosító becslés. Az $f(z)$ nevezője $|z|^2$ módjára növekszik, ami „jó”: a πR félkörhossz szorozva K/R^2 -tel nullához tart (ezt használtuk racionális törtfüggvények között is). A számláló viszont most $e^{i\omega z}$: valós $z \equiv x$ -re $|e^{i\omega x}| = 1$, azonban komplex z -re

$$\text{Ha } z = x + iy, \text{ ahol } x, y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad |e^{i\omega z}| = |e^{i\omega(x+iy)}| = |e^{i\omega x}| \cdot |e^{-\omega y}| = e^{-\omega y}.$$

Ezek alapján tehát $R \rightarrow \infty$ esetén egyelőre annyit mondhatunk, hogy

$$\left| \oint_{\text{félkörív}} f(z) dz \right| \leq \pi R \cdot \max_{z \in \text{félkörív}} |f(z)| \leq \pi R \cdot \frac{K}{R^2} \cdot \max_{z \in \text{félkörív}} (e^{-\omega y}). \quad (5.15)$$

Lényeges, hogy ahhoz, hogy a nevező $|z|^2$ -es növekvését kihasználhassuk a K/R^2 -es felülbecsléshez (ami kell a πR ívsugarú kompenzálásához), tényleg mindenfelé végtelenbe kell vinni a félkörívet, a valós tengelytől is eltávolodva. Ekkor viszont az íven előkerülő z -k között lesznek olyanok, amikre $|y| \propto R$, azaz bizonyos z -kre $R \rightarrow \infty$ közben $y \rightarrow \infty$ vagy $y \rightarrow -\infty$ is megvalósul (ha a felfelé illetve ha a lefelé futó ívet választjuk). Az $e^{-\omega y}$ ilyen y -okra vagy exponenciálisan növekszik (ami elrontja a $\frac{\pi K}{R}$ csökkenésének hasznát), vagy exponenciálisan csökken. ω előjelén múlik tehát, hogy melyik utat kell választanunk, hogy az (5.15) becslést tovább fűzhessük.

$$\begin{array}{l} \underline{\underline{\text{Ha } \omega > 0, \text{ akkor:}}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ha } y > 0, \text{ akkor ebben az esetben } e^{-\omega y} \leq 1: \text{ több nem is kell most,} \\ \text{ha } y \rightarrow -\infty, \text{ akkor } e^{-\omega y} \text{ nő, és nem „segít” } \frac{K\pi}{R} \text{ csökkenése sem.} \end{array} \right. \\ \underline{\underline{\text{Ha } \omega < 0, \text{ fordítva:}}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ha } y \rightarrow \infty, \text{ akkor ebben az esetben } e^{-\omega y} \text{ túl gyorsan nő,} \\ \text{ha } y < 0\text{-ra viszont ebben az esetben } e^{-\omega y} \leq 1, \text{ ez pedig elég lesz.} \end{array} \right. \end{array} \quad (5.16)$$

Összerakva arra jutunk tehát, hogy

$\omega > 0$ esetén ha felfelé záródik a félkörív, akkor, ha pedig $\omega < 0$, akkor ha lefelé, akkor igaz, hogy

$$\left| \oint_{\text{félkörív}} f(z) dz \right| \leq \frac{\pi K}{R} \cdot \max_{z \in \text{ív}} (e^{-\omega y}) \leq \frac{\pi K}{R}, \quad (5.17)$$

és $\frac{\pi K}{R}$ nullához tart, ha $R \rightarrow \infty$. A másik esetekben az ívre vett integrálról az exponenciális növekedés miatt nem tudjuk biztosítani, hogy nullához tartana $R \rightarrow \infty$ -re. Így a valós $[-R, R]$ szakaszra vett integrál (mely a keresett $\int_{-\infty}^{\infty}$ integrálhoz tart) a felfelé záródó görbéből kapott reziduummételes eredménnyel, az (5.14) első képletével egyezik meg, ha $\omega > 0$, viszont a lefelé záródó görbéből kapott másodikkal, ha $\omega < 0$:

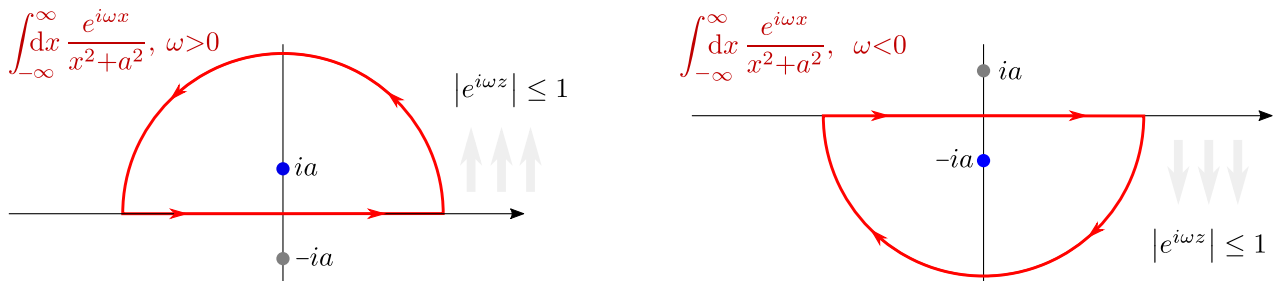
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{i\omega x}}{x^2+a^2} = \oint^{(ia+)} dz \frac{e^{i\omega z}}{z^2+a^2} = 2\pi i \cdot \text{Res } f|_{z=ia} = \frac{\pi}{a} e^{-\omega a}, \quad \text{ha } \omega > 0, \text{ továbbá}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{i\omega x}}{x^2+a^2} = \oint^{(-ia-)} dz \frac{e^{i\omega z}}{z^2+a^2} = -2\pi i \cdot \text{Res } f|_{z=-ia} = \frac{\pi}{a} e^{\omega a}, \quad \text{ha } \omega < 0.$$

Esetünkben szépen összefoglalhatjuk a kétféle lehetőséget: akár $\omega > 0$, akár $\omega < 0$, igaz, hogy

$$\text{Ha } \omega \in \mathbb{R}, \text{ akkor } \underline{\underline{\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{i\omega x}}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{a} e^{-|\omega|a}}}. \quad (5.18)$$

Persze külön meg kell nézni az $\omega=0$ esetet, de ilyenkor $\frac{1}{x^2+a^2}$ integráljáról van szó, amire racionális törtfüggvények között is $\frac{\pi}{a}$ -t kaphattunk, ami beleillik az eredményképletbe ($\omega=0$ -t írva).



37. ábra. Az iménti integrálhoz: $\omega > 0$ és $\omega < 0$ esetében az egyik illetve a másik irányban záródó félkörből kapott eredményt tudjuk beazonosítani a keresett integrálunk eredményeként.

• Az előző gondolatmenetet **mindig végig kell vizsgálni**, ha exponenciális növekedés vagy csökkenés között választva dönthetjük el, hogy **melyik irányba zárjuk** az utat, hogy működjön az ív járulékanak nullához tartását bebiztosító becslés. **Még egy példa**, most már nagyobb lépésekkel:

$$\omega \in \mathbb{R}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x e^{-i\omega x}}{x^4+a^4} =? \quad \Rightarrow \quad f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{z e^{-i\omega z}}{z^4+a^4}.$$

Négy elsőrendű pólus (z_1, z_2, z_3, z_4) van a nevező zérushelyeiben:

$$\text{Az } \Im(z) > 0 \text{ felső félsíkon: } \begin{cases} z_1 = a \frac{1+i}{\sqrt{2}}, & \text{Res } f(z)|_{z=z_1} = \frac{e^{-i\omega z_1}}{4z_1^3} = \frac{1}{4ia^2} e^{\frac{\omega a}{\sqrt{2}}} e^{-\frac{i\omega a}{\sqrt{2}}}, \\ z_2 = a \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, & \text{Res } f(z)|_{z=z_2} = \frac{e^{-i\omega z_2}}{4z_2^3} = \frac{-1}{4ia^2} e^{\frac{\omega a}{\sqrt{2}}} e^{\frac{i\omega a}{\sqrt{2}}}, \end{cases}$$

$$\text{Az } \Im(z) < 0 \text{ alsó félsíkon: } \begin{cases} z_3 = a \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, & \text{Res } f(z)|_{z=z_3} = \frac{e^{-i\omega z_3}}{4z_3^2} = \frac{1}{4ia^2} e^{-\frac{\omega a}{\sqrt{2}}} e^{\frac{i\omega a}{\sqrt{2}}}, \\ z_4 = a \frac{1-i}{\sqrt{2}}, & \text{Res } f(z)|_{z=z_4} = \frac{e^{-i\omega z_4}}{4z_4^2} = \frac{-1}{4ia^2} e^{-\frac{\omega a}{\sqrt{2}}} e^{-\frac{i\omega a}{\sqrt{2}}}. \end{cases}$$

$f(z)$ „törtfüggvény-része”, $\frac{z}{z^4+a^4}$ úgy csökken abszolútértékben, mint $K/|z|^3$; ezt kihasználhatjuk a visszatérő R sugarú félköríven (ahol $|z|=R$). Lefelé illetve felfelé záródó félköríven $y < 0$ illetve $y > 0$ (ahol is $z \equiv x+iy$); továbbá $|e^{-i\omega z}| = e^{\omega y}$. Így ha $\omega > 0$, akkor ez $y < 0$ (lefelé záródó félkörív) esetén lesz 1-nél kisebb-egyenlő; a másik félsíkon exponenciálisan növekedhet, elrontva a törtfüggvény-rész csökkenését. Ha $\omega < 0$, fordítva: a felfelé záródó íven lesz $e^{\omega y} \leq 1$.

Ahol az exponenciális tényező is 1-gyel felülbecsülhető, az ívre vett integrál nullához tart, ha $R \rightarrow \infty$. Ha tehát $\omega > 0$, akkor egy lefelé záródó félkörívet kell venni (ami z_3 -at és z_4 -et kerüli meg), ha pedig $\omega < 0$, felfelé záródót (ami z_1 -et és z_2 -t kerüli meg); ekkor a keresett integrál értéke a körintegrállal egyenlő, mert $R \rightarrow \infty$ -nél csak a valós tengely járuléka marad. Összerakva tehát:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x e^{-i\omega x}}{x^4+a^4} = \oint_{(z_1+, z_2+)} dz \frac{z e^{-i\omega z}}{z^4+a^4} = 2\pi i (\text{Res } f|_{z_1} + \text{Res } f|_{z_2}) = \frac{\pi}{2a^2} e^{\frac{\omega a}{\sqrt{2}}} (e^{\frac{i\omega a}{\sqrt{2}}} - e^{-\frac{i\omega a}{\sqrt{2}}}), \quad \text{ha } \omega < 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x e^{-i\omega x}}{x^4+a^4} = \oint_{(z_3-, z_4-)} dz \frac{z e^{-i\omega z}}{z^4+a^4} = -2\pi i (\text{Res } f|_{z_3} + \text{Res } f|_{z_4}) = \frac{\pi}{2a^2} e^{-\frac{\omega a}{\sqrt{2}}} (e^{\frac{i\omega a}{\sqrt{2}}} - e^{-\frac{i\omega a}{\sqrt{2}}}), \quad \text{ha } \omega > 0.$$

Itt is összefoglalhatjuk az eredményt $\omega > 0$ és $\omega < 0$ esetére is:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x e^{-i\omega x}}{x^4+a^4} = \frac{i\pi}{a^2} e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}|\omega|} \sin\left(\frac{\omega a}{\sqrt{2}}\right). \quad (5.19)$$

• **Gyakorlásként** hasonló módszerrel levezethetjük például a következőt:

$$\text{Állítás: } \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-i\omega x}}{x^6+a^6} = \frac{\pi}{3a^5} \left\{ e^{-\frac{a}{2}|\omega|} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega a\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|\omega|a\right) \right] + e^{-a|\omega|} \right\}. \quad (5.20)$$

Keményebb dióként jöjjön egy olyan, ahol többedrendű pólusok vannak, így a reziduumokat az erre való bonyolultabb módon lehet kiszámítani (ld. a 4.5. szakaszt); próbálkozzunk meg ezzel is:

$$\text{Állítás: } \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^2 e^{i\omega x}}{(x^2+a^2)^2} = \frac{8\pi}{a} (1 - a|\omega|) e^{-a|\omega|}. \quad (5.21)$$

• A látott fajta, \mathbb{R} -re vett, $e^{\pm i\omega x}$ -et tartalmazó integrálok *Fourier-transzformációk* során kerülnek elő később; vissza is térünk rájuk és néhány tulajdonságukra. Az **Euler-formulával** akkor is ilyenekre juthatunk valós- illetve képzetesrész-képzéssel, ha **trigonometrikus függvények** szerepelnek hasonló kiosztásban. Az előzőeket használó ilyen **példák**:

$$\mathcal{I}_5 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\cos(\omega x)}{x^2+a^2} =? \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I}_5 = \text{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{i\omega x}}{x^2+a^2} \right\} = \frac{\pi}{a} e^{-|\omega|a},$$

$$\mathcal{I}_6 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x \sin(\omega x)}{x^4+a^4} =? \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I}_6 = \text{Im} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x e^{-i\omega x}}{x^4+a^4} \right\} = \frac{\pi}{a^2} e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}|\omega|} \sin\left(\frac{\omega a}{\sqrt{2}}\right).$$

• **Néhány megjegyzés** a most látott fajta integrálokhoz:

1. Az $e^{\pm i\omega x}$ -et tartalmazó integráloknál hamar rutinná válhat, de eleinte érdemes konkrétan a felírt függvényalakot mindig megvizsgálva végiggondolni, hogy az exponenciális csökkenés melyik irá-

nyú félkörrel való bezárást implikálja. **Tipikus hibalehetőség**, hogy egyszer mondókaszerűen megjegyzi valaki, hogy „ha ω ilyen, erre zárunk, különben arra...”, és aztán egyszer ez félrevezet. (*Talán mondani sem kell*, hogy még alapvetőbb hibalehetőség, ha noha megállapítjuk, hogy merre kell zárni, mégis nemcsak a megkerült pólusok reziduumaikat adjuk össze.)

- Egy $\cos(\omega x)$ -et vagy $\sin(\omega x)$ -et tartalmazó látott fajta integrálnál az is **hibalehetőség**, ha a $\cos(\omega z)$ vagy $\sin(\omega z)$ módon írjuk $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényként az integrandust, és így próbáljuk félkörrel zárni az utat. Polinom-nevező esetén így biztos *nem működik* az ív járulékának felülbecslése, mert a valós tengelytől távolodva $|\cos(z)|$ és $|\sin(z)|$ is exponenciálisan nő *erre is, arra is* (ld. pl. a korábbi 2.5. szakasz végén). A helyes út: amit láttunk, visszatérni $e^{\pm i\omega z}$ -ra; ennél van esélyünk az egyik irányú zárással.
- Érdeemes figyelni a párosságra-páratlanságra: $\sin(\omega x)$ páratlan, $\cos(\omega x)$ páros. Ezeket páros illetve páratlan (és hogy integrálható legyen, legalább $\sim \frac{1}{x^2}$ módon csökkenő) törtfüggvénnyel szorozva a kapott függvény páratlan, integrálja \mathbb{R} -re nulla. Továbbá $\cos(\omega x)$ illetve $\sin(\omega x)$ az $e^{i\omega x}$ valós illetve képzetes része: $e^{i\omega x}$ -nek és páros illetve páratlan függvény szorzatának \mathbb{R} -re vett integrálja emiatt valós illetve tiszta képzetes (mint a a fenti példákban is).
- $x \rightarrow -x$ helyettesítéssel („tükrözéssel”) az adódik, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(-x) dx$, mivel a határok cserélődnek, és visszacsereélve kiesik a dx -1 -gyel szorzódása. Az ebből adódó következtetések néha egyszerűsítik az életet; például a fentebbi egyik példa-integrált tekintve

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{i\omega x}}{x^2+a^2} \stackrel{x \rightarrow -x}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-i\omega x}}{x^2+a^2};$$

összenézve: ennyiből is rögtön tudhatjuk, hogy az integrál eredménye ugyanannyi ω -nál és $-\omega$ -nál, azaz ő az ω páros függvénye. Fentebb ezt az integrált végigszámoltuk $\omega > 0$ -ra és $\omega < 0$ -ra is (az út „merrefelé zárhatóságának” gyakorlása végett); most látjuk, hogy elég lett volna például $\omega > 0$ -ra: abból rekonstruálhatjuk a páros ω -függésű végleges (5.18) eredményt. Sok más esetben is segíthet hasonló észrevétel.

- Eddig itt szigorúan *integrálható* függvények kerültek elő; például racionális törtfüggvényeknél ehhez kellett a legalább kettővel magasabb fokú nevező. A szakaszban látott módszerek *improprius integrálokra* (ld. 3.2. szakasz) is működhetnek, azaz amikor csak egy véges szakaszra vett integrál határértékéről beszélhetünk. **Példa:** legyen $\omega, \alpha \in \mathbb{R}^+$, és tekintsük ezt az integrált:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x e^{i\omega x}}{x^2+\alpha^2}; \quad \begin{array}{l} \text{egyáltalán létezik-e? Válasz:} \\ \text{valódi integrálként nem.} \end{array} \quad (5.22)$$

Ugyanis ha létezne, akkor az integrandus abszolútértéke is integrálható lenne, de nem az, mivel $x \in \mathbb{R}$ -re $|e^{i\omega x}|=1$, úgyhogy az abszolútérték csak $\sim \frac{1}{x}$ szerint csökken $\pm\infty$ felé.

$$\text{Ha } \omega \neq 0, \text{ akkor viszont létezik az „impro-} \quad \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b dx \frac{x e^{i\omega x}}{x^2+\alpha^2}. \quad (5.23)$$

prius $\int_{-\infty}^{\infty}$ integrál”, azaz ez a határérték:

Ez azon múlik, hogy $\omega \neq 0$ -ra az $e^{i\omega x}$ miatt az integrandus valós és képzetes része is váltakozó előjelű: a kiesések miatt az abszolútérték lassabb csökkenése mellett is létezhet a felírt határérték. Ilyesmi volt a helyzet az improprius integrál 3.2. szakaszbeli váltakozó lépcsős alappéldájánál is; a mostani esetben a következő pontban kiegészítésképpen belátjuk, hogy tényleg létezik ez a határérték.

Fontos viszont, hogy ebben az is benne van, hogy a határérték nem függ attól, hogy az a -val illetve a b -vel „milyen ütemben” tartunk $-\infty$ -hez illetve ∞ -hez, vagy akár előbb az egyikkel, aztán a másikkal. Éppen ezért a mondott $\lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty} \int_a^b$ határértéket *kiszámíthatjuk* úgy, hogy az $a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty$ határatmenetet egy speciális módon végezzük el. A következő lesz a legjobb:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R dx \frac{x e^{i\omega x}}{x^2 + \alpha^2} = ?, \quad (5.24)$$

az erre kapott eredményt tehát egyúttal megadja az általános $a, b \rightarrow \pm\infty$ átmeneteket megengedő fentebbi (5.23) eredményt is. A $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvénné kiterjesztett $f(z) = \frac{ze^{i\omega z}}{z^2 + \alpha^2}$ integrandusnak egy felfelé záródó, az ottani egy darab $z_1 = i\alpha$ pólust megkerülő, R sugarú félkörívre vett integrálja $\oint_{\gamma} dz f(z) = 2\pi i \operatorname{Res} f|_{z_1} = \pi i \frac{e^{-\omega\alpha}}{2} = i\pi e^{-\omega\alpha}$. Az sugallta a felfelé zárást, hogy $e^{i\omega z}$ most a felső z -fél síkon csökken exponenciálisan (figyelem: most az $\omega > 0$ esettel foglalkozunk!).

Az következik, hogy belássuk, hogy $R \rightarrow \infty$ -re az ív járuléka nullához tart. Itt fog egy kis kellemetlenséget okozni, hogy nem elég gyorsan csökken az integrandus abszolútértéke (ami ugyebár összecseng azzal, hogy az integrálunk rendes integrálként nem létezik): nem fog működni a szokásos integrálbecslés, hanem eggyel bonyolultabban kell érvelnünk. A félkörív $z(\varphi) = Re^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, \pi]$ paraméterezését használva és úgy rendezve, hogy az $R \rightarrow \infty$ esetre „ráérezhessünk”:

$$\oint_{\text{félkörív}} dz f(z) = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi i R e^{i\varphi} \cdot \frac{R e^{i\varphi} \exp(i\omega R e^{i\varphi})}{R^2 e^{2i\varphi} + \alpha^2} = i \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \frac{e^{i\omega R \cos \varphi} e^{-\omega R \sin \varphi}}{1 + \frac{\alpha^2}{R^2} e^{-2i\varphi}}. \quad (5.25)$$

A nevező itt φ -ben nézve egyenletesen 1-hez tart, ha $R \rightarrow \infty$; a számlálóban $|e^{i\omega R \cos \varphi}| = 1$, az $e^{-\omega R \sin \varphi}$ pedig $\varphi \in]0, \pi[$ esetén nullához tart $R \rightarrow \infty$ -re *pontonként de nem egyenletesen*: $\varphi = 0$ és $\varphi = \pi$ körül nagyon lassan. Mindenesetre az integrandus (adott értéknél nagyobb minden R -re egyszerre) *majorálható* egy konstans értékkel (ami pedig integrálható $[0, \pi]$ -re). A *Lebesgue-tétel* alapján tehát (ld. a 3.2. szakaszt) az integrál határértéke egyenlő a pontonkénti határértékfüggvény integráljával, ami nulla. Ez a kicsit bonyolultabb gondolatmenet kellett tehát most; a szokásos integrálbecslés tulajdonképpen azt jelentette volna, hogy az integrandust az egész $[0, \pi]$ szakaszon egy nullához tartó konstanssal felülbecsüljük, de mint láttuk, itt ez nem működhetett.

Végülis azért beláttuk, hogy az ív járuléka nullához tart, ha $R \rightarrow \infty$, úgyhogy a keresett integrál-határértékünk a megkerült pólus reziduumból adódik. Eredményünk:

$$\text{ha } \omega > 0, \text{ akkor } \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R dx \frac{x e^{i\omega x}}{x^2 + \alpha^2} = 2\pi i \cdot \operatorname{Res} \left(\frac{ze^{i\omega z}}{z^2 + \alpha^2} \right) \Big|_{z=i\alpha} = i\pi e^{-\omega\alpha}. \quad (5.26)$$

Tekintsük most az $\omega < 0$ esetet! Ekkor vagy végigjártsszuk még egyszer a gondolatmenetet: ugyanúgy, mint az imént, kiderül, hogy lefelé futó körívvel záródó utat kell venni, ami a másik, $z_2 = -i\alpha$ pólus kerüli meg negatív irányban, amiből a reziduumból alapján arra az eredményre jutunk, hogy

$$\text{ha } \omega < 0, \text{ akkor } \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R dx \frac{x e^{i\omega x}}{x^2 + \alpha^2} = -i\pi e^{-\omega\alpha}. \quad (5.27)$$

Ugyanez jön ki úgy is, ha észrevesszük, hogy az $x \rightarrow -x$ helyettesítéssel az eredeti ω -val felírt integrál a $-\omega$ -nál felírt ugyanilyen alakú integrál -1 -szeresébe megy át: ezért az előző, $\omega > 0$ -ra vonatkozó eredményből leszűrhetjük ezt az $\omega < 0$ -ra vonatkozót is. (Kihasználódott persze közben, hogy a $[-R, R]$ integrálási tartomány szimmetrikus: az $x \rightarrow -x$ helyettesítés helyben hagyja.) Vé-

gül $\omega=0$ -t beírva páratlan függvényt integrálunk $[-R, R]$ -re, ami 0, így ennek az $R \rightarrow \infty$ határértéke is nulla. Összefoglalhatjuk tehát az eredményünket:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x e^{i\omega x}}{x^2 + \alpha^2} = i\pi \operatorname{sgn}(\omega) e^{-\omega\alpha}, \quad \text{úgy értve most a szignum-} \quad (5.28)$$

függvényt, hogy $\operatorname{sgn}(0) = 0$.

• **Kiegészítés:** belátjuk, hogy valóban létezik az előző pontbeli (5.23) határérték, vagyis az ott vizsgált $\lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty} \int_a^b$ „improprius integrál”. (Ezt tudva tudhatjuk azt is róla, hogy ő egyenlő a kiszámolt $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R$ határértékkel.) Bármilyen olyan $[b_1, b_2]$ intervallumra, amire $0 \notin [b_1, b_2]$, egy (az $e^{i\omega x}$ -et deriváltak tekintett) parciális integrálásos „előkezeléssel”, majd durva felülbecslésekkel

$$\begin{aligned} \left| \int_{b_1}^{b_2} \frac{x e^{i\omega x}}{x^2 + \alpha^2} \right| &= \left| \left(\frac{1}{i\omega} \frac{b_2 e^{i\omega b_2}}{b_2^2 + \alpha^2} - \frac{1}{i\omega} \frac{b_1 e^{i\omega b_1}}{b_1^2 + \alpha^2} \right) - \int_{b_1}^{b_2} dx \frac{e^{i\omega x}}{i\omega} \frac{\alpha^2 - x^2}{(x^2 + \alpha^2)^2} \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{1}{i\omega} \frac{b_2 e^{i\omega b_2}}{b_2^2 + \alpha^2} \right| + \left| \frac{1}{i\omega} \frac{b_1 e^{i\omega b_1}}{b_1^2 + \alpha^2} \right| + \int_{b_1}^{b_2} dx \left| \frac{e^{i\omega x} (\alpha^2 - x^2)}{i\omega (x^2 + \alpha^2)^2} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{|\omega|} \left[\frac{1}{|b_1|} + \frac{1}{|b_2|} + \int_{b_1}^{b_2} dx \frac{1}{x^2} \right] = \frac{1}{|\omega|} \left[\frac{1}{|b_1|} + \frac{1}{|b_2|} + \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2} \right] \leq \frac{1}{|\omega|} \left[\frac{2}{|b_1|} + \frac{2}{|b_2|} \right]. \end{aligned}$$

A lényeg tehát: az integrálunk „elég messzi darabja már elég kicsi”, ∞ felé és $-\infty$ felé is. Ebből már következik, hogy létezik az összes állított integrálhatárérték mindenféle $a \rightarrow -\infty$, $b \rightarrow \infty$ határátmenetek esetén. (A lényeg tényleg ez, de konkrétabb érveléshez a konvergenciára vonatkozó néhány alapvető tudnivalót: az *átviteli elvet* és a sorozatok konvergenciájának *Cauchy-kritériumát* kell tudni; ezekről ld. a B.1. és a B.3. függelék szakaszokat.)

* * *

• Újabb idevágó alkalmazás: a reziduummétellel kombinálva a **tg z**, **ctg z**, **th z**, **cth z** függvények menetét bizonyos „**algebrai**” **sorösszegeket** kényelmesen tudunk kezelni. Példa (itt $\alpha > 0$ valós):

$$\text{Állítás:} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2} = \frac{\pi}{2\alpha} \operatorname{ch}(\pi\alpha) - \frac{1}{2\alpha^2}. \quad (5.29)$$

A módszer lényege: a $\operatorname{ctg}(\pi z) \equiv \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$ függvényről (a korábbi 2.5. és 4.5. szakaszok végei felé a $\operatorname{tg} z \equiv \frac{\sin z}{\cos z}$ függvényre látottakat értelemszerűen átírva) a következőket tudhatjuk:

1. csak a $z=n$, $n \in \mathbb{Z}$ valós egész helyeken nem differenciálható, ezeken a helyeken pedig elsőrendű pólusai vannak mindegyikben $\frac{1}{\pi}$ reziduummal,
2. a pólusoktól, azaz most a valós tengelytől „tisztos távolságban” már korlátos: ha $z \equiv x+iy$, akkor ha $|y| > L$ valamilyen $L > 0$ -val, akkor már van olyan $K > 0$, hogy $|\operatorname{ctg}(\pi(x+iy))| \leq K$. Továbbá minden fix x esetén ha $y \rightarrow \infty$, akkor a $\operatorname{ctg}(\pi(x+iy))$ függvényünk konstas $\frac{1}{i}$ értékhez tart.

Elsőre talán meglepő, de az analitikus függvények ismert „merevsége” miatt talán mégsem az, hogy igaz ez „fordítva” is: ha ezt a két tulajdonságot megköveteljük egy függvénytől, akkor nincs is más választásunk, mint éppen ez a $\operatorname{ctg}(\pi z)$ függvény.⁵²

⁵²Ha kikötjük (ami $\operatorname{ctg}(\pi z)$ -re teljesül), hogy a keresett függvény valós 1 szerint periodikus legyen, akkor így érvelhetünk. Egy másik, a mondott tulajdonságokkal bíró függvénynek és $\operatorname{ctg}(\pi z)$ -nek a különbségének az $n \in \mathbb{Z}$ helyek megszüntethető szingularitásai lennének: ezeket megszüntetve egészfüggvényt kapnánk, ami korlátos (a valós tengely véges környezetében a periodikusság és a folytonosság miatt, attól távolodva pedig a megkövetelt korlátosság miatt), így Liouville tétele miatt mindenhol konstans lenne, de ez a konstans csak nulla lehet a határozott $y \rightarrow \infty$ -beli határérték miatt. Komplikáltabban, de akkor is belátható ez az egyértelműség, ha nem teszünk fel eleve periodikusságot (hanem csak következmény lesz, hiszen az egyértelműen meghatározódó $\operatorname{ctg}(\pi z)$ tényleg periodikus).

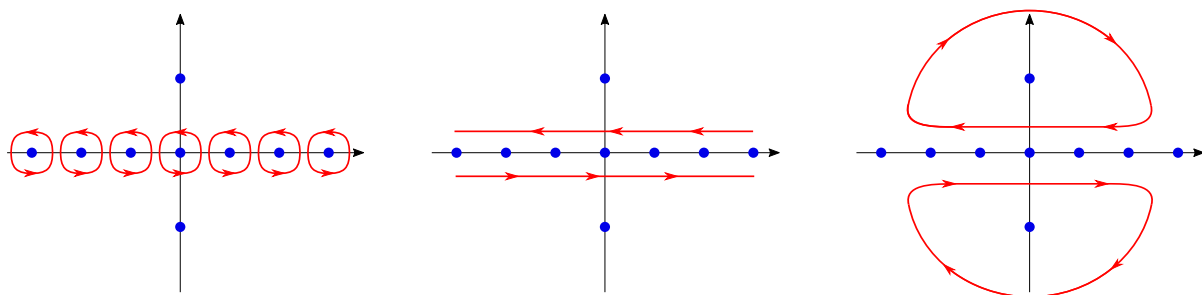
Egy olyan útra vett integrál, ami pozitív irányban megkerüli az összes pólust, az ezekbeli reziduumok (végtelen) összegével fejezhető ki: tekintsünk egy ilyen γ utat és a következő függvényt:

$$f(z) = \frac{\operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2 + \alpha^2} \Rightarrow \oint_{\gamma} dz f(z) = 2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Res} f|_{z=n} = 2\pi i \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi n^2 + \alpha^2}. \quad (5.30)$$

Az $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, $g(z) = \frac{\cos(\pi z)}{z^2 + \alpha^2}$, $h(z) = \sin(\pi z)$, és ebből $h'(z) = \pi \cos(\pi z)$ beazonosítással ez az f olyan volt, hogy a vizsgált $z=n$ pólusokban g sima, h -nak egyszeres zérushelyei vannak: a reziduumot $\frac{g}{h'}$ módon számolhattuk, így tényleg mejelentek a plusz szorzó, $\frac{1}{z^2 + \alpha^2}$ itteni értékei. Sikerült tehát (majdnem) a keresett sorösszeget egy komplex integrállal kifejezni.

Közben észrevehettük, hogy a felírt $f(z)$ -nek még a plusz szorzóból származóan $z = \pm i\alpha$ -ban is pólusai vannak. Az jön most, hogy (rutinosan mondva) „átdobjuk ezekre” az integrációs utat.

Először is a $z=n$ -eket megkerülő utakat „összeolvaszthatjuk” a valós tengely felett és alatt egymással szemben haladó két úttá: hogy tényleg a keresett sorösszeget kapjuk a felírt módon, ezeknek *nem szabad* „megkerülniük” a $z = \pm i\alpha$ pólusokat. Másodsor is az utat bezárhatjuk két nagy félkörrel, remélve, hogy $R \rightarrow \infty$ -nél nullához tart a rájuk vett integrál. Valóban, a valós tengelytől legalább véges távolságra (a kapott egyenes utakon vagy azoktól kintebb) $\operatorname{ctg}(\pi z)$ korlátos, $\frac{1}{z^2 + \alpha^2}$ pedig úgy csökken, mint $\sim \frac{1}{|z|^2}$; a (πR hosszúságú) félköríven $|z|=R$, így összerakva a szokásos integrálbecslés azt adja, hogy tényleg, $R \rightarrow \infty$ -re a félkörökre vett integrál nullához tart.



38. ábra. A tárgyalt sorösszeg levezetéséhez kellő integrációsút-átalakítás.

Az így kapott (két darabból álló) út viszont éppen csakis a „kihagyott” $\pm i\alpha$ pólusokat kerüli meg, láthatóan fordított, azaz *negatív irányítással*: így tehát az $f(z)$ imént felírt körintegráljára

$$\oint_{\gamma} dz f(z) = -2\pi i \cdot \operatorname{Res} f|_{i\alpha} - 2\pi i \cdot \operatorname{Res} f|_{-i\alpha} = -2\pi i \left(\frac{\operatorname{ctg}(i\pi\alpha)}{2i\alpha} + \frac{\operatorname{ctg}(-i\pi\alpha)}{-2i\alpha} \right) = \frac{2\pi i \operatorname{ch}(\pi\alpha)}{\alpha \operatorname{sh}(\pi\alpha)}.$$

A reziduumszámolásban itt a $\operatorname{ctg}(\pi z)$ -t tekinthetjük a sima számlálónak, $z^2 + \alpha^2$ -et pedig az egyszeres zérushelyű nevezőnek; ebből kijön. Idehozva a fentebbi (5.30) képletet arra jutunk (az utolsó lépésben levonva az $n=0$ -s tagot és felezve, hogy a pozitív n -ekre vett összeget kapjuk), hogy

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2} = \frac{\pi \operatorname{ch}(\pi\alpha)}{\alpha \operatorname{sh}(\pi\alpha)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2} = \frac{\pi \operatorname{ch}(\pi\alpha)}{2\alpha \operatorname{sh}(\pi\alpha)} - \frac{1}{2\alpha^2}, \quad \text{kész.} \quad (5.31)$$

• Hasonló módszerrel, a $\frac{\operatorname{ctg}(\pi z)}{z^4 + \alpha^4}$ függvénnyel dolgozva levezethetjük a következőt is (tegyük is meg!):

$$\text{Állítás:} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + \alpha^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}\alpha^3} \cdot \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{2}\pi\alpha) + \sin(\sqrt{2}\pi\alpha)}{\operatorname{ch}(\sqrt{2}\pi\alpha) - \cos(\sqrt{2}\pi\alpha)} - \frac{1}{2\alpha^4}. \quad (5.32)$$

Úgy tűnhet, hogy „kiszámoltuk” az (5.29)-ben és (5.32)-ben felírt sorösszegeket; bőven előfordulhat, hogy fordítva, egy numerikus program a ctg, cth függvényeket épp ilyen és hasonló végtelen sorösszegeket kombinálva számítja ki konkrétan. Mindenesetre érdekes *átalakításokat* láttunk.

• **Megjegyzés:** a levezett (5.29) és (5.32) eredményekben közös nevezőre hozva, majd a számláló és a nevező sorfejtésével és/vagy l'Hospital-szabállyal elvégezhetjük az $\alpha \rightarrow 0$ határátmeneteket; ez történik az alábbi 2. lépésekben. A következő **félíg-meddig híres** jól ismert **képletek** adódnak:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{n^2 + \alpha^2} \stackrel{1.}{=} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2}, \quad \stackrel{2.}{\Rightarrow} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad (5.33)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{n^4 + \alpha^4} \stackrel{1.}{=} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + \alpha^4}, \quad \stackrel{2.}{\Rightarrow} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^2}{90}. \quad (5.34)$$

Persze (remélhetőleg szöveget ütött a fejünkbe!) nem magától értetődő, hogy (az 1. lépésekben) tényleg megcserélhettük az $\alpha \rightarrow 0$ határértékképzést és a végtelen összegzést. Azonban igaznak bizonyul ez, szokásosan a *Lebesgue-tételre* (ld. a 3.2. szakaszt) hivatkozva, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sorösszeget mint összegzést egység szélességű de a_n magasságú lépcsőkből álló függvény 0-tól ∞ -ig vett integráljaként fogjuk fel: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \int_0^{\infty} dx f(x)$, ahol $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{[n-1, n]}(x)$. A most vizsgált konkrét eseteinkben az α -független közös „integrálható” (azaz: összegezhető) majoráns mindkét esetben a határérték (az α -t leahagyva írt összegzendő sorozat) mint integrandus lesz.

5.3. Egyszerű típusú vágások

A reziduúmtétel ugye abból származott, hogy az integrációs utat (ami akár több izolált szingularitást is megkerül) „rádarabolhatjuk” az egyes izolált szingularitásokra, amelyekből a reziduumaik járulékaik maradnak az eredményben. Egyszerű esetekben ha a vizsgált $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvénynek vágásai (is) vannak, akkor is érdekes átalakításokra nyílik lehetőség, ha az utat a vágásra „ráhúzzuk”.

• Kezdjük **racionális törtfüggvények 0-tól ∞ -ig vett** integráljaival: $\int_0^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = ?$, ahol P és Q polinomok. Ahhoz, hogy az integrál létezzen, az kell ugye, hogy az integrandus

- 1.) *lokálisan* integrálható legyen \mathbb{R}_0^+ -n, konkrétan: ne legyen itt pólusa (\mathbb{R}^- -on akár lehet is), és
- 2.) legalább $\frac{1}{x^2}$ szerint csökkenjen: $Q(x)$ legalább kettővel magasabb fokú legyen, mint $P(x)$.

Ha az integrandus páros függvény, akkor megfelezve a(z előző szakaszbeli módszerrel kiszámolható) $\int_{-\infty}^{\infty}$ integrált készen vagyunk. A **komplex logaritmusfüggvény** és vágása azonban nem páros esetben is kiségit most. Az ötlet: az $\text{Ln}(-z)$ függvénynek éppen \mathbb{R}^+ -on van vágása, és

$$\text{Ha } x \in \mathbb{R}^+, \text{ és } \begin{cases} z = x + i\varepsilon, \text{ akkor } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Ln}(-z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Ln}(-x - i\varepsilon) = \ln x - i\pi, \\ z = x - i\varepsilon, \text{ akkor } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Ln}(-z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Ln}(-x + i\varepsilon) = \ln x + i\pi. \end{cases} \quad (5.35)$$

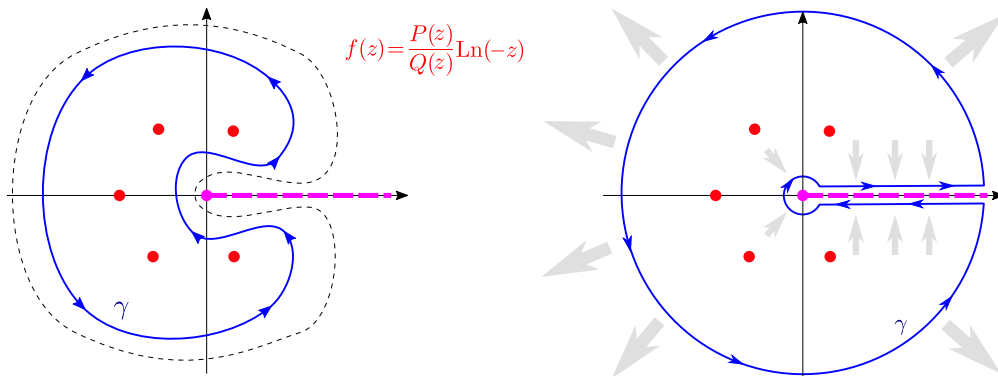
Itt a 0^+ azt jelenti, hogy ε -nal \mathbb{R}^+ felől tartunk 0-hoz. Ha tehát felülről illetve alulról tartunk z -vel a pozitív valós x -hez, akkor $\text{Ln}(-z)$ valós része $\ln x$ -hez tart, képzetes része viszont (a fázismegállapodás miatt) $-\pi$ -hez illetve π -hez, *x -től függetlenül*. Ez adja az ötletet: ha

$$\int_0^{\infty} dx \frac{P(x)}{Q(x)} = ? \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{tekintsük a következő} \\ \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ függvényt:} \end{array} \quad f(z) := \frac{P(z)}{Q(z)} \text{Ln}(-z), \quad (5.36)$$

és integráljuk ezt egy olyan pozitív irányítású zárt γ görbére, amin *belül* van $f(z)$, azaz $\frac{P(z)}{Q(z)}$ összes

pólusa, de a vágást ízlésesen elkerüli. Ilyen γ görbe bennfoglalható olyan *nyílt* halmazban, amin az $f(z)$ -nk meromorf (és így használhatjuk a reziduomtételt): az integrál értéke

$$\oint_{\gamma} dz f(z) = 2\pi i \cdot \sum_j \operatorname{Res} f(z)|_{z=z_j}, \quad \text{ahol } z_j\text{-k a pólusok } (j = 1 \dots N). \quad (5.37)$$



39. ábra. A most tárgyalt integrációs út. Bal oldal: annak illusztrálására, hogy alkalmazhatjuk a reziduomtételt. Jobb oldalon: az út transzformációja, amivel a keresett integrálra jutunk.

Kiderül viszont, hogy ez az eredmény már megadja a kérdéses integrálunkat. Ehhez álljon a γ görbe egy R sugarú nagy körívből, egy a $z=0$ elágazási pont körüli r sugarú kis körívből, valamint a vágás fölött illetve alatt ε -nyira lévő szakaszokból, a felsőt $+\infty$ felé („oda”), az alsót $+\infty$ felől („vissza”) irányítva. Az $\varepsilon \rightarrow 0$, $r \rightarrow 0$ és $R \rightarrow \infty$ határátmenek kellenek majd: a visszatérő utat végtelenbe visszük, a két szárát pedig ráhúzzuk a vágásra (és az elágazási pontra). Mivel az utat tényleg differenciálható tartományokon át mozgatjuk, igaz marad a fenti (5.37) eredmény, ugyanakkor

$$\oint_{\gamma} dz f(z) = \int_{\text{„oda”}} dz f(z) + \int_{\text{nagy ív}} dz f(z) + \int_{\text{„vissza”}} dz f(z) + \int_{\text{kis ív}} dz f(z).$$

A szakaszdarabok adják a lényegét. Az ezeken lévő számok $x+i\varepsilon$ illetve $x-i\varepsilon$ alakba írhatók:

$$\begin{aligned} \int_{\text{„oda”}} dz f(z) &= \int_r^R dx \frac{P(x+i\varepsilon)}{Q(x+i\varepsilon)} \operatorname{Ln}(-x-i\varepsilon) &\Rightarrow & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\text{„oda”}} dz f(z) = \int_r^R dx \frac{P(x)}{Q(x)} (\ln x - i\pi), \\ \int_{\text{„vissza”}} dz f(z) &= \int_R^r dx \frac{P(x-i\varepsilon)}{Q(x-i\varepsilon)} \operatorname{Ln}(-x+i\varepsilon) &\Rightarrow & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\text{„vissza”}} dz f(z) = -\int_r^R dx \frac{P(x)}{Q(x)} (\ln x + i\pi); \end{aligned}$$

a másodikonál irányt fordítva. Kihasználtuk az Ln látott (5.35) határértékeit, és hogy $\frac{P(z)}{Q(z)}$ az \mathbb{R}^+ tengely környékén folytonos is: ottani határértéke ottani értékével egyenlő. Összeadva:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\text{„oda”}} dz f(z) + \int_{\text{„vissza”}} dz f(z) \right\} = \int_r^R dx \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot -2\pi i. \quad (5.38)$$

Kiegészítés: kihasználtuk persze, hogy a szakaszainkra vett integráloknál az $\varepsilon \rightarrow 0$ (pontonkénti) határértékfüggvény integrálja megegyezik az integrál $\varepsilon \rightarrow 0$ határértékével. Ezt szokásosan a *Lebesgue-tétel* alapján tudhatjuk, ha van *minden szóba jövő* ε -ra közös integrálható majoráns. Nem vezetem most itt ezt teljesen végig, csak a főbb vezérfonalakat írom le, ami alapján bárki meggyőzheti magát: 1.) csak véges sok pólus van, így a legközelebbi is legalább véges messze van a vágástól; indítsuk olyan kicsi ε_0 -tól az $\varepsilon \rightarrow 0$ átmenetet, hogy az \mathbb{R}^+ körüli $2\varepsilon_0$ széles (zárt) sávon már nincs pólus: ekkor $\left| \frac{P(x \pm i\varepsilon)}{Q(x \pm i\varepsilon)} \right| \leq \frac{K}{1+x^2}$ valamilyen K -val, mert a tört legalább $\sim \frac{1}{|z|^2}$ módon

csökken, és a pólusoktól biztonságosan messze vagyunk. 2.) minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén durva becsléssel is $|\operatorname{Ln}(-x+i\varepsilon)| \leq |\ln \sqrt{x^2+\varepsilon^2}| + \pi$, hiszen $|\arg z| \leq \pi$ nyilván igaz; azt is gondoljuk ki ebből, hogy $\ln \sqrt{x^2+\varepsilon^2}$ -et minden előkerülő ε esetén egyszerre felülbecsülhetjük $c_1 \cdot |\ln|x|| + c_2$ -vel valamilyen c_1, c_2 konstansokkal. 3.) $\frac{K(c_2+\pi)}{1+x^2}$ is integrálható, és (noha $x=0$ -ban ∞ -hez tart) $|\frac{Kc_1 \ln|x|}{1+x^2}|$ is. A mondottakat összerakva tényleg kaphatunk keresett integrálható majoránst: készen vagyunk.

• Az imént kapott (5.38) képlet lényege: örülhetünk, mert kiesett az $\ln x$, és lényegében éppen az eredetileg keresett integrál maradt a vágás fölött és alatt futó két szakaszra vett integrálból.

Ezután végezzük el az $R \rightarrow \infty$ és az $r \rightarrow 0$ határátmeneteket. A szokásos integrálbecslés azt adja, hogy a „maradék”, a körívek járuléka eltűnik itt ekkor (ld. alább; az „újdonságot” az simítja el, hogy a logaritmus ugyan 0 és ∞ felé is végtelenhez tart, de *minden hatványfüggvényénél lassabban*). Így a zárt görbére vett körintegrálunk, amelynek értéke ugye (5.37), $r \rightarrow 0$ és $R \rightarrow \infty$ esetén éppen a keresett integrál $-2\pi i$ -szerese. Összerakva:

$$\underline{\underline{\int_0^\infty dx \frac{P(x)}{Q(x)} = - \sum_j \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} \operatorname{Ln}(-z) \right) \Big|_{z=z_j}}}, \quad \begin{array}{l} \text{ahol végigfutunk az} \\ \text{összes } z_j \text{ póluson} \\ \text{(a } Q \text{ zérushelyein).} \end{array} \quad (5.39)$$

Ha $Q(z)$ egy zérushelye egyszeres, akkor ott elsőrendű a pólus, és ilyenkor az erre az esetre vonatkozó reziduum-képletből könnyű látni, hogy az $\operatorname{Ln}(-z)$ szorzó csak az ő ott felvett értékével szorozza az enélküli $\frac{P(z)}{Q(z)}$ tört reziduumát. Többrendű pólus esetén viszont az $\operatorname{Ln}(-z)$ jelenléte jobban „beszól” a reziduum értékébe (a deriváltakon keresztül).

• **Példák** következnek az iménti képlet alkalmazására; az elsőt kicsit részletesebben kifejtsük:

$$\int_0^\infty dx \frac{x}{x^5+a^5} =? \quad \begin{array}{l} \text{a csökkenés elég gyors; nincs} \\ \text{pólus } \mathbb{R}_0^+ \text{-on: minden rendben.} \end{array}$$

Az $f(z)$ függvény, amelynek a reziduumai kellenek, a következő; a reziduumokat is könnyedén megkapjuk, mert a pólusok egyszeresek:

$$f(z) = \frac{z \operatorname{Ln}(-z)}{z^5+a^5} \Rightarrow \operatorname{Res} f \Big|_{z_k} = \frac{z_k \operatorname{Ln}(-z_k)}{5z_k^4}.$$

A z_k pólusok a nevező zérushelyeiben, az a sugarú körön szabályos ötszög alakban vannak:

$$z_1 = ae^{\frac{1}{5}i\pi}, \quad z_2 = ae^{\frac{3}{5}i\pi}, \quad z_3 = -a, \quad z_4 = ae^{-\frac{3}{5}i\pi}, \quad z_5 = ae^{-\frac{1}{5}i\pi}.$$

Figyelem! Vigyázzunk $\operatorname{Ln}(-z_k)$ -knál a fázis helyes megállapítására; ugyebár masszívan támaszkodtunk a fázisugrás-konvenciónkra éppen az alkalmazandó (5.39) képlet levezetésekor is. Például z_1 -re $\operatorname{Ln}(-z_1) = \ln a - \frac{4}{5}i\pi$. Összeszedve az összeset:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx \frac{x}{x^5+a^5} &= - \sum_{k=1}^5 \operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=z_k} = - \sum_{k=1}^5 \frac{z_k \operatorname{Ln}(-z_k)}{5z_k^4} = \frac{1}{5a^5} \sum_{k=1}^5 z_k^2 \operatorname{Ln}(-z_k) = \\ &= \frac{1}{5a^3} \left[e^{\frac{2}{5}i\pi} \left(\ln a - \frac{4}{5}i\pi \right) + e^{\frac{6}{5}i\pi} \left(\ln a - \frac{2}{5}i\pi \right) + \ln a + e^{-\frac{6}{5}i\pi} \left(\ln a + \frac{2}{5}i\pi \right) + e^{-\frac{2}{5}i\pi} \left(\ln a + \frac{4}{5}i\pi \right) \right]; \end{aligned}$$

közben ügyesen kihasználtuk, hogy most mindig $z_k^5 = -a^5$. Az $\ln a$ gyanús; csoportosítsunk így:

$$\int_0^\infty \frac{dx x}{x^5+a^5} = \frac{\ln a}{5a^3} \left(e^{\frac{2}{5}i\pi} + e^{\frac{6}{5}i\pi} + 1 + e^{-\frac{6}{5}i\pi} + e^{-\frac{2}{5}i\pi} \right) + \frac{i\pi}{5a^3} \left(\frac{2}{5}e^{-\frac{6}{5}i\pi} - \frac{2}{5}e^{\frac{6}{5}i\pi} + \frac{4}{5}e^{-\frac{2}{5}i\pi} - \frac{4}{5}e^{\frac{2}{5}i\pi} \right).$$

Az $\ln a$ -s első tagban a zárójelben egy szabályos ötszög öt csúcsába mutató komplex számok összege van, ami nulla. A második tagban pedig két szinuszt-érték összege szerepel:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx x}{x^5+a^5} = \frac{2\pi}{25a^3} \left(2 \sin\left(\frac{6}{5}\pi\right) + 4 \sin\left(\frac{2}{5}\pi\right) \right) = \frac{4\pi}{25a^3} \left(2 \sin\left(\frac{2}{5}\pi\right) - \sin\left(\frac{1}{5}\pi\right) \right),$$

Ez már „elfogadható” eredmény: látszik, hogy valós pozitív (ahogy kell). A $\frac{\pi}{5} = 36^\circ$ szög került elő; tudva, hogy $\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$, és ebből $\cos 36^\circ$ -ot és $\sin 36^\circ$ -ot kifejezve arra jutunk, hogy

$$\int_0^{\infty} dx \frac{x}{x^5+a^5} = \frac{4\pi}{25a^3} \sin 36^\circ (4 \cos 36^\circ - 1) = \frac{\sqrt{5}\pi}{50a^3} (\sqrt{5}-1) (\sqrt{10+2\sqrt{5}} - 1).$$

• Gyakorlásképpen végigszámolhatjuk az alábbiakat is. Ellenőrizendő ugye, hogy teljesülnek a szakasz elején felidézett feltételek (=létezik az integrál). Ezután csak alkalmazni kell a fentebb levezetett (5.39) formulát, és esetleg (mint előbb is) trükkösen egyszerűsíteni. Jó önellenőrzési lehetőség, hogy valós függvény valós integrálja tényleg valós, pozitív függvényé pozitív lett-e. Az utolsó példa páros függvény; a korábbi módszerrel is kiszámolható integrál fele adódik most is. (Akinek van kedve, végiggondolhatja, hogy ez milyen módon lesz tényleg igaz minden ilyen esetben.) Az utolsó előttiben pedig többrendű pólusok vannak, így a reziduókat az elsőrendű pólusokra vonatkozó formulánál bonyolultabb módon kell kiszámítani.

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{x^4+a^4} = \frac{\pi}{4a^2}, \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+a^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}a^2}, \quad \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^3+a^3)^3} = \frac{1}{3a^3}, \quad \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^6+a^6} = \frac{\pi}{6a^3}.$$

További kellemes körülmény ezeknél a most felírt fajta integráloknál (és néhány korábbinál is), hogy az integrandusokban egyedül az a a „méretskálát hordozó” paraméter (például arra gondolhatunk, hogy a egy hosszúság dimenziójú állandó, és x is hosszúság): ilyenkor az $x = at$ változóhelyettesítéssel a t változóban már olyan integrálra jutunk, aminek eredménye egy jól meghatározott (csak a függvényalaktól, pl. az előkerült kitevőktől függő) szám; az a szerepe pedig arra korlátozódik, hogy a végeredményben egy darab megfelelő kitevőjű szorzót ad. (Innen is tudhattuk előre, hogy az $\ln a$ -s tagok ki fognak esni az előző pont részletesen végigszámolt példájában.)

• A logaritmus vágása tehát „kellemesen használható”: a két oldalon felvett függvényértékek különbsége $2\pi i$. **Nem egész kitevőjű hatványfüggvények vágásai** is hasonlóan lekezelhetők: emlékezzünk, hogy $z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$, ebből gondoljuk ki, hogy a vágást megközelítve arra jutunk, hogy

$$\text{ha } x > 0 \text{ pozitív valós, akkor } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (-x \pm i\varepsilon)^\alpha = x^\alpha \cdot e^{\pm i\pi\alpha}. \quad (5.40)$$

Az $x \pm i\varepsilon$ -t z -nek hívva ha z -vel az \mathbb{R}^- féltengelyhez tartunk, z^α határértéke a pozitív valós alapú $|z|^\alpha$ megszorozva $e^{i\pi\alpha}$ -val (felül) illetve $e^{-i\pi\alpha}$ -val (alul). Ezek csakis $\alpha \in \mathbb{Z}$ esetén egyenlők; ha viszont $\alpha \notin \mathbb{Z}$, akkor z^α -nak tényleg vágása van \mathbb{R}^- -on, és meg is kaptuk a két oldali határértéket. Ha tehát egy integrációs út a vágás egyik oldalán oda, másikon vissza fut, ezen szorzókkal szorzott ugyanolyan valós integrál kerül elő itt és ott. Az alábbi példában ezt tudva boldogulhatunk.

$$\text{Legyen } a > 0 \text{ valós, } \alpha \in \mathbb{C} \text{ pedig elő-} \quad \int_0^{\infty} dx \frac{x^\alpha}{x^2+a^2} = ? \quad (5.41)$$

szörre határozottan nem egész szám;

Ellenőrizzük, hogy pozitív valós x -re (amik előkerülnek) $|x^\alpha| = x^{\Re(\alpha)}$. A nevezős tényező $x \rightarrow \infty$

esetén $\sim \frac{1}{x^2}$ módjára csökken, $x=0$ -ban folytonos. Ezek miatt ha $\Re(\alpha) < -1$, akkor az integrandus $x=0$ környékén nem integrálható, ha pedig $\Re(\alpha) > 1$, akkor $x \rightarrow \infty$ felé nem az (nem csökken elég gyorsan). Akkor létezik tehát az integrál, ha $-1 < \Re(\alpha) < 1$; a továbbiakban ezt tesszük fel.

Adódik, hogy a következő $f(z)$ függvényt tekintjük: ennek \mathbb{R}^+ -on van vágása,

$$f(z) := \frac{(-z)^\alpha}{z^2+a^2}; \quad \begin{array}{l} \text{ennek pólusai vannak,} \\ \text{valamint vágása } \mathbb{R}_0^+ \text{-on.} \end{array} \quad (5.42)$$

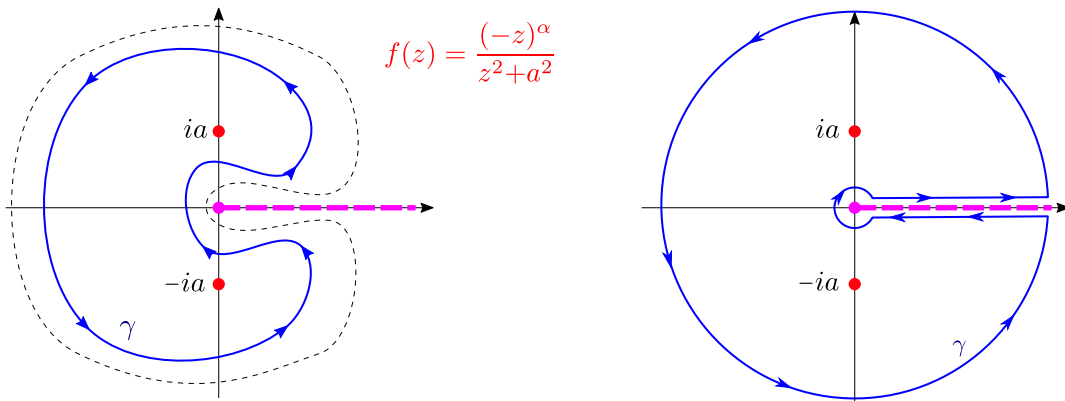
Ebből kihozhatjuk a keresett integrált, ha az iménti 39. ábrán látott típusú γ útra integráljuk:

$$\oint_\gamma dz f(z) = \int_{\text{„oda”}} dz f(z) + \int_{\text{nagy ív}} dz f(z) + \int_{\text{„vissza”}} dz f(z) + \int_{\text{kis ív}} dz f(z).$$

A vágásra ráhúzandó, attól $\pm\varepsilon$ távolságban menő (az r kis sugártól az R nagy sugárig kiterjedő) két szárat itt is úgy paraméterezhetjük, mint fent, és a határértéket is megállapíthatjuk:

$$\begin{aligned} \int_{\text{„oda”}} dz f(z) &=_{z=x+i\varepsilon} \int_r^R dx \frac{(-x-i\varepsilon)^\alpha}{(x+i\varepsilon)^2+a^2} \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\text{„oda”}} dz f(z) = \int_r^R dx \frac{x^\alpha e^{-i\pi\alpha}}{x^2+a^2}, \\ \int_{\text{„vissza”}} dz f(z) &=_{z=x-i\varepsilon} \int_R^r dx \frac{(-x+i\varepsilon)^\alpha}{(x-i\varepsilon)^2+a^2} \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\text{„vissza”}} dz f(z) = -\int_r^R dx \frac{x^\alpha e^{i\pi\alpha}}{x^2+a^2} \\ \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\text{„oda”}} dz f(z) + \int_{\text{„vissza”}} dz f(z) \right\} &= (e^{-i\pi\alpha} - e^{i\pi\alpha}) \int_r^R dx \frac{x^\alpha}{x^2+a^2}; \end{aligned}$$

az imént a logaritmikus esethez tartozó, az (5.38) képlet után leírthoz hasonló módon belátható Lebesgue-tétellel, hogy itt is a (ráhúzással kapott) függvényhatárérték integrálja egyenlő az integrál határértékével.⁵³



40. ábra. A mostani (hatványfüggvényes) példában ugyanarra az útra van szükség, mint fentebb.

Azt is beláthatjuk itt (ld. alább is), hogy éppen akkor, ha α eleget tesz a mondott $-1 < \Re(\alpha) < 1$

⁵³ Itt is (ugyanúgy, mint fentebb, az (5.38) egyenlet után mondott érvelésnél) ha elég kicsi ε_0 -tól (azaz: a vágáshoz elég közlelről) indítjuk az $\varepsilon \rightarrow 0$ ráhúzást, akkor nem zavarunk a pólusok, érvényes a $|\frac{P(x \pm i\varepsilon)}{Q(x \pm i\varepsilon)}| \leq \frac{K}{1+x^2}$ becslés. Továbbá $|(-x \pm i\varepsilon)^\alpha| \leq (\sqrt{x^2 + \varepsilon^2})^{\Re(\alpha)} e^{\pi|\Im(\alpha)|}$ minden előkerülő x -re és ε -ra, mert arg nagysága legfeljebb π . Ide kellene minden $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ esetén majoráns: kigodolhatjuk, hogy ha $\Re(\alpha) < 0$, akkor $(\sqrt{x^2 + \varepsilon^2})^{\Re(\alpha)} \leq x^{\Re(\alpha)}$, ha pedig $\Re(\alpha) \geq 0$, akkor $(\sqrt{x^2 + \varepsilon^2})^{\Re(\alpha)} \leq (\sqrt{x^2 + \varepsilon_0^2})^{\Re(\alpha)}$. Mindkét esetben az iménti $\frac{K}{1+x^2}$ -tel szorozva $x \in [0, \infty]$ -re integrálható függvényt kapunk (ugyebár $-1 < \Re(\alpha) < 1$ volt). Van tehát integrálható majoráns, a ráhúzás közben jogosan írtunk integrál határértékét határérték integrálja helyett.

feltételnek, a nagy ívre és a kis ívre vett járulékok nullához tartanak.

$$\begin{array}{l} \text{Ezek miatt } r \rightarrow 0\text{-t és } R \rightarrow \infty\text{-t} \\ \text{véve (és a szinuszt felismerve)} \end{array} \quad \oint_{\gamma} dz f(z) = -2i \sin(\pi\alpha) \int_0^{\infty} dx \frac{x^{\alpha}}{x^2+a^2},$$

másrészt viszont a reziduomtételből (mivel a görbe itt is pólusokat kerül meg, még hozzá most a $\pm ia$ -ban lévőköt, melyek elsőrendűek, így a reziduumokat egyszerűen kiszámíthatjuk)

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{2\pi i} f(z) = \text{Res } f|_{ia} + \text{Res } f|_{-ia} = \frac{(-ia)^{\alpha}}{2(ia)} + \frac{(ia)^{\alpha}}{2(-ia)} = \frac{a^{\alpha-1}}{2i} \left(e^{-\frac{i\pi\alpha}{2}} - e^{\frac{i\pi\alpha}{2}} \right) = -a^{\alpha-1} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right).$$

Közben ki kellett számolni i^{α} -t és $(-i)^{\alpha}$ -t (ez nem okoz gondot), és az eredményt egyszerűsíteni (ez sem). Az előzőeket is tudva így viszont készen vagyunk: arra jutunk (egyszerűsítve), hogy

$$\int_0^{\infty} dx \frac{x^{\alpha}}{x^2+a^2} = \frac{-2\pi i a^{\alpha-1} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}{-2i \sin(\pi\alpha)} = \frac{\pi a^{\alpha-1}}{2 \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}. \quad (5.43)$$

A követett módszer értelemszerűen alkalmazható másfajta $\int_0^{\infty} dx \frac{P(x)}{Q(x)} x^{\alpha}$ alakú integrálokra is.

* * *

• A szakaszban látott példákban kihasználtuk a logaritmusfüggvény és a hatványfüggvény esetében is, hogy az elágazási pont körüli kicsi illetve a visszatérő nagy körívek járuléka eltűnnek, ha $r \rightarrow 0$ és $R \rightarrow \infty$ (az integrációs útról ld. az iménti 39. és 40. ábrákat). Most megnézzük ezt részletesebben; később már elég felidézni ezt a „beidegződést”.

Kezdjük az *utóbb látott*, x^{α} -s esettel! Az integrál $\int_0^{\infty} dx \frac{P(x)}{Q(x)} x^{\alpha}$ alakú, ahol P és Q polinomok, viszont a P polinomot $a_k x^k$ monomok összegeként szétírva és az x^k -kat a törtkitevős x^{α} -ba beolvastva elég lesz az $\int_0^{\infty} dx \frac{x^{\alpha}}{Q(x)}$ alakú integrálokat tekinteni. (Az előbbi példa egyből ilyen volt.) Ha ezután Q -nak 0-ban zérushelye van, azaz belőle egy vagy több x szorzó kiemelhető, akkor azokat is „leolvaszthatjuk” x^{α} -ból; végül tehát elérhetjük, hogy a Q véges értékű legyen $x=0$ -ban.

Az $\int_0^{\infty} dx \frac{x^{\alpha}}{Q(x)}$ alakú integrált vizsgáljuk tehát (ahol Q -nak 0 nem zérushelye). Ahhoz, hogy létezzen az integrál, az kell, hogy Q -nak \mathbb{R}^+ -on se legyen zérushelye, valamint (mivel $|x^{\alpha}| = x^{\Re(\alpha)}$) hogy $\Re(\alpha) > -1$ legyen (az $x=0$ körüli integrálhatóság érdekében), és hogy $\deg(Q) - \Re(\alpha) > 1$ legyen (a ∞ -beli elég gyors csökkenés érdekében; itt $\deg(Q)$ a Q fokszámát jelöli. (A fentebbi példában $-1 < \Re(\alpha) < 1$ volt a feltétel; ez tényleg az ottani Q nevező $\deg(Q) = 2$ fokszámának megfelelően felírt mostani feltétel.)

A látott számolásban *először* húztuk rá a vágásra az út szárait úgy, hogy r még véges kicsi és R véges nagy. *Ezután* vettünk $r \rightarrow 0$ -t és $R \rightarrow \infty$ -t, amihez tehát a következőket kell belátni:

$$f(z) = \frac{(-z)^{\alpha}}{Q(z)} \quad \Rightarrow \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\text{kis ív}} dz f(z) = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\text{nagy ív}} dz f(z) = 0. \quad (5.44)$$

A Q fokszáma az $\frac{1}{Q}$ végtelenbeli csökkenésének ütemét is jellemzi: van olyan L konstans, amivel elég nagy $|z|$ -től kezdve már $\left| \frac{1}{Q(z)} \right| \leq \frac{L}{|z|^{\deg(Q)}}$. Továbbá $|(-z)^{\alpha}| = |z|^{\Re(\alpha)}$. A nagy ív kerülete pedig legfeljebb $2\pi R$, és ott $|z| = R$; arra jutunk így a szokásos integrálbecsléssel, hogy

$$\begin{array}{l} \text{elég nagy} \\ R \text{ esetén} \end{array} \quad \left| \int_{\text{nagy ív}} dz f(z) \right| \leq 2\pi R \cdot \frac{L}{R^{\deg(Q)}} \cdot R^{\Re(\alpha)} = 2\pi L \cdot R^{1+\Re(\alpha)-\deg(Q)}.$$

A Q fokszámára és az α -ra mondott iménti feltétel szerint az R itt megjelent kitevője negatív, vagyis a jobb oldali felülbecslő nullához tart $R \rightarrow \infty$ esetén, így a nagy ív járuléka is.

A kis ív kerülete legfeljebb $2\pi r$, és $z=0$ környékén $\frac{1}{Q(z)}$ folytonos: van $z=0$ környékén L' felső korlátja, amire ha $|z|$ elég kicsi, akkor $|\frac{1}{Q(z)}| \leq L'$. Továbbá most is $|(-z)^\alpha| = |z|^{\Re(\alpha)}$. Összerakva és kihasználva, hogy a kis íven $|z|=r$, a szokásos integrálbecsléssel

$$\begin{array}{l} \text{elég kicsi} \\ r \text{ esetén} \end{array} \quad \left| \int_{\text{kis ív}} dz f(z) \right| \leq 2\pi r \cdot L' \cdot r^{\Re(\alpha)} = 2\pi L' \cdot r^{\Re(\alpha)+1}.$$

Az r itt előkerült kitevője pozitív (mivel α -ra ez volt az egyik feltétel fentebb): emiatt a kis ív járuléka is nullához tart $r \rightarrow 0$ esetén. Elvarttuk tehát a szálakat.

Látni való, hogy az α -ra és a Q fokszámára az integrálhatóságból származó feltételek ugyanazok, mint amik kellettek az ívekre vonatkozó becsléseinknél. Például $\Re(\alpha) < -1$ esetén elromlana az $x=0$ körüli integrálhatóság, egyszersmind a kis ív járulékanak eltűnése sem lenne biztos.

- A racionális törtfüggvények integráljainak levezetéséhez a következő függvényt vizsgáltuk:

$$f(z) := \frac{P(z)}{Q(z)} \text{Ln}(-z); \quad \begin{array}{l} \text{ezt kellett a 39. ábrán} \\ \text{látható útra integrálni.} \end{array}$$

Az integrál létezéséhez kellő feltételek teljesülése esetén megállapíthatjuk itt, hogy

1. $\frac{P}{Q}$ folytonos a $z=0$ környékén: van olyan $L' > 0$, hogy elég kicsi $|z|$ -re $|\frac{P(z)}{Q(z)}| \leq L'$,
2. $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$, így van olyan $L > 0$, hogy elég nagy $|z|$ -re $|\frac{P(z)}{Q(z)}| \leq \frac{L}{|z|^n}$, ahol $n \geq 2$ egész.

A nagy és a kis ív járulékanak nullához tartásának belátásában itt a hatványfüggvényes esethez képest mintegy „nagyvonalúbbak lehetünk”. Tudjuk (és fentebb mondtuk is), hogy az $\ln x$ végtelenhez tartása $x \rightarrow 0$ illetve $x \rightarrow \infty$ esetén *lassabb minden hatványfüggvénynél*:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty, & \text{de bármilyen} \\ & \text{kicsi } \alpha > 0 \text{ ki-} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty, & \text{tevő esetén} \end{array} \quad \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^\alpha \ln x) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (x^{-\alpha} \ln x) = 0, \end{array} \quad (5.45)$$

és persze önmagában is igaz, hogy $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0$ és $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\alpha} = 0$. Továbbá: a komplex logaritmus képzetes része abszolútértékben legfeljebb π , emiatt $|\text{Ln}(z)| \leq |\ln|z|| + \pi$ bármilyen z -re, és természetesen ugyanez igaz $-z$ -vel is, hiszen $|-z| = |z|$. Ezzel az előzőek alapján

$$\begin{array}{ll} \text{bármilyen } \alpha > 0 \text{ va-} & \lim_{z \rightarrow 0} (|z|^\alpha \cdot |\text{Ln}(-z)|) = 0, \\ \text{lós kitevő esetén} & \lim_{z \rightarrow \infty} (|z|^{-\alpha} \cdot |\text{Ln}(-z)|) = 0. \end{array} \quad (5.46)$$

Adott $0 < \alpha < 1$ esetén van tehát olyan K , amivel elég nagy $|z|$ -től kezdve már $|z^{-\alpha} \text{Ln}(-z)| \leq K$, másrészt van olyan K' is, amivel minden elég kicsi $|z|$ -re $|z^\alpha \text{Ln}(-z)| \leq K'$. Az alábbiakban az „elég nagy $|z| \equiv R$ ” illetve az „elég kicsi $|z| \equiv r$ ” olyan korlátot jelentenek, hogy a most mondottak is és a fentebb megállapított $|\frac{P(z)}{Q(z)}| \leq \frac{L}{|z|^n}$ illetve $|\frac{P(z)}{Q(z)}| \leq L'$ becslések is már működjenek.

Az ígért nagyvonalúság: *bármilyen kicsi* $\alpha > 0$ kitevőt vehetünk, hogy ennyit „leharapjunk” $\frac{P(z)}{Q(z)}$ csökkenéséből illetve $z=0$ körüli felső korlátjából, és így a következő módon érvelhessünk:

$$\begin{array}{l} \text{ha } |z| \text{ elég nagy: } |f(z)| = \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \cdot |z^\alpha| \cdot |z^{-\alpha} \text{Ln}(-z)| \leq \frac{L}{|z|^n} \cdot |z|^\alpha \cdot K = \frac{KL}{|z|^{n-\alpha}}, \\ \text{ha } |z| \text{ elég kicsi: } |f(z)| = \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \cdot |z^{-\alpha}| \cdot |z^\alpha \text{Ln}(-z)| \leq L' \cdot |z|^{-\alpha} \cdot K' = K'L'|z|^{-\alpha}. \end{array}$$

Akármilyen kicsi $0 < \alpha < 1$ megfelelő, hacsak $n-\alpha > 1$ és $1-\alpha > 0$ teljesül: ekkor ugyanis a kapotkat a szokásos integrálbecslésbe betéve elég nagy $|z| \equiv R$ illetve elég kicsi $|z| \equiv r$ esetre (és a

körívek hosszait $2\pi R$ -rel illetve $2\pi r$ -rel felülbecsülve) valóban az adódik, amit akartunk:

$$\left| \int_{\text{nagy ív}} dz f(z) \right| \leq 2\pi R \cdot \frac{KL}{R^{n-\alpha}} = \frac{2\pi KL}{R^{n-\alpha-1}} \Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\text{nagy ív}} dz f(z) = 0,$$

$$\left| \int_{\text{kis ív}} dz f(z) \right| \leq 2\pi r \cdot K'L'r^{-\alpha} = 2\pi K'L'r^{1-\alpha} \Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\text{kis ív}} dz f(z) = 0.$$

* * *

- Rutinnövelésként jöjjön még egy példa-integrál; itt sem segít ki a Newton-Leibniz-formula.

Legyenek $a > 0$ és $b > 0$ valós paraméterek; a kérdés:
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\ln(x^2+a^2)}{x^2+b^2} = ? \tag{5.47}$$

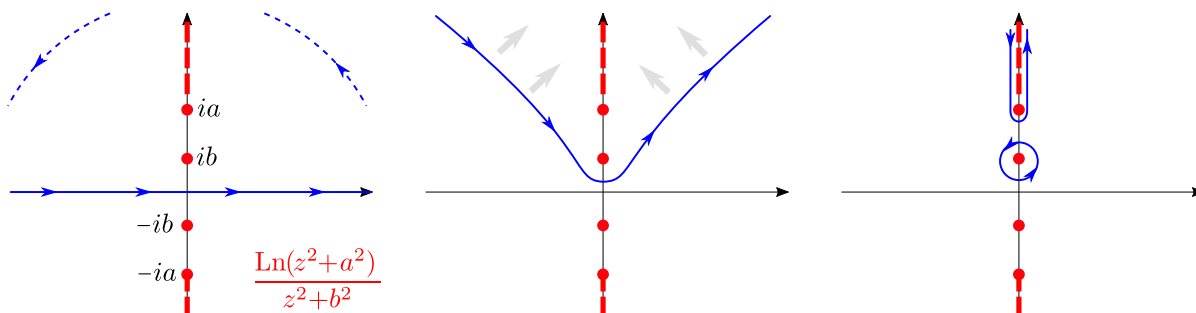
Az integrandus olyan ismert „szép” módon kiterjeszthető komplex differenciálható függvénné, hogy szinte kínálja magát: vizsgáljuk meg őt, hátha a(z egyelőre az \mathbb{R} tengelyen futó, de már a komplex síkon tekintett) integrációs úttal való trükközéssel kiderül valami érdekes. Legyen tehát

$$f(z) = \frac{\text{Ln}(z^2+a^2)}{z^2+b^2}. \quad z \equiv x \in \mathbb{R} \text{ esetén } f(x) = \frac{\ln(x^2+a^2)}{x^2+b^2}: \text{ valóban „jó” kiterjesztést sikerült felírni.}$$

- Olyan z -kre, ahol itt Ln változója negatív valós, $f(z)$ -nek vágása, ahol pedig a nevező polinom nulla, izolált szingularitása lesz. Előbbihez: ha $z^2+a^2 = -r$, ahol $r \in \mathbb{R}_0^+$, akkor $z = \pm i \cdot \sqrt{r+a^2}$, azaz a vágások két félegyenesen vannak a képzetes tengelyen: ia -tól $i\infty$ -ig és $-ia$ -tól $-i\infty$ -ig. Alább kiderül (és ki is használjuk), hogy $f(z)$ határértékei valóban mások ezen vágások két oldalán.

A nevező zérushelyei $z_1 = ib$ és $z_2 = -ib$. Lehet-e a számláló nulla bennük? Akkor lenne az, ha $a^2 - b^2 = 1$, azaz $a = \sqrt{1+b^2}$ lenne. Előfordulhat viszont még az is, hogy z_1 és z_2 rajta vannak a már megtalált vágásokon; éppen akkor, ha $b > a$. Ezen esetekben kicsit elbonyolódna a helyzet.

Tegyük fel ezért egyelőre, hogy $a > b$, de ugyanekkor $a \neq \sqrt{1+b^2}$. Ekkor van két szép vágásunk és két szép elsőrendű pólusunk. $f(z)$ elég gyorsan csökken a végtelenben: az Ln növekedése, mint láttuk, nem igazán „zavar be”; a nélküle érvényes $\frac{L}{|z|^2}$ szerinti helyett bármilyen kicsi $\alpha > 0$ -val $\frac{L}{|z|^{2-\alpha}}$ -val felülbecsülhetjük a végtelenbeli viselkedést. Kínálja magát, hogy az integrációs utat egészítsük ki két nagy negyedkörrel, amelyek „rávezetnek” a vágásra (például felfelé; így teszünk most, de ugyanarra az eredményre jutnánk lefelé menéssel is). A nagy ívek nullához tartó (azaz: nulla) járulékot adnak (a szokásos integrálbecslésből láthatóan; a korábban látottakhoz hasonló érvelést most már az Olvasóra bízunk). Végző soron „ráhajtogattuk” az integrációs utat a vágásra.



41. ábra. Útátalakítás a most tárgyalt integrálhoz. Bal oldalon: a végtelenben kiegészíthetjük a (valós tengelyen futó eredeti) utat, ezután (a többi ábrán mutatta) deformálhatjuk úgy az utat, hogy a vágásra simuljon. Közben „fennakad” a póluson: annak reziduuma is járulékot ad.

• Az eredeti integrál tehát a csak a pólust megkerülő, a vágás mellett (bal oldalt) lefelé, végül a vágás mellett (jobb oldalt) felfelé futó három darab útintegrál összegével egyenlő. (*Gondoljuk ki a korábbiak alapján, hogy az elágazási pontot megkerülő kis r sugarú körív járuléka itt is nullához tart, ha $r \rightarrow 0$! Lényeg: a logaritmus lassabban növekszik, mint ahogy a körkerület csökken.*) A lefelé illetve a felfelé futó szakaszokat $z = ia \pm \varepsilon + ix$, $x \in \mathbb{R}_0^+$ módon paraméterezve, nem elfeledkezve a paraméterezésből jövő $\frac{dz}{dx}$ derivált (konstans i) értékéről, majd határcserével összevonva

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) &= \oint^{(ib+)} dz f(z) + \int_{„le”} dz f(z) + \int_{„fel”} dz f(z) = \\ &= 2\pi i \cdot \operatorname{Res} f|_{ib} + i \int_{\infty}^r dx f(ia - \varepsilon + x) + i \int_r^{\infty} dx f(ia + \varepsilon + x) = \\ &= 2\pi i \cdot \operatorname{Res} f|_{ib} + i \int_r^{\infty} dx [f(ia + \varepsilon + x) - f(ia - \varepsilon + x)]. \end{aligned} \quad (5.48)$$

• Azért óvatoskodtunk még az alsó határral (hogy $r \neq 0$), hogy a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Ln}(-x \pm i\varepsilon) = \ln x \pm i\pi$ képlettel (ami ugye pozitív x -re igaz) egyszerűen kezelhessük a vágásnál a két oldali (azaz: az $\varepsilon \rightarrow 0$) határértékeket. Ezután majd vehetünk $r \rightarrow 0$ -t: az elágazási pontot elkerülő kis körív járuléka nulla lesz, úgyhogy lényegében elég lesz $r=0$ -t írni az iménti második tag integrálási határába.

Az $\varepsilon \rightarrow 0$ határérték képzésénél kihasználjuk, hogy a nevező folytonos a vágáson:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [f(ia + \varepsilon + ix) - f(ia - \varepsilon + ix)] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\operatorname{Ln}((ia + \varepsilon + ix)^2 + a^2)}{(ia + \varepsilon + ix)^2 + b^2} - \frac{\operatorname{Ln}((ia - \varepsilon + ix)^2 + a^2)}{(ia - \varepsilon + ix)^2 + b^2} \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Ln}[\varepsilon^2 + a^2 - (a+x)^2 + 2i\varepsilon(a+x)] - \operatorname{Ln}[\varepsilon^2 + a^2 - (a+x)^2 - 2i\varepsilon(a+x)]}{(ia + ix)^2 + b^2}. \end{aligned}$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ -ra tehát (mivel itt még $x > r$ lehet csak, ahol r határozottan pozitív) tényleg *negatívak* a logaritmusokban lévő értékek valós részei: méghozzá ugyanannyik. A képzetes részek pedig nullához tartanak a kétféle irányból: leszűrtük tehát (a nevezőt is egyszerűsítve), hogy

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [f(ia + \varepsilon + ix) - f(ia - \varepsilon + ix)] = \frac{-2i\pi}{(a+x)^2 - b^2}; \quad \text{törtfüggvény maradt, a logaritmus „megeződött”}.$$

Nem megyünk most bele (a Lebesgue-tétel alapján végiggondolható; a korábban látott ilyesmi helyzetekhez hasonlóan kell érvelni, de kicsit körülményes konkrétan leírni a lépéseket), hogy itt is igaz, amint szeretnénk is, hogy a vágás melletti szakaszoknak a vágásokra való ráhúzásakor megcserélhetjük az $\varepsilon \rightarrow 0$ határértékképzést és az integrálást: a szakaszra vett integrál határértéke tényleg a most kapott határértékfüggvény integrálja. Ezt tudva viszont vehetjük az $\varepsilon \rightarrow 0$ határértéket a fentebbi (5.48) képletben, valamint kiértékelhetjük az ib -beli reziduomot is, amivel arra jutunk (most már $r=0$ -t véve, és végül a maradék integrált Newton-Leibniz-formulával kiértékelve), hogy

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\ln(x^2 + a^2)}{x^2 + b^2} &= 2\pi i \frac{\operatorname{Ln}(a^2 - b^2)}{2ib} + i \int_0^{\infty} dx \frac{-2i\pi}{(a+x)^2 - b^2} = \frac{\pi}{b} \ln(a^2 - b^2) + \\ &+ 2\pi \left[\frac{1}{2b} \ln \frac{(x+a)-b}{(x+a)+b} \right] \Big|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{\pi}{b} \left(\ln(a^2 - b^2) - \ln \frac{a-b}{a+b} \right) = \frac{2\pi}{b} \ln(a+b). \end{aligned} \quad (5.49)$$

• Emlékezzünk: $a > b$ kellett, alaposan ki is használtuk ezt minden lépésben (a végén az egyszerűsítéseknél is). Utolsó pont: a *kapott eredmény is*, és (a paraméteres integrál differenciálhatóságát megvizsgálva, ld. az 5.1. szakaszt is) az *eredeti integrál is* differenciálható a és b függvényében,

hacsak $\Re(a) > 0$ és $\Re(b) > 0$. Emiatt az eddig vizsgált esetre (mint torlódási pontot nagyon is tartalmazó részhalmazra) levezetett eredmény, mivel a -ban és b -ben analitikus függvények egyenlőségét állítja, igaz lesz: **minden $\Re(a) > 0$ és $\Re(b) > 0$ esetén is** az iménti (5.49) képlet adja meg az eredményt, nemcsak az eddigi korlátozott esetben (amiben ki tudtuk számolni).⁵⁴

* * *

Remélhetőleg ez és az előző szakasz közel hozta a mindenféle integrálok kiszámítására használható komplex függvénytani trükköket. Végig elkísért az alapvető megnyugtató érzés, miszerint komplex differenciálható függvények analitikusak: „merevek”, „kis részük meghatározza az egészet”. Sokszor például bizonyos módon felírt valós függvényeket kellett kiterjeszteni $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényre: ha ellenőriztük, hogy nem tévedtünk (vagyis az eredeti függvény tényleg a talált kiterjesztés leszűkítése), akkor lényegében „a” jó lehetőséget sikerült megtalálni, és a levezett eredmény egyértelmű.

5.4. Síkbeli elektrosztatika (azaz: Laplace-egyenlet, második felvonás)

• Sokszor találkozunk *Laplace-egyenlettel*. Most leginkább az elektrosztatikát és a magnetosztatikát tárgyaljuk: itt a fizikai törvények a *Maxwell-egyenletek*, melyek a $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ illetve a $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ vektormezőkre (elektromos illetve mágneses mezőre) vonatkoznak, és rövid úton Laplace-egyenletre vezetnek:

1. Sztatikus (időben változatlan) esetben $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ az egész térben, emiatt létezik a $\Phi(\mathbf{r})$ elektromos potenciál, melynek \mathbf{E} a (negatív) gradiense: $\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi$. Ahol nincs töltés, ott \mathbf{E} forrásmentes: üres térben sztatikus esetben tehát $\text{div } \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \text{div grad } \Phi = \underline{\underline{\Delta \Phi = 0}}$.
2. Sztatikus esetben, ott, ahol nem folyik áram, $\text{rot } \mathbf{B} = 0$, így bevezethető a $\Psi(\mathbf{r})$ *mágneses skálarpotenciál*, mellyel $\mathbf{B} = -\text{grad } \Psi$. Ez a Ψ csak egyszeresen összefüggő halmazon értelmezhető folytonosan (ha a tartomány nem ilyen, mert például körbeölel egy áramvezetőt, akkor Ψ -nek vágása lesz). Viszont ahol Ψ sima, ott (mivel $\text{div } \mathbf{B} = 0$ mindig igaz) $\text{div grad } \Psi = \underline{\underline{\Delta \Psi = 0}}$.
- Síkbeli esetben (amikor a harmadik z iránytól nem függ semmi, azaz az elrendezés „végtelen hosszú”) a Laplace-egyenlet $\Delta^{(2)}\Psi \equiv (\partial_x^2 + \partial_y^2)\Psi = 0$ alakú; a két dimenzióra utaló indexet innentől le hagyjuk. Idézzük fel a 2.4. szakaszt! A következő tulajdonságokat vizsgáltuk:

- 1.) $f(z) \equiv U(x, y) + iV(x, y)$ egy nyílt halmazon komplex differenciálható függvény,
- 2.) ezen a halmazon teljesülnek a Cauchy-Riemann-egyenletek, $\partial_x U = \partial_y V$ és $\partial_y U = -\partial_x V$,
- 3.) ugyancsak ezen a halmazon $\nabla U \cdot \nabla V = 0$, és $\Delta U = \Delta V = 0$, azaz U és V

a valós és a képzetes rész értelemszerű jelölésével. Azt találtuk, hogy az 1.-ből következik a 2. és a 2.-ből az 1. tulajdonság, valamint belőlük következik a 3. tulajdonság, a 3. tulajdonságból pedig egy szorzó erejéig az 1. és a 2. tulajdonság (ezt csak említettük a 28. lábjegyzetben). Azt is láttuk, hogy az 1. tulajdonság (így a 2. is, vagy a 3. is) maga után vonja f analitikusságát, így végtelenszer differenciálhatóságát, vagyis ezt sem kell külön feltenni.

Az ilyen fajta $U(x, y)$ és $V(x, y)$ függvények neve: *harmonikus pár*. A kétdimenziós Laplace-egyenletet megoldhatjuk tehát, ha *akármilyen* differenciálható $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény valós vagy képzetes részét vesszük. Tipikusan azonban még *határfeltételek* is vonatkoznak a keresett megoldásra: akkor válik a mondott ötlet jól használhatóvá, ha módszereket adunk arra, hogy hogyan találhatunk adott határfeltételeket is kielégítő megoldásra vezető $f(z)$ -t.

⁵⁴Érdeklőség: e jegyzet írásakor, 2020-ban a most kiszámolt integrált az internetes WolframAlpha *nem tudja*...

• Bevezetőként írjuk fel egy „síkbeli pontszerű töltés” (harmadik irányban végtelen hosszú, egyenletes hosszanti sűrűséggel töltött szál) által keltett elektromos teret: az \mathbf{E} forrására vonatkozó Maxwell-egyenletből ismert módon kijön az eredmény (itt $\mathbf{r} \equiv (x, y)$ a síkbeli helyvektor, $r \equiv |\mathbf{r}|$):

$$\begin{array}{l} \text{Ha a szál töltéssűrűsége } \eta, \\ \text{akkor a keltett } \mathbf{E} \text{ tér sugár-} \\ \text{irányú és } |\mathbf{E}| \text{ } r\text{-től függ:} \end{array} \quad |\mathbf{E}| = \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix};$$

az origót persze a szál helyébe tettük. Síkbeli „pontszerű áram” (a síkra merőleges hosszú egyenes áramvezető) keltette mágneses tér pedig a \mathbf{B} örvényeire vonatkozó Maxwell-egyenletből jön ki:

$$\begin{array}{l} \text{Ha a szálban a síkból kifelé} \\ I \text{ áram folyik, akkor a } \mathbf{B} \text{ erő-} \\ \text{vonalai jobbkezes körök, és} \end{array} \quad |\mathbf{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Hasonlít a két képlet (például a sugárfüggés ugyanaz). Fel is írhatjuk a megfelelő potenciálokat: ellenőrizzük, hogy a felírt mezőkre (a gradienst természetesen kétdimenziósként értve)

$$\begin{array}{l} \mathbf{E} = -\nabla\Phi, \\ \mathbf{B} = -\nabla\Psi, \end{array} \quad \text{ahol} \quad \begin{array}{l} \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\eta}{2\pi\epsilon_0} \ln r = -\frac{\eta}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{x^2+y^2}, \\ \Psi(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \arctg \frac{y}{x} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \arg(x+iy). \end{array} \quad (5.50)$$

Az origóban kipontozott sík nem egyszerűen összefüggő: a most szereplő Ψ mágneses skalárpotenciálnak tényleg vágása van, de $\nabla\Psi$, ami a mágneses térerősség, ide is folytonosan (és differenciálható módon) kiterjeszthető ugyebár.

A kapott potenciálok az $\text{Ln } z$ valós és képzetes részei: úgy mondjuk inentől ezt, hogy ez a függvény a pontszerű töltéshez illetve áramhoz tartozó $\tilde{\Phi}(z)$ **komplex potenciál**.

$$z \equiv x + iy, \quad \underline{\tilde{\Phi}(z) = \text{Ln } z}. \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Re } \tilde{\Phi}(z) = \ln \sqrt{x^2+y^2}, \\ \text{Im } \tilde{\Phi}(z) = \arg(x+iy). \end{array} \quad (5.51)$$

Itt tehát $\text{Re } \tilde{\Phi}(z)$ az origóbeli síkbeli ponttöltés elektromos potenciálja, $\text{Im } \tilde{\Phi}(z)$ pedig az origóbeli áram mágneses terének skalárpotenciálja (a $-\frac{\eta}{2\pi\epsilon_0}$ illetve a $-\frac{\mu_0 I}{2\pi}$ szorzóktól eltekintve).

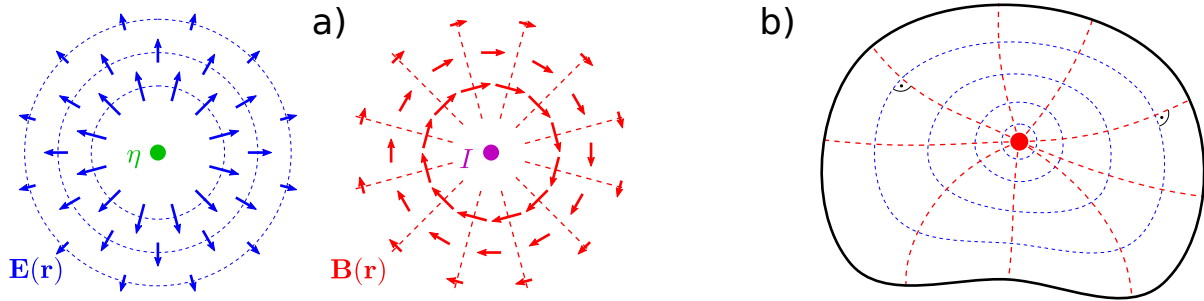
Az $\text{Ln } z$ helyett $\text{Ln}(z-z_0)$ -t írva **eltolhatjuk** az egész elrendezést az origóból egy z_0 helyre.

• A látottak miatt úgy gondolkodunk inentől, hogy egy $\tilde{\Phi}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ differenciálható függvénynek, amit mostantól itt *komplex potenciálnak* hívunk, a valós része (ami ugye mindenképpen megoldja a síkbeli Laplace-egyenletet) egy síkbeli elektrosztatikai probléma megoldásának tekinthető.

A tipikus elektrosztatikai feladatfajta: adott alakú (nyílt, összefüggő) tartomány *belsejében* esetleg néhány ponttöltést leszámítva $\Delta\Phi = 0$, a határhoz tartva pedig Φ tartson meghatározott értékekhez ott. Például egy kiterjedt határdarabon $\Phi = 0$: ezt fizikailag úgy valósíthatjuk meg, hogy ez a darab fémből van, és nulla potenciálú ponthoz csatlakoztatjuk (leföldeljük). Ilyen határt (mivel ő a Φ potenciál szintfelülete) az \mathbf{E} mint a Φ gradiense minden pontban merőlegesen metsz.

A magnetosztatikában analóg jellegű a *szupravezetők* szerepe: az ő alaptulajdonságuk, hogy bennük azonosan $\mathbf{B} = 0$. Mivel \mathbf{B} forrásmentes, azaz az erővonalai nem „nyelődhetnek el” a határon, adódik, hogy szupravezető külső felületével az ottani \mathbf{B} -erővonalak párhuzamosak (szemben az elektrosztatikával, ahol fémek felületén az \mathbf{E} -erővonalak merőlegesek). Egy elektrosztatikai feladat komplex potenciáljának *képzetes része* tehát egy analóg magnetosztatikai feladat megoldása,

ahol a töltéseket áramokra és a fém-határokat szupravezetőkre cseréljük. Mivel $\tilde{\Phi}(z)$ komplex differenciálható (azaz valós és képzetes része ortogonális vonalsereget ad meg), az ilyen \mathbf{E} -tér és a megfelelő \mathbf{B} -tér erővonalai pontról pontra merőlegesek.

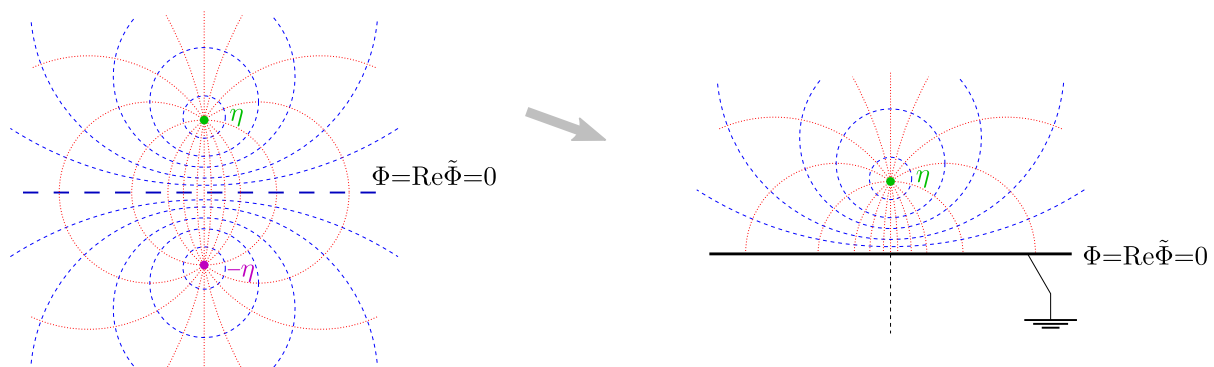


42. ábra. a.) síkbeli ponttöltés elektromos illetve síkra merőleges áram mágneses tere. b.) ponttöltés+fémhatár elektrosztatikai illetve síkra merőleges áram+szupravezető magnetosztatikai feladatának szabadkézi szemléltetése; az egyik és a másik fajta erővonalak merőlegesek.

• Az előbb látott síkbeli ponttöltés esetéhez képest egyszerű bonyolítás, ha megköveteljük, hogy $\Phi = 0$ legyen egy végtelen egyenesen (melyet tegyünk a valós tengelyre), valamint egy adott $z_0 \equiv x_0 + iy_0$ pontban (amelyet tegyünk a felső félsíkra) legyen η síkbeli ponttöltés; kérdés: milyen a potenciál ekörül (a felső félsíkon)? A **töltéstükrözés** módszerét használhatjuk: abban a *másik* elrendezésben, amikor nincs határfeltétel, csak az eredeti η töltésünk és még \mathbb{R} -re tükrözött helyen egy ellentétes előjelű, $-\eta$ ponttöltés, a potenciál a *felső félsíkon* csak az η töltést tartalmazza, és valós része (ami kell) az \mathbb{R} -tengelyen nulla: ez a felső félsíkban jó megoldás. Ez tehát a megoldás. Konkrétan: mivel a z_0 helynek az \mathbb{R} tengelyre vett tükörképe z_0^* , arra jutottunk, hogy esetünkben

$$\tilde{\Phi}(z) = -\frac{\eta}{2\pi\epsilon_0} \text{Ln}(z-z_0) - \frac{-\eta}{2\pi\epsilon_0} \text{Ln}(z-z_0^*) \stackrel{(\text{Re})}{=} -\frac{\eta}{2\pi\epsilon_0} \text{Ln} \frac{z-z_0}{z-z_0^*}. \quad (5.52)$$

Az utolsó átírás a valós részeket tekintve igaz (ezt jelöltük ki az egyenlőségre írt „Re” jellel); a képzetes részekre csak annyiban, hogy a vágások máshova kerülnek a törtté való átírástól. Azonban a képzetes rész gradiense (mely a mágneses térerősség azon magnetosztatikai feladatban, amikor az η helyén a síkra merőleges áram folyik, az egyenes határ pedig szupravezető) olyan, hogy a vágásokra is kiterjeszthető egyértelműen (azaz: akármelyik alak esetében ugyanúgy).



43. ábra. Egyenes fémhatár, töltéstükrözés. Kék: \mathbf{E} szintfelületei (egyúttal az analóg szupravezetős feladat \mathbf{B} -vonalai), piros: viszont. *Megjegyzés:* $\tilde{\Phi}$ képletéből kijön, hogy a vonalak itt körök. A háromdimenziós ponttöltéses hasonló feladat is megoldható tükrözéssel; ott nem gömbjeink lesznek.

• Már előkerültek bizonyos differenciálható függvények mint **konform leképezések** (ld. a 2.3. szakaszt): ha a (z -vel jelölt változójú) síkon egy adott alakú tartományhatárt (amin például adott a $\Phi = 0$ határfeltétel) egy $z' = g(z)$ differenciálható függvénnyel a z' új változóban tekintve („a z' síkon”) megfelelőbb alakú vonalra képezünk, és (például az iméntiek alapján) felírjuk az $f(z')$ komplex pontenciált a z' változóban, akkor $\tilde{\Phi}(z) := f(g(z))$ jó lesz az eredeti feladat megoldására. Ugyanis differenciálható, mert **differenciálható függvények kompozíciója**, így valós része megoldja a Laplace-egyenletet (most használjuk ki, hogy ezt tényleg „rábízhatjuk” a komplex függvény differenciálhatóságára), továbbá $z' = g(z)$ tényleg pont akkor van a z' -síkon a határunk képén, amikor z az eredeti síkon az eredeti határon. Egy-két körülményt még alább tisztázunk.

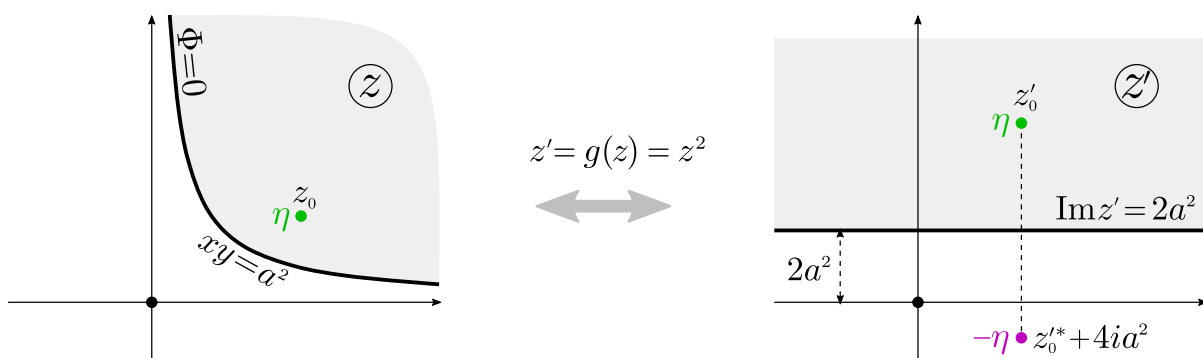
• **Példa:** legyen $\Phi = 0$ egy **egyenlőszárú hiperbola** ívén, a belső részen (ahol $\Phi(x, y)$ -t keressük) pedig legyen egy η sík-ponttöltés. *Az ötlet:* rajzoljuk a hiperbolát a jobb felső síknegyedre $xy = a^2$ egyenletűre (ahol $a > 0$), a töltés helye legyen $z_0 \equiv x_0 + iy_0$, és emlékezzünk, hogy a $z' = g(z) = z^2$ függvény az ilyen hiperbola belső részét „kihajtogatja” egy vízszintes egyenes fölötti tartományra. Erről ld. a korábbi 7. ábra környékét; emlékeztető: $\text{Im } z^2 = 2xy$, ezért ha $\text{Im } z' = \text{Im } z^2 = 2a^2$, ami vízszintes egyenes a z' síkon, akkor az eredeti síkon éppen $xy = a^2$.

A z' síkon tehát a feladat: adott $z'_0 = g(z_0) = z_0^2$ helyen ponttöltés, az $\text{Im } z' = 2a^2$ helyzetű vízszintes egyenesen $\Phi = 0$. Ennek megoldása a mondott egyenesre (nem az \mathbb{R} -re!) vett tükrözéssel

$$-\frac{\eta}{2\pi\epsilon_0} \text{Ln}(z' - z'_0) - \frac{-\eta}{2\pi\epsilon_0} \text{Ln}(z' - (z'_0)^* + 4ia^2) \stackrel{(\text{Re})}{=} -\frac{\eta}{2\pi\epsilon_0} \text{Ln} \frac{z' - z'_0}{z' - z'_0{}^* - 4ia^2}, \quad (5.53)$$

ahol ugye az átírás a valós részre igaz, és a képzetes rész gradiense is csak annyiban változik, hogy a máshol lévő vágásokra kell értelemszerűen kiterjeszteni. Beírva, hogy $z' = g(z) = z^2$, a következő függvényről állítjuk, hogy valós része (amit számítsunk ki magunk!) az eredeti feladat megoldása:

$$\tilde{\Phi}(z) = \frac{-\eta}{2\pi\epsilon_0} \text{Ln} \frac{z^2 - z_0^2}{z^2 - z_0^{*2} - 4ia^2} \Rightarrow \Phi(x, y) = \frac{-\eta}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \ln \frac{(x^2 - x_0^2 + y^2 - y_0^2)^2 + 4(xy - x_0y_0)^2}{(x^2 - x_0^2 + y^2 - y_0^2)^2 + 4(xy + x_0y_0 - 4a^2)^2}.$$



44. ábra. A hiperbola-határon $\Phi = 0$ határfeltételű feladat iménti megoldásának szemléltetése.

• *Tényleg* ez a felírt $\Phi(x, y)$ függvény a hiperbolás feladatunk megoldása. Ellenőrizzük, hogy ha x és y akármilyen, de olyanok, hogy $xy = a^2$, akkor $\Phi(x, y) = 0$, ahogy kell. Ha akarjuk, azt is ellenőrizhetjük közvetlenül (de akár el is hishetjük a komplex függvények ilyen ismeretségi fokán), hogy a töltések helyét kivéve tényleg teljesül, hogy $\Delta\Phi = 0$. Az η töltés helyéhez közeledve (azaz a $z \rightarrow z_0$ esetben) $\Phi(x, y)$ végtelenhez tart. Így viselkedik $\Phi(x, y)$ a tükröltést megközelítve is, de ez nem fordulhat elő a hiperbola belsejében (amint ez a z' síkon gondolkodva nyilvánvaló). A kapott $\Phi(x, y)$ a

hiperbola belsejében tehát tényleg csakis a töltés helyén nem oldja meg a Laplace-egyenletet. Itt pedig pont úgy viselkedik, ahogy egy töltés közelében kell: logaritmikusan végtelenhez tart.

- Tisztázzuk ezt a legutóbbi észrevételt! Hasonló feladatokban olyasmi megoldást kapunk, hogy egy darab, z_0 pontbeli töltés esetén (de persze értelemszerűen általánosíthatunk több töltésre)

$$\text{a vizsgált tartományban} \quad \tilde{\Phi}(z) = \frac{-\eta}{2\pi\varepsilon_0} \text{Ln}[g(z)-g(z_0)] + F(z),$$

ahol g differenciálható és bijektív a vizsgált tartományon (amit ezzel képeztük le kellemesebb alakúra), F pedig a tartományunkban *mindenhol* differenciálható; ez például a (tartomány képén kívül elhelyezkedő) tükörtöltések járuléka. Beláthatjuk, hogy a felírt $\tilde{\Phi}(z)$ *tényleg* annak felel meg, amikor a tartományban éppen egy η sík-ponttöltés van z_0 -ban. Nézzük meg ehhez $\tilde{\Phi}(z)$ deriváltját:

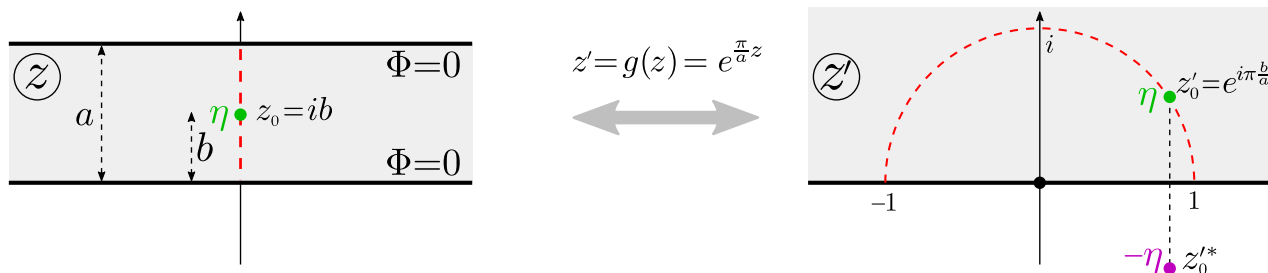
$$\tilde{\Phi}'(z) = \frac{-\eta}{2\pi\varepsilon_0} \frac{g'(z)}{g(z)-g(z_0)} + F'(z), \quad \text{ahol } \tilde{\Phi}(z) \text{ differenciálható, azaz a } z_0\text{-t és az abból induló vágást kivéve mindenhol.}$$

Mivel g a tartományon injektív, csakis $z = z_0$ esetén igaz, hogy $g(z) - g(z_0) = 0$, továbbá egy jól meghatározott, z_0 -ból induló, a g -tól függő alakú vonalon lesz $g(z) - g(z_0) \in \mathbb{R}^-$, ami $\tilde{\Phi}$ -ben az Ln-nek vágása. Azonban látszik, hogy $\tilde{\Phi}'$ (a z_0 -t kivéve) erre a vágásra is differenciálhatóan kiterjeszthető; terjesszük is ki! Ezután viszont *a $\tilde{\Phi}'$ derivált csakis a töltés z_0 helyén nem differenciálható*. Ha $g'(z_0) \neq 0$ (ami szinte mindig igaz), akkor elsőrendű pólus van itt, a reziduum pedig

$$\text{mivel } F \text{ analitikus } z_0\text{-ban is:} \quad \underline{\underline{\text{Res } \tilde{\Phi}'(z) \Big|_{z=z_0}}} = \frac{-\eta}{2\pi\varepsilon_0} \frac{g'(z_0)}{g'(z_0)} + \underbrace{0}_{F'\text{-ből}} = \underline{\underline{\frac{-\eta}{2\pi\varepsilon_0}}}. \quad (5.54)$$

Ez igaz akkor is, ha $g(z) = z$, azaz nem transzformáltuk el a tartományt: *ha* tehát $\tilde{\Phi}'$ reziduuma $\frac{-\eta}{2\pi\varepsilon_0}$, *akkor* η töltés van z_0 -ban. Látjuk, hogy ugyanilyen a viselkedés z_0 körül, ha $g(z)$ akármilyen, a z_0 -ban differenciálható függvény. Az előző hiperbolás megoldásunk tehát tényleg jó: a hiperbolán belül csak a töltés helyén nem differenciálható, és ott úgy viselkedik, ahogy egy η töltésnél kell.

- **Következő példa:** vízszintes, a szélességű sáv, a két szélén $\Phi = 0$, bent (kényelmesen: az y tengelyen az x tengelytől $b < a$ távolságra) egy η töltés. A feladat megoldható végtelen sok tükrözéssel (ami $\Phi = 0$ -t mindkét élen biztosítja); esetleg visszatérünk erre, most azonban kövessük az eddigi receptet! Az *exponenciális függvény* jó lesz: ha $x \in \mathbb{R}$, akkor $e^x \in \mathbb{R}^+$, viszont $e^{x+i\pi} = e^{i\pi}e^x = -e^x \in \mathbb{R}^-$: az e^z függvény tehát a valós tengelyt \mathbb{R}^+ -ra, az $i\pi$ -vel feltölt egyenest \mathbb{R}^- -ra képezi. A közöttük lévő sávot pedig a felső félsíkra képezi, a sáv *belsejét* injektív módon (gondoljuk végig ezeket újra; ld. a korábbi 10. ábra környékét is). Végül e^z helyett az $e^{\frac{\pi}{a}z}$ függvényt tekintve a felső félsíkra bijektív módon leképezett sáv szélessége a lesz π helyett.



45. ábra. A sáv-feladat exponenciális függvénnyel „kiterítve”.

Így viszont az előző példához hasonlóan a z' változóban *egy* töltéstükrözéssel boldogulhatunk:

$$g(z) = e^{\frac{\pi}{a}z}, \quad z_0 = ib. \quad \text{A } z' \text{ síkon a megoldás: } \frac{-\eta}{2\pi\epsilon} \operatorname{Ln} \frac{z' - z'_0}{z' - z'_0*}; \quad \text{ebből}$$

$$\tilde{\Phi}(z) = \frac{-\eta}{2\pi\epsilon} \operatorname{Ln} \frac{e^{\frac{\pi}{a}z} - e^{\frac{i\pi b}{a}}}{e^{\frac{\pi}{a}z} - e^{-\frac{i\pi b}{a}}} \Rightarrow \Phi(x, y) = \dots = \frac{-\eta}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{a}x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{a}(y-b)\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{a}x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{a}(y+b)\right)}. \quad (5.55)$$

- **Még egy példa:** α középponti szögű ($\alpha < \pi$) ék-tartomány élein $\Phi = 0$, bent z_0 -ban ponttöltés. Mi az a $g(z)$, ami a tartományunkat a (felső) félsíkra (a „ π középponti szögű ékre”) kihajtogatja? A válasz benne van a kérdésben: ismerve a valós kitevőjű hatványozás \mathbb{C} -beli geometriai jelentését

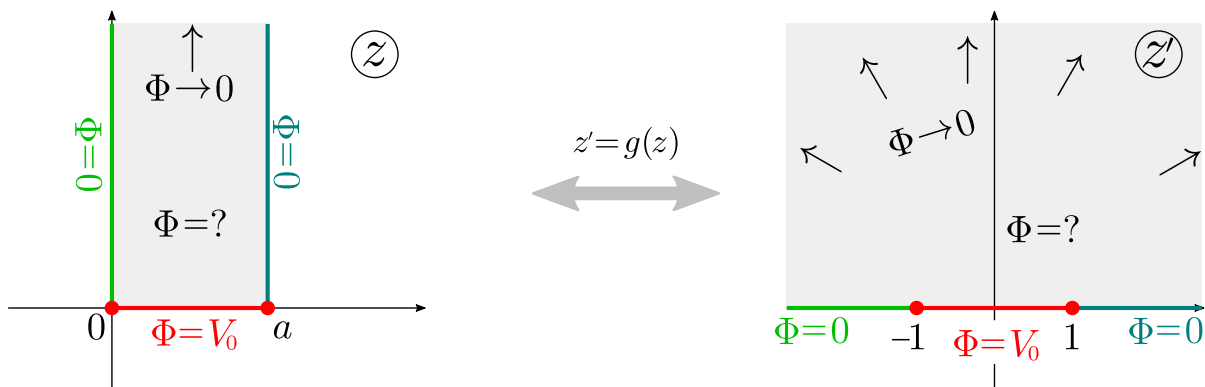
$$g(z) = z^{\frac{\pi}{\alpha}} \Rightarrow \tilde{\Phi}(z) = \frac{-\eta}{2\pi\epsilon_0} \operatorname{Ln} \frac{g(z) - g(z_0)}{g(z) - (g(z_0))^*} = \frac{-\eta}{2\pi\epsilon_0} \operatorname{Ln} \frac{z^{\frac{\pi}{\alpha}} - z_0^{\frac{\pi}{\alpha}}}{z^{\frac{\pi}{\alpha}} - (z_0^*)^{\frac{\pi}{\alpha}}}. \quad (5.56)$$

Lapozzuk fel a korábbi 12. ábrát: ez mutatja, hogy a mostani $g(z)$ leképezés hogyan hajtogatja ki az éket úgy, ahogy kell. Aki akarja, kiszámíthatja a most kapott $\tilde{\Phi}(z)$ potenciál valós részét is.

Megjegyzés: ha α éppen $\frac{2\pi}{2n}$, azaz a teljesszög párosadrésze, akkor a feladat megoldható $2n-1$ darab tükröltéssel is: $n=1$ (azaz $\alpha = \pi$, tehát egyenes határ) esetén tudjuk, hogy egy tükrözéssel; ha viszont például $n=2$ (azaz $\alpha = 90^\circ$), akkor összesen 4 darab töltéssel (egy eredeti η és 3 tükröltés ízlésesen szimmetrikusan, váltakozó előjellel). Végiggondolható, hogy az általános α -ra levezetett eredmény ezekben az esetekben ugyanazt adja, mint amit tükrözésekkel kaphatunk.

- **Utolsó (bonyolultabb) példánkban** tekintsünk egy „függőleges, a szélességű végtelen hosszú vályút”, azaz a $0 < x < a$ és $y > 0$ módon adott halmazt. Kell egy $g(z)$, ami ezt leképezi a felső félsíkra; ezt vagy elmondják (ld. alább), vagy rájövünk. *Esetleg itt megállva próbáljuk megtalálni!*

Most nem ponttöltés+, „földelt” (azaz: rajta $\Phi = 0$ teljesülését megkövetelt) határ lesz, hanem nincs töltés, de a határfeltétel változatosabb. Kérdés a $\Phi(x, y)$ potenciál a tartományunkon belül, ha $\Delta\Phi = 0$, a határon pedig $\Phi = 0$ a két hosszú élen, de $\Phi = V_0$ konstans érték az alapon, továbbá kikötjük azt is, hogy $y \rightarrow \infty$ esetén (azaz a vályúban egyre messzebb) Φ nullához tartson.



46. ábra. A tárgyalt „vályús” feladat szemléltetése; a megfelelő $g(z)$ függvényt alább adjuk meg.

Egy megfelelő $\tilde{\Phi}(z)$ differenciálható függvényt (komplex potenciált) keresünk. Az ide kellő $g(z)$ -t leginkább úgy találhatjuk meg, ha *egyszer végiggondoljuk „az összes” egyszerű komplex függvényt:*

A következő függvény a tartományunk belsejét bijektíven leképezi a felső félsíkra:
$$g(z) = -\cos\left(\frac{\pi}{a}z\right). \quad (5.57)$$

Ellenőrizzük, hogy valóban, ha $x = 0$ és $y > 0$ (bal oldali él) illetve $x = a$ és $y > 0$ (jobb oldali él), akkor z' a valós $[-\infty, -1]$ illetve $[1, \infty]$ intervallumokat futja be, ha pedig $y = 0$ de $x \in [0, a]$, akkor z' a maradék valós $[-1, 1]$ intervallumot futja be. Adott, a felső félsíkon lévő z' -knek megfelelő x', y' esetén pedig a $-\cos\left(\frac{\pi}{a}(x+iy)\right) = x'+iy'$ egyenlet valós és képzetes részét mint egyenletrendszert x -re és y -ra megoldva pedig egyszerűsítéssel arra jutunk, hogy

$$\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{a}y\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{|z'|^2+1+\sqrt{(|z'|^2+1)^2-4x'^2}}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) = -\frac{\operatorname{sgn}(x)}{\sqrt{2}}\sqrt{|z'|^2+1-\sqrt{(|z'|^2+1)^2-4x'^2}},$$

amiből adott (x', y') esetén egyértelműen adódik az az (x, y) , ami a tartományunkon belül van. Összerakva: a felírt g tényleg bijekció a z -síkon megadott tartományunkon.

Olyan, a felső nyílt félsíkon differenciálható $f(z')$ függvény kell, aminek valós része az \mathbb{R} tengelyhez közelítve az iménti 46. ábrán is látható módon 0-hoz tart, ha $x < -1$ vagy $x > 1$, és V_0 -hoz, ha $x \in [-1, 1]$. Eszünkbe juthat az $\operatorname{Ln} z$ logaritmus: ennek *képzetes része*, a fázis az \mathbb{R}^+ -on 0, az \mathbb{R}^- féltengelyhez felülről illetve alulról közelítve pedig π -hez illetve $-\pi$ -hez tart. Gondoljuk végig, hogy a következő, két ilyen logaritmust mint „lépcsőt” szemben összerakva kapott függvény jó lesz:

$$f(z') = \frac{V_0}{i\pi} \left[\operatorname{Ln}(z'-1) - \operatorname{Ln}(z'+1) \right].$$

Az is kideríthető (ld. pl. a fejezet első 5.1. szakaszát), hogy a *nyílt* felső félsíkon lévő z' -kre átírhatjuk ezt törtté. Beírva z' helyébe a fenti $g(z)$ -t azt kapjuk, hogy a komplex potenciál és valós része

$$\tilde{\Phi}(z) = \frac{V_0}{i\pi} \operatorname{Ln} \frac{g(z)-1}{g(z)+1} = \frac{V_0}{i\pi} \operatorname{Ln} \frac{-1-\cos\left(\frac{\pi}{a}z\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{a}z\right)} \quad \Rightarrow \quad \Phi(x, y) = \frac{V_0}{\pi} \operatorname{arg} \frac{-1-\cos\left(\frac{\pi}{a}z\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{a}z\right)}$$

A z -vel a vályú-tartomány *belsejében* maradva nem nulla semelyik képzetes rész sem, így egyértelműen kiértékelhetjük a kapott alakot. A $\operatorname{tg}(2\xi) = \frac{2\operatorname{tg}\xi}{1-\operatorname{tg}^2\xi}$ képletet is tudva az adódik, hogy

$$\Phi(x, y) = \frac{V_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{a}y\right)}{\operatorname{sh}^2\left(\frac{\pi}{a}y\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\Phi(x, y) = \frac{2V_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{a}y\right)}}}. \quad (5.58)$$

Kipróbálhatjuk, hogy a vályú határaihoz (illetve y -nal ∞ -be) tartva ez a kifejezés helyesen tudja az előírt feltételeket; sőt esetleg konkrétan azt is, hogy a Laplace-egyenletet is kielégíti.

* * *

- Az e szakaszban látott módszer sarokköve, hogy egy „kellemetlen” tartományt „kellemesre” leképezünk megfelelő $g(z)$ függvénnyel. Láttunk példákat, és mindenféle $g(z)$ -ket kipróbálva továbbiakat is gyárthatunk. Általánosan igaz egy (*Riemann*-tól származtatott) tétel: \mathbb{C} bármilyen egyszeresen összefüggő nyílt valódi részhalmazához *létezik* azt a felső félsíkra képező differenciálható bijekció. Ez igen „vad” határu halmazokat is megenged; leginkább olyanok érdekesek (mint eddig is), ahol a határ például szakaszonként sima. Félig-meddig konkrét formulák is vannak néhány a látottnál bonyolultabb esetre is, például az úgynevezett *Schwarz-Christoffel-féle leképezés* sokszögekre.

5.5. Kiegészítés: az argumentum-elv

Az itt kifejtendő állítás (melynek neve is megvilágítódik alább) vonalintegrállal ad információt függvényeknek egy adott zárt görbén belüli zérushelyeinek és pólusainak rendjeiről és számairól.

- Legyen $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan függvény, hogy egy z_0 pont körül egy teljes körlapon differenciálható, és

Sőt: ha a mondott f mellett egy másik $g(z)$ függvény viszont olyan, hogy az egész körlapon (z_0 -ban is) differenciálható (de akár lehetnek zérushelyei is, akár z_0 -ban is), akkor g a körlapon *hatványsorba* fejthető, $g(z_0)$ nulladfokú taggal. Emiatt az $\frac{f'}{f}g$ függvény Laurent-sora a -1 -es indexű taggal kezdődhet, azaz ennek is z_0 legfeljebb elsőrendű pólusa, amiből leszűrhetjük, hogy ha az $f(z)$ és a $g(z)$ a mondott tulajdonságúak, akkor

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}g(z)\right)\Big|_{z=z_0} = s \cdot g(z_0), \quad \text{illetve} \quad \operatorname{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}g(z)\right)\Big|_{z=z_0} = -p \cdot g(z_0), \quad (5.65)$$

vagyis a fentebb mondott fajta γ görbét véve (azaz ami a körlapunkban fut), ha z_0 az f -nek s -edrendű zérushelye illetve p -edrendű pólusa, akkor

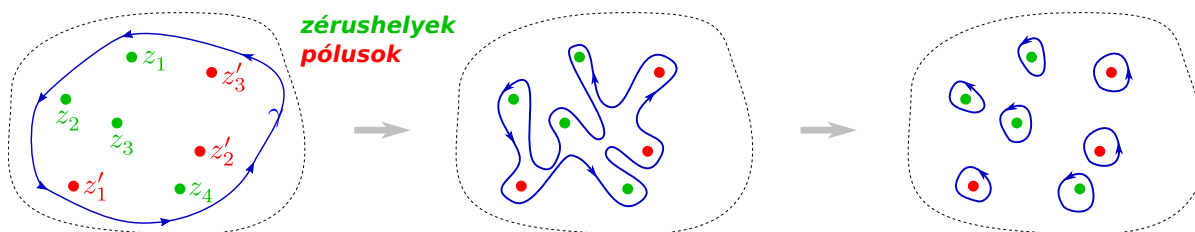
$$\oint_{\gamma} \frac{dt}{2\pi i} \frac{f'(t)}{f(t)} g(t) = s \cdot g(z_0), \quad \text{illetve} \quad \oint_{\gamma} \frac{dt}{2\pi i} \frac{f'(t)}{f(t)} g(t) = -p \cdot g(z_0). \quad (5.66)$$

• Eddig csak egy ilyen „gyanús” z_0 -t tárgyaltunk. Több zérushely illetve pólus esetére kézenfekvő általánosítás a szakasz címében szereplő következő állítás.

Argumentum-elv: legyen $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ egy U nyílt halmazon differenciálható, $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ugyanitt esetleg néhány pólus kivételével differenciálható, γ pozitív irányítású, az U halmazban haladó, önmagát nem metsző zárt görbe, melyre nem esik f egyik zérushelye és pólusa sem. Legyen $Z := \{z_1, z_2, \dots\}$ illetve $P := \{z'_1, z'_2, \dots\}$ az f -nek az U -ba eső zérushelyeinek illetve pólusainak halmaza, a z_k zérushely rendje s_{z_k} , a z'_k pólus rendje $p_{z'_k}$.

$$\text{Ekkor:} \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(t)}{f(t)} g(t) = \sum_{z_k \in Z \cap \operatorname{Int} \gamma} s_{z_k} \cdot g(z_k) - \sum_{z'_k \in P \cap \operatorname{Int} \gamma} p_{z'_k} \cdot g(z'_k). \quad (5.67)$$

Itt is, mint a reziduúmtételnél, $\operatorname{Int} \gamma$ a γ görbén belüli részt jelenti: f olyan zérushelyei vagy pólusai, amik γ -n kívül esnek, nem játszanak szerepet. Természetesen fontos a pozitív irányítás is.



47. ábra. Az argumentum-elv levezetése a megkerült zérushelyekre/pólusokra való rádarabolással.

Az állítás indoklása ugyanolyan, mint a reziduúmtételé volt. A mondott feltételek mellett γ bennfoglalható egy az U -n belül lévő korlátos zárt halmazba: ebben f -nek véges sok zérushelye és pólusa lehet csak. (Mivel csak a γ által megkerültek fognak számítani, ezért az az implicit feltételezés, hogy a kijelölt Z és P halmazok végesek legyenek, tulajdonképpen nem is plusz feltétel tehát.) Ezen zérushelyek és pólusok körül egy (a középpontjukon kívül más pólust és zérushelyet nem tartalmazó) kipontozott körlapokon belül futó zárt görbékre az $\frac{f'}{f}g$ függvény körintegráljait megadják a fentebbi (5.66)-beli eredmények. Mivel ott, ahol f -nek sem zérushelye, sem pólusa nincs, az $\frac{f'}{f}g$ integrandus differenciálható, ezért az eredeti γ görbét az integrál megváltoztatása nélkül „rádarabolhatjuk” az f -nek a γ által megkerült zérushelyeire és pólusaira (az ezek körüli mondott kipontozott körlapokon belülre): az egyenkénti járulékok összegeit kapjuk, ahogy állítottuk.

- Speciális esetben, ha $g(z) = 1$, akkor ugyanazokkal a feltételekkel azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} dt \frac{f'(t)}{f(t)} = \sum_{z_k \in Z \cap \text{Int } \gamma} s_{z_k} - \sum_{z'_k \in P \cap \text{Int } \gamma} p_{z'_k}. \quad (5.68)$$

Az $\frac{f'}{f}$ ilyen vonalintegrálja tehát a megkerült zérushelyek és pólusok számának különbsége (minden zérushelyet és pólust annyiszor számolva, ahányadrendű). Sokszor inkább ezt a speciálisabb alakot hívják argumentum-elvnek; ez világítja meg ugyanis az elnevezés értelmét. Ahol $\text{Ln } f$ differenciálható, ott $(\text{Ln } f)' = \frac{f'}{f}$: ilyen tartományban futó *nem zárt* görbére $\int_a^b dt \frac{f'(t)}{f(t)} = \text{Ln } f(a) - \text{Ln } f(b)$. Az f -ről feltettük, hogy a γ görbe környékén differenciálható, $\text{Ln } f$ azonban f pólusaiban, zérushelyeiben és az ezekből induló vágásokon sem az. A zárt görbe elmetszi a vágásokat, és $2\pi i$ -t visszaugrik egyszeres zérushelyből induló vágás esetén, ami így ennyit „tesz hozzá” a körintegrálhoz (amikor összeragasztanánk az út elejét és végét; ld. az érvelést az alapvető $\oint dz \frac{1}{z} = 2\pi i$ integrál Newton-Leibniz-formulával való levezetésénél a 3.4. szakasz végén). Többszörös zérushelynél többször $2\pi i$ ugrás történik a logaritmusban, f pólusa pedig $\frac{1}{f}$ azonos rendű zérushelye, és $\text{Ln } \frac{1}{f} = -\text{Ln } f$. Az argumentum-elvben felírt integrál tehát lényegében tényleg az argumentum ugrásait „számolja össze”, ahogy a görbén végigmenve $\text{Ln } f$ változását követjük.

- Egy kis példa: legyen $f(t) = \sum_{k=0}^N a_k t^k$, azaz N -edfokú polinom; ő egészfüggvény (pólusa nincs), továbbá egy korlátos halmazon kívül zérushelye sem lehet, mert mint tudjuk, $|f| \rightarrow \infty$, ha $|z| \rightarrow \infty$. Vethetünk tehát γ görbének egy elég nagy R sugarú kört; egy ilyenre integrálva és kicsit alakítva

$$\oint_{\gamma} \frac{dt}{2\pi i} \frac{f'(t)}{f(t)} = \dots = \oint_{\gamma} \frac{dt}{2\pi i} \frac{N}{t} \cdot \frac{1 + \frac{a_{N-1}}{a_N} \frac{1}{t} + \frac{N-1}{N} \frac{a_{N-2}}{a_N} \frac{1}{t^2} + \dots + \frac{1}{N} \frac{a_1}{a_N} \frac{1}{t^{N-1}}}{1 + \frac{a_{N-1}}{a_N} \frac{1}{t} + \frac{a_{N-2}}{a_N} \frac{1}{t^2} + \dots + \frac{a_1}{a_N} \frac{1}{t^{N-1}}} = \dots = N, \quad (5.69)$$

ugyanis bármilyen nagy R -et vethetünk, és a görbénken $|t| = R$, továbbá a tört 1-hez tart $R \rightarrow \infty$ esetén (és ezt a határértéket megcserélhetjük az integrálással; γ -t paraméterezve ugyanis egyenletes a konvergencia a korlátos $[-\pi, \pi]$ intervallumon), végül pedig $\frac{N}{t}$ körintegrálja $2\pi i \cdot N$.

Kijött tehát az argumentum-elvből is, hogy egy N -edfokú polinomnak N darab zérushelye van (vagy kevesebb darab, de akkor többszöröse; éppen ahogy kell).

- Egyszerű(bb) függvények esetén mindenesetre jobb közvetlenül a függvényalak vizsgálatával keresni a zérushelyeket és a pólusokat (és rendjeiket). Olyan függvényekre viszont, amelyek zérushelyeinek/pólusainak helye kevésbé nyilvánvaló, jól jön az argumentum-elv; akár függvényvizsgálat általános eszközeként (bizonyításokhoz), akár numerikus zérushely-kereséshez (például az úgynevezett *Riemann-féle zéta-függvény* esetén, melynek zérushelyeire vonatkozik a híres *Riemann-sejtés*).

Utaltunk már rá talán az algebra alaptételénél, hogy $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvények zérushelyei kevésbé „kézenfekvők”, mint $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeké.⁵⁵ $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényeknél úgy kérdezhetünk, hogy a felvett függvényérték valós és képzetes része egyszerre („szerencsésen”) nullává válik-e valahol. Például ha a függvény eleve csak numerikus módon számítható ki, akkor azt hihetnénk, hogy esélytelen zérushelyet keresni: akármennyire pontosan majdnem nulla is a felvett érték egy adott helyen, nem tudhatnánk, hogy még pontosabb számolással nem derülne-e ki, hogy a függvényérték mégis „elkerüli” a nullát (vagyis nem pont ugyanott válik nullává a függvényérték valós része és képzetes része). Az argumentum-elvben felírt integrál viszont még közelítőlegesen (numerikusan) kiszámítva is lényegében pontos információt ad az *igazi* zérushelyek létéről.

⁵⁵ $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények esetében tudhatjuk például, hogy ha folytonos függvényre valahol $f < 0$, máshol $f > 0$, akkor a két hely között biztosan van zérushely: ez egy függvénygrafikonról „látszik” is, de rendszeren is be lehet bizonyítani.

6. A gamma-függvény

A gamma-függvény az $n!$ **faktoriális általánosítása**, egyben egy önmaga jogán érdekes (és sokféle előkerülő) speciális függvény, emellett sokféle eddig látott módszernek, koncepciónak a nem túl egyszerű, de nem is túl bonyolult illusztrálására is jó.⁵⁶ Néhány *új fogalmat* is bevezetünk itt vele kapcsolatban, amelyek más függvényekre, más helyzetekben is alkalmazhatóak lehetnek.

6.1. Definíció, speciális értékek, kapcsolódó integrálok

- Előbb-utóbb szembe jön az alábbi integrál, amit kiszámíthatunk primitív függvénnyel (ld. alább).

$$\text{Állítás: } \int_0^{\infty} dt t^n e^{-t} = n!, \quad \text{ha } n \in \mathbb{N}_0^+ \text{ adott nemnegatív egész.} \quad (6.1)$$

Ezen felbátorodva bevezetjük a következő $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt, a Γ jelű **gamma-függvényt** az úgynevezett **Euler-féle integrállal**. Alább belátjuk, hogy ez tényleg pont a kijelölt esetben értelmes.

$$\text{Definíció: } \Gamma(z) := \int_0^{\infty} dt t^{z-1} e^{-t}, \quad \text{minden } z \in \mathbb{C} \text{ esetén,} \\ \text{amire } \Re(z) > 0. \quad (6.2)$$

Már látszik, de még elővesszük, hogy ha $n \in \mathbb{N}_0^+$, akkor $\Gamma(n+1) = n!$. Általános z -re viszont ne akarjuk ezt a $\Gamma(z)$ értéket primitívfüggvény-kereséssel *kiszámítani*; ez az integrál *értelmezi* ezt a függvényt. A paraméteres integrál differenciálhatóságát vizsgálva viszont belátható (ld. lentebb), hogy ez a $\Gamma(z)$ függvény mindenhol, ahol csak egyelőre értelmezett, ott **differenciálható**.

- Az alábbi, a faktoriálisokat felidéző tulajdonság a gamma-függvény alapvető jellemzője:

$$\text{Léptető tulajdonság: } \Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (6.3)$$

Ezt parciális integrálással vezethetjük le: mivel $\frac{d}{dt}(e^{-t}t^z) = -e^{-t}t^z + e^{-t}zt^{z-1}$, írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Gamma(z+1)}} &= \int_0^{\infty} dt t^z e^{-t} = \int_0^{\infty} dt \frac{d}{dt}(-e^{-t}t^z) + \int_0^{\infty} dt zt^{z-1} e^{-t} = \\ &= \underbrace{(-e^{-t}t^z)}_{t=0} \Big|_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^{\infty} dt e^{-t}t^{z-1} = \underline{\underline{z\Gamma(z)}}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Az aláhúzott rész nulla, mert ha $\Re(z) > 0$ (ahogy kell), akkor t^z nem 1-hez vagy ∞ -hez, hanem 0-hoz tart $t=0$ -ban. Az e^{-t} pedig *gyorsabban csökken* t^z -nél minden z -re: $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t}t^z = 0$ is igaz.

- Érdekes a $t = x^2$ helyettesítéssel is felírni a definiáló (6.2) integrált:

$$\Gamma(z) = 2 \int_0^{\infty} dt e^{-x^2} x^{2z-1}, \quad \text{hiszen } dt = 2x dx, \text{ és } x \in \mathbb{R}^+ \\ \text{esetén tényleg } (x^2)^z = x^{2z}. \quad (6.5)$$

Sőt hasonló módon $t = \gamma x^\alpha$ helyettesítést is végezhetünk; ellenőrizzük le a következőt (ahol a kapott „eredmény” tehát lényegében $\Gamma(z)$ definíciójának átfogalmazása):

$$\text{Ha } \alpha, \gamma \in \mathbb{R}^+, \text{ és } \Re(\beta) > -1, \text{ akkor } \int_0^{\infty} dx x^\beta e^{-\gamma x^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \gamma^{-\frac{\beta+1}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{\beta+1}{\alpha}\right). \quad (6.6)$$

⁵⁶A magam részéről sokat foglalkoztam olyan témákkal, ahol a gamma-függvényt rutinszerűen kellett használnom; talán ezért is a „feltétlenül szükségesnél” jóval többet leírok; a fejezet végén már „haladóbb szinten” is; elnézést...

- Közelebb hozza a gamma-függvényt, ha néhány **speciális helyen** felvett értéket megjegyzünk.

$$\text{Állítás: } \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (6.7)$$

Az első nyilvánvaló az eredeti definícióból, tudva, hogy $\int_0^\infty e^{-t} dt = 1$. A második a $t = x^2$ módon helyettesített iménti alternatív (6.5) alakból látható: öbele $z = \frac{1}{2}$ esetén éppen a Gauss-integrált kapjuk, ami tudvalevően $\sqrt{\pi}$. (A 2-es szorzó abba megy, hogy \mathbb{R}^+ helyett az egész \mathbb{R} -re integrálódjon az integrandus, ami ekkor páros függvény). Ezután viszont ezekből indulva az imént belátott alapvető (6.3) léptetős tulajdonságot használhatjuk:

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= 1, & \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}, \\ \Gamma(2) &= 1 \cdot \Gamma(1) = 1, & \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{2}, \\ \Gamma(3) &= 2 \cdot \Gamma(2) = 1 \cdot 2 = 2, & \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) &= \frac{3}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\pi} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2}, \\ \Gamma(4) &= 3 \cdot \Gamma(3) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, & \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) &= \frac{5}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \sqrt{\pi} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2}, \\ &\vdots & &\vdots \\ \Gamma(n+1) &= n!, & \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Egyrészt tényleg beláttuk a gamma-függvény és a faktoriális kapcsolatát (egyszersmind beláttuk a szakasz elején felidézett, egész n -re felírt (6.1) integrált is, de azért még visszatérünk rá); másrészt a *félegész* számokban felvett értékeket is kiszámítottuk. Utóbbiakat más szokásosan használt alakba is írhatjuk; még egyszer tehát:

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \frac{(2n-1)!!}{2^n} = \sqrt{\pi} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}. \quad (6.9)$$

Itt $n!!$ a *szemi-faktoriális* („fél-faktoriális”) jelöli, amely egy adott természetes számtól lefelé lépegetve az azonos párosságú számok szorzatát jelenti. (Például $8!! = 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$ és $9!! = 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$.) Páros számokra nyilván $(2n)!! = 2^n n!$, ebből lehet páratlanokra is leszűrni (bővítve majd egyszerűsítve a kihagyott páros tényezőkkel), hogy $(2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n n!}$: ebből kaptuk az utolsó egyenlőséget.

Megjegyzés: ha az eredeti (6.1) definiáló integrálban t^{z-1} helyett t^z -t írtak volna annak idején, akkor nem lenne ez a kellemetlenek tűnő 1-gyel eltolás, miszerint $\Gamma(n+1) = n!$. Két iskola versengett; mindkét választásnak vannak előnyei, és a tárgyalt alak maradt fenn.

- Az alábbi úgynevezett **Euler-féle béta-integrál** szorosan ide kapcsolódik (levezetését ld. alább):

$$\text{Állítás: ha } \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \text{ továbbá } \Re(\alpha) > 0, \text{ és } \Re(\beta) > 0, \text{ akkor } \int_{-1}^1 dt t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \quad (6.10)$$

Az integrál éppen a megadott esetben létezik (ld. alább is). Gyakran előkerülnek a következő **alternatív változatok** is (*ellenőrizzük is a felírt helyettesítéseket!*):

$$t = \sin^2 \varphi \text{-t helyettesítve: } 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi (\sin \varphi)^{2\alpha-1} (\cos \varphi)^{2\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad (6.11)$$

$$t = \frac{x}{x+1} \text{ módon helyettesítve: } \int_0^\infty dx x^{\alpha-1} (x+1)^{-(\alpha+\beta)} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad (6.12)$$

Megjegyzések:

1. Ezen (6.11)-ben és (6.12)-ben felírt integrálok α -ra és β -ra ugyanazon feltételekkel értelmesek, mint az eredeti (6.10) integrál; lássuk is ezt be közvetlenül (azaz nemcsak a helyettesítésből)!
2. Ha ezek után még például a harmadik (6.12) alakban $x = y^\gamma$ módon helyettesítünk, akkor még „durvábban kinéző”, de ezt az Euler-féle béta-integrált ismerve kezelhető integrálra jutunk.
3. Nehogy ne vegyük észre, hogy az Euler-féle béta-integrál **szimmetrikus** az $\alpha \leftrightarrow \beta$ cserére. Ez nemcsak a gamma-függvénnyel felírt eredményen látszik, hanem az eredeti (6.10) illetve a (6.11) integrálok is, ha az egyszerű $t \leftrightarrow 1-t$ illetve $\varphi \leftrightarrow \frac{\pi}{2}-\varphi$ helyettesítéseket végezzük bennük. Az eredmény persze szintén szimmetrikus; a harmadik (6.12) integrálon viszont nem látszik ennyire egyből a szimmetria, mindazonáltal akkor tehát erre is érvényes.
4. Felhasználva $\Gamma(n+1)$ és $\Gamma(n+\frac{1}{2})$ fentebb megbeszélte értékeit kiértékelhetjük például az alábbi integrálokat mint az iménti (6.11) speciális eseteit. **Ellenőrizzük, hogy**

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi (\sin \varphi)^{2n+1} = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n)!(2n+1)}, \quad \int_0^{\pi/2} d\varphi (\sin \varphi)^{2n} = \pi \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}, \quad (6.13)$$

és ugyanez igaz **sin helyett cos-ra is**, ami ugye csak annyiban különbözne, hogy $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}-\varphi$ helyettesítést végzünk. Ezen (6.13) képletek elemibben is levezethetők, de jó tudni, hogy a „nagy tűzerejű” képleteinket tényleg alkalmazhatjuk speciális esetekre is.

• **Levezetjük az Euler-féle béta-integrált.** Legkézenfekvőbb a trigonometrikus függvényes (6.11) változatot tekinteni. Az ötlet annak általánosítása, ahogyan a legalapvetőbb Gauss-integrált levezettük annak idején: a gamma-függvény ahhoz hasonlító, $t = x^2$ helyettesítéssel kapott (6.5) kifejezését véve írjuk fel a $\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)$ szorzatot, a két integrálási változót x -szel és y -nal jelölve:

$$\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha) = 2 \int_0^\infty dx e^{-x^2} x^{2\beta-1} \cdot 2 \int_0^\infty dy e^{-y^2} y^{2\alpha-1} = (*) \quad (6.14)$$

Az ötlet: az x és y szerinti sorrendi kettős integrált felfoghatjuk úgy, mint az x - y sík jobb felső síknegyedére vett kétdimenziós integrált. Ezt tényleg megtehetjük a Fubini-tétel miatt (mert abszolútértékben is integrálható függvényekről van szó, ld. alább is), és akkor már másfajta koordinátákban is dolgozhatunk. Most is, mint a Gauss-integrálnál, a polárkoordináták jönnek jól:

$$\begin{aligned} (*) &= 4 \int_{x>0, y>0} dx dy e^{-(x^2+y^2)} x^{2\beta-1} y^{2\alpha-1} = 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^\infty dr r e^{-r^2} r^{2\beta-1} (\cos \varphi)^{2\beta-1} r^{2\alpha-1} (\sin \varphi)^{2\alpha-1} = \\ &= 2 \underbrace{\int_0^\infty dr r^{2(\alpha+\beta)-1} e^{-r^2}}_{=\Gamma(\alpha+\beta)} \cdot 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi (\sin \varphi)^{2\alpha-1} (\cos \varphi)^{2\beta-1}, \quad (6.15) \end{aligned}$$

ahol az r -re vett integrálban $\Gamma(\alpha+\beta)$ (6.5) szerinti felírását ismertük fel. (Közben polárkoordinátákban $x = r \cos \varphi$ és $y = r \sin \varphi$ voltak, és megjelent az r szorzó mint Jacobi-determináns.) Összeolvasva (6.14)-ből az elejét és a kapott (6.15) végét ki is jött a kívánt (6.11) képlet.

* * *

• A szakasz maradékában **kiegészítésképpen elvarrjuk a szálakat**. Először megvizsgáljuk a kiindulásnak szánt (6.1) integrált, integrálhatóság szempontjából is. Kiszámíthatjuk primitív függ-

vénnyel; a trükk ehhez az, hogy parciális integrálásokkal t^n -et lépésenként „lebontva” e^{-t} marad:

$$\int dt t^n e^{-t} = F(t), \quad \text{ahol}$$

$$F(t) = -e^{-t} \left[t^n + nt^{n-1} + n(n-1)t^{n-2} + n(n-1)(n-2)t^{n-3} + \dots + n! \right]. \quad (6.16)$$

Ezen $F(t)$ -nek tényleg a kívánt integrandus a deriváltja. (Segítség: a zárójelben minden tag az előző deriváltja, így a megadott $F(t)$ -t szorzatként deriválva minden közbenső tag kiesik, csak az n -edfokú t^n marad.) Az integrandusunk nemnegatív: pontosan akkor létezik az \int_0^∞ integrál, ha minden $a > 0$ és $b < \infty$ esetén létezik az \int_a^b integrál, és létezik ennek $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow \infty$ határértéke (ld. a 3.2. szakaszt). Most ez lesz a helyzet: létezik az integrálunk. Konkrétan: e^{-b} gyorsabban csökken $b \rightarrow \infty$ esetén a hatványoknál, és $a=0$ -ban $F(a)$ folytonos, így

$$\lim_{a \rightarrow 0} F(a) = F(0) = -n!, \quad \lim_{b \rightarrow \infty} F(b) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^\infty dt t^n e^{-t} = \lim_{b \rightarrow \infty} F(b) - \lim_{a \rightarrow 0} F(a) = n!.$$

• Következő: milyen z -kre létezik a $\Gamma(z)$ -t definiáló integrál? Először vizsgáljunk valós $z \equiv \alpha$ értékeket; ekkor az integrandus, $t^{\alpha-1}e^{-t}$ valós nemnegatív értékű függvény. A 3.2. szakaszban előkerült, hogy integrálható majoráns létezéséből integrálhatóság, nem integrálható függvénnyel való *alul*becslésből pedig nem integrálhatóság következik, és megvizsgáltuk hatványfüggvények integrálhatóságát is. A mostani esetben $t \rightarrow \infty$ felé az e^{-t} az érdekes, $t \rightarrow 0$ környékén a t^α : ezek miatt (is) érdemes két darabra vágni az integrált valamilyen véges t -értéknél, például $t=1$ -nél. A mondottakon felbátorodva ekkor például így érvelhetünk:

$$\text{Ha } t \in [1, \infty], \text{ akkor van olyan } K > 0 \text{ konstans, amivel} \quad t^{\alpha-1}e^{-t} = \underbrace{e^{-t/2}t^{\alpha-1}}_{\text{korlátos } [1, \infty]\text{-n}} \cdot e^{-t/2} \leq K \cdot e^{-t/2},$$

mert a kijelölt rész folytonos egy zárt szakaszon, és $t \rightarrow \infty$ esetén 0-hoz tart, így biztos korlátos. A jobb oldal viszont integrálható $[1, \infty]$ -re, emiatt $e^{-t}t^{\alpha-1}$ is az bármilyen $\alpha \in \mathbb{R}$ -re.

Ha viszont $t \in [0, 1]$, akkor

$$\text{egyrészt } t^{\alpha-1}e^{-t} \leq t^{\alpha-1}, \quad \Rightarrow$$

$$\text{másképp } t^{\alpha-1}e^{-t} \geq t^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{e}.$$

Ha $\alpha > 0$, akkor $t^{\alpha-1}$ integrálható a $[0, 1]$ szakaszra, így $e^{-t}t^{\alpha-1}$ is az.

Ha viszont $\alpha \leq 0$, akkor $\frac{1}{e} \cdot t^{\alpha-1}$ nem integrálható $[0, 1]$ -re, így $e^{-t}t^{\alpha-1}$ sem az.

Összefoglalva: ha $\alpha > 0$, akkor $e^{-t}t^{\alpha-1}$ integrálható 0-tól 1-ig és 1-től ∞ -ig, vagyis 0-tól ∞ -ig, ha viszont $\alpha \leq 0$, akkor $e^{-t}t^{\alpha-1}$ nem integrálható $[0, 1]$ -re, tehát 0-tól ∞ -ig sem. A gamma-függvényt definiáló (6.2) integrál tehát **valós α -t tekintve $\alpha > 0$ esetén** létezik. Általános $z \in \mathbb{C}$ esetén pedig idézzük fel, hogy egy f függvény pontosan akkor integrálható, ha $|f|$ is az. Valós $t > 0$ és $w \in \mathbb{C}$ esetén $|t^w| = \sqrt{t^w t^{w*}} = \exp\left(\frac{1}{2}(w+w^*) \ln t\right) = t^{\frac{1}{2}(w+w^*)} = t^{\Re(w)}$, emiatt mostani esetünkben

$$f(t) = t^{z-1}e^{-t} \quad \Rightarrow \quad |f(t)| = e^{-t}t^{\Re(z)-1}, \quad \text{és } \Re(z) \text{ valós.}$$

Láttuk, hogy ez az $|f(t)|$ pontosan $\Re(z) > 0$ esetén integrálható: ez érvényes az eredeti $f(t)$ -re is, vagyis a gamma-függvény (6.2) integrál-definíciója $\Re(z) > 0$ esetén **értelmes**.

• Az előző pontban felidéztek t^α típusú hatványfüggvények integrálhatóságát; ebből kideríthetjük, hogy az **Euler-féle béta-integrál** integrandusa, $t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$, melynek abszolútértéke valós $t > 0$ esetben $t^{\Re(\alpha)-1}(1-t)^{\Re(\beta)-1}$, **tényleg $\Re(\alpha) > 0$ és $\Re(\beta) > 0$ teljesülése esetén integrálható** a kijelölt

$[0, 1]$ valós intervallumra. $\Re(\alpha) \leq 0$ esetén a $t^{\alpha-1}$ tényező miatt $t=0$ körül, $\Re(\beta) < 0$ esetén pedig az $(1-t)^{\beta-1}$ tényező miatt a $t=1$ körül „romlana el” az integrálhatóság.

• Utolsó elvarrandó szál: $\Gamma(z)$ differenciálhatósága. Az előkerülő integrandus ugyebár

$$f(t, z) = e^{-t}t^{z-1}, \quad \text{amivel tehát} \quad \Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt f(t, z). \quad (6.17)$$

$\Re(z) > 0$ esetén

Az állításunk pedig az, hogy z szerint bedifferenciálhatunk a paraméteres integrálba; konkrétan:

$$\Re(z) > 0\text{-ra ez a } \Gamma(z) \quad \frac{d}{dz}\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt \partial_z f(t, z) = \int_0^{\infty} dt e^{-t}t^{z-1} \ln t. \quad (6.18)$$

differenciálható is, és

Ennek belátásához a pontosan ilyen esetekre vonatkozó, a C.4. függelékben elővett (C.5) állítás kell.⁵⁷ Felidézzük: egy adott z_0 pontbeli differenciálhatóság megállapításához kell egy olyan U nyílt környezet z_0 körül, amiben lévő minden z -re $f(t, z)$ integrálható t -ben, differenciálható z szerint (majdnem) minden előkerülő t -nél, valamint kell olyan integrálható $g(t)$ függvény, hogy $|\partial_z f(t, z)| \leq g(t)$ majdnem minden előkerülő t és egyszerre minden $z \in U$ esetén.

A mostani esetben t -ben \mathbb{R}^+ -ra integrálunk, és megállapíthatjuk a következőket:

$$\begin{aligned} |f(t, z)| &= |e^{-t}t^{z-1}| \stackrel{t \in \mathbb{R}^+}{=} e^{-t}t^{\Re(z)-1}, & \Rightarrow & \quad |f(t, z)| \text{ is és } |\partial_z f(t, z)| \text{ is} \\ |\partial_z f(t, z)| &= |e^{-t}t^{z-1} \ln t| \stackrel{t \in \mathbb{R}^+}{=} e^{-t}t^{\Re(z)-1} |\ln t| & & \text{integrálható, ha } \Re(z) > 0. \end{aligned}$$

Az $|f(t, z)|$ integrálhatóságára vonatkozó $\Re(z) > 0$ feltételt eddig is tudtuk; a deriváltra vonatkozó megállapítás új. A lényeg: a logaritmus nem zavar be. Ugyebár akármilyen kicsi $\alpha \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} [t^{-\alpha} |\ln t|] &= 0, & \Rightarrow & \quad t^{-\alpha} |\ln t| \leq K \text{ (azaz korlátos) } t \in [1, \infty] \text{ esetén,} \\ \lim_{t \rightarrow 0} [t^{\alpha} |\ln t|] &= 0 & & \quad t^{\alpha} |\ln t| \leq K' \text{ (azaz korlátos) } t \in [0, 1] \text{ esetén.} \end{aligned}$$

Ez alapján bármilyen $b \in \mathbb{R}^+$ esetén olyan α -val, amire $0 < \alpha < b$, arra jutunk, hogy

$$\begin{aligned} \text{ha } t \in [1, \infty], \text{ akkor } e^{-t}t^{b-1} |\ln t| &= e^{-t}t^{b+\alpha-1} \cdot t^{-\alpha} |\ln t| \leq K \cdot e^{-t}t^{b+\alpha-1}, \\ \text{ha } t \in]0, 1], \text{ akkor } e^{-t}t^{b-1} |\ln t| &= e^{-t}t^{b-\alpha-1} \cdot t^{\alpha} |\ln t| \leq K' \cdot e^{-t}t^{b-\alpha-1}. \end{aligned}$$

Ezen felsőbecslők pedig integrálhatók a megfelelő tartományokra (ezért választottuk az α -t úgy, ahogy), emiatt (b -nek $\Re(z)$ -t véve) $\partial_z f(t, z)$ is tényleg integrálható, hacsak $\Re(z) > 0$.

A differenciálhatóság vizsgálatához vegyünk egy z_0 -t, amire $\Re(z_0) > 0$. Abból, hogy mindenhol csak a z -k valós része számított, és az pozitív kellett, hogy legyen, jön az ötlet, hogy a kellő U környezetnek jó lesz egy z_0 körüli, de még a jobb oldali felsíkon lévő függőleges sáv. Konkrétan legyenek $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^+$ olyanok, hogy $0 < b_1 < \Re(z_0) < b_2$ (ilyenek vannak), és legyen $U = \{z \in \mathbb{C} \mid b_1 < \Re(z) < b_2\}$. Egy $z \in U$ esetén ha $t \in [1, \infty]$, akkor $t^{\Re(z)} \leq t^{b_2}$, viszont ha $t \in]0, 1]$, akkor $t^{\Re(z)} \leq t^{b_1}$. Ebből összerakhatunk egy megfelelő $g(t)$ majoráns-függvényt:

$$g(t) := \begin{cases} t^{b_1-1} e^{-t} |\ln t|, & \text{ha } t \in]0, 1], \\ t^{b_2-1} e^{-t} |\ln t|, & \text{ha } t \in [1, \infty], \end{cases} \quad \begin{aligned} & \text{minden } z \in U \text{ és } t \in \mathbb{R}^+ \text{ esetén } |\partial_z f(t, z)| \leq g(t), \\ & \text{és } g \text{ integrálható } \mathbb{R}^+\text{-ra, amint fentebb láttuk.} \end{aligned}$$

Teljesül tehát a paraméteres integrál differenciálhatóságáról szóló tétel feltétele U -n: $\Gamma(z)$ valóban differenciálható z_0 -ban. Azonban ezt minden z_0 -ra elmondhatjuk, ha $\Re(z_0) > 0$: készen vagyunk.

⁵⁷Ez a mostani eset egyúttal a tétel egy motiváló alkalmazása is, hiszen $\Gamma(z)$ -ről szeretnénk tudni, hogy differenciálható, noha sem őt, sem a deriváltját nem igazán tudjuk másképp kifejezni, mint paraméteres integrállal.

6.2. Analitikus elfolytatás, reflexiós összefüggés

• A $\Gamma(z)$ gamma-függvény az eddig látottak alapján $\Re(z) > 0$ -ra értelmes, mert csakis ilyen z -kre létezik a definiáló integrál. Ezen a halmazon viszont differenciálható, azaz **analitikus**. Megpróbálhatjuk *analitikusan elfolytatni*: keresni egy a $\Re(z) > 0$ felsíknál bővebben értelmezett $f(z)$ differenciálható függvényt, ami az eddig tekintett $\Re(z) > 0$ felsíkon megegyezik az eddigi $\Gamma(z)$ -vel. Ekkor az ilyen f a bővebb halmazon egyértelmű.

Alább kiderül, hogy a bővebb halmaz a $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ halmaz lehet, azaz a $0, -1, -2, -3, \dots$ valós negatív egész számokat kivéve az egész \mathbb{C} . Az ide kiterjesztett függvényt is $\Gamma(z)$ -vel jelöljük és gamma-függvénynek hívjuk. $\Gamma(z)$ értelmes lesz tehát sok olyan z -re is, amelyre $\Re(z) \leq 0$, de ilyenekre (például $z = -1 + i$ -re) a felvett értéket nem számíthatnánk ki az ilyen z -kre nem értelmes eredeti (6.2) integrállal, hanem csak másképp.⁵⁸

• Emlékezzünk: szokásosan $0! = 1$, pedig $0!$ nem értelmes az $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ definíció alapján. Azonban $n > 0$ esetén $n! = \frac{(n+1)!}{n+1}$, és ez értelmes $n = 0$ esetén is: ezért érdemes $0! = \frac{1!}{1} = 1$ módon bevezetni $0!$ -t. Így a felidézett (és *elvárt*) tulajdonság érvényben marad. Negatív egészek faktoriálisja pedig „végtelen”: $(-1)! = \frac{0!}{0} = \infty$ lenne; tovább: $(-2)! = \frac{(-1)!}{-1} = \infty$, stb.

Ennyi rávezetés után rögzítsünk egy $m \in \mathbb{N}^+$ pozitív egész számot, és a faktoriális mintájára írjuk fel a $\Gamma(z)$ hasonlóan érvényes léptető tulajdonságát m visszalépéssel:

$$\Re(z) > 0 \text{ esetén} \quad z\Gamma(z) = \Gamma(z+1) \quad \Rightarrow \quad \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+m)}{z(z+1)(z+2)\dots(z+m-1)}. \quad (6.19)$$

A $\Re(z) > 0$ ahhoz kell itt, hogy a bal oldalon $\Gamma(z)$ értelmes legyen. Ilyen z -kre a felírt tört is értelmes: a nevező nem lesz nulla, és $\Gamma(z+m)$ is értelmes, hiszen ekkor $\Re(z+m) = m + \Re(z) > 0$.

Most jön viszont a lényeg: a jobb oldali törtet *önmagában nézve* ő egy z függvényében differenciálható értelmes függvényt ad meg, ha az *öbenne* szereplő $\Gamma(z+m)$ értelmes, azaz ha $\Re(z+m) > 0$, vagyis $\Re(z) > -m$; kivéve persze, ha $z = 0, -1, -2, \dots, -(m-1)$, mert ekkor a nevezőbeli szorzótényezők valamelyike nullává válna.

Semmi nem akadályoz minket tehát abban, hogy az adott $m \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\begin{array}{l} \text{értelmezzük így a } \Gamma(z)\text{-t,} \\ \text{ha } \Re(z) > -m, \text{ de } z \notin \mathbb{Z}_0^-: \end{array} \quad \Gamma(z) := \frac{\Gamma(z+m)}{z(z+1)(z+2)\dots(z+m-1)}, \quad (6.20)$$

aholis a számlálóbeli $\Gamma(z+m)$ az $\Re(z)$ felírt megszorítása miatt értelmes az eredeti (6.2) definiáló integrál alapján. A gondolatmenetből világos, hogy nem „hibáztunk”: ha olyan z -t írunk ebbe, ami még az eredeti erősebb $\Re(z) > 0$ feltételt is teljesíti, akkor ilyen z -kre ez a mostani definíció tényleg ugyanazt adja, mint az eredeti.

Sőt, ha most m helyett egy még nagyobb m' -t veszünk, akkor éppen a $\Gamma(z+m')$ -ről a $\Gamma(z+m)$ -re való eredeti lelépegetés érvényessége miatt a $\Re(z) > -m$ halmazon az m' -t használó (6.20) típusú lelépegetés is ugyanazt a függvényt definiálja itt, mint az m -mel felírt (6.20).

• Adott $m \in \mathbb{N}^+$ esetén a gamma-függvényt analitikusan elfolytattuk a $\Re(z) > 0$ halmazról a bővebb $\Re(z) > -m$, $z \neq 0, -1, -2, \dots$ halmazra. Node m akármekkora is lehet: végülis **az egész** $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ **halmazra** kiterjeszthettük a gamma-függvényt. Az eddigiek alapján egy $\Re(z) < 0$ helyen (ha $z \notin \mathbb{Z}_0^-$) úgy számíthatjuk ki $\Gamma(z)$ -t, hogy veszünk egy olyan m -et, amire $\Re(z) + m > 0$, kiszámítjuk

⁵⁸Ugye hasonló volt a helyzet az analitikus elfolytatás alappéldájánál a 4.1. szakaszban: az $\frac{1}{1-z}$ képlet elfolytatja a $\sum_n z^n$ sorösszeget a $|z| < 1$ konvergenciaköréről, de például $z=3$ -ban $\frac{1}{1-z}$ -t nem számíthatjuk ki a $\sum_n z^n$ sorösszeggel.

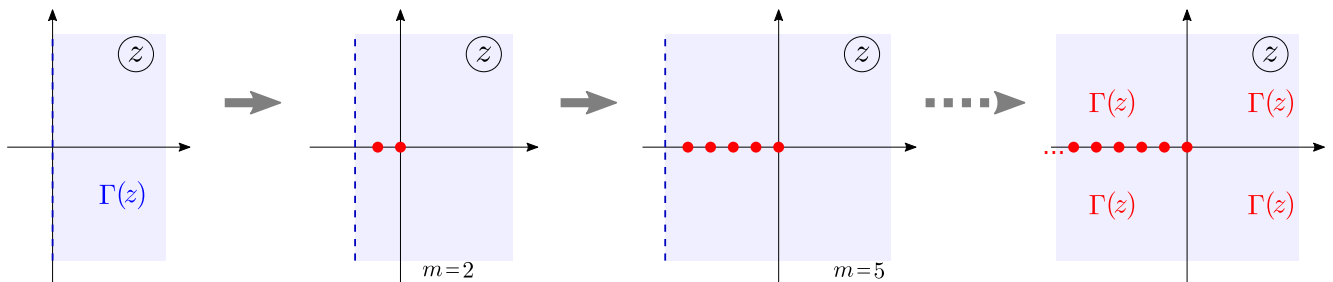
$\Gamma(z+m)$ -et az eredeti integrállal (ami ekkor értelmes), és lelépegetünk (6.20) módjára $\Gamma(z)$ -re. A mondottakból világos, hogy mindegy, milyen nagy ilyen m -et választunk.

Az is látszik a (6.20) definícióból (ahol a jobb oldalon differenciálható függvények hányadosa szerepel, és a nevezőnek jól láthatóan zérushelyei vannak), hogy mi a helyzet a nempozitív egész, $z = 0, -1, -2, \dots$ helyeken: ezekben a z -kben a $\Gamma(z)$ -nek **elsőrendű pólusai vannak**.⁵⁹

• Az is világos, hogy (éppen mivel lényegében ezt követeltük meg) a **léptetős tulajdonság is érvényes marad** a kiterjesztett gamma-függvényre is:

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1), \quad \text{minden } z \in \mathbb{C}\text{-re, ha } z+1 \notin \mathbb{Z}_0^-. \quad (\text{Ekkor } z \notin \mathbb{Z}_0^- \text{ is teljesül.}) \quad (6.22)$$

$z = -1, -2, \dots$ esetén mindkét oldal értelmetlen; ilyen z -kben a felírt bal oldalnak is és jobb oldalnak is pólusa van. Végül $z=0$ -ban a jobb oldal 1, a bal oldalnak pedig szingularitása van, de megszüntethető (az elsőrendű pólusú $\Gamma(z)$ -t szoroztuk az egyszeres zérushelyű z -vel): éppen úgy szüntethetjük meg, ha $z=0$ -ban 1-nek definiáljuk $z\Gamma(z)$ -t (pont a jobb oldali $\Gamma(z+1)$ alapján leszűrve a határértéket).



48. ábra. Illusztráció a gamma-függvény analitikus elfolytatásának tárgyalt menetéhez.

• A gamma-függvény fontos tulajdonsága (és az analitikus elfolytatást is közelebb hozza) az alábbi

$$\text{reflexiós összefüggés:} \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \quad (6.23)$$

Ha $\Gamma(z)$ eredeti definíciója, (6.2) lebeg előttünk, akkor ez az összefüggés csakis akkor lehet értelmes (pláne igaz), ha $\Re(z) > 0$ és $\Re(1-z) > 0$, azaz a $0 < \Re(z) < 1$ sávon. Ilyen z -kre **be is bizonyíthatjuk**: lényegében a (6.10) béta-integrált kell kiszámolni az $\alpha=z$, $\beta=1-z$ esetben (azaz itt $\alpha+\beta=1$); ha z a sávonkban van, akkor ez értelmes. Felidézve a $t = \frac{x}{x+1}$ módon helyettesített (6.12) alakot) is,

$$\begin{aligned} \text{azt kell belátni, hogy} & \int_0^1 dt t^{z-1}(1-t)^{-z} = \int_0^\infty dx \frac{x^{z-1}}{x+1} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \\ \text{ha } 0 < \Re(z) < 1, \text{ akkor} & \end{aligned} \quad (6.24)$$

Ez utóbbi integrált úgy kezelhetjük, ahogyan korábban az 5.3. szakaszban tettünk hasonló integrálokkal a nem egész kitevőjű hatványfüggvények vágásait használva, például az ottani (5.41)

⁵⁹Az a szokásos értelmezés, hogy negatív egész számra $(-m-1)! = \infty$, a gamma-függvény pólusait tudva nyerhet új értelmet. Mindenesetre elemibb helyzetekben is ki szoktuk ezt használni; például a binomiális tételnél:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}, \quad (a+b)^n = \sum_{m=0}^n \frac{n!}{(n-m)!m!} a^m b^{n-m} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{n!}{(n-m)!m!} a^m b^{n-m}, \quad (6.21)$$

azaz minden $m \in \mathbb{Z}$ -re összegezhettünk, ha úgy vesszük, hogy $m > n$ esetén $(n-m)! = \infty$, és $m < 0$ esetén $m! = \infty$. Bonyolultabb hasonló összegzések esetén is jó lehet tudni, hogy „nem mindig kell figyelni” az összegzés határait: ha a nevezőbe negatív szám faktoriálisa kerül, az a tag nulla.

integrállal. Kivételesen x -szel jelöljük a komplex változót is; a következő integrandus kell:

$$f(x) = \frac{(-x)^{z-1}}{x+1}, \quad \text{ennek vágása van } x \in \mathbb{R}_0^+ \text{-on, és elsőrendű pólusa } x = -1 \text{-ben, a reziduum itt } 1. \quad (6.25)$$

Röviden felidézzük az 5.3. szakaszban látott gondolatmenetet. Az x -síkon kellő γ integrációs út a korábbi 40. ábrán látható: a vágás fölött $r+i\varepsilon$ -től $R+i\varepsilon$ -ig, R sugarú bezáró körív, a vágás alatt $R-i\varepsilon$ -től vissza $r-i\varepsilon$ -ig, majd kis r sugarú körív $x=0$ körül. Ezen γ -ra alkalmazhatjuk a reziduumszámítást: az $x=-1$ pólust kerüli meg, $\oint_{\gamma} f(x) dx = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i$. Másrészt $\varepsilon \rightarrow 0$ -ra a vágás fölött illetve alatt, $\pm i\varepsilon$ -t véve $1+(x \pm i\varepsilon) \rightarrow 1+x$, de $[-(x \pm i\varepsilon)]^{z-1} \rightarrow x^{z-1} e^{\pm i\pi z}$, továbbá $R \rightarrow \infty$ -t véve a nagy ív járuléka nullához tart (kihasználva, hogy $\Re(z) < 1$), és $r \rightarrow 0$ -t véve a kis ív járuléka is nullához tart (kihasználva, hogy $\Re(z) > 0$). A határátmeneteket elvégezve tehát

$$\begin{aligned} 2\pi i &= \oint_{\gamma} dx f(x) = e^{i\pi z} \int_0^{\infty} dx \frac{x^{z-1}}{x+1} - e^{-i\pi z} \int_0^{\infty} dx \frac{x^{z-1}}{x+1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_0^{\infty} dx \frac{x^{z-1}}{x+1} = \frac{2\pi i}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \end{aligned}$$

• A $\Gamma(z)$ -t már analitikusan elfolytattuk a \mathbb{Z}_0^- halmazt kivéve mindenhol: ezt figyelembe véve a reflexiós összefüggés bal oldala, $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$ az egész \mathbb{C} -n analitikus, kivéve az egész számokat (melyek $\Gamma(z)$ vagy $\Gamma(1-z)$ pólusai). Láthatólag ugyanez az helyzet a jobb oldallal: a $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ függvény is a $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ halmazon analitikus. Beláttuk, hogy ezek megegyeznek a nyílt $0 < \Re(z) < 1$ sávon: emiatt (ismerve analitikus függvények „merevségét”) mindenhol megegyeznek. A **reflexiós összefüggés is tehát minden $z \in \mathbb{C}$ -re igaz**, hacsak értelmes, vagyis valós egész számokat kivéve mindenhol (azokban pedig mindkét oldalon szereplő függvénynek pólusai vannak, ugyanolyanok).

• Leszűrhetjük az eddigiekből a gamma-függvény két fontos egyszerű tulajdonságát:

$$\begin{aligned} - (\Gamma(z))^* &= \Gamma(z^*) : \text{konjugált számhoz konjugált értéket rendel,} \\ - \Gamma(z) &\neq 0 : \text{a gamma-függvénynek } \mathbf{nincsen\ zérushelye.} \end{aligned} \quad (6.26)$$

Az első, a konjugáltas, amely persze speciális esetként visszaadja azt is, hogy $\Gamma(x)$ értéke valós, ha x valós, $\Re(z) > 0$ esetén látszik az eredeti definiál (6.2) integrálból: abba z helyett z^* -ot írva tényleg az integrandus, így az eredmény is konjugálódik. $\Re(z) < 0$ esetére a fentebbi (6.19) szerinti lelépegetéssel juthatunk el, és ez a lelépegetés is megőrzi ezt a konjugáltas tulajdonságot.

Hogy nincs zérushely, az a reflexiós összefüggésből következik: $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ sehol sem nulla, így $\Gamma(z)$ esetleg olyan helyeken lehetne csak nulla, ahol $\Gamma(1-z)$ nem értelmezett, de ez csakis a $z = m+1$, $m = 0, 1, 2, \dots$ helyeken, azaz a pozitív egész számokban van, ahol viszont $\Gamma(m+1) = m! \neq 0$.

Tudva, hogy $\Gamma(z) \neq 0$, nyugodt(abb) szívvel átírhatjuk például így a reflexiós összefüggést:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad \Rightarrow \quad \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \frac{1}{\Gamma(z)},$$

megint úgy érve, hogy a jobb oldalnak a $z = 0, -1, -2, \dots$ helyeken megszüntethető szingularitásai vannak, melyeket ha megszüntetünk, akkor érvényes a felírt egyenlőség ezeken a helyeken is. $z = 1, 2, 3, \dots$ értékeknél pedig mindkét oldalnak pólusai vannak.

• A(z immáron mindenhol igaz) léptető tulajdonság, a (szintén mindenhol igaz) reflexiós összefüggés és $\Gamma(z)$ pólusai szépen „összeillenek”. Kihasználhatjuk ezt például egymás melletti számok

szorzatának felírásához: egyelőre olyan α -kra, amelyek nem valós egészek,

$$\begin{aligned} \underbrace{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+m-3)(\alpha+m-2)(\alpha+m-1)}_{m \text{ darab tényező}} &= \frac{\Gamma(\alpha+m)}{\Gamma(\alpha)} = \\ &= (-1)^m \cdot \underbrace{(1-\alpha-m)(2-\alpha-m)(3-\alpha-m)\dots(-2-\alpha)(-1-\alpha)(-\alpha)}_{\text{minden tényezőt } -1\text{-gyel szoroztuk, és fordított sorrendben írtuk fel}} = \frac{(-1)^m \Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha-m)}, \end{aligned}$$

az utóbbi szorzatot is lépegetéssel „dekódolva”. A reflexiós összefüggéssel is az derül ki, hogy

$$\frac{\Gamma(\alpha+m)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha+\pi m)} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha-m)}}{\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}} = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha-m)} \underbrace{\frac{\sin(\pi\alpha)}{\sin(\pi\alpha+\pi m)}}_{=(-1)^m} = \frac{(-1)^m \Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha-m)}. \quad (6.27)$$

Valós egész $\alpha \equiv n \in \mathbb{Z}$ helyeken valamelyik törtnek megszüntethető szingularitása van. Ha mindkettőnek (ha $n \leq 0$, de $n+m > 0$, vagy ha $1-n-m \leq 0$, de $1-n > 0$), akkor mindkét oldal határértéke nulla. Egyéb esetekben csak az egyik törtnek van megszüntethető szingularitása, és a másik tört értéke megadja a határértéket: ez nyilvánvalóbb az m tényezős szorzatként írt fentebbi alakból.

• Az általános $(1-z)^{-\alpha}$ hatványfüggvény hatványsorát, melyet még az 1. fejezet végén írtunk fel, most így is megfogalmazhatjuk:

$$|z| < 1\text{-re} \quad (1-z)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha-n)} \frac{z^n}{n!}. \quad (6.28)$$

Ha $\alpha = m$ nemnegatív valós ($m \in \mathbb{N}_0^+$), akkor az első alak működik, a másodikban viszont $\frac{\infty}{\infty}$ -k vannak a pólusok miatt. Ha pedig $\alpha = -m$ nempozitív valós, akkor véges sok tag van (és tényleg, ekkor az $(1-z)^m$ függvényről van szó, ami polinom): az első alak ilyenkor $\frac{\infty}{\infty}$ -ket adna, a másodikon viszont látszik, hogy véges sok tagot kivéve ∞ van a nevezőben, azaz véges sok tag nem nulla.

• A konjugáltas tulajdonságot, a reflexiós összefüggést és a léptető tulajdonságot tudva $\Gamma(z)$ **abszolútértéke néhány esetben kifejezhető elemi függvényekkel**. Legyen $\eta \in \mathbb{R}$ valós; ekkor

$$\left| \Gamma(i\eta) \right|^2 = \Gamma(i\eta)\Gamma(-i\eta) = \frac{1}{-i\eta} \Gamma(i\eta)\Gamma(1-i\eta) = \frac{-1}{i\eta} \frac{\pi}{\sin(i\pi\eta)} = \frac{\pi}{\eta \operatorname{sh}(\pi\eta)}, \quad (6.29)$$

$$\begin{aligned} \left| \Gamma\left(\frac{1}{2}+i\eta\right) \right|^2 &= \Gamma\left(\frac{1}{2}+i\eta\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\eta\right) = \\ &= \Gamma\left(\frac{1}{2}+i\eta\right)\Gamma\left(1-\left(\frac{1}{2}+i\eta\right)\right) = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+i\pi\eta\right)} = \frac{\pi}{\operatorname{ch}(\pi\eta)}, \end{aligned} \quad (6.30)$$

továbbá ha n adott pozitív egész szám, akkor

$$\begin{aligned} \left| \Gamma(n+i\eta) \right|^2 &= \Gamma(n+i\eta)\Gamma(n-i\eta) = \left(\Gamma(i\eta) \prod_{m=0}^{n-1} (i\eta+m) \right) \cdot \left(\Gamma(-i\eta) \prod_{m=0}^{n-1} (-i\eta+m) \right) = \\ &= \left| \Gamma(i\eta) \right|^2 \cdot \prod_{m=0}^{n-1} ((i\eta+m)(-i\eta+m)) = \frac{\pi}{\eta \operatorname{sh}(\pi\eta)} \cdot \prod_{m=0}^{n-1} (\eta^2+m^2). \end{aligned} \quad (6.31)$$

Ez a (6.31) képlet kiadja az előző (6.30)-at speciális esetként, ha a kijelölt szorzat $n=0$ -hoz tartozó értékét (amikor egy tényező sem lenne a felírás szerint) 1-nek értelmezzük. Az előkerült képletek például a Coulomb-kölcsönhatással felírt Schrödinger-egyenlet vizsgálatánál hasznosak.

6.3. Stirling-formula, következmények

- A nagy számok faktoriálisára vonatkozó alábbi formula sokszor visszaköszön a gyakorlatban:

Stirling-formula:

$$\begin{aligned} \text{ha } n \in \mathbb{N}^+ \text{ és } n \gg 1, \text{ akkor } n! &\approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \\ \text{vagy másképp: ha } x \gg 1 \text{ valós, akkor } \Gamma(x+1) &\approx \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Ez jellemzi a gamma-függvény illetve a faktoriális növekedését: az n^n a lényeg.⁶⁰ A most felírt (és leginkább gyakorlatias) „körülbelül egyenlő”-s változat mellett azonban egzaktabb is igaz.

Állítás: $x \in \mathbb{R}^+$ esetén $\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\Gamma(x+1)} \cdot \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x \right\} = 1,$ (6.33)

sőt \mathbb{C} -ben is, akármilyen fajta $|z| \rightarrow \infty$ átmenet esetén is, hacsak eltávolodunk a pólusoktól:

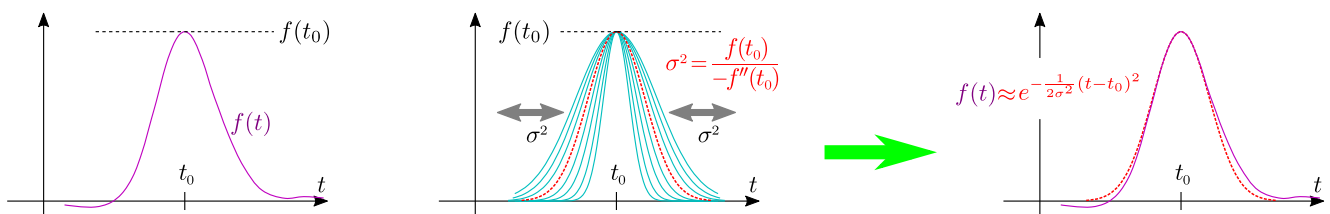
$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi z} \left(\frac{z}{e}\right)^z}{\Gamma(z+1)} = 1, \quad \begin{array}{l} \text{ha közben } z \text{ az } \mathbb{R}^- \text{ tengelytől} \\ \text{is végtelen messze eltávolodik.} \end{array} \quad (6.34)$$

- A (6.33)–(6.34) képletek így egzakt eredmények, és a gamma-függvény további megismeréséhez is fontosak.⁶¹ Először a körülbelül egyenlős (6.32)-t látjuk be egy önmagában is érdekes (és máshol is hasznos) módszerrel: „csúcsos” függvény **Gauss-közelítésben** való integrálásával.

Legyen az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény olyan, hogy van egy egyértelmű t_0 maximumhelye, annak környékén elégszer differenciálható, és csak t_0 környékén különbözik lényegesen nullától. Ekkor az $\int_{-\infty}^{\infty} f$ integrálba lényegében csak a t_0 környékéről származik járulék. Ha megtaláljuk t_0 -t majd $f(t_0)$ -t és $f''(t_0)$ -t, eszünkbe juthat, hogy f -et egy „höz hasonló” Gauss-görbével közelítsük, aminek ugyanott van a maximumhelye és a maximumértéke, és „ugyanolyan széles”, azaz t_0 -ban a második deriváltja is ugyanannyi, mint f -é:

$$f(t) \approx f(t_0) e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t-t_0)^2}, \quad \text{ahol } \sigma^2 = \frac{f(t_0)}{-f''(t_0)}.$$

Lássuk be, hogy a felírt Gauss-görbe teljesíti a kirótt feltételeket! (A mondott feltételek mellett biztos, hogy ha $f(t_0) > 0$, akkor $f''(t_0) < 0$, és viszont: a bevezetett σ^2 tényleg pozitív.)



49. ábra. Csúcsos függvény integrálása Gauss-közelítésben: a maximumhely és -érték állítja be a közelítő Gauss-görbe csúcshelyét és magasságát, az f'' pedig a Gauss-görbe szélességét.

⁶⁰Itt $n \rightarrow \infty$ -t szokás gondolni, de már például $6! = 720$, a fenti formula pedig 710,08-at ad: a relatív eltérés 1,4%.

⁶¹És nem is mindig *növekedést* mondanak: például képzetes irányban ($a \in \mathbb{R}^+$ fix, $t \in \mathbb{R}^+$ és $t \rightarrow \infty$) az abszolút-értékre $|\Gamma(a+it)| \approx \sqrt{2\pi|a+it|} \cdot |(a+it)^{a+it}| \cdot |e^{-a-it}| = \dots = \sqrt{2\pi} e^{-a} (a^2+t^2)^{\frac{a}{2}+\frac{1}{4}} e^{-t \arctg \frac{t}{a}}$, amiben az esetleg elég nagy a^a mellett $t \rightarrow \infty$ -re már az $e^{-\arctg \frac{t}{a}} \approx e^{-\frac{\pi}{2}t}$ a lényeges: ilyen értelemben $\Re(z) > 0$ esetén $|\Gamma(z)|$ képzetes irányban lényegében *exponenciálisan csökken*. Figyeljük meg, hogy ez összevág a fenti (6.29)–(6.31) képletekkel is!

Az eredeti f helyett a közelítő Gauss-görbét integráljuk; ha egy $[a, b]$ szakaszon kívül „ $f \approx 0$ ” (vagy nem is értelmezett), akkor az \int_a^b integrál helyett használhatjuk a Gauss-görbe egész \mathbb{R} -re vett integrálját (*amit tudunk*). Az így kapott képletet hívjuk az $\int_a^b f$ integrál gaussi közelítésének:

$$\int_a^b dt f(t) \approx \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t_0) e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}} = f(t_0) \sqrt{2\pi\sigma^2} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b dt f(t) \approx \underline{\underline{f(t_0) \sqrt{2\pi \frac{f(t_0)}{-f''(t_0)}}}}. \quad (6.35)$$

• Próbáljuk ezt alkalmazni a $\Gamma(x+1)$ -et definiáló eredeti (6.2) integrálra $z \equiv x \in \mathbb{R}^+$ valós esetben!

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} dt f(t), \quad \text{ahol} \quad \begin{aligned} f(t) &= t^x e^{-t}; & \text{ebből deriválással:} \\ f'(t) &= t^x e^{-t} \left(1 - \frac{x}{t}\right), \\ f''(t) &= t^x e^{-t} \left(1 - \frac{2x}{t} + \frac{x(x-1)}{t^2}\right). \end{aligned} \quad (6.36)$$

A t függvényében tehát a $[0, \infty]$ integrálási tartományon tényleg van egyértelmű t_0 maximumhely:

$$f'(t_0) = 0 \quad \text{ha} \quad t_0 = x \quad \Rightarrow \quad f(t_0) = \frac{x^x}{e^x}, \quad \frac{f(t_0)}{-f''(t_0)} = x. \quad (6.37)$$

Itt tehát $\sigma = \sqrt{x}$ adódik, de $t_0 = x$: a csúcs tényleg „relatív keskenyedik”, ahogy $x \rightarrow \infty$. Így viszont az iméntiekből gaussi közelítéssel ki is jön a Stirling-formula:

$$\int_0^{\infty} dt e^{-t} t^x \approx f(t_0) \sqrt{\frac{2\pi f(t_0)}{-f''(t_0)}} = \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x. \quad (6.38)$$

• **Kiegészítés:** hogy az erősebb, határértékes fogalmazást (a fentebbi (6.33) állítást) is belássuk, helyettesítsünk úgy a $\Gamma(x+1)$ -et megadó definiáló integrálban, hogy az új integrandus csúshelye 0, ottani értéke 1, és „szélessége” is 1 legyen. A iménti t_0 , $f(t_0)$, $f''(t_0)$ értékeken és a közelítő Stirling-formulán felbuzdulva azt találjuk, hogy a $t = x + \sqrt{x} \cdot s$ helyettesítés megfelelő erre; ezzel

$$\Gamma(x+1) = \frac{x^x \sqrt{x}}{e^x} \int_{-\sqrt{x}}^{\infty} ds e^{-h(s)}, \quad \text{ahol} \quad h(s) \equiv \sqrt{x}s - x \ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{x}}\right). \quad (6.39)$$

A bevezetődött $h(s)$ függvény hatványsora $s=0$ körül $\frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{3\sqrt{x}} + \frac{s^4}{4x} - \dots$: az integrandus pontonkénti $x \rightarrow \infty$ határértéke tehát tényleg $e^{-s^2/2}$ (erre hajtottunk a helyettesítésekkel), az integrálás alsó határa pedig tényleg $-\infty$ -hez tart, továbbá $\int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-s^2/2}$ értéke $\sqrt{2\pi}$. Ennek az iménti formulába való beírásával lényegében az előző pontban látott Gauss-közelítéses eredményt reprodukáljuk; azonban a precízebb állítás is kimondhatjuk, ha most belátjuk, hogy az $x \rightarrow \infty$ határátmenet és az integrálás megcserélhető.

A *Lebesgue-tétel* szerint ez igaz, ha van $|e^{-h(s)}| = e^{-h(s)}$ -nek x -től független integrálható majoránsa. Függvényvizsgálattal (akár ábrázolással megsegítve) kiderül, hogy ha $s > 0$ adott, akkor x -et növelve $h(s)$ nő, így $e^{-h(s)}$ értéke csökken, ha viszont $s < 0$, akkor x -et növelve $h(s)$ csökken, azaz $e^{-h(s)}$ nő (az $e^{-s^2/2}$ határértékhez tartva), legalábbis olyan s -et véve, ami az adott x -nél már értelmes, vagyis $s > -\sqrt{x}$ esetétől indítva.⁶² Indítsunk például $x=1$ -től az $x \rightarrow \infty$ -t; ekkor:

$$\begin{aligned} s > 0, x > 1 \text{ esetén } e^{-h(s)} &\leq e^{-h(s)|_{x=1}} = (1+s)e^{-s}; \text{ ez integrálható } s \in \mathbb{R}^+ \text{-ra,} \\ s < 0 \text{-ra és } x > 0 \text{-ra } e^{-h(s)} &\leq e^{-s^2/2}, \text{ ami integrálható } s \text{-ben } \mathbb{R}^- \text{-ra.} \end{aligned} \quad (6.40)$$

⁶²Legyen $\sigma \equiv \sqrt{x}$ és $\xi \equiv \frac{s}{\sigma}$. A $h(s)$ -et σ szerint deriválva $\frac{d}{d\sigma}[\sigma s - \sigma^2 \ln(1 + \frac{s}{\sigma})] = \sigma \left(\frac{\xi^2 + 2\xi}{\xi + 1} - 2 \ln(1 + \xi)\right) \equiv \sigma F(\xi)$. Mivel $F(0) = 0$ és $F'(\xi) = \dots = \left(\frac{\xi}{\xi + 1}\right)^2$, ami $\xi = 0$ -ban 0, máshol pozitív, leszűrhetjük, hogy $F(\xi) > 0$, ha $\xi > 0$, és $F(\xi) < 0$, ha $\xi < 0$. Megkaptuk tehát $\frac{d}{d\sigma} h(s)$ előjelét, amiből azt szűrhetjük le, hogy valóban: σ növelésével $h(s)$ nő, ha $s > 0$ (ekkor $\xi > 0$), és csökken, ha $s < 0$ (ilyenkor $\xi < 0$).

Találtunk tehát integrálható majoránst, így az $x \rightarrow \infty$ határértékképzést felcserélhetjük az integrálással, amit tudva az előző (6.39) képetünkből továbbfejtvé

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{x} x^x / e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\sqrt{x}}^{\infty} ds e^{-h(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} ds \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-h(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-s^2/2} = \sqrt{2\pi}; \quad (6.41)$$

készen is vagyunk tehát. A \approx -t használó (6.32) Stirling-formulát tehát kicsit komolyabb eszközökkel sikerült a precíz (6.33) határértékes formába önteni; az ehhez használt $t \rightarrow s$ helyettesítést persze a pongyolább gaussi közelítés sugallta. Mindenesetre hasznos tanulság, hogy bonyolultabb integrálok gaussi közelítését is sokszor „megtámogathatjuk” Lebesgue-tétellel.

* * *

A komplex Stirling-formulára visszatérünk; néhány következmény azonban már az előzőekben bebizonyított valós esetből is leszűrhető. Az ötlet a „végtelenből visszalépegetés”: minden $m \in \mathbb{N}^+$ esetén lelépkedhetünk $\Gamma(x+m+1)$ -ből $\Gamma(x)$ -re, így $m \rightarrow \infty$ határértékként is, ahol viszont $\Gamma(x+m+1)$ -be beírhatjuk a Stirling-formulát. Egyelőre tehát $z \equiv x \in \mathbb{R}$ esetét véve

$$\Gamma(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x+m+1)}{x(x+1)(x+2) \dots (x+m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi}(x+m)^{x+m+\frac{1}{2}} e^{-x-m}}{x(x+1)(x+2) \dots (x+m)}. \quad (6.42)$$

• Beláthatjuk ebből a következő képletet: minden $z \in \mathbb{C}$ esetén, ahol csak értelmes, érvényes a

$$\textbf{kétszerező képlet:} \quad \Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right). \quad (6.43)$$

Az motiválhatja (és segíthet megjegyezni is) ezt, hogy **pozitív egészekre biztos igaz**, amit rögtön ellenőrizhetünk is a gamma-függvény speciális értékeit tudva: ugyebár $\Gamma(n) = (n-1)!$, $\Gamma(2n) = (2n-1)!$ és $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}$. Az állítás most viszont az, hogy a felírt formula teljesül **minden z-re** (komplexekre is).

Kezdjük a valós $x \in \mathbb{R}^+$ esetének vizsgálatával: ilyen x -ekre írjuk fel $\Gamma(x)$, $\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)$ és $\Gamma(2x)$ értékeit a visszalépegetős (6.42) alakban, ügyesen kiosztva az m beírt értékeit (amiknek annyi a szerepük, hogy végtelenhez tartanak): $\Gamma(x)$ -hez m -et, $\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)$ -hez $m-1$ -et, $\Gamma(2x)$ -hez pedig $2m-2$ -et írunk. $\Gamma(x)$ kifejezése a (6.42) marad, a másik kettő pedig így adódik:

$$\frac{\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\left(x + m - \frac{1}{2}\right)^{x+m} e^{-x-m+\frac{1}{2}}}{\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) \dots \left(x - \frac{1}{2} + m\right)}, \quad \frac{\Gamma(2x)}{\sqrt{2\pi}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(2x+2m)^{2x+2m+\frac{1}{2}} e^{-2x-2m}}{2x(2x+1) \dots (2x+2m)}.$$

Írjuk fel ezekkel a bizonyítandó (6.43) állítás két oldalának hányadosát! Vezessük le magunknak; a lényeg: az m -ek ötletes elhelyezése miatt a visszalépegetős szorzatok lényegében kiesnek, és ezen túl is sok mindennel egyszerűsíthetünk; arra jutunk, hogy (6.43) két oldalának hányadosa $\sqrt{e} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1/2}{x+m}\right)^{x+m} = \sqrt{e} \cdot e^{-1/2} = 1$, tudva, hogy $\lim_{X \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{X}\right)^X = e^a$. Ezzel valós x -re tehát beláttuk a kétszerezős formulát.

Komplex z -re az „olcsó” érvelés az analitikus függvények merevségén alapszik (ld. az 5.1. szakaszban): a felírt (6.43) összefüggés analitikus függvények egyenlőségét állítja, és az előzőek alapján a (torlódási pontot tartalmazó) \mathbb{R}^+ részhalmazon igaz. Emiatt igaz mindenhol, ahol csak értelmes.⁶³

⁶³ Megjegyzés: a Gauss-ról elnevezett *többszörözős formula* is levezethető a most látott módszert követve:

$$\Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{m}\right) \Gamma\left(z + \frac{2}{m}\right) \dots \Gamma\left(z + \frac{m-1}{m}\right) = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} m^{\frac{1}{2}-mz} \Gamma(mz). \quad (6.44)$$

• A gamma-függvény logaritmusának $z=1$ körüli **sorfejtését is közelhozza** a végtelenből való visszalépegetés. Irjuk fel $\ln \Gamma(1+x)$ -re a Stirling-formulás (6.42) képletet (m -et $m-1$ -re átjelölve):

$$\ln \Gamma(x+1) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \left(x+m+\frac{1}{2}\right) \ln(x+m) - (x+m) - \sum_{k=1}^m \ln(x+k) \right\}; \quad (6.45)$$

ezt valós x -ekre bizonyítottuk, de ez elég. Megelőlegezzük (ld. a C.6. függelékben), hogy itt a határértékképzést megcserélhetjük a deriválással; ezzel viszont azt írhatjuk, hogy

$$\frac{d}{dx} \ln \Gamma(x+1) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2(x+m)} + \ln(x+m) - \sum_{k=1}^m \frac{1}{x+k} \right\} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \ln(x+m) - \sum_{k=1}^m \frac{1}{x+k} \right\}, \quad (6.46)$$

ahol elhagytuk a nullához tartó $\frac{1}{x+m}$ -et. A maradék két tag ∞ -hez tart, csak a különbségüknek létezik határértéke (részletesebben ezt is ld. a C.6. függelékben). A többedik deriváltak pedig

$$\frac{d^2}{dx^2} \ln \Gamma(x+1) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \frac{1}{(x+k)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2}; \quad (6.47)$$

$$\dots \quad \frac{d^n}{dx^n} \ln \Gamma(x+1) = (-1)^n (n-1)! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^n}. \quad (6.48)$$

ezek $n \geq 2$ -re már léteznek így, rendes sorösszegként. Tudva, hogy $\ln \Gamma(1) = \ln 1 = 0$, és $x=0$ -ban kiértékelve a kapott képleteket megkapjuk $\ln \Gamma(z+1)$ hatványsorának együtthatóit, azaz magát a sorfejtést. A definíciókat ld. rögtön; az eredmény:

$$|z| < 1\text{-re} \quad \ln \Gamma(z+1) = -\gamma z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\zeta(n)}{n} (-z)^n. \quad (6.49)$$

A deriváltakat az \mathbb{R} mentén számoltuk ki, de mivel $\ln \Gamma(z)$ $z_0=1$ -ben *komplex* differenciálható, *tényleg* a kapott értékek a deriváltjai: a kapott *hatványsor maga* komplex z -kre is érvényes és értelmes. A konvergenciasugár $R=1$: $\ln \Gamma$ differenciálható a $z_0=1$ körüli ilyen sugarú körlapon, de ennek határán már van ($z=0$ -ban) olyan pont, aminek egy környezetére nem terjeszthető ki analitikus módon. (Ezt a következtetési lehetőséget a 4.3. szakaszban fejtettük ki.)

• A $-\gamma$ tehát a gamma-függvény deriváltja 1-ben. A γ neve: **Euler-(Mascheroni)-állandó**:⁶⁴

$$\gamma \equiv -(\ln \Gamma)'(1) = -\Gamma'(1). \quad \text{Utóbbi is igaz, hiszen } \Gamma(1)=1. \quad (6.50)$$

Az $\ln \Gamma$ deriváltját megadó iménti visszalépegetős (6.46) kifejezésbe $x=0$ -t írva adódik az egyik, a $\Gamma(1+z)$ eredeti (6.2) definícióját paraméteres integrálként deriválva pedig a másik kifejezése:

$$\gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \ln m \right], \quad \gamma = -\int_0^{\infty} dt e^{-t} \ln t. \quad \gamma \approx 0,577\dots \quad (6.51)$$

A többi együtthatóban a $\zeta(s)$ úgynevezett **Riemann-féle zéta-függvény** került elő. Ezzel a D függelék foglalkozik; most csak a legalapvetőbb (és itt csak $s \equiv m$ esetben használt) definíciója kell:

$$\zeta(s) := \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}, \quad \text{ha } \Re(s) > 1. \quad (6.52)$$

⁶⁴Érdeklőség: γ -ról még az sincs bebizonyítva, hogy egyáltalán irracionális lenne, bár „minden bizonnyal” az.

• Az iméntiekben az $\ln \Gamma(z)$ függvény hatványsorát vizsgáltuk; az eredeti $\Gamma(z)$ gamma-függvény hatványsora $\ln \Gamma(z)$ -éből a (sorával definiált) \exp függvényt hattatva adódik. Ebben $\ln \Gamma(z)$ sorának tetszetős együtthatói (a négyzetre, köbre stb. emelés miatt) „keverednek össze”.

• **A gamma-függvény** egy (szintén Euler-től származó) határértékes **alternatív definíciója** adódik, ha az eredeti (6.2) definiáló integrálban a felső határt óvatosan ∞ helyett n -nek vesszük, és e^{-t} helyett $(1-\frac{t}{n})^n$ -et írunk: az $n \rightarrow \infty$ határesetben visszakapjuk e^{-t} -t (ez az e alapú exponenciális függvény egyik alapvető, definiáló jellegű tulajdonsága), és az ∞ határt is. Tehát:

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \int_0^\infty dt e^{-t} t^{z-1} = \int_0^\infty dt \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\chi_{[0,n]}(t) \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} \right] \stackrel{1.}{=} \\ &\stackrel{1.}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n dt \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} \stackrel{2.}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} n^z \int_0^1 ds s^{z-1} (1-s)^n \stackrel{3.}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} n^z \frac{\Gamma(z)\Gamma(n+1)}{\Gamma(z+n+1)}. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Az 1. lépésben megcseréltük a határértékképzést az integrállal.⁶⁵ A 2. lépésben $t=ns$ -et helyettesítettünk, a 3. lépésben pedig a 6.1. szakaszban látott (6.10) béta-integrált használtuk. Az utolsó jobb oldalon a hányadost lépegetős szorzatként írva kapjuk a keresett képletet:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \dots (z+n)}. \quad (6.54)$$

Egyelőre ezt $\Re(z) > 0$ esetre láttuk be (és csak ekkor vagyunk biztosak benne, hogy egyáltalán létezik a felírt határérték); igaz azonban általános $z \in \mathbb{C}$ (de természetesen $z \notin \mathbb{Z}_0^-$) esetre is. Ilyen z -re vegyünk egy olyan fix $m \in \mathbb{N}^+$ természetes számot, amire $\Re(z+m) > 0$, és írjuk fel $\Gamma(z)$ -t visszalépegetve $\Gamma(z+m)$ -ről, amelyet viszont jogosan írhatunk fel az iménti határértékkel:

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \frac{\Gamma(z+m)}{z(z+1) \dots (z+m-1)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{z+m}}{(z+m) \dots (z+m+n)}}{z(z+1) \dots (z+m-1)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+m)!(n+m)^z}{z(z+1) \dots (z+m+n)} \cdot \frac{n^{z+m} n!}{(n+m)^z (n+m)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \dots (z+n)} \cdot \frac{n^m (n-m)!}{n! \left(1-\frac{m}{n}\right)^{-z-m}}, \end{aligned}$$

ahol a legutolsó lépésben a végtelenhez tartó n -et $n-m$ -mé jelöltük át, és még kicsit alakítottunk. Könnyű belátni viszont, hogy itt a legutóbbi törtnek *létezik* $n \rightarrow \infty$ határértéke, és az 1: ezzel azt kapjuk, hogy az előtte lévő, a (6.54)-ben írttal azonos alakú kifejezésnek is tényleg létezik határértéke, ami valóban megadja $\Gamma(z)$ -t a most vizsgált, az $\Re(z) > 0$ -t nem feltétlenül teljesítő esetben is. Megfigyelhetjük, hogy a (6.54) előállításban a nevezőből szépen látszanak $\Gamma(z)$ pólusai a $z \in \mathbb{Z}_0^-$ nempozitív egész számokban.

Megjegyzés: később látjuk be, hogy a Stirling-formula valóban érvényes komplex esetben is; mindenesetre ezzel is kijön, hogy a (6.54) definíció nemcsak $\Re(z) > 0$ -ra működik. Az alábbi 1. lépésben visszatéve a (6.53)-beli utolsó alakot és a 2. lépésben a Stirling-formulát használva

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(z)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \dots (z+n)} &\stackrel{1.}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z \Gamma(n+1)}{\Gamma(z+n+1)} \stackrel{2.}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi(n+z)} \left(\frac{n+z}{e}\right)^{n+z}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^z \left(1-\frac{z}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1-\frac{z}{n}\right)^{z+\frac{1}{2}} = 1, \quad \text{amint állítottuk.} \end{aligned}$$

⁶⁵Ezt szokásosan a *Lebesgue-tétel* alapozza meg; az integrálható majoráns maga az $|e^{-t} t^{z-1}|$ függvény, mert az $(1-\frac{t}{n})^n = \exp\{n \ln(1-\frac{t}{n})\}$ alakot írva látszik (amellett, hogy $n \rightarrow \infty$ -re tényleg e^{-t} -t kapjuk vissza), hogy mivel $t > 0$ -ra $\ln(1-\frac{t}{n}) < \frac{t}{n}$, ezért az integrandus n növelésével mindenhol monoton nő $t > 0$ esetén (a határérték, e^{-t} felé).

6.4. További érdekességek

• Ha az előző (6.54) előállítást összevarrjuk a (6.23) reflexiós összefüggéssel, a szinuszfüggvény érdekes végtelenszorzat-előállítását kapjuk. A $\Gamma(1-z)$ -t megadó részbe érdemes $n-1$ -et írni:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\pi z)}{\pi} &= \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(z+1)(z+2) \dots (z+n)}{n!n^z} \cdot \frac{(1-z)(2-z) \dots (n-z)}{(n-1)!(n-1)^{1-z}} = \\ &= z \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+z)(1-z)(2+z)(2-z) \dots (n+z)(n-z)}{(n!)^2} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{z-1}; \end{aligned} \quad (6.55)$$

itt a tényezőkhöz kétszer is beleoszthatunk $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$ -sal, az utolsó hatvány pedig 1-hez tart. Az eredményt végtelen szorzatként írhatjuk (még z -vel átosztva):

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = (1-z^2) \left(1 - \frac{z^2}{2^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{3^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{4^2}\right) \dots = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right). \quad (6.56)$$

Ezt $z \rightarrow \frac{z}{2}$ -vel átírva a $\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)$ ilyen felírásában a páros egész számok lesznek a nevezőkben. Tudva, hogy $\sin(\pi z) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)$, tényezőnkénti osztással hasonló képletet kaphatunk $\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)$ -re:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right) = (1-z^2) \left(1 - \frac{z^2}{3^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{5^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{7^2}\right) \dots = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(2k+1)^2}\right). \quad (6.57)$$

A felírt szorzatokat Euler önmaguk jogán „sejtette meg”: tudva, hogy $\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$ páros függvény, $z=0$ -ban 1 (határ)értékű (mai fogalmazással: itteni szingularitását megszüntethetjük ott itt 1-nek definiálva), és zérushelyei a szinuszt ismerve $z = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, olyan „végtelenedfokú polinom”-ot keresett, ami a páros z^2 -eket tartalmazza, $z=0$ -ban 1, és a mondott helyeken nulla. A $\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$ -re felírt képlet („végtelen gyöktényező alak”) pont ilyen. Ha ezt elfogadjuk bizonyításnak, akkor viszont az iménti (6.55) átalakítást megfordítva kijön a gamma-függvény reflexiós összefüggése.

• Most $\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$ megadott végtelenszorzat-alakjában „elvégezhetjük a kéttagú összegek végtelen szorzatát”. Így, összeszedve a z^2 -es, a z^4 -es stb. tagokat végül z^2 -ben hatványsort kapunk.⁶⁶

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} &= 1 - \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) z^2 + \\ &+ \left(\frac{1}{1^2} \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2} \frac{1}{2^2} + \frac{1}{1^2} \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2^2} \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^2} \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{3^2} \frac{1}{3^2} + \dots\right) z^4 - \dots; \end{aligned}$$

másrészt viszont felidézve $\sin(\pi z)$ igazi hatványsorát az is igaz, hogy

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = 1 - \frac{\pi^2}{6} z^2 + \frac{\pi^4}{120} z^4 - \dots,$$

ebből pedig kijönnek a korábban, az 5.2. szakasz végén is már látott (5.33) összegképletek:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}, \quad \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90}, \quad (6.58)$$

az első a z^2 együtthatójának egyértelműségéből, a másodikhoz a z^4 végtelenösszeg-együtthatóját és a z^2 -esre kapottakat a négyzetét kell ügyesen kivonni egymásból (abszolút konvergens sorokkal

⁶⁶Valóban összeszorozhatjuk így a végtelen sok kéttagú összeget; a részleteket most átugorva a lényeg az, hogy egyre több tényező összeszorozása nyomán abszolút konvergens számsorok (illetve ilyenek összegei-szorzatai) jelennek meg az együtthatókban, amiket szabad akármilyen sorrendben összeadni/szorozni (ld. a B.2. függelékben).

szabad illet!), hogy $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ jelenjen meg. Tovább is léphetünk, például a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}$ összegre, vagy a magasabb fokúakra is, de ez egyre bonyolultabb lesz; visszatérünk ide a D függelékben.

• *Megjegyzés: Weierstrass* precízen kidolgozott egy módszert, amivel meromorf vagy egészfüggvényeket meg lehet adni a most a $\sin(\pi z)$ -re látotthoz hasonló „végtelen gyöktényező” alakban: a zérushelyek illetve esetleges pólusok rendjei, helyei és a környékükön való viselkedés (például a reziduumok) már meghatározzák a függvényt (ha $|z| \rightarrow \infty$ -re egyfajta „rendes” viselkedést írunk elő).⁶⁷ Ez a módszer a $\sin(\pi z)$ függvényre (a zérushelyei alaján) az iménti (6.56) szorzatot adja.

Innen nézve a gamma-függvény (a reflexiós összefüggésre is gondolva) „a $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ elfelezése”. Néha így definiálják $\Gamma(z)$ -t: ő a Weierstrass-módszer szellemében legtermészetesebb függvény, amelynek \mathbb{Z}_0^- -on vannak a pólusai; ebből kijön egy (alább másképp levezetett) végtelenszorzat-előállítás.⁶⁸

• Hasznos bevezetni a szokásosan ψ -vel jelölt **digamma-függvényt**, $\Gamma(z)$ logaritmus deriváltját:

$$\psi(z) := \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \quad \psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z), \quad \text{ahol csak } \Gamma(z) \notin \mathbb{R}_0^-. \quad (6.59)$$

Ugye $\Gamma(z)$ -nek zérushelye nincs, elsőrendű pólusai vannak $z \in \mathbb{Z}_0^-$ -ban: emiatt, ahogy láttuk az argumentum-elves 5.5. szakaszban is, a $\psi(z)$ digamma-függvény mindenhol differenciálható, kivéve $z \in \mathbb{Z}_0^-$ -ban, ahol elsőrendű pólusai vannak, mindegyikben határozottan -1 reziduummal.

• Átírhatjuk a gamma-függvényre ismert (6.3) illetve (6.19) léptetős tulajdonságot $\psi(z)$ -re:

$$\text{Léptetés:} \quad \psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad \psi(z+m+1) = \psi(z) + \sum_{k=0}^m \frac{1}{z+k}. \quad (6.60)$$

$$\text{Speciálisan:} \quad \psi(1) = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma \quad \Rightarrow \quad \psi(m+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}, \quad (6.61)$$

valamint a (6.23) reflexiós összefüggést is; ebből is látszanak a -1 reziduumú elsőrendű pólusok:

$$\text{Reflexiós összefüggés:} \quad \psi(z) - \psi(1-z) = -\pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}. \quad (6.62)$$

A ψ $z=1$ körüli sorfejtése az $\ln \Gamma$ -ra vonatkozó (6.49) deriváltja; az index kellemes átjelölésével

$$\psi(1+z) = -\gamma - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \zeta(n+1) z^n; \quad \text{ugye } m \geq 2\text{-re} \quad \zeta(m) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m}. \quad (6.63)$$

• A $\Gamma(z)$ -nek és a $\psi(z)$ -nek a **pólusok környékén** való viselkedését az eddigiekből lépegetéssel és/vagy reflexiós összefüggéssel kapjuk. Két hasznos képlet (itt $n \in \mathbb{N}_0^+$ és $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{O}(\varepsilon) = 0$):

$$\Gamma(-n+\varepsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right\}, \quad (6.64)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(-n+\varepsilon)}{\Gamma(-n+\varepsilon)} = (-1)^{n+1} n!. \quad (6.65)$$

⁶⁷Ez annak általánosítása, hogy polinomot megadhatunk gyöktényező alakkal, racionális törtfüggvényt parciális törtekkel. Tudva, hogy analitikus függvények „merevek”, „részük meghatározza az egészet”, esetleg hihető, hogy ilyen kevésnek tűnő információ (gyökök, pólusok) is már lényegében egyértelműen jellemez egy analitikus függvényt.

⁶⁸Ha így definiálják a gamma-függvényt, akkor ezt a(z alább látandó) végtelen szorzatot manipulálva kell kideríteni, hogy $\Gamma(z)$ tulajdonképpen tényleg a faktoriális általánosítása. Számomra ez az út még mindig nem annyira természetes, mint az ebben a fejezetben is követett, az eredeti (6.2) definiáló integrálból kiinduló tárgyalás.

- Az $\ln \Gamma(1+x)$ deriváltjára felírt (6.46) képlet tulajdonképpen $\psi(1+x)$ -et adja meg. Ebbe (abból ötletelve, hogy $x=0$ -t beírva úgymint előkerül) ügyesen beszűrhatjuk a γ Euler-Mascheroni-állandót:

$$\begin{aligned} \psi(1+x) &= -\gamma + \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \ln m \right] + \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \ln(x+m) - \sum_{k=1}^m \frac{1}{x+k} \right\} = \\ &= -\gamma + \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) + \ln \frac{m+x}{m} \right] = -\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k(k+x)}, \end{aligned} \tag{6.66}$$

ahol az \ln nullához tartott, és közös nevezőre hoztunk. Itt az $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$ valós esetre korlátozódtunk (erre az esetre vezettük le a (6.46) képletet). Az utolsó összeg viszont minden komplex számmra $x \equiv z$ esetén is létezik (hacsak $z \notin \mathbb{Z}_0^-$, amikor is az egyik nevező nullává válna), és differenciálható, azaz analitikus függvényt ad meg (ld. a C.6. függelékben is). Emiatt a képlet mindenhol érvényes:

$$\psi(1+z) = -\gamma + z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+z)}, \quad \text{hacsak } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-, \tag{6.67}$$

Ebből (a C.6. függelékben letisztázott módon) tagonkénti integrálással adódik a nemrég emlegetett, a pólusokat szépen mutató **Weierstrass-féle szorzat-előállítás**:

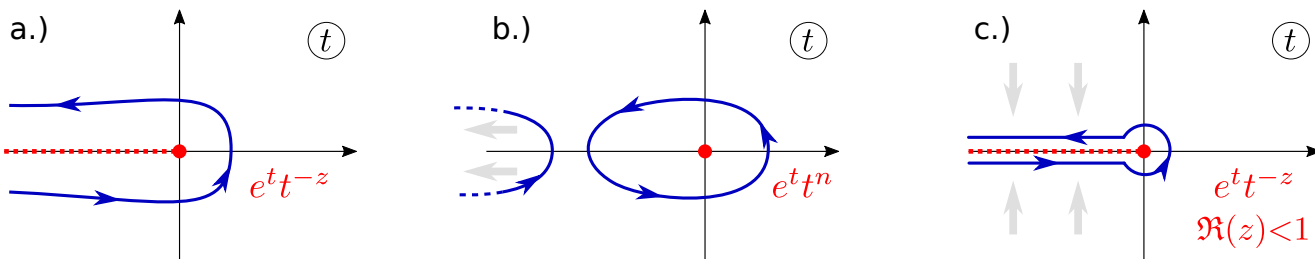
$$\text{Ln } \Gamma(1+z) = -\gamma z + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{z}{k} - \text{Ln} \left(1 + \frac{z}{k} \right) \right] \quad \Rightarrow \quad \Gamma(1+z) = e^{-\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{z/k}}{1 + \frac{z}{k}}. \tag{6.68}$$

* * *

- Az alábbi, $\frac{1}{\Gamma(z)}$ -t megadó képlet önmagában is érdekes. Minden $z \in \mathbb{C}$ esetén érvényes; $\Gamma(z)$ pólusaiban nullát ad (ami $\frac{1}{\Gamma(z)}$ itteni megszüntethető szingularitásaiban a határértéke), továbbá például azt is mutatja rögtön, hogy $\Gamma(z)$ sehol sem nulla.

Hankel-féle vonalintegrál:
$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} dt e^{t-t^z}. \tag{6.69}$$

Hacsak $z \notin \mathbb{Z}$, az integrandusnak mint t függvényének vágása van $t \in \mathbb{R}_0^-$ -on: az út ezt kerüli meg $\Re(t) = -\infty$ -ből jöve és visszamenve. Az integrál létezik (és minden ilyen úttal ugyanannyi, mert azok egymásba mozgathatók): $\Re(t) \rightarrow -\infty$ felé e^t integrálható csökkenését t^z sem ronthatja el.



50. ábra. a.) a Hankel-féle előállításához használandó út. b.) $z \in \mathbb{Z}$ egész esetén bezárhatjuk az integrációs utat. c.) Általános z , de $\Re(z) < 1$ esetén a vágásra húzhatjuk az utat a levezetéshez.

Ha z valós egész, akkor nincs vágás $t \in \mathbb{R}^-$ -on, bezárhatjuk az utat $t=0$ körül (mert a „leszeletelt” darabot $\Re(t) \rightarrow -\infty$ -be tolhatjuk, így az arra vett járuléka biztos nulla). Ha z nempozitív egész ($z = -n$, $n \in \mathbb{N}_0^+$), akkor az e^{-tt^n} integrandus *mindenhol* differenciálható; a Cauchy-tétel szerint

$$z = -n : \quad \oint^{(0+)} dt e^{t-t^z} = \oint^{(0+)} dt e^{t-t^n} = 0; \quad z = -n \text{ tényleg } \Gamma(z) \text{ pólusa.} \tag{6.70}$$

Ha pedig $z=n+1$ pozitív egész, akkor az $e^{-t}t^{-n-1}$ integrandusnak $t=0$ -ban $n+1$ -edrendű pólusa van, mert a $t=0$ körüli Laurent-sort közvetlenül az e^t sorfejtéséből megkaphajtuk: $e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint^{(0+)} dt \frac{e^t}{t^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \oint^{(0+)} dt \left[t^{-n-1} + \frac{t^{-n}}{1!} + \frac{t^{-n+1}}{2!} + \dots + \frac{t^{-2}}{(n-1)!} + \frac{t^{-1}}{n!} + \dots \right] = \frac{1}{n!}. \quad (6.71)$$

Rögtön az integrált is kiszámíthattuk a -1 -edik tagból.⁶⁹ Ez összevág azzal, hogy $\frac{1}{\Gamma(n+1)} = \frac{1}{n!}$. Valós egész z -kre tehát működik a (6.69) Hankel-féle előállítás (ez segíthet megjegyezni).

• Általános z -ket tekintve a (6.69)-ben felírt integrál z -ben differenciálható (=analitikus) függvényt ad meg.⁷⁰ A bal oldali $\frac{1}{\Gamma(z)}$ is analitikus: ha az állítást belátjuk például egy nemüres nyílt $U \subset \mathbb{C}$ halmazon minden $z \in U$ -ra, akkor mindenhol igaz lesz, mert ha két analitikus függvény egy ilyen U -n megegyezik, akkor mindenhol is, ahol csak mindketten értelmezettek.

Az U a $\Re(z) < 1$ halmaz lesz: ilyen z -kre a t -síkon az 50.c. ábra módjára az utat ráhúzzhatjuk a vágásra. A vágás alatti félegyenesen $t = -s - i\varepsilon$, felette $t = -s + i\varepsilon$, ahol s az \mathbb{R}^+ -on fut végig; továbbá $s \in \mathbb{R}^+$ esetén ugyebár $(-s \pm i\varepsilon)^a \rightarrow s^a e^{\pm i\pi a}$, ha $\varepsilon \rightarrow 0$. Ezekkel:

$$\begin{aligned} \int_{\text{lent}} dt e^t t^{-z} &= \int_r^\infty ds e^{-s-i\varepsilon} (-s-i\varepsilon)^{-z} & \Rightarrow & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\text{lent}} dt e^t t^{-z} = e^{i\pi z} \int_r^\infty ds e^{-s} s^{-z}, \\ \int_{\text{fönt}} dt e^t t^{-z} &= -\int_r^\infty ds e^{-s+i\varepsilon} (-s+i\varepsilon)^{-z} & & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\text{fönt}} dt e^t t^{-z} = -e^{-i\pi z} \int_r^\infty ds e^{-s} s^{-z}. \end{aligned}$$

Aki akarja, kigondolhatja a Lebesgue-tétellel, hogy az integrálok határértékére is igaz ez (az alapján, ahogyan az 5.3. szakaszban tettük ezt hasonló esetekben, például az 53. lábjegyzetben). Az elágazási pontot elkerülő (r sugarú) kis íven $|t^{-z}| = |t|^{-\Re(z)} = r^{-\Re(z)}$, és $t=0$ körül egy környezetben e^t korlátos, $|e^t| \leq K$, így

$$\left| \int_{\text{kis ív}} dt e^t t^{-z} \right| \leq 2\pi r \cdot \max_{t \in \text{ív}} |e^t| |t^{-z}| \leq 2\pi K r^{1-\Re(z)},$$

és ez nullához tart, ha $r \rightarrow 0$, hacsak tényleg $\Re(z) < 1$. (Eme nullához tartásért is kellett, hogy $\Re(z) < 1$ -re korlátozódjunk.) Így viszont a ráhúzott integrál:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} dt e^t t^{-z} &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\text{lent}} dt e^t t^{-z} + \int_{\text{kis ív}} dt e^t t^{-z} + \int_{\text{fent}} dt e^t t^{-z} \right) = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2\pi i} \int_r^\infty ds e^{-s} s^{-z} = \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \int_0^\infty ds e^{-s} s^{-z} = \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \Gamma(1-z) = \frac{1}{\Gamma(z)}. \end{aligned} \quad (6.72)$$

Itt felismertük $\Gamma(1-z)$ eredeti definiáló integrálját (pont jó, hogy most $\Re(z) < 1$, így az tényleg működik), és a gamma-függvény (6.23) reflexiós összefüggését is használtuk. Készen vagyunk!

• **Kiegészítés:** előkerülhetnek a **béta-integrálhoz hasonlítható** alábbi vonalintegrálok is:

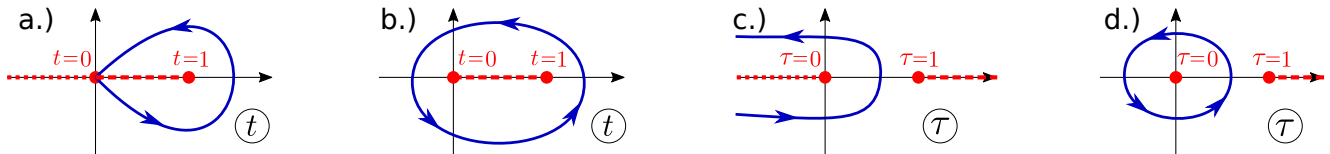
$$\text{Ha } \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \text{ és } \Re(\alpha+\beta) > 0, \text{ akkor } \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)} = \oint_{t=0}^{(1+)} \frac{dt}{2\pi i} \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{(t-1)^\beta} = \oint_{t=0}^{(1+)} \frac{dt}{2\pi i} t^{\alpha-1} \left(1-\frac{1}{t}\right)^{-\beta}, \quad (6.73)$$

$$\text{ha } \alpha \equiv n \in \mathbb{Z}, \text{ és } \beta \in \mathbb{C} \text{ bármilyen: } \frac{\Gamma(n+\beta)}{n!\Gamma(\beta)} = \oint_{t=0}^{(0+,1+)} \frac{dt}{2\pi i} \frac{t^{n+\beta-1}}{(t-1)^\beta} = \oint_{t=0}^{(0+,1+)} \frac{dt}{2\pi i} t^{n-1} \left(1-\frac{1}{t}\right)^{-\beta}. \quad (6.74)$$

⁶⁹Kicsit másképp a (hatványsorba fejthetőséghez ugyebár szorosan kapcsolódó) *Cauchy-formulákkal* is dolgozhatunk itt: $\frac{n!}{2\pi i} \oint^{(0+)} dt e^t t^{-n-1}$ megadja az e^t n -edik deriváltját $t=0$ -ban. Ez 1, visszaosztva $n!$ -sal kész.

⁷⁰Ez is belátható a paraméteres integrál differenciálhatóságáról szóló tétellel; ld. a C.6. függelék végén.

Gyakorlásként levezethetjük ezeket; ugyanaz az ötlet, mint $\frac{1}{\Gamma(z)}$ iménti (6.69) előállításához: ha $\Re(\alpha+\beta) > 0$ mellett még megköveteljük, hogy $\Re(\beta) < 1$ is teljesüljön, akkor ráhúzhatjuk az utat a megkerült vágásra, így a (6.10) béta-integrálra jutunk, és a reflexiós összefüggést is tudva készen leszünk. Viszont a (6.73) és (6.74) előállítások bővebb α, β -halmazon értelmesek (és a szokásos analitikusságos érvelés alapján igazak is): nevezetesen a mondott, csak az $\Re(\alpha+\beta) > 0$ feltételt teljesítő értékekre. Ennek a nagyobb szabadságnak lényegében az az oka, hogy a komplex integrációs út **elkerül** integrálhatóság szempontjából **problémás pontokat**.⁷¹



51. ábra. a.,b.) az iménti (6.73) és (6.74) előállítások, c.,d.) a lentebbi (6.75) előállítások.

Kiemelünk néhány további érdekes körülményt.

1. A (6.73) alakban integrálhatóság szempontjából (mivel $t=1$ -et elkerültük olyan tartományon, ahol az integrandus folytonos) tényleg már csak a $t=0$ környéki viselkedés kérdéses: ismerve valós hatványfüggvények 0 körüli integrálhatóságát ebből jön a feltétel α -ra és β -ra.
2. A (6.73)-ban a hatványozás átrendezése nem magától értetődő. Az 5.1. szakaszban ilyen helyzetre látottakat alkalmazva viszont mondhatjuk, hogy most a vágás(ok) mindkét alakban a $t \in \mathbb{R}$, $t < 1$ halmazon van(nak), máshol az integrandusok analitikusak, és az átalakítást megtehetjük (a fázis nem bukik át) például $t \in \mathbb{R}$, $t \gg 1$ esetén, így az átalakítás az út környékén is működik.
3. Figyelemre méltó, hogy (6.73) első alakján a hatványfüggvények vágásaira szokásos beidegződéssel nem látszana, hogy $\alpha = n$ -re nincs vágás $t \in \mathbb{R}^-$ -on; ez a második alakon látszik, és ebből adódik az $\alpha = n$ -re érvényes (6.74) képletbeli integrációs út létjogosultsága (melyben az út nem kell elágazási pontból induljon, elég, ha az egy darab véges vágást akárhogyan megkerüli). Tanulság: néha nem spórolhatjuk ki a vágások meglétének alapos tanulmányozását.
4. A következő előállítás is ide tartozik (ld. az iménti ábra c. és d. részét); ezt is levezethetjük a $\Re(\alpha+\beta) > 0$, $\Re(\beta) < 1$ esetben a vágásra húzással és a béta-integrál (6.12) alakjával, illetve $\alpha = n$ esetben egyszerűen a függvényderiváltakra vonatkozó Cauchy-formulával:

$$\begin{aligned} \text{Ha } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ és } \Re(\alpha+\beta) > 0: & & \text{ha } \alpha \equiv n \text{ egész, de } \beta \in \mathbb{C} \text{ bármilyen:} \\ \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)} = \int_{\tau=-\infty}^{(0+)} \frac{d\tau}{2\pi i} \tau^{-\alpha-1} (1-\tau)^{-\beta}, & & \frac{\Gamma(n+\beta)}{n!\Gamma(\beta)} = \oint \frac{d\tau}{2\pi i} \tau^{-n-1} (1-\tau)^{-\beta}. \end{aligned} \quad (6.75)$$

Ezek a fenti (6.73)–(6.74) képletekben elvégzett $t = \frac{1}{\tau}$ változóhelyettesítéssel is megkaphatók (figyelve a helyettesítéskor bekerülő deriváltra); a t -síkon futó út is épp így került át a τ -síkra.

* * *

⁷¹Ez a lehetőség a komplex vonalintegrálok használatának egy kellemes távlata. A gamma-függvény (6.69) Hankel-előállítása is azért működhet bővebb halmazon (minden $z \in \mathbb{C}$ esetére), mint az eredeti (6.2) definíciós integrál (csak $\Re(z) > 0$ esetére), mert a komplex út elkerüli a problémás $t = 0$ pontot.

• Nézzünk rá a (6.32) **Stirling-formulára komplex z esetén is!** Először tegyük fel, hogy $|z| \rightarrow \infty$ során $\Gamma(z+1)$ -et végig előállítja az eredeti (6.2) definiáló integrál! Ez a $\Re(z) > -1$ esetet jelenti, de először tegyük fel még azt is, hogy valamilyen (kicsi) $\varepsilon > 0$ -t véve $\Re(z) > -1 + \varepsilon$ is igaz az egész $|z| \rightarrow \infty$ során végig. Az átalakítások során majd azt is kihasználjuk (ld. lentebb), hogy túl kicsi $|z|$ -kkel nem kell foglalkoznunk. A probléma tehát:

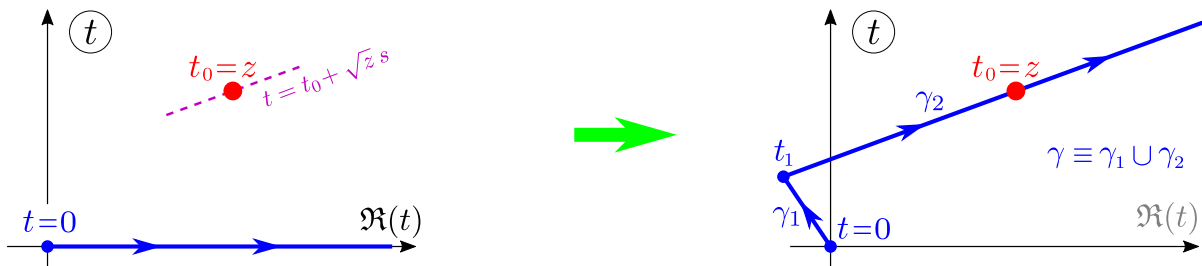
$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \Gamma(z+1) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \int_0^\infty dt f(t) = ?? \quad \text{ahol } f(t) = t^z e^{-t} \quad \text{és } \Re(z) > -1 + \varepsilon.$$

Ha a (valós $z \equiv x \in \mathbb{R}^+$ esetre bevált) gaussi integrálközelítést akarnánk űzni (ld. az előző szakaszbeli (6.35) egyenletet és környékét), akkor (lényegében az ottani képletekben „ x -et z -re cserélve”) itt is felírhatunk olyan Gauss-függvényt, aminek maximumhelye, -értéke és ottani második deriváltja illeszkedik a közelítendő integranduséhoz, f -éhez: azt kapnánk, hogy

$$\begin{aligned} f(t) = t^z e^{-t}, & \Rightarrow t_0 = z, \text{ valamint} & \Rightarrow \text{a } t_0 \text{ hely környékén tehát} \\ f'(t_0) = 0 & \Rightarrow \frac{-f''(t_0)}{f(t_0)} = \frac{1}{z}, & \Rightarrow f(t) \approx f(t_0) \exp\left(-\frac{(t-t_0)^2}{2} \frac{-f''(t_0)}{f(t_0)}\right). \end{aligned}$$

Minket az $\int_0^\infty dt f(t)$ integrál érdekel; a probléma az, hogy ha z komplex, akkor t_0 és $\frac{f(t_0)}{-f''(t_0)}$ nem valósak, így nemigen mondhatjuk itt, hogy f „csúcsos” függvény lenne (hogy jó szívvvel a felírt közelítő Gauss-alakra cserélhetnénk az integrálban).

Az ilyen esetekben működő ötlet az úgynevezett **nyeregpont-módszer**, ami tulajdonképpen a Gauss-közelítés „komplex általánosítása”. A t integrálási változót vehetjük komplexnek, ami eddig az \mathbb{R} tengelyen futott; **deformáljuk az utat** a t -síkon úgy, hogy az úgy kapott integrandus már jól kezelhető „Gauss-csúcsos” legyen! Az út ehhez át kell, hogy menjen a (nem a valós tengelyen lévő) t_0 -n, amit most *nyeregpontnak* hívunk, méghozzá a „legmeredekebb esés irányában”, azaz úgy, hogy az út mentén mozdulva a közelítő Gauss-alak kitevője, $-\frac{1}{2} \frac{f''(t_0)}{-f(t_0)} (t-t_0)^2$ pont valós negatív legyen (ami ugye amúgy akármilyen $t-t_0 \in \mathbb{C}$ esetén nem lenne biztos).⁷²



52. ábra. A gamma-függvény nyeregponti közelítéséhez alkalmazandó út (komplex z esetén).

• A gamma-függvényes esetünkben a t változó útja a $t_0 = z$ ponton kell átmenjen, és $\frac{-f''(t_0)}{f(t_0)} = \frac{1}{z}$ miatt „ \sqrt{z} irányban”, azaz úgy, hogy (legalábbis t_0 környékén, közelítőleg) $t-t_0 = \sqrt{z} \cdot s$ legyen, ahol $s \in \mathbb{R}$: ekkor a közelítő Gauss-alak kitevőjében valóban $-\frac{1}{2} \frac{f''(t_0)}{-f(t_0)} (t-t_0)^2 = -\frac{s^2}{2}$ tényleg valós

⁷²Nyílt halmazon differenciálható $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényekre $|f(t)|$ -nek nincs lokális maximumhelye (ld. a 4.3. szakaszt); t_0 sem az, még ha $f'(t_0) = 0$ is. Az ilyen t_0 pontban $f(t) - f(t_0) \approx \frac{f''(t_0)}{2} (t-t_0)^2$, és bevezetve a valós és képzetes részeket mint $f''(t_0) \equiv A + iB$, $t-t_0 \equiv x + iy$, azt kapjuk, hogy $f(t) - f(t_0) \approx U_2(x, y) + iV_2(x, y)$, ahol $U_2(x, y) = Ax^2 - Ay^2 - 2Bxy$ és $V_2(x, y) = Bx^2 - By^2 + 2Axy$. Megvizsgálva a kapott kétváltozós valós másodfokú kifejezéseket beláthatjuk, hogy ha csak $f''(t_0) \neq 0$ (amit végig hallgatólagosan kihasználunk már az eredeti Gauss-közelítésben és most is), az ilyen t_0 helyen (azaz $x=0, y=0$ -ban) U_2 -nek is és V_2 -nek is *nyeregpontjai* vannak: egy ilyen pont ugye bizonyos irányok mentén (előfordulhat, hogy például \mathbb{R} mentén is) ez lokális maximum, de van olyan irány is, ami mentén lokális minimum.

negatív. Ennek megfelelően olyan (az alábbi ábrán látható) utat választunk most, ami $t=0$ -ból indulva először egy (alább γ_1 -gyel jelölt) egyenes szakaszon eljut valameddig, hogy aztán a megfelelő irányból egy végtelen félegyenessel (melynek jele alább γ_2 lesz) „ráfordulhasson” a $t_0 = z$ pontra. Be kell látni persze, hogy valóban megengedett az eredeti integrálban az út ilyen deformálása, de ez az $f(t)$ integrandus $\Re(t) \rightarrow \infty$ felé való exponenciális csökkenése miatt biztos igaz.⁷³

Közben alaposan kihasználjuk, hogy egyrészt elég a nem túl kicsi $|z|$ -kkal foglalkozni, másrészt $\Re(z) > -1 + \varepsilon$: ezek miatt a szóba jövő z -kre \sqrt{z} argumentuma nem lehet (abszolútértékben) 45° -nál sokkal nagyobb, tehát a „ \sqrt{z} irány” mindenképpen a pozitív félsík felé mutat.

- Az áttolt útra felírva az integrált tehát a vizsgálandó gammafüggvény-érték

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty dt t^z e^{-t} = \int_{\gamma_1} dt t^z e^{-t} + \int_{\gamma_2} dt t^z e^{-t}. \quad (6.76)$$

A γ_2 útdarabot $t = z + \sqrt{z} \cdot s$ módon paraméterezhetjük (ahol $s \in \mathbb{R}$): a felső határ s -ben ∞ , az alsó határ jele pedig legyen egyelőre $-s_1$, ahol is tehát $s_1 > 0$, és később specifikáljuk, hogy hogyan függjön z -től (azaz pontosan hova is tegyük az új út töréspontját). A γ_2 útdarab eleje így $t_1 \equiv z - \sqrt{z} \cdot s_1$ lesz; a γ_1 útdarabnak tehát $t=0$ -tól ide kell futnia egyenesen, úgyhogy legcélszerűbb őt az $u \in [0, 1]$ valós számmal $t = t_1 \cdot u$ módon paraméterezni. Összerakva:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} dt t^z e^{-t} &= \sqrt{z} \int_{-s_1}^\infty ds e^{-z - \sqrt{z}s} (z + \sqrt{z}s)^z, \\ \int_{\gamma_1} dt t^z e^{-t} &= (z - \sqrt{z}s_1) \int_0^1 du e^{-(z - \sqrt{z}s_1)u} [(z - \sqrt{z}s_1)u]^z. \end{aligned}$$

Tudva már, hogy mit szeretnénk Stirling-formula címén kapni, így rendezhetjük ezek összegét:

$$\Gamma(z+1) = \sqrt{z} \left(\frac{z}{e}\right)^z \left\{ \int_{-s_1}^\infty ds e^{-\sqrt{z}s + z \operatorname{Ln}\left[1 + \frac{s}{\sqrt{z}}\right]} + (\sqrt{z} - s_1) \int_0^1 du u^z e^{z(1-u) + \sqrt{z}s_1 u + z \operatorname{Ln}\left(1 - \frac{s_1}{\sqrt{z}}\right)} \right\}. \quad (6.77)$$

Közben kiemeltünk (lekövethetjük, hogy a hatványozásokat átírhattuk így; $\Re(z) > -1$ esetén elég nagy $|z|$ -re már nincs fázisátbukás), és kitevőben logaritmusként írtuk a t^z -ből maradt hatványozásokat. Az első tagban a kitevő sora $-\sqrt{z}s + z \operatorname{Ln}\left(1 + \frac{s}{\sqrt{z}}\right) = -\frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3\sqrt{z}} - \frac{s^4}{4z} + \dots$, így az első integrandus pontonként $e^{-s^2/2}$ -hez tart (ami valóban egy valós, csúcsos Gauss-alak), ha $|z| \rightarrow \infty$. Így jelenik meg, hogy jól helyettesítettünk, jól futtattuk az utat, működik a nyeregpontri integrálás. Ha $|z| \rightarrow \infty$ esetén legalábbis $s_1 \rightarrow \infty$, akkor remélhetjük, hogy az első tag a határértékfüggvény integráljához, $\sqrt{2\pi}$ -hez tart, és hogy a második tag nullához tart. Ha belátjuk ezeket, akkor **lényegében kész** a nyeregpontri integrálással kapott közelítés bizonyítása (ami tehát most a Stirling-formulát adja a $\Re(z) > -1 + \varepsilon$ esetre). A C.6. függelékben végigvezetjük ezt.

- A Stirling-formulát tehát (a C.6. függelék is átrágyva) teljesen beláttuk a következő esetben:

$$\text{Ha végig } \Re(z) > -1 + \varepsilon, \text{ akkor } \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(z+1)} \sqrt{2\pi z} \left(\frac{z}{e}\right)^z = 1.$$

⁷³Az $f(t)$ a $t \in \mathbb{R}_0^-$ vágáson kívül differenciálható: a $t=0$ -t elkerülő kis r sugarú körívbelől, az $[r, R]$ szakaszból, egy nagy R sugarú bezáró köríkből és az új út ferde félegyenesének egy darabjából álló zárt görbére nulla az integrál, és $r \rightarrow 0$ -ra és $R \rightarrow \infty$ -re a körívek járuléka nullához tart (a kis körívre azért, mert $\Re(z) > -1$ miatt ezen $|t^z|$ biztos nem nő gyorsabban $r \rightarrow 0$ -ra, mint ahogy a körívkerület r -rel arányosan csökken, a nagy köríven pedig működik az exponenciális csökkenéssel felülbecslés, mert azon mindenhol $\Re(t) > \xi R$ valamilyen fix $0 < \xi < 1$ számmal.) Az \mathbb{R}^+ -ra vett integrál tehát ugyanannyi, mint az új útra. Hasonlót láttunk a 3.6. szakasz utolsó példájában.

Utolsó lépésként bármilyen $\Re(z) < 0$ esetére is kiterjeszkezhünk a reflexiós összefüggéssel:

$$\Gamma(z+1) = \frac{\pi}{\sin(\pi(1+z))} \frac{1}{\Gamma(-z)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \Re(z) < -\varepsilon \text{ esetén} \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{-\pi}{\sin(\pi z)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-z-1)^{z+\frac{1}{2}}}{e^{z+1}\Gamma(z+1)} = 1.$$

Tegyük fel, hogy $\Im(z) > 0$: ekkor $(-z-1)^{z+\frac{1}{2}} = ((z+1)e^{-i\pi})^{z+\frac{1}{2}} = (z+1)^{z+\frac{1}{2}} e^{-i\pi(z+\frac{1}{2})}$ teljesül (ahol közben figyeltünk a fázisvágásra). Ebből egyszerűsítéssel (itt is végigkövetve, hogy a hatványozásokat tényleg átírhatjuk így) arra jutunk, hogy

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(z+1)} \frac{\sqrt{2\pi z}}{1-e^{2i\pi z}} \left(\frac{z}{e}\right)^z \cdot \frac{(1+\frac{1}{z})^z}{e} \sqrt{1+\frac{1}{z}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi z} \left(\frac{z}{e}\right)^z}{\Gamma(z+1)} \frac{1}{1-e^{2i\pi z}} = 1.$$

Ez már itt is majdnem a Stirling-formula; ha feltesszük, hogy $|z| \rightarrow \infty$ közben $|\Im(z)| \rightarrow \infty$ is igaz, akkor kész, mert (emlékezve, hogy most $\Im(z) > 0$) $e^{2i\pi z}$ nullához tart ilyenkor.

Ezután ugyanígy végiggondolhatjuk $\Im(z) < 0$ esetre is ugyanezt, vagy mondhatjuk, hogy pontosan akkor igaz a Stirling-formula z -re, ha z^* -ra is (mert mindkét oldal konjugálódik z helyett z^* -ot véve), úgyhogy ha igaz a felső félsíkon, akkor az alsón is. Kész.

* * *

• Egy utolsó gyakorlati megjegyzés a gamma-függvényről: egész illetve félegész értékekben láttuk $\Gamma(z)$ értékeit, a Stirling-formula pedig jó közelítő képlet nagy z -re. Ha konkrétan numerikusan ki kell számítani $\Gamma(z)$ vagy $\psi(z)$ értékeit általános z -kre, akkor nagy $m \in \mathbb{N}^+$ -t véve $z+m$ -ben egyre nagyobb m -re egyre jobb közelítés a Stirling-formula, majd innen visszalépkedhetünk. Ennél jobb numerikus módszer az úgynevezett **Lánczos-közelítés**; ennek utánanézhetsz, aki akar.⁷⁴

Vége.

(Azazhogy jönnek a függelékek. . .)

⁷⁴Én magam 2020-ban megrökönyödve konstatáltam, hogy sok ismert számítógépes numerikus könyvtár, programcsomag *nem* tartalmaz beépített validált gammafüggvény-számoló rutint (legalábbis komplex számokra).

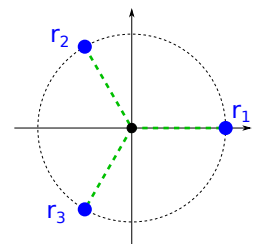
A. függelék: Valós harmadfokú egyenlet megoldóképlete

• A másodfokú egyenlet megoldóképlete gyökvonást tartalmaz. Hozzászoktunk, hogy a számológép tud gyököt vonni: úgy érezhetjük, hogy a megoldóképlet „jobban megadja” az $x_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ számot, mint az, hogy „ x_1 legyen az $x^2 - x - 1 = 0$ egyenlet nagyobbik gyöke”.

Harmadfokú egyenletre is van egyfajta „megoldóképlet”, de még kérdésesebb a használhatósága: összetettebb, köbgyökvonást is tartalmaz, és mint látni fogjuk, az alkalmazása során kibogozhatatlanul elkalandozunk komplex számok közé valós együtthatók esetén is; jobban, mint másodfokú egyenletnél, ahol a megoldóképlet közvetlenül megadja az eredmény valós és (ha van) képzetes részét.

• Idézzük fel rögtön a (komplex) harmadik egységgyököket! A jelölésük most:

$$\begin{array}{lll} r_1 = 1, & \text{ez az a három} & r_1 \in \mathbb{R}, \\ r_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, & \text{komplex szám,} & \text{és } r_2^* = r_3. \\ r_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. & \text{amire } r_k^3 = 1. & \end{array}$$



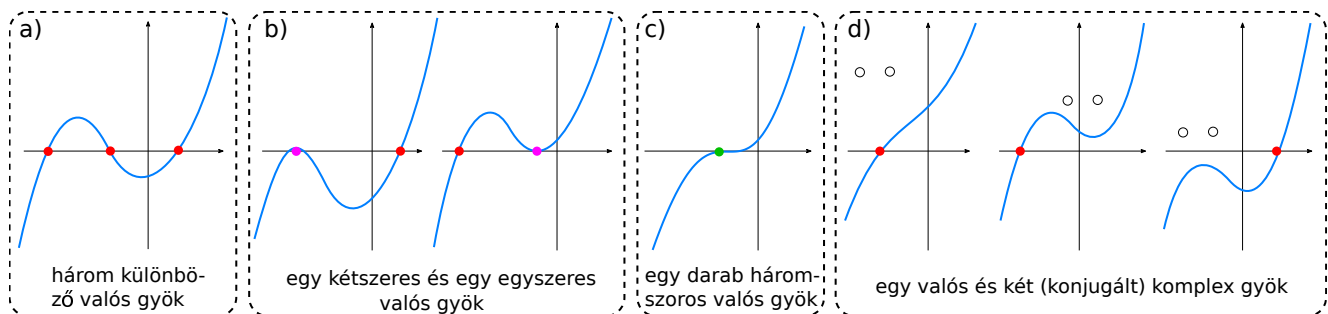
• Térjünk rá ezek után valós együtthatójú harmadfokú egyenlet megoldásainak vizsgálatára:

$$x = ? \quad x^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad \text{ahol } b, c, d \in \mathbb{R}.$$

x^3 együtthatója nem lehetett 0 (hogy harmadfokú legyen); ha nem 1, visszaoszthatunk vele, hogy ilyen alakra jussunk. Az algebra alaptétele alapján van három x_1, x_2, x_3 szám, amikkel

$$\begin{array}{ll} x^3 + bx^2 + cx + d = & b = -(x_1 + x_2 + x_3), \\ = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3), & \Rightarrow \quad c = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \\ & d = -x_1x_2x_3. \end{array}$$

Valóságok az együtthatók: vagy mindhárom gyök valós, vagy egyik valós és kettő komplex (egymás konjugáltjai). Ezen felül x_1, x_2, x_3 közül némelyikek egybeeshetnek. A bal oldal grafikonja egy „harmadfokú parabola”: lehet (nek) lokális szélsőértéke(i), továbbá $x \rightarrow -\infty$ esetén $-\infty$ -hez tart, $x \rightarrow \infty$ esetén pedig ∞ -hez, így vagy egyszer, vagy kétszer, vagy háromszor „találkozik” az x tengellyel (metszi vagy érinti azt). Ezek a helyek tehát az egyenletünk megoldásai.



53. ábra. Szabadkézi rajz valós együtthatós harmadfokú polinom (azaz harmadfokú egyenlet bal oldala) grafikonjának lehetséges meneteiről, és ennek megfelelően a gyökök típusának lehetséges „kiosztásairól”. Egy gyök-kiosztáshoz többféle jellegű grafikon is tartozhat.

- Első lépésként eltolhatjuk a változónkat, hogy a másodfokú tag együtthatóját eltüntessük: kellemes lesz az x helyett az eltoltt y -t, illetve a b, c, d együtthatók helyett a p -t és a q -t bevezetni:

$$y^3 + 3py + 2q = 0, \quad \text{ahol } y := x + \frac{b}{3} \quad \text{és} \quad \begin{cases} 3p \equiv c - \frac{1}{3}b^2, \\ 2q \equiv \frac{2}{27}b^3 - \frac{1}{3}bc + d. \end{cases}$$

A vizsgálandó egyenletünk ezzel így írható tehát:

$$y = ? \quad y^3 + 3py + 2q = 0, \quad \text{ahol } p, q \in \mathbb{R} \text{ adott számok.}$$

- Vizsgáljuk meg, hogy különféle p, q értékek esetén mit mondhatunk a valós gyökök létezéséről! Keressük meg ehhez először ennek a harmadfokú kifejezésnek a lokális szélsőértékeit (ha vannak):

$$\begin{aligned} f(y) &= y^3 + 3py + 2q. \\ f'(y) = 0 &\Rightarrow y^2 + p = 0. \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} p > 0: \text{ nincs szélsőérték hely,} \\ p = 0: f' \text{ az } y = 0 \text{ helyen, de ez nem szélsőérték,} \\ p < 0: y = \pm\sqrt{|p|} \text{ két szélsőérték hely.} \end{cases}$$

1. Ha $p > 0$, akkor f' -nek nincs valós zérushelye: nincs valós szélsőérték (az 53. ábra d . részének első esete). Ekkor pontosan egy valós gyök van, emiatt két komplex is (egymás konjugáltjai).
2. Ha $p = 0$, akkor $f'(0) = 0$, de itt sincs szélsőérték (mint az 53. ábra c . részén, és a nulla deriváltú hely a nullában van). Az egyenletünk alakja ekkor: $y^3 + 2q = 0$, ennek egy valós megoldása van: $-\sqrt[3]{|2q|}$, és két komplex megoldása: $-\sqrt[3]{|2q|} \cdot r_2$ és $-\sqrt[3]{|2q|} \cdot r_3$, melyek egymás konjugáltjai. (Itt r_2 és r_3 a másik kettő egységgyök.) Ha $p = 0$ mellett még $q = 0$, akkor ez a három megoldás egybeesik: az $y = 0$ háromszoros valós gyök.
3. Ha $p < 0$, két szélsőérték hely van: $\pm\sqrt{|p|}$. Az $f''(y) = 6y$ második derivált előjeléből kiderül, hogy az először sorra kerülő helyen, $-\sqrt{|p|}$ -nél maximum van, utána $\sqrt{|p|}$ -nél minimum, majd f tovább növekszik, ld. az 53. ábra a ., b ., d . részein. Ezek között úgy dönthetünk, hogy visszahelyettesítjük a szélsőérték helyeket $f(y)$ -ba; vigyázva, hogy most $p = -|p|$:

$$p < 0: \quad f(\pm\sqrt{|p|}) = 2(q \pm |p|^{3/2}).$$

Ezen belül is három lehetőség van tehát:

- i.) Ha $|q| = |p|^{3/2}$, azaz $q^2 + p^3 = 0$, akkor a kettő közül az egyik szélsőérték helyen $f(y)$ nulla értéket vesz fel, azaz a grafikon érinti az x tengelyt. Ez a fenti ábra b . részén jelölt eset: egy egyszeres és egy kétszeres valós gyök van.
 - ii.) Ha $|q| > |p|^{3/2}$, azaz $q^2 + p^3 > 0$, akkor a szélsőértékek ugyanolyan előjelűek: ez a fenti ábra d . részének második vagy harmadik esete. Ekkor egy valós és két komplex gyök van.
 - iii.) Végül ha $|q| < |p|^{3/2}$, ami azzal egyenértékű, hogy $q^2 + p^3 < 0$, akkor a két szélsőérték (a felvett érték!) különböző előjelű. Ez a fenti ábra a . részén látható eset: ebben az esetben van három egyszeres valós gyök.
- Bevezetjük harmadfokú egyenlet D **diszkriminánsát**, ami „perdöntő” szerepet játszik:

$$\begin{aligned} y^3 + 3py + 2q = 0; \\ \underline{\underline{D := q^2 + p^3.}} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} D < 0: & \text{ három egyszeres valós gyök.} \\ D = 0: & \text{ valós gyök(ök), legalább kettő egybeesik.} \\ D > 0: & \text{ egy valós és két konjugált komplex gyök.} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Ellenőrizzük, hogy az akármilyen p és q esetén fentebb kapottakat valóban mind összefoglalhattuk így, a most bevezetett D diszkriminánsra vonatkozó egyetlen kritériummal!

• Ezek után rátérhetünk a **megoldóképletre**. A látott harmadfokú egyenlet esetében nem igazán tudok sokkal konstruktívabb módszerről, mint hogy „**ráhibázunk**”: például ha már kínunkban $y = A+B$ alakban keressük a megoldást, behelyettesítünk és véletlenül ízlésesen kiemelünk:

$$y^3 + 3py + 2q = 0, \quad y := A+B \quad \Rightarrow \quad 3(p+AB)(A+B) + (A^3+B^3+2q) = 0.$$

Itt látszik, hogy ha úgy választjuk A -t és B -t, hogy az alábbiak teljesüljenek, az pont jó lesz:

$$A^3+B^3 = -2q, \quad AB = -p. \quad (\text{A.2})$$

Ha $p=0$, akkor nem túl bonyolult a helyzet (ahogy fentebb már láttuk is); ha viszont nem az, akkor A és B közül egyik sem nulla, emiatt kifejezhetjük például B -t A -val:

$$B = -\frac{p}{A} \quad \stackrel{1.}{\Rightarrow} \quad B^3 = -\frac{p^3}{A^3} \quad \Rightarrow \quad A^3 - \frac{p^3}{A^3} + 2q = 0. \quad (\text{A.3})$$

Másodfokú egyenletet kaptunk A^3 -re, amit már meg tudunk oldani: itt látszik, hogy jó ötlet volt ez az $y = A+B$, majd A -ra és B -re a mondottakat feltevő ötlet.

A kapott másodfokú egyenletet megoldhatjuk, majd az eredményből B^3 -öt is kifejezhetjük, és B^3 kapott alakját törtet bővítve egyszerűbb alakra hozhatjuk. Arra jutunk, hogy:

$$(A^3)^2 + 2qA^3 - p^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{A^3 = \sqrt{q^2+p^3} - q}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{B^3 = -\sqrt{q^2+p^3} - q}}.$$

Néhány fontos körülmény:

1. Nem vesztettünk általánosságot azzal, hogy az A^3 -re kapott másodfokú egyenlet egyik megoldását választottuk: a másik az $A \leftrightarrow B$ cserére vezetne (ellenőrizzük!), és csak $A+B$ kell.
2. A *négyzetgyök* alatt éppen a $D = q^2+p^3$ diszkrimináns jelent meg. Ha például három valós gyök van, akkor láttuk, hogy D negatív. Mindenképp ki kell tehát lépni komplex számok közé.⁷⁵ Az alábbiakban a \sqrt{D} -t úgy értjük, ahogy szoktuk: pozitív valós $D \in \mathbb{R}_0^+$ esetén \sqrt{D} is pozitív valós, valós negatív $D \in \mathbb{R}^-$ esetén viszont $\sqrt{D} = i\sqrt{|D|}$.
3. Komplex számok között viszont a fentebbi (A.3) egyenletbeli 1. jelű átalakítás (a köbre emelés) *nem volt* ekvivalens átalakítás, mert abból, hogy $A^3B^3 = -p^3$ (amit aztán tovább fűztünk), visszafelé csak az következik, hogy $AB = -p \cdot r_k$ (ahol r_k , $k=1,2,3$ a három komplex egységgyök, amelyekre $r_k^3 = 1$), nem feltétlenül az, ami kellett, hogy $AB = -p$. Ez utóbbi feltétel teljesülését tehát újra meg kell követelni, amikor A^3 -ről és B^3 -ről visszatérünk A -ra és B -re.

Érdeemes külön megvizsgálni a D diszkrimináns különféle eseteit; szinte egyforma képletek adódnak, de lesz egy fontos célszerű értelmezésbeli különbség.

- Ha $D < 0$ (három valós gyök):

ekkor A^3 és B^3 imént kapott alakjai komplexek. A komplex $1/3$ -adik hatványozás ugye egyértelmű, és a képhalmazában $\arg z \in]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$. Emiatt ugye például $(-1)^{1/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = r_2$. A következő

⁷⁵Érdekesség, hogy a levezetendő képletek egy részét jóval hamarabb (az 1500-as években) kitalálták *Cardano* és mások, mint hogy a komplex számok általánosan ismertté váltak; sőt egyesek matematikatörténet-értelmezése szerint a harmadfokú egyenletek ilyen vizsgálata volt az egyik löket a komplex számok bevezetésének irányába.

képletekben ezt az $1/3$ -adik hatványozást használjuk. Az A^3 -öt és a B^3 -öt fentebbről tudva A is és B is külön-külön háromféle lehetne a három egységgyöknek megfelelően:

$$\begin{aligned} A^3 = -q + i\sqrt{|D|}, \\ B^3 = -q - i\sqrt{|D|} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= (-q + i\sqrt{|D|})^{1/3} \cdot r_k, \quad (k=1,2,3), \\ B &= (-q - i\sqrt{|D|})^{1/3} \cdot r_l, \quad (l=1,2,3), \end{aligned}$$

de nem mindegyik esetben teljesül a fentebb kihasznált $-p^3 = A^3 B^3$ feltételnél erősebb $-p = AB$ feltétel (utóbbi kicsit több korlátot szab, amint az imént mondtuk is). Ezt is figyelembe véve:

$$\text{Hogy } AB = -p \text{ legyen} \quad \Rightarrow \quad r_k = r_l^* \text{ kell, hogy legyen,}$$

vagyis nem külön-külön akármelyiket választhatjuk: A háromféle komplex szám lehet, de B mindegyikre az $\bar{}$ komplex konjugáltja kell, hogy legyen. Összefoglalva:

$$\begin{aligned} y^3 + 3py + 2q = 0, \\ D = q^2 + p^3 < 0. \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{A három} \\ \text{megoldás:} \end{array} \quad \begin{aligned} y_1 &= (-q + id)^{1/3} + (-q - id)^{1/3}, \\ y_2 &= r_2(-q + id)^{1/3} + r_3(-q - id)^{1/3}, \\ y_3 &= r_3(-q + id)^{1/3} + r_2(-q - id)^{1/3}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Jelölés: $d := \sqrt{|D|}$.

Ha akarjuk, persze hívhatjuk ezt az $1/3$ -adik hatványozást itt köbgyökvonásnak, ha azt szeretnénk, hogy úgy „algebraibb” műveletnek tűnjön.

Tényleg mindhárom kapott y_1, y_2, y_3 valós (hiszen $r_3^* = r_2$, és az $1/3$ -adik hatványozás is konjugáltat konjugáltba visz). Hiába próbálnánk viszont az eredményt „csupa valós számos művelettel” kifejezni. Ehhez meg kellene keresni az A -ra fentebb felírt kifejezésünknek (az $1/3$ -ik hatvány eredményének) valós részét. Úgy próbálkoznánk, hogy A -t felírjuk valós és képzetes résszel, majd az így felírt $A := A_1 + iA_2$ köbét egyenlővé tesszük $-q + id$ -vel, és megpróbáljuk ebből A_1 -et kifejezni.

Próbáljuk meg; rövid úton éppen az eredeti megoldandó harmadfokú egyenletünkre jutunk vissza, azaz lényegében egy tapodtat sem tudtunk haladni. A *csoporthelmélet* egyik korai, Évariste Galois nevéhez fűződő koncepcióbevezetése/alkalmazása volt annak megmutatása, hogy nem csak annyi történik most, hogy nem voltunk elég ügyesek. *Tényleg* lehetetlen ilyenkor ezt a három valós gyököt „valós műveletekkel” kifejezni. Ebben az esetben ($D < 0$, azaz három valós gyök) tehát meglehetősen kérdéses a talált megoldóképlet hasznossága.

Hogy **számpéldát** is lássunk, tekintsünk egy harmadfokú polinomot egyszerű adott gyökökkel:

$$\begin{aligned} y_1 = 5, \\ y_2 = -4, \\ y_3 = -1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} (y - y_1)(y - y_2)(y - y_3) \\ = (y - 5)(y + 4)(y + 1) \\ = y^3 - 21y - 20. \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Visszafelé: a feladat:} \\ y^3 - 21y - 20 = 0, \quad y = ? \end{array} \quad (\text{A.5})$$

A bevezetett jelöléseink értékei most $p = -7$, $q = -10$, amiből $D = -243$, tehát $d = 9\sqrt{3}$. A három gyököt a fenti megoldóképlet tehát az alábbi alakban adja itt (még azzal is szenvedni kell, hogy a valós részeit megbecsülve beazonosítsuk, hogy melyik melyik; ezt most megtettem):

$$\begin{aligned} y_1 &= (10 + 9\sqrt{3}i)^{1/3} + (10 - 9\sqrt{3}i)^{1/3}, \\ y_2 &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}(10 + 9\sqrt{3}i)^{1/3} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}(10 - 9\sqrt{3}i)^{1/3}, \\ y_3 &= \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}(10 + 9\sqrt{3}i)^{1/3} + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}(10 - 9\sqrt{3}i)^{1/3}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

és például az, hogy $y_1 = 5$ (tényleg annyi!), algebrai átalakítással nem igazán deríthető ki ebből másképp, mint hogy úgymond „visszamenőleg észrevesszük”, hogy a kapott y_1 kielégíti az eredetileg felírt egyenletet, és ő annak a legnagyobb valós részű megoldása, amire „ráérezve” $y_1 = 5$ adódik.

- Ha $D > 0$ (egy valós, két komplex gyök):

ekkor A^3 és B^3 valósak. Ideiglenesen **úgy értjük most a köbgyökvonást, ahogy valósban szoktuk**: negatív valós szám köbgyöke legyen negatív valós szám, például $\sqrt[3]{-1} = -1$. Ekkor A és B alakja ugyanaz, mint fentebb, ugyanúgy $3 \cdot 3 = 9$ lehetőség adódna, és ezek közül ugyanúgy csak három teljesíti az A^3 és B^3 alakjainak megtalálása után még maradt $AB = -p$ feltételt. Arra jutunk, hogy majdnem ugyanazok a képletek, mint az előző esetben:

$$\begin{aligned} y^3 + 3py + 2q = 0, \\ D = q^2 + p^3 > 0. \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{most a köbgyök nega-} \\ \text{tív valósra is valós} \\ \text{értéküként értendő:} \end{array} \quad \begin{aligned} y_1 &= \sqrt[3]{-q+d} + \sqrt[3]{-q-d}, \\ y_2 &= r_2 \sqrt[3]{-q+d} + r_3 \sqrt[3]{-q-d}, \\ y_3 &= r_3 \sqrt[3]{-q+d} + r_2 \sqrt[3]{-q-d}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Jelölés: $d := \sqrt{D}$.

Ebből az y_1 -es első az úgynevezett **Cardano-képlet**: ez nem lép ki \mathbb{R} -ből. Akkor lehet tehát „tisztá valós” műveletekkel kifejezni egy valós gyököt, ha csak egy van, és a másik kettő komplex.

- A $D = 0$ eset akár a $D < 0$, akár a $D > 0$ esetből megkapható; utóbbiból egyszerűbb talán. Az eredmény: ekkor a két komplex gyök mégis egybeeső lesz és valós, és $-\frac{1}{2}$ -szer annyi, mint az egy magányos valós. (A három y -gyök összege ekkor is 0, ahogy kell, mert ugye nincs y^2 -es tag.)

* * *

Nem algebrai függvényekkel több lehetőség is adódik „megoldóképletet felírni”; például a három valós gyök megtalálására valós számok között trigonometrikus függvényeket használhatunk.

Ez az az eset, amikor $q^2 + p^3 < 0$, ami persze maga után vonja azt is, hogy $p < 0$. Feltehetjük, hogy $q > 0$: ha $q < 0$ lenne, akkor y helyett $-y$ -t tekintve változónak visszavezetődünk a $q > 0$ esetre. Esetünkben $|q| < |p|^{3/2}$, emiatt így alakíthatunk (amihez az adja az ötletet, hogy ha ekkorra már valaki sokat töprengett a rokon *szögharmadolási* problémán, akkor felsejlik a háromszoros szög szinuszára vonatkozó $\sin(3\phi) = 3 \sin \phi - 4 \sin^3 \phi$ azonosság):

$$y^3 + 3py + 2q = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 \left(\frac{y}{2\sqrt{|p|}} \right)^3 - 3 \frac{y}{2\sqrt{|p|}} + \frac{q}{|p|^{3/2}} = 0. \quad (\text{A.8})$$

Vezessük be tehát az y ismeretlen és az előkerült konstans helyett a ϕ változót és a Φ paramétert:

$$\frac{y}{2\sqrt{|p|}} \equiv \sin \phi, \quad \frac{q}{|p|^{3/2}} \equiv \sin \Phi. \quad (\text{A.9})$$

Abban még persze nem vagyunk biztosak, hogy $\frac{y}{2\sqrt{|p|}} \in [-1, 1]$, hogy egy valós ϕ szinusza lehessen, abban viszont igen, hogy Φ értelmes így, mivel most $|q| < |p|^{3/2}$. Mindenesetre ezzel a felírt egyenletalak a következővé válik (kihasználva az említett háromszoros szög-képletet):

$$\begin{aligned} y^3 + 3py + 2q = 0 \quad & \text{ennek megoldásai pedig:} \\ \Rightarrow \quad \sin(3\phi) = \sin \Phi, \quad & \phi_1 = \frac{1}{3}\Phi, \quad \phi_2 = \frac{1}{3}\Phi + \frac{2\pi}{3}, \quad \phi_3 = \frac{1}{3}\Phi + \frac{4\pi}{3}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Ezután az így kapott ϕ értékekből kifejezhetjük az y értékeit, melyek az eredeti egyenletünk megoldásai. Természetesen a ϕ -re felírt szinuszos egyenletnek a megadottakon kívül más ϕ -k is megoldásai (a periodicitás miatt), de könnyű átgondolni, hogy elég ezt a felírt hármat választani, hogy $\sin \phi$ összes (mindhárom) különböző lehetősége kiadódjon.

B. függelék: Sorok, sorozatok, konvergencia

Ez a függelék „matematikuskodás”; tartalmaz néhány olyan ismeretet, ami túlterhelte volna a főszöveget. Tételek, bizonyítások kerülnek itt elő, kicsit ömlesztve, de mind olyanok, amiket tudva remélhetőleg kicsit megalapozottabbnak érezzük majd a matematikai tudásunkat. Az itt előkerült fogalmakra és állításokra érintőlegesen azért hivatkozunk itt-ott a főszövegben is.

Az alapvető motiváció az, hogy körbejárhassuk a *hatványsorokat*, amelyek nagyon fontosak: például az elemi függvényeket (sin, cos, exp, sh, ch, stb.) is ilyenekkel definiáltuk. Ehhez sorozatokról, sorokról beszélünk itt kicsit. Bevezetőnek átnézhetjük a tavalyi Vektorszámítás jegyzet 8.1. és 12.2. szakaszait. Most is használjuk a \mathbb{K} jelölést akár \mathbb{C} , akár \mathbb{R} helyett, ha olyat mondunk, ami mindkettőre vonatkozik. Két \mathbb{K} -beli *pont* (azaz: szám), x és y távolsága ugyebár $d(x, y) = |x - y|$, de időnként megtartom a $d(x, y)$ jelölést, ha olyan dolog kerül elő, ami általánosabb alaphalmazokban, az azokban érvényes távolságfogalmat használva is igaz lesz majd.

B.1. Konvergens sorozatok, Cauchy-féle sorozatok

• Először $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ függvényekkel, azaz \mathbb{K} értékű *sorozatokkal* foglalkozunk. Az n -hez rendelt értéket ilyenkor a_n -nel jelöljük, ez a sorozat n -edik *tagja*. Az egyik legfontosabb **definíció**:

Az A szám az a_n sorozat **határértéke**, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz van olyan N_ε küszöbindex, hogy minden n -re, amire $n > N_\varepsilon$, teljesül, hogy $d(A, a_n) < \varepsilon$. (B.1)
Ha A az a_n sorozat határértéke, akkor a jelölés: $A \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \equiv \lim_n a_n$.

Azt mondjuk, hogy egy sorozat **konvergens**, ha van határértéke, illetve hogy **divergens**, ha nincs.

Ez, ahogyan, ahányszorosán a \forall (*minden*) illetve a \exists (*van, létezik*) kitételek összejönnek itt, a matematikai analízisben az egyik *legbonyolultabb* alapdefiníció (hosszú matematikatörténeti fejlődés előzte is meg); sajnos az egyik *legalapvetőbb* definíció is, enélkül nem sokra megyünk. Azt, hogy „minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ -ra”, szokás úgy mondani, hogy „bármilyen *kicsi* $\varepsilon > 0$ -ra” legyen igaz a követelmény. Ez egyfelől szófecsérlés (ha minden $\varepsilon > 0$ -ra igaz, akkor minden kicsi ε -ra is), másrészt viszont kihangsúlyozza, hogy a kis ε értékek lényegesek, rajtuk múlik a dolog. Az A akkor határérték, ha A -hoz bármilyen közeli „tűrőhatár” esetén a sorozat tagjai egy index után már belül maradnak.

Különböző számok távolsága nullánál nagyobb. (Ez egy egyszerűnek tűnő dolog, de szerintem *évtizedek* alatt ülepszik le.) Emiatt egy sorozatnak *legfeljebb egy határértéke lehet*: több „jelölt” esetén nem tudhatna *mindegyikhez akármilyen* közelre korlátozódni elég nagy indexek esetén.

• Érdemes külön meghatározásba foglalni azt, ha egy sorozat tagjainak *egymástól* (bármelyiknek bármelyiktől) *való* eltérése tetszőlegesen kicsi lesz, ha elég messzire korlátozódunk:

Egy sorozat **Cauchy-féle**, röviden: *Cauchy-sorozat*,
ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén van olyan \mathcal{N}_ε küszöbindex, (B.2)
hogy minden $m > \mathcal{N}_\varepsilon$ és $n > \mathcal{N}_\varepsilon$ indexekre $d(a_m, a_n) < \varepsilon$.

Érezhető, hogy ez a tulajdonság elég szorosan kapcsolódik a konvergenciához; első megállapítás:

Állítás: minden konvergens sorozat Cauchy-féle. (B.3)

Indoklás: ha a tagok *a határértéktől* egyre kevésbé térnek el, akkor *egymástól* is. Rendesebben: ha a_n konvergens A határértékkel, akkor adott $\varepsilon > 0$ -ra létezik $N_{\varepsilon/2}$ küszöbindex, amire ha $n > N_{\varepsilon/2}$,

akkor $d(a_n, A) < \varepsilon/2$. Ha m és n nagyobbak, mint $N_{\varepsilon/2}$, akkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján $d(a_n, a_m) \leq d(a_n, A) + d(a_m, A) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Vagyis $N_{\varepsilon/2}$ jó lesz a Cauchy-tulajdonsághoz megkövetelt küszöbindexnek: e fölött *bármely két tag* biztosan ε -nál kevésbé tér el egymástól is.

- Vajon igaz-e visszafelé: ha egy sorozat Cauchy-féle, akkor ő konvergens is-e? Későbbi általánosítások kedvéért egy plusz kört futva érdemes egy külön fogalmat bevezetni erre.

Az alaphalmazra azt mondjuk, hogy **teljes**, ha minden benne futó Cauchy-sorozat konvergens is benne.

Állítás: \mathbb{R} és \mathbb{C} **teljes halmazok**, azaz minden \mathbb{R} illetve \mathbb{C} értékű Cauchy-sorozatnak van határértéke (\mathbb{R} -ben illetve \mathbb{C} -ben). (B.4)

Egy nem teljes halmaz „lyukacsos”. Alappélda: a racionális számok \mathbb{Q} halmaza (a szokásos távolságfogalommal) nem teljes. Vegyünk ugyanis \mathbb{R} -ben egy racionális tagokból álló, de irracionális határértékű sorozatot, például közelítsük meg tizedestörtekkel a π -t: 3 3,1 3,14 3,141 3,1415... Ezen sorozatnak a \mathbb{Q} halmazban nincs határértéke, de Cauchy-féle (*merthogy \mathbb{R} -ben konvergens*).

Az \mathbb{R} teljességének rendes bizonyításához rendszeresen kellene *definiálnunk a számokat* halmazelméletileg. Az alapgondolat: a $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ számfogalom-bővítéssel *kitöltöttük a maradék helyeket* a számegyenesen, és így \mathbb{Q} -t *teljessé tettük*. Azaz: elértük, hogy minden \mathbb{Q} -beli Cauchy-sorozat tartson valahova (az is, ami \mathbb{Q} -ban nem konvergens: „tartana valahova, de az, ahova, nincs a \mathbb{Q} -ban”).

Tudva, hogy \mathbb{R} teljes, már belátható, hogy \mathbb{C} teljes.⁷⁶ Azt, hogy egy \mathbb{K} értékű sorozat Cauchy-féle, sokszor könnyebb megállapítani; \mathbb{K} teljessége miatt tehát ekkor a sorozat konvergens is. Ez (és a hasonlóak) gyűjtőneve: a konvergencia **Cauchy-kritériuma**; látjuk majd a hasznát.

- Valós ($\mathbb{K} \equiv \mathbb{R}$) értékű sorozatokra bevesszük a játékba a $\pm\infty$ végteleneket is: $\overline{\mathbb{R}}$ -rel jelöljük az úgynevezett *kibővített valós számok* halmazát, azaz az $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ halmazt.

Kézenfekvően értelmezhetjük azt, hogy egy $a_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ valós értékű sorozat ∞ -hez tart: ha *bármilyen nagy számra* igaz, hogy „egy idő után” a sorozat összes tagja már annál nagyobb.

Az $a_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ valós értékű sorozatra azt mondjuk, hogy
 hogy $\lim_n(a_n) = \infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}^+$ esetén van olyan
 N_K küszöbindex, hogy minden $n > N_K$ indexre $a_n > K$.

Megfordítva: az $a_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozatra azt mondjuk, (B.5)

hogy $\lim_n(a_n) = -\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}^+$ esetén van
 olyan N_K , hogy minden $n > N_K$ esetén $a_n < -|K|$.

- **Valós értékű sorozatokra** jól használható az $n \rightarrow \infty$ esetben való viselkedés jellemzésére a következő két fogalom is (melyek „egymás tükörképei”).

Az a_n sorozat **alsó határértéke**
 (*limesz inferiorja*), $\underline{\lim}_n a_n$ azon
 számok felső határa, amiknél a so-
 rozatnak csak véges sok tagja kisebb.

Az a_n sorozat **felső határértéke**
 (*limesz superiorja*), $\overline{\lim}_n a_n$ azon
 számok alsó határa, amiknél a soro-
 zatnak csak véges sok tagja nagyobb.

(B.6)

A definícióban nem mondhattuk, hogy „a legnagyobb” illetve „a legkisebb” megfelelő szám, mert lehet olyan sorozat, hogy a megfelelő számok halmaza nyílt végű (mint a $]0,1[$ intervallum), vagy

⁷⁶Ha z_n Cauchy-sorozat \mathbb{C} -ben, akkor $\Re(z_n)$ és $\Im(z_n)$ Cauchy-sorozatok \mathbb{R} -ben. Ők konvergenssek, mert \mathbb{R} teljes, és a határértékeikből összerakott komplex szám határértéke lesz az eredeti sorozatnak. „Komponensenként” belátható az is, hogy minden véges dimenziós vektortér (a szokásos, skalárszorozatból származó távolságfogalommal) is teljes.

hogy nem korlátos, vagy hogy üres. Felső és alsó határa viszont \mathbb{R} minden részhalmazának van. **Figyelem:** felülről nem korlátos halmaz felső határa ∞ ; hasonlóan, alulról nem korlátos halmaz alsó határa $-\infty$. Ellenben az \emptyset üres halmaz *felső határa* $-\infty$, az alsó határa pedig $+\infty$; ez meglepő lehet, de belegondolva abba, hogy mi más is lehetne \emptyset felső illetve alsó határa, kézenfekvő.

• Összefoglalva: $\liminf_n a_n$ és $\limsup_n a_n$ minden valós értékű a_n sorozatra létezik, de alapvetően mindektől megengedett, hogy esetleg ∞ vagy $-\infty$ legyen. A \limsup és a \liminf iménti definícióinak leginkább az alábbi **következményeit használjuk:** gondoljuk át alaposan őket!

$$\begin{aligned}
 &\text{Ha } x < \liminf_n a_n, \text{ akkor csak véges sok tag } \textit{kisebb-egyenlő } x\text{-nél.} \\
 &\text{Ha } x > \liminf_n a_n, \text{ akkor végtelen sok tag van, ami } \textit{kisebb } x\text{-nél.} \\
 &\text{Ha } x > \limsup_n a_n, \text{ akkor véges sok tag } \textit{nagyobb-egyenlő } x\text{-nél.} \\
 &\text{Ha } x < \limsup_n a_n, \text{ akkor végtelen sok tag } \textit{nagyobb } x\text{-nél.}
 \end{aligned}
 \tag{B.7}$$

Véges sok tag nem igazán számít a sorozat végtelenben való viselkedéséhez. A \limsup tehát tényleg „fölről behatárolja” a sorozatot (véges sok tagot kivéve), hasonlóan a \liminf alulról. A mondott következményekből rögtön adódik az is, hogy $\liminf_n a_n$ nem nagyobb, mint $\limsup_n a_n$: ellenkező esetben *minden* olyan x -re, amire $\liminf_n a_n > x > \limsup_n a_n$, a sorozatnak véges sok tagja lehetne *nem egyenlő* x -szel, és ez kizárt dolog (már csak két ilyen x -et elgondolva is).

• Ha $\limsup_n a_n = \liminf_n a_n \equiv A$ (ideiglenesen A -val jelöljük a közös értéket), akkor bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén $A + \varepsilon$ -nál a sorozatnak véges sok tagja nagyobb (a \limsup miatt), és $A - \varepsilon$ -nál csak véges sok tag kisebb (a \liminf miatt): az ilyen A tehát a sorozat határértéke. (Ha $A = \infty$, akkor már a \liminf -es kitételből is látszik, hogy $\lim a_n = \infty$, ha pedig $A = -\infty$, akkor a \limsup -osból, hogy $\lim a_n = -\infty$.) A következtetés visszafelé is érvényes. *Ha* az a_n sorozat konvergens, *akkor* $\limsup_n a_n$ nem lehet nagyobb, mint $\lim_n a_n$, hiszen különben lenne olyan x szám, ami a kettő között van: mivel ez az x nagyobb, mint $\lim_n a_n$, a sorozatnak legfeljebb véges sok tagja lehetne nagyobb, mint x , de mivel x kisebb, mint $\limsup_n a_n$, a sorozatnak végtelen sok tagja kellene, hogy nagyobb legyen, mint x . Ez ellentmondás. Hasonlóan beláthatjuk, hogy $\liminf_n a_n$ nem lehet kisebb, mint $\lim_n a_n$. Ha $\lim_n a_n = \infty$ vagy $-\infty$, még egyszerűbb a következtetés. Összefoglalva

$$\begin{array}{l}
 \text{Az } a_n \text{ sorozat kon-} \\
 \text{vergencia } \overline{\mathbb{R}}\text{-ben}
 \end{array}
 \Leftrightarrow
 \limsup_n a_n = \liminf_n a_n,
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{és ekkor } \limsup_n a_n = \\
 = \lim_n a_n = \liminf_n a_n.
 \end{array}
 \tag{B.8}$$

• **Példák** következnek: értelemszerűen jelölöm ki őket, gondoljuk végig mindegyiket. Ahol a határértéket (\lim) adtam meg, ott a sorozat konvergens (vagy „rendesen”, véges határértékkel, vagy legalábbis $\overline{\mathbb{R}}$ -ben). Ilyenkor ugye a \limsup és a \liminf megegyezik a határértékkel; ezt külön emésztgessük! Ahol a \limsup és \liminf értékeit tüntettem fel, ott a sorozat $\overline{\mathbb{R}}$ -ben nézve sem konvergens. A határérték fogalma tehát „erősebb”.

- 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, ... \rightarrow konvergens, $\lim a_n = 2$.
- 2, -1, 2, -1, 2, -1, 2, -1, 2, -1, 2, -1, ... $\rightarrow \limsup_n a_n = 2, \liminf_n a_n = -1$.
- 2, $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{8}, \frac{17}{16}, \frac{33}{32}, \frac{65}{64}, \frac{129}{128}, \frac{257}{256}, \frac{513}{512}, \frac{1025}{1024}, \dots$ \rightarrow konvergens, $\lim a_n = 1$.
- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ... $\rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ -ben konvergens, $\lim a_n = \infty$.
- 1, 10, 2, 100, 3, 1000, 4, 10^4 , 5, 10^5 , 6, 10^6 , ... $\rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ -ben konvergens, $\lim a_n = \infty$.

$$1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, 6, -6, \dots \rightarrow \limsup_n a_n = \infty, \liminf_n a_n = -\infty.$$

$$1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{5}, 1, \frac{1}{6}, 1, \frac{1}{7}, 1, \frac{1}{8}, 1, \dots \rightarrow \limsup_n a_n = 1, \liminf_n a_n = 0.$$

$$0, \frac{1}{2}, -1, \frac{2}{3}, -2, \frac{3}{4}, -3, \frac{4}{5}, -4, \frac{5}{6}, -5, \frac{6}{7}, \dots \rightarrow \limsup_n a_n = 1, \liminf_n a_n = -\infty.$$

• Az 1.4. szakaszban kihasználunk még egy dolgot: legyen d_n akármilyen, c_n pedig konvergens $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat, és legyen $\lim c_n$ véges pozitív szám; fontos, hogy nem is 0, és nem is ∞ . Ekkor a d_n sorozatot tagonként a c_n -ekkel szorozva az $n \rightarrow \infty$ -beli viselkedés $\lim c_n$ -nel módosul:

$$\text{Ha } 0 < \lim_n c_n < \infty, \text{ akkor } \Rightarrow \begin{aligned} \limsup_n (c_n d_n) &= (\lim_n c_n) \cdot (\limsup_n d_n), \\ \liminf_n (c_n d_n) &= (\lim_n c_n) \cdot (\liminf_n d_n). \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Ebből az is következik (de máshogy is levezethetnénk), hogy ha $\limsup_n d_n = \liminf_n d_n$, vagyis d_n is konvergens, akkor a szorzat-sorozat is az, és a határértéke: $\lim_n (c_n d_n) = \lim_n c_n \cdot \lim_n d_n$.

Érdeklődőknek leírom a bizonyítást (a \limsup -osat; a \liminf -re vonatkozó ennek „tükörképe”; agytornaként végiggondolhatjuk azt is külön). Tehát: mivel $\lim c_n > 0$, véges sok tagtól eltekintve $c_n > 0$ is igaz. Az $n \rightarrow \infty$ esetben véges sok tag nem számít: vehetjük úgy, hogy minden n -re $c_n > 0$, így értelmes az $\frac{1}{c_n}$ -ek sorozata, az is konvergens, és $\lim \frac{1}{c_n} = \frac{1}{\lim c_n}$.

Tegyük fel, hogy $\limsup_n (c_n d_n) > (\lim_n c_n) \cdot (\limsup_n d_n)$! Vegyünk ekkor egy közöttük lévő x számot, azaz olyat, amire $\limsup_n (c_n d_n) > x$, de $x > \lim c_n \cdot \limsup_n d_n$. A első feltételből mivel $\limsup_n (c_n d_n) > x$, véges sok tagtól eltekintve $c_n d_n > x$, vagyis $d_n > \frac{x}{c_n}$, amiből az is következik, hogy véges sok tagtól eltekintve $d_n \geq \frac{x}{\lim c_n}$. Ugyanakkor az x -re felírt második feltétel miatt $\frac{x}{\lim c_n} > \limsup_n d_n$, emiatt véges sok tagtól eltekintve $d_n < \frac{x}{\lim c_n}$ lenne. Ellentmondásra jutottunk: a kiinduló egyenlőtlenség nem lehet igaz. Igazat beszélve: arra jutottunk, hogy

$$\limsup_n (c_n d_n) \leq (\lim_n c_n) \cdot (\limsup_n d_n).$$

Ugyanez igaz viszont d_n helyett a $\frac{d_n}{c_n}$ sorozatot, c_n helyett pedig a $\frac{1}{c_n}$ sorozatot tekintve:

$$\limsup_n \left(\frac{1}{c_n} \cdot c_n d_n \right) \leq \left(\lim_n \frac{1}{c_n} \right) \cdot \limsup_n (c_n d_n) \Rightarrow \limsup_n (c_n d_n) \geq \lim_n c_n \cdot \limsup_n d_n.$$

Kész: $\limsup_n (c_n d_n) = \lim_n c_n \cdot \limsup_n d_n$, mert \geq és \leq is fennáll közöttük. Figyeljük meg, hogy alaposan kihasználtuk, hogy $0 < \lim c_n < \infty$; ha ez nem teljesül, nem is feltétlenül igaz az állítás.

• Az 1.4. szakaszban a konvergenciasugár kiszámításánál idéztük az (1.25) állítást, mely szerint \mathbb{R}^+ (pozitív!) értékű sorozatokra ha létezik $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$, akkor létezik $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ is, és ekkor ezek egyenlők. Ez az iménti (B.8) állítás alapján az alábbi két megállapításból következik:

$$\liminf_n \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_n \sqrt[n]{a_n}, \quad \text{és} \quad \limsup_n \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_n \frac{a_{n+1}}{a_n}. \quad (\text{B.10})$$

Az elsőhöz: legyen $\alpha \equiv \limsup_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Ha $\alpha = \infty$, akkor nincs mit bizonyítani. Ha $\alpha < \infty$, akkor legyen $\beta > \alpha$ tetszőleges: ekkor a \limsup tulajdonsága miatt van olyan n_β , hogy minden $n > n_\beta$ indexre $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \beta$, amiből folytatva $a_n < \beta a_{n-1} < \beta^2 a_{n-2} < \dots < \beta^{n-n_\beta} a_{n_\beta}$ minden $n > n_\beta$ esetén, ebből pedig $\sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\beta^{n-n_\beta} a_{n_\beta}} = \beta \cdot \sqrt[n]{\beta^{-n_\beta} a_{n_\beta}}$. Itt a legutóbbi jobboldal β -hoz tart $n \rightarrow \infty$ esetén, emiatt $\limsup_n \sqrt[n]{a_n} \leq \beta$ (ugyanis ha nem így lenne, végtelen sok n -re $\sqrt[n]{a_n} > \beta$ lenne, de az előző egyenlőtlenség csak véges sok, n_β -nál kisebb indexre engedi ezt). Mivel amit kaptunk, minden $\beta > \alpha$ esetén igaz, végül is az is igaz, hogy $\limsup_n \sqrt[n]{a_n} \leq \alpha$, amit állítottunk.

A második, \liminf -es változat lényegében ugyanígy bizonyítható; ezt nem írom le.

B.2. Sorok, sorösszegek, abszolút összegezhetőség

- Ha egy sorozat tagjait egymás után összeadogatjuk, a sorozathoz rendelt *sorról* beszélünk.

Az a_n sorozathoz rendelt **sor**: $\sum a$. Ez $\sum_{k=0}^n a_k$, amit a sor n -edik *rész-*
az a sorozat, amelynek az n -edik tagja *letösszegének* hívunk.

Az a_n sorozat **összegezhető**, más szóval: a $\sum a$ sor *konvergens*, ha létezik a részletösszegek határértéke: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k \right)$. (B.11)

Ekkor ezen határérték ne-
ve a **sor összege**; jelben: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$, $\sum_n a_n$.

- **Sorösszegre** (sorozat összegezhetőségére) is érdemes megfogalmazni a **Cauchy-kritériumot**. Ugyebár \mathbb{K} teljes: a részletösszegek sorozatára is igaz, hogy éppen akkor konvergens, ha Cauchy-féle is. Utóbbi most azt jelenti, hogy minden $\varepsilon > 0$ -ra van olyan küszöbindex, hogy a legalább addig vagy tovább vett részletösszegek ε -nyinál kevésbé térnek el *egymástól*. Ilyen részletösszegek különbsége persze nem más, mint a csak az egyikben szereplő tagok összege:

$$\sum_{k=0}^m a_k - \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=n+1}^m a_k \Rightarrow \begin{array}{l} \text{az } a_n \text{ sorozat pontosan akkor össze-} \\ \text{gezhető, ha minden } \varepsilon > 0 \text{ számhoz van} \\ \text{olyan } \mathcal{N}_\varepsilon \text{ küszöbindex, amire minden} \\ m > n > \mathcal{N}_\varepsilon \text{ esetén } \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon. \end{array} \quad (\text{B.12})$$

A sorösszegre vonatkozó ezen Cauchy-kritérium jelentése tehát: konvergens sor „elég hátsó szelete elég kicsi”. **Speciálisan** ez azt is jelenti (az $m = n+1$ esetet véve), hogy ha $n \geq \mathcal{N}_\varepsilon$, akkor $|a_n| < \varepsilon$. Utóbbi következtetés szavakban: **összegezhető sorozat nullához tart**. Azaz ha a_n összegezhető, akkor $\lim_n a_n = 0$. Ez egyfelől kézenfekvő: ha egy sorozat nem tart nullához, biztos nem összegezhető. Másrészt azért jó ezt külön megjegyezni.

- Negatív és pozitív, esetleg komplex számok helyett néha könnyebb bánni az abszolútértékekkel, és mindjárt látjuk, hogy az így bevezetett fogalom nagyon hasznos lesz sok dologra.

Definíció: az a_n sorozat **abszolút**(értékben) **összegezhető**, más szóval: a belőle képzett sor **abszolút konvergens**, ha az abszolútértékek $|a_n|$ sorozata összegezhető, azaz létezik $\sum_n |a_n|$. (B.13)

Ezen fogalom bevezetésének létjogosultságára az **alappélda** a következő: értelemszerű kijelöléssel

$$\text{Az } 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots \text{ sorösszeg létezik,} \quad (\text{B.14})$$

$$\text{az } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \text{ sorösszeg viszont nem.} \quad (\text{B.15})$$

Az itt felírt második sor az úgynevezett **harmonikus sor**; ez tehát **nem összegezhető**. (Ugyanis alubecsülhető az $1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) + \dots$ öszeggel, ami láthatóan ∞). Az első sorösszeg (a váltakozó előjelű) viszont létezik.⁷⁷

⁷⁷ Indoklás: így és úgy párosítva a hátrébbi tagokat kiderül, hogy a *párosadik* részletösszegek mindegyike *kisebb*, mint a későbbi *akármelyik* részletösszegek, viszont a *páratlanadik* részletösszegek *nagyobbak*, mint a később következő *bármelyik* részletösszeg. Továbbá egy párosadik és az azt követő (páratlanadik) részletösszeg különbsége $\frac{1}{n}$ -nél kisebb az n -edik tag után. Ezek miatt ha $\varepsilon > 0$, akkor küszöbindexnek egy $1/\varepsilon$ -nél nagyobb egész számot véve biztos, hogy az ez utáni *bármelyik* részletösszegek *egymástól* már ε -nál kevésbé térnek el. Vagyis a sor Cauchy-féle, így \mathbb{R} teljessége miatt konvergens is. *Megjegyzés:* később az is kiderül, hogy $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = \ln 2$.

• Abból tehát, hogy egy sorozat összegezhető, nem következik, hogy abszolút összegezhető is lenne. Fordítva viszont jobb a helyzet: ha $|a_n|$ -ek eléggé gyorsan csökkennek, hogy $\sum_n |a_n|$ létezzon, akkor ugyan lehet, hogy az a_n -ek \mathbb{R} -ben vagy \mathbb{C} -ben „összevissza hintáznak”, mégis kiderül (\mathbb{K} teljességét tudva), hogy létezik a sorösszegük. Ugyanis ha létezik $\sum_n |a_n|$, akkor minden $\varepsilon > 0$ -ra van olyan N_ε , hogy afölötti n, m -ekre $\sum_{k=m}^n |a_k| < \varepsilon$. Viszont $|\sum_{k=m}^n a_k|$ biztos nem nagyobb, mint $\sum_{k=m}^n |a_k|$: emiatt a látott m, n -ekre $|\sum_{k=m}^n a_k| < \varepsilon$. Tehát az a_n -ek részletösszegeinek sorozata is Cauchy-féle, azaz \mathbb{K} teljessége miatt konvergens is. Vagyis létezik $\sum_{n=0}^\infty a_n$. Összefoglalva tehát igaz az

Állítás: \mathbb{K} -beli abszolút konvergens sor konvergens is: ha létezik $\sum_n |a_n|$, akkor létezik $\sum_n a_n$ is. (B.16)

Természetesen általában $\sum_n |a_n|$, $|\sum_n a_n|$ és $\sum_n a_n$ közül semelyik kettő sem egyenlő.

• Véges sok tag összeadása *kommutatív*. Szeretnénk, ha lehetne (de pesszimistábbak sejthetik: nem mindig lehet) végtelen sorösszegben is a tagokat büntetlenül cseréberélni, vagy például először egy részsorozat összegét, majd a maradékát kiszámolni. Egy intő példa:

A fenti eredeti sor:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \dots : \quad \text{ez konvergens (és értéke } \ln 2 \text{).}$$

A páratlan sorszámú tagok:

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \dots : = -\frac{1}{2} \cdot (\text{harmonikus sor}), \text{ úgyhogy nem összegezhető.}$$

A páros sorszámú tagok:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \dots : > \frac{1}{2} \cdot (\text{harmonikus sor}), \text{ így ez sem összegezhető.}$$

Az eredeti sor egy ügyes átrendezése:

$$\left[1 - \frac{1}{2}\right] - \frac{1}{4} + \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right] - \frac{1}{8} + \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right] - \frac{1}{12} + \left[\frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right] - \frac{1}{16} + \dots : \quad \text{összege az eredeti fele.}$$

Kiderül, hogy \mathbb{K} értékű nem abszolút konvergens sorokból *mindig* gyárthatók ilyen trükkös ellenpéldák. Ezért \mathbb{K} értékű **nem abszolút** konvergens, **de konvergens** sorokat **feltételesen** konvergensnek hívunk, hiszen „átrendezéssel elronthatjuk” a konvergenciát. Azonban megkímélődünk az ilyenektől **abszolút konvergencia** esetén: ekkor „**feltétlen**” a konvergencia, „bánhatunk lazán az összeadás sorrendjével”. Ezért is jó, ha egy sor abszolút konvergens is.

Állítás: ha az $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ sorozat abszolút összegezhető, akkor

- 1.) bármilyen részsorozata is abszolút összegezhető és összegezhető,
- 2.) egy rész-sorösszeg és a maradék sorösszeg összege az eredeti sorösszeg (B.17)
(emiatt ez igaz kettő helyett akárhány véges sok részsorozatra is),
- 3.) a sorösszeg létezni fog és ugyanannyi marad, ha a tagokat permutáljuk.

A részekre bonthatóság bizonyítását érdeklődőknek tömören leírom; ez talán a fontosabbik dolog.

Osszuk két csoportba az a_n -eket: legyen a'_n és a''_n az egyiknek és a másiknak megfelelő két sorozat, amelyekben a másik illetve az egyik csoportba sorolt elemeket (a kihagyottakat) kinulláztuk. Nyilván minden n -re $a_n = a'_n + a''_n$, hiszen vagy az egyik, vagy a másik nulla. Továbbá mivel az abszolútértékek nemnegatívak, bármilyen n és m közötti összegre $\sum_{k=n}^m |a'_k| < \sum_{k=n}^m |a_k|$ is és $\sum_{k=n}^m |a''_k| < \sum_{k=n}^m |a_k|$ is igaz. Emiatt mivel az eredeti abszolútértékek, $|a_n|$ -ek sorösszege konvergens, így Cauchy-féle, az $|a'_n|$ -ek és az $|a''_n|$ -ek sorösszegei is Cauchy-félék. Tehát azok is abszolút konvergens, így konvergens is. Legyen $A := \sum_n a'_n$ és $B := \sum_n a''_n$; összetéve a két határérték jelentését minden $\varepsilon > 0$ -ra van olyan N küszöbindex, hogy minden $n > N$ esetén $|A - \sum_{k=0}^n a'_k| < \frac{\varepsilon}{2}$

is és $|B - \sum_{k=0}^n a''_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ is teljesülnek. Emiatt ilyen n -ekre ekkor

$$\left| A+B - \sum_{k=0}^n a_k \right| = \left| A - \sum_{k=0}^n a'_k + B - \sum_{k=0}^n a''_k \right| \leq \left| A - \sum_{k=0}^n a'_k \right| + \left| B - \sum_{k=0}^n a''_k \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ebből pedig az következik, hogy a_n -ek részletösszeg-sorozata $A+B$ -hez tart, ahogy állítottuk.

• Végességeknél **több indexre összegzésnél** is mindegy a sorrend: ha például k és l 1-től 3-ig futnak, és $A_{k,l}$ egy kétindexes mennyiség (azaz most: $3 \cdot 3 = 9$ darab szám), akkor

$$\sum_{k=1}^3 \left(\sum_{l=1}^3 A_{k,l} \right) = \sum_{l=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 A_{k,l} \right), \quad \text{épp ezért „egybe” írhatjuk: } \sum_{k,l} A_{k,l}.$$

Ha nem véges sok (itt kilenc), hanem végtelen sok tag van (mint egy „végtelen nagy mátrix” elemei), akkor *általában* nem biztos, hogy akármilyen sorrendben összegezzük. Azonban (a legfontosabb esetet emeljük most ki) **abszolút konvergencia esetén** itt is **mindegy a sorrend**. Pontosítva: ha a k indexet egy fix értékénél rögzítjük, akkor az $l \rightarrow A_{k,l}$ hozzárendelés rendes sorozat: l -edik tagja $A_{k,l}$, és nézhetjük ennek l szerinti összegezhetőségét, majd a (k -tól függő) eredmények k szerinti összegezhetőségét. **Az állítás a következő:**

Ha egyik sorrendben létezik $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} |A_{k,l}| \right)$, akkor az alábbiak is igazak: (B.18)

\Rightarrow 1.) létezik a fordított sorrendű abszolútértékes összeg is: $\sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |A_{k,l}| \right)$.

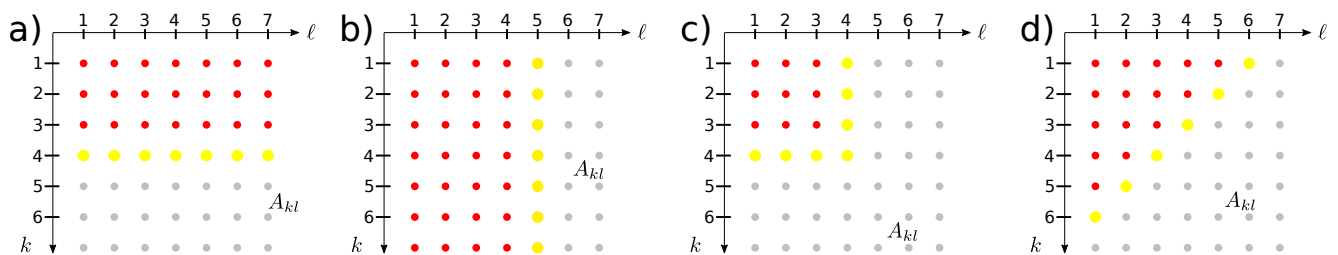
\Rightarrow 2.) a kétféle ilyen összeg megegyezik: $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} |A_{k,l}| \right) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |A_{k,l}| \right)$,

\Rightarrow 3.) abszolútérték nélkül is léteznek: $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} A_{k,l} \right), \quad \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_{k,l} \right)$,

\Rightarrow 4.) utóbbiak is egyenlők egymással: $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} A_{k,l} \right) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_{k,l} \right)$,

\Rightarrow 5.) $|A_{k,l}|$ -ek és $A_{k,l}$ -ek összegei *más végigmenési sorrend-nél* is ugyanannyik; ezért jelölhetünk „összevontan”: $\sum_{k,l} A_{k,l}, \quad \sum_{k,l} |A_{k,l}|$.

(Persze $\sum_{k,l} A_{k,l}$ csak akkor ugyanannyi, mint $\sum_{k,l} |A_{k,l}|$, ha mindegyik $A_{k,l} \in \mathbb{R}_0^+$.) A kiinduló követelmény tehát az *egyik* sorrendi abszolútértékbeli összegezhetőség; természetesen a másik sorrendiből is egyenértékűleg kiindulhattunk volna. A végigmenéseket ez az ábra szemlélteti:



54. ábra. Különböző kettős indexű összegek.

Az ábra a.) része a $\sum_k \sum_l A_{k,l}$ fajta (először adott k -nál l szerint, majd az eredményeket k szerint való) összegzést szemlélteti, a b.) a fordított $\sum_l \sum_k A_{k,l}$ -et. A c.) rész a $\lim_{K \rightarrow \infty} (\sum_{k,l=0}^K A_{kl})$ fajta összeget jelképezi, a d.) pedig egy gyakori fajta további sorrendet: először egy adott „háromszögátló” elemeit összegezzük, majd ezeket az összegeket. A fenti állítás azt mondja itt, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} A_{k,l} \right) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_{k,l} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N A_{k,l} = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{q=0}^p A_{p-q,q} \right). \quad (\text{B.19})$$

Szavakban: az összegzőindexeket *átjelölhetjük*, itt például k és l helyett a p -t és a q -t használhatjuk; ezeket a jelölt értékeken futtatva is bejárjuk $A_{k,l}$ elemeit (p jelöli ki az átlót, q azon belül mozog).

• Gyakori speciális eset, amikor a_k és b_l adott sorozatok, és $A_{k,l}$ ezek „szorzata”: $A_{k,l} = a_k b_l$. Ekkor $\sum_k \sum_l |A_{k,l}| = \sum_k \sum_l |a_k| |b_l| = (\sum_k |a_k|) \cdot (\sum_l |b_l|)$. A fenti állítás szerint tehát ha a_k és b_l is abszolút összegezhető, akkor az ilyen „szorzatuk” akármilyen, az összes $a_k b_l$ elemszorzaton egyszer végigmenő módon (abszolútértékben is, anélkül is) összegezhető, és az eredmény egyértelmű.

* * *

A szakasz hátralevő kb. két oldalában leírom a (B.18) állítás **bizonyítását**; *hosszadalmas*, és az állítás tudásához **nem szükséges** végigrágni. Az előkerülő összegeket képletekkel írom, de javasolom, hogy aki olvassa, rajzolgassa/jelölgesse be az iménti ábra módjára, hogy hol milyen tagok milyen összegei szerepelnek. Az „akármilyen sorrendű” összegek közül a fenti ábra c. és d. részein látható fajtára fókuszálunk, de látszani fog, hogy a bizonyítás működne másfajta sorrendű végigmenésekre is. Vezérfonalak: 1.) *véges összegeket* megcserélhetünk, alulról/fölülről becsülhetünk, ebből kell az összeg határértékére következtetgetni. 2.) Abszolút konvergencia sor konvergencia is. 3.) Ha egy a_n sorozat felülről korlátos (=valamilyen A számra igaz, hogy minden n -re $a_n \leq A$), továbbá a_n *monoton nő*, akkor konvergencia, és $\lim_n a_n \leq A$. Ez részletösszegek sorozatára is vonatkozik! Lehet persze, hogy az A felső korlát éppen a $\lim_n a_n$: ekkor egyenlőségként teljesül, hogy $\lim_n a_n \leq A$.

• Kiindulás: minden k -ra létezik $\sum_l |A_{k,l}|$, és létezik $\sum_k (\sum_l |A_{k,l}|)$ is. Egy becslés-csomag (melyben K és L adott indexértékek, továbbá a legutolsó összeg létezik és K -tól és L -től független):

$$\sum_{k=0}^K |A_{k,L}| \leq \sum_{l=0}^L \left(\sum_{k=0}^K |A_{k,l}| \right) = \sum_{k=0}^K \left(\sum_{l=0}^L |A_{k,l}| \right) \leq \sum_{k=0}^K \left(\sum_{l=0}^{\infty} |A_{k,l}| \right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} |A_{k,l}| \right). \quad (\text{B.20})$$

Az első összeg tehát felülről korlátos, és K -t növelve monoton nő: létezik $K \rightarrow \infty$ határértéke. Vagyis minden L -re létezik $\sum_{k=0}^{\infty} |A_{k,L}|$. Emiatt a (véges sok l -re vett) második összegnek is létezik $K \rightarrow \infty$ határértéke, amely viszont L -et növelve monoton nő, és továbbra is igaz rá a felülbecslés:

$$\sum_{l=0}^L \left(\sum_{k=0}^{\infty} |A_{k,l}| \right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} |A_{k,l}| \right), \quad \text{ezért az } L \rightarrow \infty \text{ határérték létezik, és} \quad \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |A_{k,l}| \right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} |A_{k,l}| \right).$$

Összefoglalva: ha létezik az $|A_{k,l}|$ -ek egyik sorrendű összege, akkor a másik is, és *az egyik* kisebb-egyenlő, mint *a másik*. De ez visszafelé is elmondható: a kétféle sorrendi összeg egyenlő.

A fentebbi ábrán c. jelű összeghez: a négyzetes $\sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^K |A_{kl}|$ összeg is monoton nő K -t növelve, és az iménti (B.20) becsléssor harmadik összegében $K=L$ -et írva

$$\sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^K |A_{kl}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} |A_{kl}| \right), \quad \text{emiatt létezik } K \rightarrow \infty \text{ határérték itt, és őrá is} \quad \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^K |A_{kl}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} |A_{kl}| \right).$$

Ugyanakkor minden fix L -et véve igaz a fordított becslés, ami miatt $L \rightarrow \infty$ esetén is igaz lesz:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^K |A_{kl}| \geq \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L |A_{kl}| \Rightarrow \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^K |A_{kl}| \geq \lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L |A_{kl}|,$$

de ez utóbbi éppen $\sum_{l=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{\infty} |A_{k,l}|)$. Összefoglalva: a $\lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^K |A_{kl}|$ összeg létezik, és *alulról is, fölülről is* becslhetjük a sorrendi összeggel: megegyezik tehát vele.

Végül az átlós-háromszöges (a fenti ábra d. része szerinti) összeget felülről is és alulról is becslhetjük a most látott, négyzet alakban haladó összeggel (egy a háromszög „előtt” illetve „mögött” haladó, nagyobb illetve kisebb négyzetet rajzolva); tehát az $|A_{kl}|$ -ek összege így is létezik, és ugyanaz, mint eddig. *Az abszolútértékekre kész vagyunk az állítás bizonyításával.*

- Abszolút konvergencia sor konvergencia is. Mivel minden k -ra létezik $\sum_{l=0}^{\infty} |A_{k,l}|$, ezért $\sum_{l=0}^{\infty} A_{k,l}$ is létezik, és $|\sum_{l=0}^{\infty} A_{k,l}| \leq \sum_{l=0}^{\infty} |A_{k,l}|$. Emiatt $\sum_{k=0}^{\infty} |\sum_{l=0}^{\infty} A_{k,l}|$ is létezik, vagyis $\sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{l=0}^{\infty} A_{k,l})$ is. Ugyanezt a (már tudjuk, hogy létező) fordított sorrendű abszolútérték-összeggel is végigmondhatjuk; következtetés: mindkét sorrendi összeg létezik abszolútérték nélkül is. A háromszöges-átlós fajta is, mert egyrészt létezik $\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^p |A_{p-q,q}|$, másrészt $|\sum_{q=0}^p A_{p-q,q}| \leq \sum_{q=0}^p |A_{p-q,q}|$, így $\sum_{p=0}^{\infty} |\sum_{q=0}^p A_{p-q,q}|$ is létezik, emiatt $\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^p A_{p-q,q}$ is.

A négyzetesen haladó összegnél közvetlenebbül használhatjuk a Cauchy-kritériumot: mivel létezik $\lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^K |A_{kl}|$, minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan N_ε , amire minden $K_1 > N_\varepsilon$ és $K_2 > N_\varepsilon$ esetén $\sum_{k=K_1}^{K_2} \sum_{l=K_1}^{K_2} |A_{kl}| < \varepsilon$. Node $|\sum_{k=K_1}^{K_2} \sum_{l=K_1}^{K_2} A_{kl}| \leq \sum_{k=K_1}^{K_2} \sum_{l=K_1}^{K_2} |A_{kl}|$, emiatt az ilyen K_1, K_2 -kre $|\sum_{k=K_1}^{K_2} \sum_{l=K_1}^{K_2} A_{kl}| < \varepsilon$ is igaz, azaz az abszolútértékek nélküli $K \mapsto \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^K A_{kl}$ részletösszeg-sorozat is Cauchy-féle, így konvergens. *Beláttuk, hogy A_{kl} -ek összegei is léteznek.*

- Már csak az kell, hogy az $A_{k,l}$ -ek ilyen különféle összegei egymással egyenlők. (Már tudjuk, hogy léteznek, de ez kevés lenne: használnunk kell még egyszer az abszolútértékek összegezhetőségét is.) Kezdjük a kétféle sorrendi összeg egyenlőségével. Ehhez azt kell belátni, hogy

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{\infty} A_{kl} - \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{\infty} A_{kl} \right| = 0, \quad \text{azaz hogy} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=N}^{\infty} A_{kl} - \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=N}^{\infty} A_{kl} \right| = 0.$$

(Rajzolgatva érthető lesz, hogy miért ez kell, illetve hogy tényleg átfogalmazhattunk így.) Az utóbbi alaknál viszont a következő becslést tehetjük:

$$\left| \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=N}^{\infty} A_{kl} - \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=N}^{\infty} A_{kl} \right| \leq \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=N}^{\infty} |A_{kl}| + \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=N}^{\infty} |A_{kl}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=N}^{\infty} |A_{kl}| + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=N}^{\infty} |A_{kl}|,$$

és az utóbbi két tag nullához tart, ha $N \rightarrow \infty$ (az abszolútértékek sorrendi összegeiben ők a „maradék”). Vagyis az A_{kl} -ek kétféle sorrendi összegei, $\sum_k (\sum_l A_{kl})$ és $\sum_l (\sum_k A_{kl})$ tényleg egyenlők. Hasonló gondolatmenettel a négyzet alakban haladó összegre:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} A_{kl} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{\infty} A_{kl},$$

mert a különbségük abszolútértékét fölülbecsülhetjük valamivel, ami nullához tart:

$$\left| \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{\infty} A_{kl} - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} A_{kl} \right| = \left| \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=N}^{\infty} A_{kl} \right| \leq \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=N}^{\infty} |A_{kl}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=N}^{\infty} |A_{kl}|,$$

utóbbi pedig tényleg $N \rightarrow \infty$ esetben nullához tart, mert ez a sorrendi abszolútérték-összeg „maradék”. Ezzel is kész vagyunk; a háromszögátlók mentén vett összegre is teljesen hasonlóan érvelhetünk. Itt az iménti „négyzetes” összeghez érdemes viszonyítani. A háromszögből a beleférő kis négyzetet „harapjuk ki”, és a maradék abszolútértékét egy lépésben igen durván felülbecsüljük, belevéve az összes hátrébbi tag abszolútértékét is, de így is jó lesz:

$$\left| \sum_{p=0}^{2N} \sum_{q=0}^p A_{p-q,q} - \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N A_{kl} \right| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{l=0}^N |A_{k,l}| + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=N+1}^{\infty} |A_{kl}|,$$

és a jobb oldal itt is nullához tart, mert ez az egész éppen a négyzetes alakban haladó abszolútértékes összeg „maradék”. Így **teljesen készen vagyunk**.

B.3. Függvénysorozatok, függvénysorok, folytonosság

Most $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ függvényekkel foglalkozunk (de sok megállapításunk általánosítható). Ha minden $n \in \mathbb{N}$ -re adott egy ilyen $f_n : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ függvény, akkor ezek sorozatát kézenfekvő *függvénysorozatnak* hívni. Az f_n függvénysorozathoz rendelt *függvénysor*, $\sum f_n$ is értelmes: ez az a függvénysorozat, amelynek n -edik tagja éppen az n -edik részletösszeg, azaz a $\sum_{k=0}^n f_k$ összegfüggvény.

• Az f_n függvényeket egy $x \in \mathbb{K}$ helyen kiértékelve (szám)sorozatot kapunk. Ez lehet konvergens vagy nem, attól függően is, hogy mi az x . Az f_n függvénysorozat **konvergenciahalmaza**: azon x -ek halmaza, amikre az $f_n(x)$ számsorozat konvergens. Továbbá azt mondjuk, hogy

$$\text{Az } f_n \text{ függvénysorozat } \mathbf{pontonként konvergens} \text{ a } H \subset \mathbb{K} \text{ halmazon, ha minden } x \in H \text{ pontban létezik a } \lim_{n \rightarrow \infty} [f_n(x)] \text{ határérték.} \quad (\text{B.21})$$

Más szóval: ha H része az f_n függvénysorozat konvergenciahalmazának. Ekkor értelmezhetünk úgy egy $f : H \rightarrow \mathbb{K}$ függvényt, hogy az $f(x)$ érték legyen az ottani határérték, $\lim_{n \rightarrow \infty} [f_n(x)]$. Az így összeállított f határérték-függvény az f_n sorozat *pontonkénti határértéke*.

Ha függvénysorokat mondunk, akkor itt is összegezhetőséget értünk a konvergencia alatt:

$$\begin{aligned} &\text{Azt mondjuk, hogy a } \sum f_n \text{ függvénysor} \\ &\text{— } \mathbf{pontonként konvergens} \text{ } H \subset \mathbb{K}\text{-n, ha minden } x \in H\text{-ra létezik } \sum_n f_n(x). \quad (\text{B.22}) \\ &\text{— } \mathbf{pontonként abszolút konvergens} \text{ a } H\text{-n, ha minden } x \in H\text{-ra létezik } \sum_n |f_n(x)|. \end{aligned}$$

• A pontonkénti konvergencia sokszor még nem elég jó tulajdonság: ugyan ezzel megköveteljük, hogy minden $x \in H$ -ra az $f_n(x)$ sorozat konvergens legyen, de még nem tudhatjuk, hogy különböző x -ekben ezek egymáshoz képest „milyen gyorsan” tartanak a határértékeikhez; lehet, hogy itt-ott nagyon „lemaradnak” a többihez képest. Ezt kiszűrő kell egy új definíció:

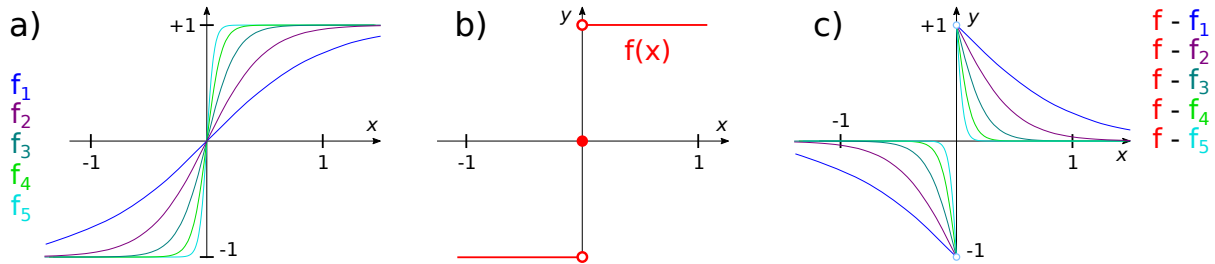
$$\begin{aligned} &\text{Az } f_n \text{ függvénysorozat a } H \text{ halmazon az} \\ &\mathbf{f\text{-hez egyenletesen konvergál}}, \text{ ha a „leg-} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in H} [d(f_n(x), f(x))] \right) = 0. \quad (\text{B.23}) \\ &\text{nagyobb eltérés” is nullához tart, azaz ha} \end{aligned}$$

Itt tényleg fontos a H halmaz megadása: ha egy H -n f_n egyenletesen konvergens, akkor a rész-halmazain is, de egy bővebb halmazon nem biztos. Fordítva: ha egy halmazon nincs egyenletes konvergencia, attól még egy szűkebb halmazon lehet.

Természetesen **függvénysoroknak** egy H halmazon való **egyenletes konvergenciája** alatt azt értjük, hogy a részletösszegek sorozata egyenletesen (és nemcsak pontonként) konvergens.

• Ha az f_n függvénysorozat egyenletesen konvergál f -hez H -n, akkor nyilván pontonként is. Ülepítésként nézzünk példát arra, hogy fordítva nem igaz ez. Legyen $H = \mathbb{R}$, és tekintsük a tangens hyperbolicus függvényt: $\text{th}(0) = 0$, és $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{th}(x) = \pm 1$. „Zsugorítgassuk ezt össze”, azaz legyen

$$f_n(x) = \text{th}(nx). \quad \text{Fix } x\text{-re } n \rightarrow \infty\text{-t véve kapjuk a határértékfüggvényt: } f(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ 1, & \text{ha } x > 0. \end{cases} \quad (\text{B.24})$$



55. ábra. Pontonként, de nem egyenletesen konvergens függvénysorozat: a.) a függvények, b.) a határérték, c.) az attól való eltérés, melynek \mathbb{R} -en vett szuprénuma minden n -re 1.

Itt nem egyenletes a konvergencia. Az iménti 55. ábra segít: a határértékfüggvénytől való eltérések maximuma (azaz: szuprénuma) minden n -re 1; nem tart nullához. Figyeljünk fel arra is, hogy itt a folytonos függvényekből (ld. lentebb) kapott pontonkénti határérték-függvény *nem folytonos!*

Ha viszont a H halmaz \mathbb{R} helyett bármilyen olyan *zárt intervallum*, ami nem tartalmazza a 0-t (emiat „legalább kicsit” messzebb van 0-tól), akkor ezen a H -n már egyenletes a konvergencia.

* * *

• Fontos *másik* fogalom **adott f függvény határértéke** egy x pontban. Ilyenkor f adott, és kérdés, hogy „hova tart” $f(y)$, ha a *függvény változójával*, y -nal x -hez tartunk. Az f határértéke x -ben a , ha az x -en kívül felvett függvényértékeknek a -tól való legnagyobb eltérése tetszőlegesen kicsivé tehető, ha x -hez elég közelre korlátozódunk. Pontosabban: adott $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ függvényre

$$\begin{aligned} \text{Ha } x \in \mathbb{K} \text{ a} & \quad \text{akkor azt mondjuk,} & \quad \text{ha minden } \varepsilon > 0\text{-hoz létezik olyan} \\ \text{Dom } f \text{ torló-} & \quad \text{hog az } a \in \mathbb{K} \text{ szám} & \quad r_\varepsilon > 0, \text{ hogy minden } y \in \text{Dom } f\text{-re,} \\ \text{dási pontja,} & \quad f \text{ határértéke } x\text{-ben,} & \quad \text{amire } 0 < d(y, x) < r_\varepsilon, \quad d(f(y), a) < \varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Fontos, hogy határozottan $>$ és $<$ van mindenhol. Így a szereplő y nem egyezhet meg x -szel, azaz (épp ez a lényeg sokszor!) nem kell, hogy f az x -et is (ha $x \in \text{Dom } f$) az a -hoz „elég közelre” képezze.⁷⁸ Az r_ε is nullánál *nagyobb* legyen, különben semmitmondó lenne a követelmény. Ezen felül azért jó, hogy x torlódási pont kell legyen,⁷⁹ hogy bármilyen kicsi r_ε -t „kipróbálva” legalábbis létezzenek olyan y -ok, amikre a követelmény vonatkozik. Alapvetően fontos az úgynevezett

Átviteli elv: legyen x a $\text{Dom } f$ torlódási pontja. Az $a \in \mathbb{K}$ pontosan akkor határértéke f -nek x -ben, ha minden olyan x_n sorozatra, amire $x_n \in \text{Dom } f \setminus \{x\}$, és $\lim_n x_n = x$, teljesül az is, hogy $\lim_n f(x_n) = a$. (B.26)

⁷⁸Például ha $f(0) = 2$, és $f(x) = 0$ egyébként, akkor ennek az f -nek a határértéke $x_0 = 0$ -ban nulla, de az értéke 2.
⁷⁹Az x egy H halmaz torlódási pontja, ha x bármilyen (kicsi) környezetében H -nak végtelen sok pontja van. Az nem szükséges itt, hogy $x \in H$ is legyen: például a $]0, 1[$ nyílt intervallumnak 0 is és 1 is torlódási pontjai.

Ez sorozatokra „ülteti át” a függvényhatárérték definícióját. A sorozatokra vonatkozó hasonló megállapítást tudva leszűrhetjük többek között azt is, hogy a függvényhatárérték fogalmát „jól” definiáltuk: ha f -nek x -ben van a **határértéke**, akkor az egyértelmű. **Jelölés:** $a = \lim_{y \rightarrow x} f(y)$.

A (B.26) átviteli elv bizonyítása próbára teszi a logikát. Ha a határértéke f -nek x -ben, akkor ha x_n mondott fajta, x -hez tartó sorozat, akkor adott $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan N_{r_ε} , amire ha $n > N_{r_\varepsilon}$, akkor $d(x_n, x) < r_\varepsilon$ (ahol r_ε a függvényhatárérték definíciójában követelt r_ε), így emiatt $d(f(x_n), a) < \varepsilon$. Összeolvasva: ilyen x_n sorozatra tényleg $\lim_n f(x_n) = a$.

Másrészt ha a nem f határértéke x -ben, akkor (figyeljünk a definíciónk tagadására!) van olyan $\varepsilon > 0$, hogy bármilyen $r > 0$ esetén is van olyan $x_r \in \text{Dom} f$, amire $0 < d(x_r, x) < r$, de $d(f(x_r), a) \geq \varepsilon$. Tekintsünk egy \mathbb{R}^+ (nem nulla!) értékű, de nullához tartó b_n sorozatot: az előzőek szerint (hivatkozva az úgynevezett *kiválasztási axiómára*) léteznek olyan x_n -ek, amikre $0 < d(x_n, x) < b_n$, de $d(f(x_n), a) \geq \varepsilon$. Arra jutottunk összerakva, hogy ezen x_n sorozatra $\lim_n x_n = x$, de $\lim_n f(x_n) \neq a$.

• Ha $x \in \text{Dom} f$, akkor x vagy torlódási pontja, vagy *izolált pontja* $\text{Dom} f$ -nek. Előbbi esetben azt mondjuk, hogy f *folytonos* x -ben, ha ott létezik **határértéke**, és az **egyenlő a függvényértékkel**: $\lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x)$. Izolált pontokban definíciószerűen folytonosnak mondjuk f -et. Összerakva:

Az f függvény **folytonos x -ben**, ha $x \in \text{Dom} f$, és bármilyen $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $r_\varepsilon > 0$, amivel minden olyan $y \in \text{Dom} f$ -re, amire $d(x, y) < r_\varepsilon$, igaz, hogy $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. (B.27)

Ez a (torlódási pontokban tehát a függvényhatárérték iménti definíciójára építő) pontos megfogalmazás egy matematikatörténeti mérföldkő; izolált pontokra is „működik”, azaz tényleg azt adja, hogy ilyenekben minden függvény folytonos.⁸⁰ Az átviteli elvet is átfogalmazhatjuk a folytonosságra: egyszerűbb lesz kicsit, mert nem kell körülményeskedni az izolált pontokkal:

f pontosan akkor folytonos x -ben, ha $x \in \text{Dom} f$, és minden $\text{Dom} f$ -beli, x -hez tartó x_n sorozatra $\lim_n f(x_n) = f(x)$. (B.28)

• Egy f függvényre azt mondjuk, hogy **folytonos egy halmazon**, ha annak minden pontjában folytonos, és hogy **folytonos**, ha $\text{Dom} f$ -en folytonos. „Érezhető” (illetve átviteli elvvel és sorozatokkal bizonyítható), hogy folytonos függvények összege, szorzata, hányadosa, kompozíciója is az, továbbá minden konstans függvény és az identitás-függvény („ $f(z) = z$ ”) is folytonos. Ezek miatt minden polinom és minden racionális törtfüggvény is folytonos.⁸¹

„Önmagába harapó kígyó” jellegű fontos **állítás: a távolság képzése folytonos** függvény, azaz ha $y \rightarrow x$, akkor rögzített a esetén $d(y, a) \rightarrow d(x, a)$. Bizonyítás: $d(x, a) + d(x, y) \geq d(y, a)$ is és $d(y, a) + d(x, y) \geq d(x, a)$ is igaz, emiatt mindenképpen $|d(x, a) - d(y, a)| \leq d(x, y)$. A folytonosság követelményében így adott ε -hoz választhatjuk r_ε -nak magát ε -t: olyan y -okra, amelyekre $d(y, x) < \varepsilon$, az előzőek alapján $d(y, a)$ és $d(x, a)$ különbsége tényleg ε -nál kisebb.

• Mi a helyzet egy olyan f függvény folytonosságával, amit egy f_n *függvényssorozat* határértéke

⁸⁰Izolált pontokban a tipikus semmitmondó igaz állításról esetéhez hasonló dologról van szó („minden ma élő mamutnak hét lába van”). Ha $x \in \text{Dom} f$ izolált pontja, azaz van olyan $r_x > 0$, hogy x -en kívül más $\text{Dom} f$ -beli pont nincs x -hez r_x -nél közelebb, akkor ha r_x -et vesszük r_ε -nak, akkor nem marad x körül egy másik pont sem, amire ellenőrizni kellene a követelményt, ami tehát ilyen módon tényleg teljesül „minden szóba jövő pontra” (de egy sincs).

⁸¹A folytonosság csak $\text{Dom} f$ -beli pontokra értelmes. Például az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény, melynek értelmezési tartománya az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmaz (azaz a nullán kívüli valós számok), folytonos függvény! Az $x=0$ -beli „rendellenes” viselkedését úgy kell megfogalmazni, hogy noha 0 folytonos, nem terjeszthető ki az egész \mathbb{R} -re folytonos függvényé.

(vagy függvénysor összege) határoz meg? Ha *egyenletes* a *konvergencia*, megnyugodhatunk:

Az $f_n : H \rightarrow \mathbb{K}$ függvénysorozat konvergáljon egyenletesen H -n f -hez.

- 1. Állítás:** ha egy x pontban mindegyik f_n -nek van határértéke,
 $a_n := \lim_{y \rightarrow x} f_n(y)$, akkor az f -nek is van határértéke (B.29)
 ott, és teljesül, amit várunk: $\lim_{y \rightarrow x} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

- 2. Állítás:** ha mindegyik f_n folytonos $x \in H$ -ban, akkor f is az.

Folytonos függvények sorozatának **egyenletes határértéke** tehát **folytonos**. Csak pontonkénti konvergenciával ez nem mindig igaz, mint a th függvényt összehúzó (B.24) példában láttuk. Az 1. állítás szavakban mit sütsz, kis szűcs: egyenletes konvergencia esetén a „határértékfüggvény függvényhatárértéke egyenlő a függvényhatárértékek határértékével”. Bizonyításokat ld. lentebb.

• Az egyenletes konvergencia ezért (és más miatt is) „jobb”, mint a csak pontonkénti. Jó volna, ha *meg is tudnánk állapítani*, hogy egy függvénysorozat egyenletesen konvergens-e. Első lépés a **Cauchy-kritérium átfogalmazása egyenletes konvergenciára**. Legyen $H \subset \mathbb{K}$ adott halmaz.

Állítás: az $f_n : H \rightarrow \mathbb{K}$ függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens a H -n, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan \mathcal{N}_ε küszöbindex, hogy minden $m, n > \mathcal{N}_\varepsilon$ -ra $\sup_{y \in H} d(f_n(y), f_m(y)) < \varepsilon$. (B.30)

Bizonyítás: ha f_n egyenletesen konvergál (f -hez), akkor minden $\varepsilon > 0$ -hoz vegyük \mathcal{N}_ε -nak azt a küszöbindexet, aminél nagyobb n -ekre már $\sup_{y \in H} d(f_n(y), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$: ha $m, n > \mathcal{N}_\varepsilon$, akkor a háromszög-egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy teljesül, ami az állításunkban szerepel:

$$\sup_{y \in H} d(f_n(y), f_m(y)) \leq \sup_{y \in H} d(f_n(y), f(y)) + \sup_{y \in H} d(f_m(y), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Fordítva: ha minden $\varepsilon > 0$ -ra van az állításban megkövetelt tulajdonságú \mathcal{N}_ε , akkor $m, n > \mathcal{N}_\varepsilon$ esetén minden $x \in H$ -ra is nyilván $d(f_m(x), f_n(x)) \leq \varepsilon$, azaz minden $x \in H$ -ra az $f_n(x)$ számsorozat Cauchy-féle, tehát \mathbb{K} teljessége miatt konvergens: definiálhatjuk az $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ határértékfüggvényt H -n. Adott n -re $d(f(x), f_n(x)) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(f_m(x), f_n(x))$ a távolságképzés folytonossága miatt: ha tehát adott $\varepsilon > 0$ -ra n nagyobb, mint \mathcal{N}_ε , akkor leszűrhetjük, hogy $d(f(x), f_n(x)) \leq \varepsilon$. Ez minden $x \in H$ -ra igaz, így $\sup_{x \in H} d(f(x), f_n(x)) \leq \varepsilon$ is igaz, ha $n > \mathcal{N}_\varepsilon$. Ez éppen azt jelenti, hogy az f_n -ek H -n egyenletesen is tartanak f -hez.

• Egy továbbfejlesztés a **függvénysorokra** vonatkozó alábbi kritérium; primitívnek tűnhet, de nagyon hasznos tud lenni. Legyenek f_n -ek a $H \subset \mathbb{K}$ halmazon értelmezettek és (abszolútértékben) *korlátosak* rajta. Ha a szuprémumok „jól viselkednek”, akkor a függvénysor is.

Weierstrass-kritérium: ha $c_n := \sup_{x \in H} |f_n(x)| < \infty$ igaz mindegyik f_n -re, és létezik $\sum_n c_n$, akkor a $\sum_n f_n$ függvénysor a H -n pontonként abszolút konvergens és egyenletesen is konvergens. (B.31)

Bizonyítani a sorösszegekre használt Cauchy-kritériummal, a szeletösszegeket a c_k -kkel felülbecsülve lehet. Bármilyen m, n indexekre (ahol $m < n$), és bármilyen $x \in H$ -ra

$$\left| \sum_{k=m}^n f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m}^n |f_k(x)| \leq \sum_{k=m}^n c_k \quad \Rightarrow \quad \sup_{x \in H} \left| \sum_{k=m}^n f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m}^n c_k.$$

A c_k -k összegezhető, így a részletösszegek sorozata Cauchy-féle: minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan \mathcal{N}_ε ,

hogya ha m és n nagyobb, mint \mathcal{N}_ε , akkor $\sum_{k=m}^n c_k < \varepsilon$. De ilyen n, m -ekre az első képlet második egyenlőtlensége miatt $\sum_{k=m}^n |f_k(x)|$ is ε -nál kisebb: ezért az $|f_n(x)|$ -ek részletösszeg-sorozata is Cauchy-féle, azaz konvergens is. Más szóval: az f_n sor pontonként abszolút konvergens. A második, szuprémumos egyenlőtlenségből pedig azt szűrhetjük le, hogy az f_n -ek részletösszeg-sorozata pont olyan, amire teljesül az, amit az egyenletes konvergencia Cauchy-kritériumában (az előző (B.30) állításban) megköveteltünk. Vagyis a függvénysor H -n egyenletesen is konvergens.

• *Kiegészítés:* a (B.29) állítások bizonyításai következnek; az első, majd rá építve a második.

A (B.29)-beli jelöléseket használjuk. Az f_n -ek egyenletes konvergenciája miatt az előbbi (B.30) állítás (az egyenletes konvergencia Cauchy-kritériuma) alapján minden $\varepsilon > 0$ -ra létezik \mathcal{N}_ε küszöb-index, hogy bármilyen ennél nagyobb $m, n > \mathcal{N}_\varepsilon$ indexekre igaz, hogy $\sup_{y \in H} [d(f_n(y), f_m(y))] < \varepsilon$. Mármost ha nézzük az $y \rightarrow x$ határátmenetet, akkor (mivel a_n és a_m az f_n és az f_m határértékei x -ben, és a távolságfüggvény folytonos) ilyen n, m indexekre $d(a_n, a_m) < \varepsilon$ is igaz. Vagyis az a_n -ek sorozata is Cauchy-féle, így \mathbb{K} teljessége miatt konvergens.

Legyen tehát a az a_n -ek (azaz a $\lim_{y \rightarrow x} f_n(y)$ értékek) sorozatának határértéke; meg kell még mutatni, hogy $\lim_{y \rightarrow x} f(y)$ létezik, és ezzel az a -val egyenlő (azaz hogy ha y elég közel van x -hez, akkor $f(y)$ elég közel lesz a -hoz). Mivel az f_n -ek f -hez egyenletesen konvergálnak, és a az a_n -ek határértéke, adott $\varepsilon > 0$ számhoz biztos létezik m index, amire két dolog is igaz: egyrészt az f_m -edik függvény (és mellesleg a későbbiek is) már *sehol* sem tér el $\frac{\varepsilon}{3}$ -nyinál jobban f -től: $d(f(y), f_m(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$ igaz minden $y \in H$ -ra, másrészt az a_m (és a későbbiek is) már $\frac{\varepsilon}{3}$ -nyinál kevésbé térnek el a -tól: $d(a_m, a) < \frac{\varepsilon}{3}$. Végül mivel erre a konkrét m -re is $a_m = \lim_{y \rightarrow x} f_m(y)$, azért van olyan $r_{\varepsilon/3} > 0$, hogy ha $d(y, x) < r_{\varepsilon/3}$, akkor már $d(f_m(y), a_m) < \frac{\varepsilon}{3}$. Mindezeket összerakva ha y olyan, hogy $d(y, x) < r_{\varepsilon/3}$, akkor $d(f(y), a) < \varepsilon$, mert a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$d(f(y), a) \leq d(f(y), f_m(y)) + d(f_m(y), a_m) + d(a_m, a) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Bebizonyítottuk tehát az 1. állítást: az a érték tényleg az f határértéke x -ben.

A 2. állításra rátérve: ha $x \in H$ a $\text{Dom} f$ izolált pontja, akkor itt f definíciószerűen folytonos, ha pedig x a $\text{Dom} f$ torlódási pontja, akkor is f folytonos x -ben, ugyanis

$$f(x) \stackrel{1.}{=} \lim_n f_n(x) \stackrel{2.}{=} \lim_n \left(\lim_{y \rightarrow x} f(y) \right) \stackrel{3.}{=} \lim_{y \rightarrow x} \left(\lim_n f_n(y) \right) \stackrel{4.}{=} \lim_{y \rightarrow x} f(y).$$

A lépések voltak: 1.) mert az f az f_n függvénysorozatnak pontonkénti határértéke is, 2.) mert minden f_n folytonos x -ben, 3.) az első állítást használjuk, 4.) megint: f pontonkénti határérték.

B.4. Kiegészítések hatványsorokhoz

• Az 1.4. szakaszban előkerült a **Cauchy-Hadamard-tétel**. Még egyszer: egy $\sum_n a_n(z-z_0)^n$ hatványsor R konvergenciasugara: $1/R = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$, és a hatványsor divergens, ha $|z-z_0| > R$, (pontonként) abszolút konvergens, ha $|z-z_0| < R$, és ha $r < R$, akkor a z_0 körüli r sugarú körlapon egyenletesen konvergens.

A **bizonyítás** azt a gondolatot követi, ahogy a tételt megideologizáltuk a geometriai sorral.

1. Ha $|z-z_0| > R$, akkor $|z-z_0| \cdot \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} > 1$. Az a_n -ek sorozata szempontjából $|z-z_0|$ állandó; ezt bevive tehát most $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} > 1$, így választhatunk egy $q \in \mathbb{R}$ számot 1 és $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|}$ között, amivel végtelen sok n -re lesz igaz (a \limsup alaptulajdonsága miatt), hogy $\sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} > q$, azaz hogy $|a_n(z-z_0)^n| > q^n$. Node q^n ilyenkor egyre nagyobb,

ahogy n növekszik (ugyebar $q > 1$), emiatt az $a_n(z-z_0)^n$ -ek *sorozata* $n \rightarrow \infty$ -re nem tarthat nul-lához, azaz nem is lehet összegezheto. A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ sor ilyen z -kre tehát divergens.

2. Ha $|z-z_0| < R$, akkor azt kapjuk, hogy $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} < 1$. „Befér” közéjük egy q ; legyen tehát q olyan, hogy $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} < q$, de $q < 1$. Előbbi miatt az $\sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|}$ sorozatnak csak véges sok tagja nagyobb q -nál, azaz véges sok n -et kivéve $|a_n(z-z_0)^n| < q^n$. A $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ végtelen összeg létezik (mivel $q < 1$), emiatt az $a_n(z-z_0)^n$ -ek abszolútértékes összege is létezik: a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ sor ilyen z -kre abszolút konvergens.
3. Az előbbiek szerint $r < R$ esetén létezik $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$. Node ha $|z-z_0| < r$ (azaz az r sugarú körlapon) $|a_n(z-z_0)^n| \leq |a_n| r^n$. Abból, hogy az utóbbiak összegezhetoek, a fentebbi (B.31) *Weierstrass-kritérium* alapján következik, hogy a függvénysor, azaz most $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, egyenletesen is konvergens a kijelölt halmazon, azaz az $r < R$ sugarú körlapon.

• Hatványsorok **differenciálhatóságát vizsgálva** az alapkérdés: differenciálható függvények sorozatának határértéke differenciálható-e, és ha igen, a határértékfüggvény deriváltja a deriváltak határértéke-e. *Általában nem.* A következő (sokszor teljesülő) feltételek viszont már elegendők.

Állítás: legyen $H \subset \mathbb{K}$ konvex, korlátos, nyílt halmaz, f_n -ek differenciálható $H \rightarrow \mathbb{K}$ függvények, melyekre az f'_n -k sorozata egyenletesen konvergens H -n, és legalább egy $z_0 \in H$ pontban $f_n(z_0)$ is konvergens. (B.32)
Ekkor az f_n -ek sorozata az egész H -n is egyenletesen is konvergens, a határértéke differenciálható, és teljesül, hogy $(\lim_n f_n)' = \lim_n f'_n$.

Ilyenkor tehát *megcserélhetjük a deriválást és a határértékképzést.* Figyelem: a deriváltak egyenletes konvergenciája kell (az f'_n -ekkel néha egyszerűbb is „bánni”; az f_n -ek konvergenciájáról keveset is elég tudni); az eredeti f_n -ek egyenletes konvergenciája következmény. A fordított irányú következtetés $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények között nem feltétlenül érvényes.⁸²

• E pontban a (B.32) állítást bizonyítjuk. Kelleni fog a differenciálás elméletében alapvető

általános középértéktétel: ha a $\phi: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ függvény folytonos a *zárt* $[z, w]$ szakaszon és differenciálható $]z, w[$ -n, akkor van olyan $u \in]z, w[$, amire

$$|\phi'(u)| \geq \frac{|\phi(w) - \phi(z)|}{|w - z|}. \quad (\text{B.33})$$

(Itt a \mathbb{C} -beli szakaszokat is értelemszerűen jelöltük.) Ezt az állítást is bebizonyítjuk alább; minde-nestremost egy kicsit gyengébb *következményét* fogjuk csak használni: ha a $\phi: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ függvény differenciálható $[z, w]$ -n, akkor $|\phi(w) - \phi(z)| \leq |w - z| \cdot \sup_{u \in [z, w]} |\phi'(u)|$.

Térjünk rá a (B.32) állításra. Az $f_n(z_0)$ sorozat konvergens, tehát Cauchy-féle, és az f'_n -ek sorozata egyenletesen konvergens, így rá érvényes a (B.30) Cauchy-kritérium. Minden $\varepsilon > 0$ -ra van tehát olyan \mathcal{N}'_ε küszöbindex, hogy mindkettő követelménye teljesül:

$$\text{minden } m, n > \mathcal{N}'_\varepsilon\text{-ra} \quad \sup_{u \in H} |f'_n(u) - f'_m(u)| \leq \frac{\varepsilon}{2D}, \quad \text{és} \quad |f_n(z_0) - f_m(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

ahol D a H halmaz átmérője (amire $0 < D < \infty$, mert H nyílt és korlátos). Kicsit csaltunk: „előre tudjuk”, hogy mi kell majd, ezért a „bármilyen kicsi” számokat itt rögtön „jól” választottuk.

⁸²Tudva (itt kicsit „előre”, hiszen a hatványsorok deriválhatósága kell ahhoz, hogy levezessük), hogy $\exp' = \exp$, kigondolhatjuk, hogy az $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{inx} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények differenciálhatók, egyenletes határértékük $f = 0$, azonban az f'_n függvénysorozat sehol sem konvergens: nem lehet szó itt tehát határérték és differenciálás cseréjéről.

Bármilyen $z \in H$ -ra $[z_0, z] \subset H$ (mert H konvex), és $|z - z_0| \leq D$. Alkalmazzuk a középértéktételt az (egész H -n, tehát minden $[z_0, z]$ szakaszon is differenciálható) $f_n - f_m$ függvényre:

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f_m(z) - (f_n(z_0) - f_m(z_0))| &\leq |z - z_0| \cdot \sup_{u \in [z, z_0]} |f'_n(u) - f'_m(u)| \Rightarrow \\ \Rightarrow \sup_{z \in H} |f_n(z) - f_m(z) - (f_n(z_0) - f_m(z_0))| &\leq D \cdot \sup_{u \in H} |f'_n(u) - f'_m(u)|, \end{aligned}$$

hiszen $|z - z_0|$ legfeljebb D lehet. Ezeket összetéve tehát ha $m, n > \mathcal{N}'_\varepsilon$, akkor

$$\begin{aligned} \sup_{z \in H} |f_n(z) - f_m(z)| &\leq |f_n(z_0) - f_m(z_0)| + \\ &+ \sup_{z \in H} |f_n(z) - f_m(z) - (f_n(z_0) - f_m(z_0))| \leq D \frac{\varepsilon}{2D} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Az f_n -ekre tehát teljesül az egyenletes konvergencia Cauchy-kritériumának, (B.30)-nak a feltétele: az f_n függvénysorozat egyenletesen konvergens H -n. Jelölje a határértékfüggvényt $f := \lim_n f_n$. Azt kell belátni, hogy ő tényleg differenciálható, és $f' = \lim_n f'_n$. Jelöljük ki egy $z \in H$ -t, és jelöljük $\phi_{z,n}(w)$ -vel illetve $\phi_z(w)$ -vel a $w \in H$, $w \neq z$ esetén értelmezett megfelelő különbségi hányadosokat:

$$\phi_{z,n}(w) := \frac{f_n(w) - f_n(z)}{w - z}, \quad \phi_z(w) := \frac{f(w) - f(z)}{w - z}.$$

Mivel f_n -ek differenciálhatók z -ben, a $\phi_{z,n}(w)$ függvények $w \rightarrow z$ függvényhatárértéke $f'_n(z)$. Továbbá a $\phi_{z,n}(w)$ függvények w -ben pontonként $\phi_z(w)$ -hez tartanak $n \rightarrow \infty$ -re. Belátjuk, hogy egyenletesen is. Minden $\varepsilon > 0$ -ra ha $m, n > \mathcal{N}'_\varepsilon$ (ahol utóbbi a fentebb bevezetett \mathcal{N}'_ε küszöbindex), akkor

$$\begin{aligned} \sup_{w \in H} |\phi_{z,n}(w) - \phi_{z,m}(w)| &= \sup_{w \in H} \frac{1}{|w - z|} |(f_n - f_m)(w) - (f_n - f_m)(z)| \leq \\ &\leq \sup_{w \in H} \left\{ \sup_{u \in [z, w]} |(f'_n - f'_m)(u)| \right\} = \sup_{u \in H} |f'_n(u) - f'_m(u)| \leq \frac{\varepsilon}{2D}, \end{aligned}$$

az első egyenlőtlenségben a középértéktételt, a két szuprérum összevonásánál pedig H konvexitását kihasználva. Arra jutottunk tehát, hogy teljesül a (B.30) Cauchy-kritérium feltétele, azaz igaz a mondott egyenletes konvergencia. Ezzel viszont kész, mert a fentebbi (B.29)-beli 1. állítás alapján

$$\text{létezik } f'(z) \equiv \lim_{w \rightarrow z} \phi_z(w), \quad \text{és} \quad f'(z) = \lim_{w \rightarrow z} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{z,n}(w) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{w \rightarrow z} \phi_{z,n}(w) \right] = \lim_n f'_n(z).$$

Mivel ez az egész minden $z \in H$ -ra igaz, készen vagyunk az állításunk bizonyításával.

• A **hatványsorok** (differenciálható) polinomok sorozatának határértékei; felvértézve a most bizonyított (B.32) állítással a következőket mondhatjuk. Láttuk a főszövegben az 1.4. szakaszban, hogy a tagonkénti deriváltakból álló hatványsornak és az eredetinek ugyanaz az R a konvergenciasugara. Egy adott $r < R$ sugarú nyílt körlap konvex, korlátos, nyílt, a derivált függvénysor egyenletesen konvergens rajta (a Cauchy-Hadamard-tétel erre is vonatkozik), és az eredeti hatványsor is az (bár ide annyi is elég lenne, hogy legalább egy pontban konvergens itt). Így a hatványsorösszeg differenciálható az r sugarú körlapon, és a deriváltja a derivált sor összege. Ez minden $r < R$ -re igaz, emiatt az egész R sugarú nyílt körlapon is. Összefoglalva **lehet tagonként deriválni**:

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{a konvergenciakörön belül} \\ f \text{ differenciálható, és itt} \end{array} \quad f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}. \quad (\text{B.34})$$

Ebből következik (ld. a főszöveg 1.4. szakaszát), hogy hatványsor a konvergenciakörén belül végtelemszer is differenciálható, és $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z = z_0)$.

• További kiegészítésként (néhány még alapvetőbb dologra hivatkozva) bebizonyítjuk a (B.33) általános középértéktételt, miszerint ha ϕ differenciálható $]z, w[$ -n és folytonos $[z, w]$ -n, akkor van olyan $u \in]z, w[$, hogy $|\phi(z) - \phi(w)| \leq |z - w| \cdot |\phi'(u)|$. Pongyolán: ϕ -nek legalább néhol elég gyorsan kell változnia a szakaszon, hogy az értéke „eljuthasson” $\phi(z)$ -ből $\phi(w)$ -be; most ezt kalapáljuk ki.

Először tegyük fel, hogy bármilyen $[z_1, w_1] \subset]z, w[$ rész-szakasz esetén $\frac{|\phi(w_1) - \phi(z_1)|}{|w_1 - z_1|} < \frac{|\phi(w) - \phi(z)|}{|w - z|}$. Ekkor a folytonosság miatt fix w_1 -re $z_1 \rightarrow z$ -t véve illetve fix z_1 -re $w_1 \rightarrow w$ -t véve is \leq igaz lenne:

$$\begin{aligned} |\phi(w) - \phi(z)| |z_1 - z| &\geq |\phi(z_1) - \phi(z)| |w - z|, & \text{továbbá az eredeti egyenlőtlenség:} \\ |\phi(w) - \phi(z)| |w - w_1| &\geq |\phi(w) - \phi(w_1)| |w - z|, & |\phi(w) - \phi(z)| |w_1 - z_1| > |\phi(w_1) - \phi(z_1)| |w - z|. \end{aligned}$$

Összeadva, és tudva, hogy z_1 és w_1 a szakaszon vannak, tehát $|w - w_1| + |w_1 - z_1| + |z_1 - z| = |w - z|$, az adódna, hogy $|\phi(w) - \phi(z)| > |\phi(w) - \phi(w_1)| + |\phi(w_1) - \phi(z_1)| + |\phi(z_1) - \phi(z)|$, ez viszont kizárt, mert a háromszög-egyenlőtlenség éppen az ellenkezőt biztosítja.

Tehát *van* olyan $[z_1, w_1] \subset]z, w[$, aminek végpontjaira $\frac{|\phi(w_1) - \phi(z_1)|}{|w_1 - z_1|} \geq \frac{|\phi(w) - \phi(z)|}{|w - z|}$. Felezzük el $[z_1, w_1]$ -et a v ponttal; ekkor $|\phi(w_1) - \phi(z_1)| \leq |\phi(w_1) - \phi(v)| + |\phi(v) - \phi(z_1)|$. A jobb oldalon emiatt legalább az egyik tag nem kisebb, mint $\frac{1}{2} |\phi(w_1) - \phi(z_1)|$. Amelyikre ez igaz, annak megfelelően z_1 -et és v -t, vagy v -t és w_1 -et nevezzük z_2 -nek és w_2 -nek (vagy ha mindkettő jó, válasszunk); ezzel

$$|\phi(w_2) - \phi(z_2)| \geq \frac{1}{2} |\phi(w_1) - \phi(z_1)| \quad \Rightarrow \quad \frac{|\phi(w_2) - \phi(z_2)|}{|w_2 - z_2|} \geq \frac{|\phi(w_1) - \phi(z_1)|}{|w_1 - z_1|} \geq \frac{|\phi(w) - \phi(z)|}{|w - z|}, \quad (\text{B.35})$$

ahol kihasználtuk, hogy $|w_2 - z_2| = \frac{1}{2} |w_1 - z_1|$. Ugyanígy okoskodva a $[z_2, w_2]$ szakasz valamelyik $([z_3, w_3]$ -nak nevezendő) zárt felére lesz igaz, hogy $\frac{|\phi(w_3) - \phi(z_3)|}{|w_3 - z_3|} \geq \frac{|\phi(w) - \phi(z)|}{|w - z|}$. Továbbmenve:

$$\begin{aligned} &\text{minden } k \in \mathbb{N}^+ \text{ természetes számhoz} \\ &\text{van olyan } [z_k, w_k] \text{ zárt szakasz, hogy} & \text{és} & \frac{|\phi(w_k) - \phi(z_k)|}{|w_k - z_k|} \geq \frac{|\phi(w) - \phi(z)|}{|w - z|}. & (\text{B.36}) \\ &[z_k, w_k] \subset [z_{k-1}, w_{k-1}], \quad |w_k - z_k| = \frac{|w_1 - z_1|}{2^k}, \end{aligned}$$

A nullához tartó hosszú, egymásba skatulyázott zárt $[z_k, w_k]$ -knak a beszédes nevű *Cantor-féle közösrész-tétel* alapján van egy közös pontjuk; legyen ez u : erre tehát $u \in]z, w[$. A ϕ differenciálható *itt is*: minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $r_\varepsilon > 0$, hogy $|\phi(v) - \phi(u) - \phi'(u) \cdot (v - u)| \leq \varepsilon |v - u|$ teljesül minden v -re, amire $|v - u| < r_\varepsilon$. A szakaszvégekre $\lim_{k \rightarrow \infty} |w_k - u| = \lim_{k \rightarrow \infty} |u - z_k| = 0$, ezért akár-mennyi is lett r_ε , van olyan z_k és w_k , amelyekre $|w_k - u| < r_\varepsilon$ és $|u - z_k| < r_\varepsilon$. Ezeket használva

$$\begin{aligned} |\phi(w_k) - \phi(z_k) - \phi'(u) \cdot (w_k - z_k)| &= |(\phi(w_k) - \phi(u) - \phi'(u) \cdot (w_k - u)) - (\phi(z_k) - \phi(u) - \phi'(u) \cdot (z_k - u))| \leq \\ &\leq |\phi(w_k) - \phi(u) - \phi'(u) \cdot (w_k - u)| + |\phi(z_k) - \phi(u) - \phi'(u) \cdot (z_k - u)| \leq \varepsilon |w_k - u| + \varepsilon |u - z_k| = \varepsilon |w_k - z_k|. \end{aligned}$$

A háromszög-egyenlőtlenséget tudva ebből $|\phi(w_k) - \phi(z_k)| \leq |\phi'(u) \cdot (w_k - z_k)| + \varepsilon |w_k - z_k|$ adódik, amiből pedig az, hogy $|\phi(w_k) - \phi(z_k)| \leq (|\phi'(u)| + \varepsilon) |w_k - z_k|$. Ebből osztással, majd kihasználva a fenti (B.36) becslést (az is és előzményei is ezért kellettek):

$$\frac{|\phi(w_k) - \phi(z_k)|}{|w_k - z_k|} \leq \varepsilon + |\phi'(u)| \quad \Rightarrow \quad \frac{|\phi(w) - \phi(z)|}{|w - z|} \leq \varepsilon + |\phi'(u)|.$$

A talált u -ra tehát minden $\varepsilon > 0$ esetén igaz ez: emiatt $\frac{|\phi(w) - \phi(z)|}{|w - z|} \leq |\phi'(u)|$. Készen vagyunk.⁸³

⁸³ *Megjegyzések:* 1.) Nem kell, hogy ϕ' folytonos legyen; nem is érvelhetnénk például úgy, hogy ϕ' a szakaszon felvenné a maximumát. 2.) Úgy tűnhet esetleg, hogy csak egy megfelelő u van a szakaszon, de akár minden felező lépésben mindkét szakaszfél teljesítheti a felülbecslést (és választhatunk). Általában sok jó u van; eme alapvető tétel *legalább egyet* állít. 3.) A bizonyítás általánosítható vektortereken értelmezett differenciálható függvényekre. 4.) Azért írtam le, mert ezt így *nem olvastam sehol*, és mert sokszor jóval gonyolultabban bizonyítják a középértéktételt.

C. függelék: Bizonyítások, kiegészítések

C.1. A Cauchy-tétel Goursat-féle bizonyítása

• A *Cauchy-tétel*: egyszeresen összefüggő nyílt halmazban differenciálható $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvénynek a halmazban futó zárt görbére vett körintegrálja nulla. Szinte minden későbbi eredmény ezen alapult. A 3.5. szakaszban látott bizonyításhoz fel kellett tenni a *folytonos* differenciálhatóságot; a következő úton haladva nincs szükség erre a plusz feltevésre. Az első lépés az úgynevezett

Goursat-lemma: ha $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ differenciálható egy a T zárt háromszöglapot tartalmazó nyílt halmazon, akkor

$$\oint_{\partial T} dz f(z) = 0. \quad (\text{C.1})$$

• T zárt: a határa, ∂T is beleértendő, és itt is pozitív irányítást veszünk. Az állításunk standard **bizonyítása** ahhoz hasonlóan alapszik a Cantor-féle közösrész-tételen, ahogy a középértéktétel egy oldallal ezelőtti bizonyítása. Daraboljuk fel T -t *négy* egybevágó háromszögre (ábra lentebb):

a szembe menő belső oldalak kiesnek, ezért

$$\oint_{\partial T} dz f(z) = \oint_{1.\text{darab}} dz f(z) + \oint_{2.\text{darab}} dz f(z) + \oint_{3.\text{darab}} dz f(z) + \oint_{4.\text{darab}} dz f(z),$$

\Rightarrow emiatt

$$\left| \oint_{\partial T} dz f(z) \right| \leq \left| \oint_{1.\text{darab}} dz f(z) \right| + \left| \oint_{2.\text{darab}} dz f(z) \right| + \left| \oint_{3.\text{darab}} dz f(z) \right| + \left| \oint_{4.\text{darab}} dz f(z) \right|.$$

Utóbbi miatt a négy darab integrál közül legalább az egyiknek az abszolútértéke biztos nem kisebb, mint az eredeti negyede. Jelöljük T_1 -gyel ezt a (vagy az egyik ilyen) háromszöget; erre tehát

$$\left| \oint_{\partial T} dz f(z) \right| \leq 4 \cdot \left| \oint_{\partial T_1} dz f(z) \right|.$$

Az előzőhöz hasonlóan a T_1 -et is négybe daraboljuk; megint lesz olyan (T_2 -vel jelölt) darab, amelyikre vett integrál abszolútértéke a T_1 -re vettének $1/4$ -énél nem kisebb. Ugyanígy tovább: minden $n \in \mathbb{N}^+$ -ra van olyan T_n háromszögdarab, amire a hasonló becslés igaz, vagyis

$$\left| \oint_{\partial T} dz f(z) \right| \leq 4 \cdot 4 \cdot \left| \oint_{\partial T_2} dz f(z) \right|, \quad \dots \quad \left| \oint_{\partial T} dz f(z) \right| \leq 4^n \cdot \left| \oint_{\partial T_n} dz f(z) \right|.$$

A T_n háromszögek egymásba skatulyázott, nullához tartó átmérőjű **zárt** halmazok: itt is a *Cantor-féle közösrész-tétel* miatt mondhatjuk, hogy van pontosan egy olyan z_0 , amely mindegyik T_n háromszögünknek eleme. Feltevésünk szerint f *itt is* differenciálható („akárhol is” van ez a z_0), emiatt

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \cdot f'(z_0) + \mathcal{O}(z - z_0), \quad \text{ahol} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\mathcal{O}(z - z_0)}{z - z_0} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \oint_{\partial T_n} dz f(z) = \oint_{\partial T_n} dz f(z_0) + \oint_{\partial T_n} dz f'(z_0) \cdot (z - z_0) + \oint_{\partial T_n} dz \mathcal{O}(z - z_0). \quad (\text{C.2})$$

Az $f(z_0)$ szám az $f(z_0) \cdot z$ függvénynek, az $f'(z_0) \cdot (z - z_0)$ pedig az $\frac{f'(z_0)}{2}(z - z_0)^2$ -nek a deriváltja: a Newton-Leibniz-formula miatt az első két tag nulla (derivált integrálja zárt görbére). Továbbá mivel $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\mathcal{O}(z - z_0)}{z - z_0} = 0$, ha $\varepsilon > 0$ akármilyen szám, akkor van a z_0 -nak olyan környezete, hogy ha z ebben van, akkor $|\mathcal{O}(z - z_0)| \leq \varepsilon \cdot |z - z_0|$. Elég nagy n esetén a T_n háromszöglap (és az összes későbbi is) benne van ebben a környezetben. Ha az eredeti T háromszög átmérője d és területe ℓ , akkor a T_n -é $d/2^n$ illetve $\ell/2^n$. Előbbi miatt a T_n -ben lévő z -kre $|z - z_0| \leq d/2^n$. Ezeket összetéve

az ilyen T_n -re az iménti (C.2) utolsó tagjában a szokásos integrálbecslés azt adja, hogy

$$\left| \oint_{\partial T_n} dz \mathcal{O}(z-z_0) \right| \leq \frac{\ell}{2^n} \cdot \max_{z \in \partial T_n} |\mathcal{O}(z-z_0)| \leq \frac{\ell}{2^n} \cdot \varepsilon \cdot \max_{z \in \partial T_n} |z-z_0| \leq \frac{\ell}{2^n} \cdot \varepsilon \cdot \frac{d}{2^n} = \varepsilon \cdot \frac{\ell \cdot d}{4^n}.$$

Ez tehát az egyetlen nem eltűnő tag f -nek ∂T_n -re vett integráljából; visszatéve ezt az eredeti T -re vett integrálra vonatkozó becslésbe a 4^n pont kiesik, így azt kapjuk, hogy

$$\left| \oint_{\partial T} dz f(z) \right| \leq \varepsilon \cdot \ell d. \quad \Rightarrow \quad \text{mivel } \varepsilon \text{ bármilyen kicsi lehet} \quad \Rightarrow \quad \oint_{\partial T} dz f(z) = 0. \quad \text{Kész.}$$

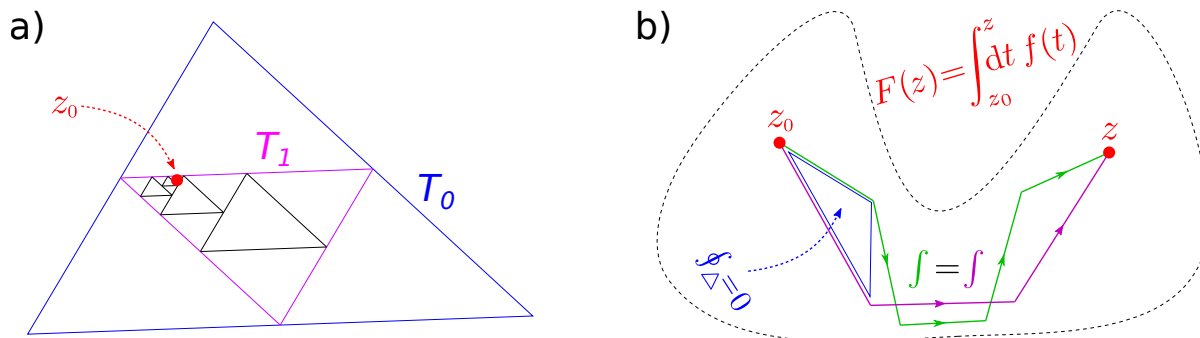
• Az akármilyen görbékre vonatkozó Cauchy-tételhez *töröttvonalakkal* juthatunk el. Ha $\text{Dom} f$ egyszeresen összefüggő nyílt, akkor adott z_0 és z esetén *összeköthetjük* őket $\text{Dom} f$ -beli töröttvonalal, másrészt bármely két ilyen átdarabolhatunk egymásba úgy, hogy a különbség-darabok olyan háromszögvonalak, amelyek teljes lapjukkal együtt $\text{Dom} f$ belsejében vannak. Ha még f differenciálható is, akkor ezekre már tudjuk a Goursat-lemmából, hogy f körintegrálja nulla rájuk: a mondott feltételek mellett emiatt bármely két (z_0 -tól z -ig futó) töröttvonalra ugyanannyi f integrálja. A Newton-Leibniz-formulánál látottat töröttvonalakra megszorítva tehát

$$\begin{array}{ll} \text{fixáljuk egy } z_0 \in \text{Dom} f \text{ pontot, és} & F(z) := \int_{\gamma(z)} dt f(t); \\ \text{definiáljuk így az } F(z) \text{ függvényt:} & \text{ahol } \gamma(z) \text{ töröttvonal} \\ & z_0\text{-tól } z\text{-ig } \text{Dom} f\text{-ben.} \end{array}$$

Az imént mondottak miatt ez az $F(z)$ jól definiált, azaz tényleg akármilyen töröttvonalat megengedhetünk (*rájuk* már tudjuk az integrál útfüggetlenségét). A z_0 -t más z_1 -be is tehetjük: a különbség csak a z_0 -tól z_1 -ig (akármilyen töröttvonalon) vett integrál konstans értéke F -ben.

Ennek az $F(z)$ -nek valóban $f(z)$ a deriváltja; érdemes ezt alaposan végiggondolni. Adott z és $z+\Delta z$ esetén a $z+\Delta z$ -be menő töröttvonal lehet az, amit a z -be menőhöz még Δz -t hozzá-téve kapunk: így $F(z+\Delta z) = F(z) + \int_z^{z+\Delta z} dt f(t)$. Az f folytonos z -ben (mert differenciálható): minden $\varepsilon > 0$ -hoz van z -nek olyan kis környezete, amin belüli t -kre $|f(t) - f(z)| < \varepsilon$. Erre gondolva írhatjuk, hogy $F(z+\Delta z) - F(z) = \int_z^{z+\Delta z} dt f(z) + \int_z^{z+\Delta z} dt (f(t) - f(z))$. Az első tag a konstans $f(z)$ integrálja, értéke $\Delta z \cdot f(z)$. Ha pedig Δz olyan kicsi, hogy ennyivel odébb is már a mondott környezetben maradunk, akkor a második tagot abszolútértékben felülbecsülhetjük $|\Delta z| \cdot \varepsilon$ -nal. Azaz: ha Δz elég kicsi, akkor minden $\varepsilon > 0$ esetén $F(z+\Delta z) - F(z) - \Delta z \cdot f(z)$ -t a $|\Delta z| \cdot \varepsilon$ -nal tudjuk felülbecsülni, így F tényleg differenciálható z -ben, és deriváltja $f(z)$.

Ezek miatt viszont mivel $f = F'$, a Newton-Leibniz-formula miatt f -nek bármilyen a halmunkban futó zárt görbére (nemcsak töröttvonalakra) nulla az integrálja. Készen vagyunk.



56. ábra. a.) a Goursat-lemma bizonyításához b.) töröttvonalakra a Goursat-lemmából tudhatjuk az integrál útfüggetlenségét, amivel definiálhatjuk F -et úgy, hogy $F' = f$ legyen.

C.2. Kiegészítések a Cauchy-formulák és a Laurent-tétel bizonyításához

• Végtelen összeget nem mindig integrálhatunk tagonként. A 4.2. szakasz végén a komplex differenciálható függvények analitikusságának bizonyításánál tisztázatlanul maradt, hogy az ottani 29. ábrán láthatóan a z_0 ponttól megfelelően messze futtatott γ integrációs út esetén a geometriai sorba fejtett integrandust tényleg integrálhatjuk tagonként a (4.15) képlet szerint. Pontosan ugyanez merül fel a Laurent-sor levezetésekor a (4.29) képlet első tagjában. Be kellene tehát látni, hogy ha γ olyan, hogy minden $t \in \gamma$ esetén $|t - z_0| > |z - z_0|$, akkor

$$\oint_{\gamma} \frac{dt}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} f(t) \frac{(z - z_0)^n}{(t - z_0)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{\gamma} \frac{dt}{2\pi i} f(t) \frac{(z - z_0)^n}{(t - z_0)^{n+1}}.$$

A második alakból az integrálok alól $z - z_0$ hatványait kiemelve jutunk végül hatványsorra (vagy a Laurent-sor nemnegatív tagjaira) és az együtthatókat megadó integrálképletekre.

Ha belátjuk, hogy a sorösszegzés itt a t változóban *egyenletesen konvergens*, akkor a 3.2. szakaszban látott *Lebesgue-tétel* miatt, mivel itt véges szakaszra vett integrálok vannak, igaz lesz, hogy az integrandusok határértékének (azaz itt az összegzésre nézve: végtelen összegének) integrálja tényleg egyenlő lesz a határérték (azaz: a sorösszeg) integráljával, így készen is lennénk.⁸⁴ A B.3. függelékben tárgyalt *Weierstrass-kritérium* szerint ha az integrandusok t -ben vett *szupréмумai* abszolútértékben összegezhetőek, akkor egyenletes a konvergencia. Mármost a γ görbe és a $|z - z_0|$ sugarú körvonal korlátos zárt halmazok: egyrészt $|f(t)|$ mint folytonos függvény a γ -n felveszi a maximumát; ennek jele legyen most $M := \max_{t \in \gamma} |f(t)|$. Másrészt a síkon diszjunkt *korlátos zárt* halmazok távolsága nullánál *nagyobb*.⁸⁵ Emiatt „be lehet szorítani” köztük r_1 és r_2 sugarakat: ezekre tehát minden t -re igaz, hogy $|t - z_0| > r_1 > r_2 > |z - z_0|$. Emiatt tehát $\sup_{t \in \gamma} \frac{1}{|t - z_0|} \leq \frac{1}{r_1}$, amivel úgy alakíthatjuk az abszolútértékek szupréмумainak összegét, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{t \in \gamma} \left| f(t) \frac{(z - z_0)^n}{(t - z_0)^{n+1}} \right| &= \sum_{n=0}^{\infty} M \cdot \sup_{t \in \gamma} \frac{|z - z_0|^n}{|t - z_0|^{n+1}} \leq \\ &\leq M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z - z_0|^n}{r_1^{n+1}} < \frac{M}{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_2^n}{r_1^n} = \frac{M}{r_2 - r_1} < \infty, \end{aligned}$$

hiszen a legutolsó geometriai sor összegezhető volt. Teljesül tehát a Weierstrass-kritérium feltétele, így az eredeti integrandusok sorösszege tényleg egyenletesen konvergens, így a Lebesgue-tétel alapján tényleg felcserélhetjük az összegzést és az integrálást. *Készen vagyunk!*

A Laurent-tételt levezető (4.29) képlet második tagjában pedig „fordítva”: be kell látni, hogy

$$\oint_{\gamma'} \frac{dt'}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} f(t') \frac{(t' - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{\gamma'} \frac{dt'}{2\pi i} f(t') \frac{(t' - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}},$$

ha γ' olyan, hogy minden $t' \in \gamma'$ esetén $|t' - z_0| < |z - z_0|$. Itt a γ' és a $|z - z_0|$ sugarú kör közé a $|t' - z_0| < r_2 < r_1 < |z - z_0|$ módon szúrjuk be r_1 -et és r_2 -t, amikkel a Weierstrass-kritérium feltételét a látott módon ellenőrizve belátjuk a t' -ben vett egyenletes konvergenciát, majd a Lebesgue-tétel tudva az integrálás és az összegzés kicserélhetőségét.

⁸⁴Mivel komplex integrált (paraméterezve) átírhatunk valós integrálra, teljes lelki nyugalommal használhatjuk komplex vonalintegrálokra is a (korábban csak valós integrálokra megtárgyalt) Lebesgue-tételt és következményeit.

⁸⁵Kihívás: mutassunk a síkon két diszjunkt korlátos nyílt, illetve két diszjunkt zárt nem korlátos halmazt, amelyek távolsága nulla, azaz nincs olyan pozitív szám, hogy semelyik pontjaik sincsenek ennél közelebb egymáshoz!

• A Laurent-sor létezését tehát (a 4.4. szakaszban látottakkal együtt) teljesen bebizonyítottuk; a tétel néhány részlete van csak hátra. A sor *abszolút* konvergenciájához be kell látni, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(z-z_0)^n| < \infty, \quad \text{illetve} \quad \sum_{n=-\infty}^0 |c_n(z-z_0)^n| < \infty, \quad \text{ahol} \quad c_n = \oint_{(z_0+)} \frac{dt}{2\pi i} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}.$$

A c_n -ek értéke szempontjából mindegy, hogy hol fut a c_n -ek kifejezésében a z_0 -t megkerülő integrációs út, azonban azt bizonyos módon megválasztva az *integrálbecslés* hatékonyabb lehet, mint másképp. Vegyünk γ útnak egy z_0 körüli R sugarú körvonalat: ezen $|t-z_0|=R$, amiből

$$|c_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{\gamma} dt \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \max_{t \in \gamma} |f(t)| \cdot \frac{1}{R^{n+1}} \cdot 2\pi R \Rightarrow |c_n| \leq \frac{\max_{t \in \gamma} |f(t)|}{R^n}.$$

Ez így minden $n \in \mathbb{Z}$ index esetén igaz. Az $n \geq 0$ esetben rögzítsük R -et úgy, hogy $R > |z-z_0|$ legyen: ezt megtehetjük, mert biztos, hogy f még egy $|z-z_0|$ -nál (akárcsak kicsivel is, de) nagyobb sugarú z_0 középpontú kipontozott körlapon is differenciálható. Ebből arra jutunk (betéve a $|c_n|$ -ek előbb kapott becslését), hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(z-z_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot |z-z_0|^n \leq \max_{t \in \gamma} |f(t)| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z-z_0|}{R} \right)^n = \frac{\max_{t \in \gamma} |f(t)|}{1 - \frac{|z-z_0|}{R}} < \infty,$$

hiszen itt $\frac{|z-z_0|}{R} < 1$ volt igaz. A sor negatív részéhez pedig az integrációs γ' körvonal sugara legyen olyan R' , amire $R' < |z-z_0|$; ezt is megtehetjük. Ezzel (az összegzőindexet most úgy jelölve, hogy $-n$ fusson végig, és n nullától ∞ -ig menjen, és tudva, hogy most $\frac{R'}{|z-z_0|} < 1$, valamint ismét a $|c_{-n}|$ -ek fentebbi becslését használva):

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_{-n}(z-z_0)^{-n}| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_{-n}| \cdot |z-z_0|^{-n} \leq \max_{t' \in \gamma'} |f(t')| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R'}{|z-z_0|} \right)^n = \frac{\max_{t' \in \gamma'} |f(t')|}{1 - \frac{R'}{|z-z_0|}} < \infty.$$

Kész: a sor negatív és pozitív részéről is (az együtthatóbecslés alapján tudottan konvergens geometriai sorral felülbecsülve) beláttuk, hogy a szóba jövő z -k esetén abszolút konvergens is.

• A Laurent-sor z -ben való egyenletes konvergenciája egy most \mathcal{G} -vel jelölt, r_1 belső és r_2 külső sugarú körgyűrűn (itt $0 < r_1 < r_2 < R$, ahol R olyan sugár, hogy f az ilyen sugarú körlapon belül még mindenhol differenciálható) a Weierstrass-kritériumból következik:

$$\text{mivel } r_2 \text{ a külső sugár, } n \geq 0\text{-ra} \quad \sup_{z \in \mathcal{G}} |c_n||z-z_0|^n \leq |c_n|r_2^n,$$

$$\text{és mivel } r_1 \text{ a belső sugár, } n \geq 0\text{-ra} \quad \sup_{z \in \mathcal{G}} |c_{-n}||z-z_0|^{-n} \leq |c_{-n}|r_1^{-n},$$

és éppen a már tudott abszolút konvergencia alapján tudhatjuk, hogy a felülről becsülő mennyiségek összegezhetőek a pozitív illetve a negatív n -eken való összegzésben. Teljesül tehát a Weierstrass-kritérium feltétele: egyenletes a konvergencia \mathcal{G} -n. (Persze ugye r_1 -et akármilyen kicsi nem nullának, r_2 -t pedig akármilyen nagy, de a lehetséges legnagyobb R -nél kisebb értékűnek vehetjük.)

Tudva a Laurent-sor ilyen egyenletes konvergenciáját, ha a sort (akár $(z-z_0)^m$ -mel megszorozva, minden $m \in \mathbb{Z}$ esetére) integráljuk egy a z_0 -t megkerülő korlátos zárt görbén, akkor a Lebesgue-tétel következménye alapján tényleg integrálhatunk tagonként. Vagyis jogos ez a lépés, amikor az együtthatók egyértelműségét ilyen „ráintegrálással” láttuk be; ld. a (4.30) egyenletet.

C.3. A „varázsformula” bizonyítása és további részletei

• A 2.4. szakaszban láttuk a (2.23) „varázsformulát”, amely megadja az $f(z)$ komplex differenciálható függvényt, ha ismert annak $U(x, y)$ valós része. Felidézünk: ha az $U(x, y)$ függvény (mindjárt pontosítva) „elég sima”, és (x_0, y_0) -ban értelmes, akkor a $z_0 \equiv x_0 + iy_0$ jelöléssel

$$f(x+iy) = U(x, y) + iV(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad f(z) = 2 \cdot U\left(x = \frac{z+z_0^*}{2}, y = \frac{z-z_0^*}{2i}\right) - U(x_0, y_0). \quad (\text{C.3})$$

Rájönni erre érdekes szellemi kaland lehetett; mi most csak *belátjuk* (és helyrerázzuk) ezt: első lépésként konkrétan leellenőrizzük z_0 középpontú *monomokra*, tehát az ilyen függvényekre: $c_0, c_1(z-z_0), c_2(z-z_0)^2$, stb., ahol most $c_0 \equiv a_0 + ib_0, c_1 \equiv a_1 + ib_1, c_2 \equiv a_2 + ib_2$, azaz akármelyikük egy-egy adott komplex szám. Jelöljük ideiglenesen \tilde{f} -vel azt, amit a bizonyítandó (C.3) varázsformula állít elő a legyártott U -ból. *Ellenőrizzük le $z=x+iy-t, z_0=x_0+iy_0-t, c_n=a_n+ib_n$ -et beírva, hogy*

$$\begin{aligned} f_0(z) = c_0 & \Rightarrow U_0(x, y) = a_0 \\ & \Rightarrow \tilde{f}_0(z) = \dots = a_0. \\ f_1(z) = c_1(z-z_0) & \Rightarrow U_1(x, y) = a_1(x-x_0) - b_1(y-y_0) \\ & \Rightarrow \tilde{f}_1(z) = \dots = (a_1+ib_1)(z-z_0). \\ f_2(z) = c_2(z-z_0)^2 & \Rightarrow U_2(x, y) = a_2(x-x_0)^2 - a_2(y-y_0)^2 - 2b_2(x-x_0)(y-y_0) \\ & \Rightarrow \tilde{f}_2(z) = \dots = (a_2+ib_2)(z-z_0)^2. \end{aligned}$$

• Úgy tűnik, hogy működik (ugye ellenőriztük?): az \tilde{f} -ok ugyanazok lettek, mint az f -ek (az f_0 -beli plusz képzetes állandótól eltekintve). Általános $n > 0$ kitevőre a binomiális tételt használhatjuk; rögtön a páros és páratlan tagokat különvéve írjuk fel, mert ez kell a valós rész megkereséséhez:

$$\begin{aligned} f_n(z) = c_n(z-z_0)^n \Rightarrow f_n(x+iy) &= (a_n+ib_n) \sum_p \binom{n}{2p} (x-x_0)^{n-2p} i^{2p} (y-y_0)^{2p} + \\ &+ (a_n+ib_n) \sum_p \binom{n}{2p+1} (x-x_0)^{n-2p-1} i^{2p+1} (y-y_0)^{2p+1}. \end{aligned}$$

Az első szummás összeg valós, a második képzetes, mert $i^{2p} = (-1)^p$; ebből arra jutunk, hogy

$$\begin{aligned} U_n(x, y) &= a_n \sum_p \binom{n}{2p} (x-x_0)^{n-2p} (-1)^p (y-y_0)^{2p} - \\ &- b_n \sum_p \binom{n}{2p+1} (x-x_0)^{n-2p-1} (-1)^p (y-y_0)^{2p+1}. \end{aligned}$$

Most visszahelyettesíthetünk úgy, ahogy a varázsformulában kell. Sejtve már, hogy működik a dolog, kényelmesen alakíthatunk visszafelé: például újra beírhatjuk, hogy $(-1)^p = i^{2p}$, illetve észrevehetjük, hogy $\frac{z+z_0^*}{2} - x_0 = \frac{z-z_0}{2}$ és hogy $\frac{z-z_0^*}{2i} - y_0 = \frac{z-z_0}{2i}$. Ezeket rögtön beírva és egy i -t b_n mellé besúrva, és kihasználva, hogy $U_n(x_0, y_0) = 0$, ha (mint feltettük) $n > 0$, arra jutunk, hogy

$$\begin{aligned} \tilde{f}_n(z) &= 2U_n\left(x = \frac{z+z_0^*}{2}, y = \frac{z-z_0^*}{2i}\right) - U_n(x_0, y_0) = 2a_n \sum_p \binom{n}{2p} i^{2p} \left(\frac{z-z_0}{2}\right)^{n-2p} \left(\frac{z-z_0}{2i}\right)^{2p} + \\ &+ 2ib_n \sum_p \binom{n}{2p+1} i^{2p+1} \left(\frac{z-z_0}{2}\right)^{n-2p-1} \left(\frac{z-z_0}{2i}\right)^{2p+1} = \end{aligned}$$

$$= 2 \left(\frac{z-z_0}{2} \right)^n \cdot \left[\underbrace{a_n \sum_p \binom{n}{2p}}_{=2^{n-1}} + i b_n \underbrace{\sum_p \binom{n}{2p+1}}_{=2^{n-1}} \right] = (a_n + i b_n) (z-z_0)^n.$$

A binomiális együtthatók összegeit úgy kezelhettük, hogy tudjuk, hogy $(1-1)^n=0$, és $(1+1)^n=2^n$: ezeket a binomiális tétellel kiírva, majd összeadva illetve kivonva (és felezve) valóban csak a párosadik illetve a páratlanadik együtthatók összegei maradnak, így mindkettőre $\frac{1}{2}2^n$ adódik.

• $c_n(z-z_0)^n$ alakú **monomokra** tehát működik a formula. *Tudjuk* viszont, hogy ha egy f függvény egy z_0 környékén differenciálható, akkor hatványsorba is fejthető. Az iméntiek miatt a hatványsor bármelyik részletösszegére $\tilde{f}(z)=f(z)$, így a konvergenciakörön belül a **végtelen sorösszegre is igaz ez: készen vagyunk**. Az is tisztázódott, hogy olyan $U(x, y)$ függvények jönnek szóba, amikre $\Delta U = \partial_x^2 U + \partial_y^2 U = 0$, továbbá *analitikusak*, azaz x_0, y_0 körül „dupla hatványsorba” fejthetők:

$$U(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{n,m} (x-x_0)^n (y-y_0)^m, \quad \text{amellett, hogy } \Delta U = 0. \quad (\text{C.4})$$

Némi szenvedéssel belátható, hogy erre a sorra $\Delta U=0$ -t kikötve pont olyan feltételeket kapunk az egyelőre tetszőleges $c_{n,m}$ -ekre, amik miatt U tényleg a fent $U_n(x, y)$ -nel jelölt függvényeknek (a $c_n(z-z_0)^n$ monomok valós részeinek) sorösszege, azaz egy komplex hatványsor valós része lesz.

• $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hatványfüggvényt, így ilyenek sorösszegét (hatványsort) kiterjeszthetünk $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényre: ilyenkor egyértelmű, hogy mit jelent, hogy U változói helyébe komplex változókat írunk. Más kérdés, hogy az $U(x, y)$ noha hatványsorba *fejthető* (x_0, y_0) körül, mégis lehet, hogy nem hatványsor *alakjában* adott, hanem olyan képlettel, ami az (x_0, y_0) körüli hatványsor konvergenciakörén kívül is értelmes (azaz analitikusan elfolytatja a hatványsorösszeget.) Ilyen függvényre lehet, hogy (például az elemi függvényeknek a hatványsoraikon „túllépő” átalakításaival) a varázssformula olyan eredményt ad, ami szintén nem z_0 körüli hatványsor, hanem $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvények között is analitikusan elfolytatja azt. Ilyenkor igazán „varázslatos” a dolog; ez történt a 2.4. szakaszban a $\frac{\cos z}{\sin z}$ visszafejtésakor is a (2.24) egyenlet környékén. Nem tűnt fel, hogy az akármilyen z_0 körüli hatványsorokkal dolgozunk, mert minden függvény rögtön „elfolytatott” formában szerepelt.

Nem analitikus $U(x, y)$ függvények nyilván szóba sem jönnek: vagy nyilvánvalóan értelmetlen bennük x illetve y helyébe komplex számokat írni, vagy „csak” nem terjeszthetők ki értelmesen $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ -ről $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ -re, de eleve nem is lehetnek semmilyen differenciálható $f(z)$ valós részei.

C.4. Paraméteres integrál differenciálhatósága

• Legyen az $f(t, z)$ kétváltozós függvény olyan, hogy z lehet valós vagy komplex, és f értelmes z -ben legalábbis egy konvex nyílt $U \subset \mathbb{R}$ vagy $U \subset \mathbb{C}$ halmazon, t pedig valós, és f értelmes minden $z \in U$ esetén t -ben legalábbis egy $t \in [a, b]$ szakaszon majdnem mindenütt⁸⁶ (de a, b lehet $\pm\infty$ is). Ha az $f(t, z)$ -re teljesül, hogy

- 1.) majdnem minden $t \in [a, b]$ -nél differenciálható z szerint U -n,
- 2.) integrálható a t változó szerint $[a, b]$ -re minden $z \in U$ esetén,

akkor felmerül a kérdés, hogy az $F(z) := \int_a^b dt f(t, z)$ módon értelmezett függvény (a paraméteres integrál eredménye) differenciálható-e, és igaz-e, hogy $F'(z) = \int_a^b dt \partial_z f(t, z)$.

⁸⁶„Majdnem minden t -re” = „legfeljebb egy nulla mértékű halmazt kivéve” (ami ugye nem számít az integrálásban).

• Attól, hogy $f(t, z)$ integrálható t -ben, még lehet, hogy $\partial_z f(t, z)$ nem az.⁸⁷ Kiderül, hogy csak $\partial_z f(t, z)$ integrálhatóságát kikötni nem elég, de egy jól használható plusz feltétel visszavezeti a kérdést a *Lebesgue-tételre* (ld. 3.2. szakaszt). Nevezetesen tegyük fel, hogy teljesül a következő:

3.) Van olyan $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, ami $[a, b]$ -re integrálható, és majdnem minden $t \in [a, b]$ és minden $z \in U$ esetén $|\partial_z f(t, z)| \leq g(t)$.

Szavakban: $\partial_z f(t, z)$ -nek létezzon minden $z \in U$ -ra vonatkozó közös $g(t)$ integrálható majoránsa. (Mindazonáltal ha az $F(z)$ eredmény-függvény egy adott z_0 -beli differenciálhatóságát vizsgáljuk, az U -t akármilyen szűk nyílt halmazra vehetjük z_0 körül.) A gyakorlati esetekben „általában” teljesül ez a 3. feltétel, ha $\partial_z f(t, z)$ integrálható, de a pontosan megfogalmazott tétel a következő:

Állítás: ha $f(t, z)$ -re fennállnak a mondott 1., 2., 3. feltételek, akkor a $\partial_z f(t, z)$ integrálható t -ben a vizsgált $[a, b]$ -re minden $z \in U$ esetén, a paraméteres integrál eredménye, $F(z) \equiv \int_a^b dt f(t, z)$ differenciálható U -n, továbbá „bedifferenciálhatunk az integrálba”:

$$F'(z) = \frac{d}{dz} \int_a^b dt f(t, z) = \int_a^b dt \frac{\partial}{\partial z} f(t, z). \quad (\text{C.5})$$

A tétel értelemszerűen átfogalmazva általánosítható minden ismert integráltípusra, és \mathbb{R} vagy \mathbb{C} helyett véges dimenziós vektortérbeli deriválás-műveletekre (például gradiensre, divergenciára).

• A tétel alkalmazására jó példa a gamma-függvény, $\Gamma(z)$ esete (ezt ld. a 6.1. szakaszban); vagy megnézhetjük az 5.1. szakasz végén látott egyszerű integrálokat is. Ezek közül az első:

A következő integrál eredménye állítólag a $\int_0^\infty dt e^{-zt}$.
 z szerint differenciálható, ahol csak létezik:

A mostani beazonosítás a következő:

$$\begin{aligned} f(t, z) = e^{-zt} &\Rightarrow |f(t, z)| = e^{-\Re(z) \cdot t}, \\ \partial_z f(t, z) = -te^{-zt} &\Rightarrow |\partial_z f(t, z)| = te^{-\Re(z) \cdot t}. \end{aligned}$$

Az $\int_0^\infty dt f(t, z)$ integrálunk pontosan akkor létezik, ha az $\int_0^\infty dt |f(t, z)|$ integrál is, ez pedig akkor van most, ha $\Re(z) > 0$. Egy ezt kielégítő z_0 esetén lehet U például a $\Re(z) > a$ tartomány (felsík), ahol a olyan, hogy $0 < a < \Re(z_0)$: ez az U konvex, nyílt, tartalmazza z_0 -t, és minden $z \in U$ -ra igaz, hogy $|\partial_z f(t, z)| = te^{-\Re(z) \cdot t} \leq te^{-at}$. Utóbbi jó lesz $g(t)$ -nek, mert $|\partial_z f(t, z)|$ -nek integrálható majoránsa minden $z \in U$ esetén egyszerre. Az integrál eredménye tehát differenciálható az U -n, vagyis z_0 -ban is. Ez minden z_0 -ra igaz, ha $\Re(z_0) > 0$: kész.

• Másik példa volt a Gauss-integrál az 5.1. szakaszban: α és β a (komplex) paraméterek, és

a kérdés: $\int_{-\infty}^\infty dt e^{-\alpha t^2 + \beta t}$ differenciálható-e α illetve β szerint?

A mostani esetben a szerepkiosztás a következő:

$$\begin{aligned} f(t, \alpha, \beta) &:= e^{-\alpha t^2 + \beta t}, & |f(t, \alpha, \beta)| &= e^{-\Re(\alpha) \cdot t^2 + \Re(\beta) \cdot t}, \\ \partial_\alpha f(t, \alpha, \beta) &= -t^2 e^{-\alpha t^2 + \beta t}, & |\partial_\alpha f(t, \alpha, \beta)| &= t^2 e^{-\Re(\alpha) \cdot t^2 + \Re(\beta) \cdot t}, \\ \partial_\beta f(t, \alpha, \beta) &= t e^{-\alpha t^2 + \beta t}, & |\partial_\beta f(t, \alpha, \beta)| &= |t| e^{-\Re(\alpha) \cdot t^2 + \Re(\beta) \cdot t}. \end{aligned}$$

⁸⁷Példa: legyen $x \in]0, 1[$ valós, és $f(t, x) = \sin(x/t^2)$. Ez minden ilyen x -re integrálható t -ben 0-tól 1-ig, differenciálható is x szerint, de az x szerinti deriváltja nem integrálható t -ben 0-tól 1-ig. Gondoljuk végig ezeket!

Az integrálhatósághoz $\Re(\alpha) > 0$ kell. A $g(t)$ megtalálása viszonylag triviális; felírjuk, milyen U halmazzal dolgozhatunk. Először α -ban vizsgálódunk: adott (a feltételt kielégítő) α_0 (és akármilyen fix β) esetén legyen U az α -ban a $\Re(\alpha) > \frac{\Re(\alpha_0)}{2}$ tartomány (ezen hasonlóan találunk integrálható majoránst, mint a fentebbi példában). A β -ban gondolkodva adott β_0 (és adott α fix érték) esetén β -ban egy fix véges valós szélességű, β_0 -t tartalmazó sávot választhatunk U -nak.

• A (C.5) állításunk bizonyítása következik. Jelölés: $D(t, z) \equiv \partial_z f(t, z)$. Egy kiszemelt z pontban

$$\frac{F(w) - F(z)}{w - z} = \int_a^b dt \frac{f(t, w) - f(t, z)}{w - z}; \quad w \rightarrow z\text{-re a } D(t, z)\text{-hez tart az integrandus, de csak ennyi még nem elég.}$$

Az előző függelékszakaszban már előkerült és bizonyított *általános középértéktétel* kell (ld. a (B.33) egyenletet környékét), sőt most is csak az a változat, hogy ha $\phi: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ differenciálható a $[z, w]$ zárt szakaszon, akkor $|\phi(w) - \phi(z)| \leq |w - z| \cdot \sup_{u \in [z, w]} |\phi'(u)|$. Ezt és a 3.) feltételünket összerakhatjuk az $f(t, z)$ -re (ami a konvex U belsejében lévő zárt $[z, w]$ szakaszon is differenciálható):

$$\left| \frac{f(t, w) - f(t, z)}{w - z} - D(t, z) \right| \leq \left| \frac{f(t, w) - f(t, z)}{w - z} \right| + |D(t, z)| \leq \max_{u \in [z, w]} |D(t, u)| + g(t) \leq 2g(t)$$

minden szóba jövő t -re, mivel $g(t) \geq |D(t, z)|$. De $g(t)$ integrálhatósága maga után vonja a bal oldali kifejezés integrálhatóságát, és mivel a $2g(t)$ integrálható majoráns egyszerre minden w -re, a *Lebesgue-tétel* miatt a bal oldali kifejezés integráljának $w \rightarrow z$ határértéke *létezik*, és annyi, mint a határértékfüggvény integrálja (=nulla, mert a különbségi hányados határértéke $D \equiv \partial_z f$):

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow z} \int_a^b dt \left[\frac{f(t, w) - f(t, z)}{w - z} - D(t, z) \right] &= \int_a^b dt \lim_{w \rightarrow z} \left[\frac{f(t, w) - f(t, z)}{w - z} - D(t, z) \right] = 0, \\ \Rightarrow \underline{\underline{\int_a^b dt D(t, z)}} &= \lim_{w \rightarrow z} \int_a^b dt \frac{f(t, w) - f(t, z)}{w - z} = \lim_{w \rightarrow z} \frac{F(w) - F(z)}{w - z} = \underline{\underline{\frac{dF}{dz}}}. \end{aligned}$$

Az integrál-határérték *létezéséből* tehát következett $F(z)$ differenciálhatósága is.

C.5. Hatványsorok viselkedése a konvergenciakör határán

• Véges (nem nulla, nem végtelen) R konvergenciasugarú hatványsor összegfüggvénye sokszor elfolytatható analitikusan. Egy dolog biztos (ld. a 4.3. szakaszt): a kör határán van legalább egy pont, aminek semmilyen (kicsi) nyílt környezetére sem lehet analitikusan elfolytatni.

Ezen túlmenően viszont annak, hogy hogyan viselkedik az összegfüggvény analitikus elfolytatása a konvergenciakör határán, alpból nem sok köze van ahhoz, hogy egy a határon lévő z -t beírva maga a sor konvergens-e; a Cauchy-Hadamard-tétel „bölcse hallgat” erről.

Következzék néhány lehetőség az alábbi táblázatban; a konvergenciasugár mindegyik esetben $R=1$ (amit az 1.–5. példákban rutinfeladvány belátni). A 6. példában Π_n az n legnagyobb páratlan osztóját jelöli; az ott definiált függvényről (a későbbi tanulmányokban előkerülő *Fourier-sorokat* is használva) belátható, hogy a $|z|=1$ körvonalra elfolytatva ott sehol nem differenciálható függvényt kapnánk, vagyis: nem lehet elfolytatni.⁸⁸ A többi példában viszont a megadott elfolytatások tényleg a felírt sorokat adják, ha $|z| < 1$; ezek ismert egyszerű sorok.

⁸⁸Ezt a következő utolsó 6. példát így felírva nem olvastam sehol, de minden bizonnyal lényegében nem túl különbözik egy ismert hasonló tulajdonságú példától (ami a $\sum_{m=0}^{\infty} z^{2^m}$ sor, azaz amelyikben az együttható 1, ha a z kitevője 2-nek hatványa, és 0 egyébként).

Kiindulási hatványsor:	A konvergencia-körének határán:	lehetséges analitikus elfolytatás:	Az elfolytatás a kör határán:
1.) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$	semmilyen $ z =1$ esetén nem konvergens	$\frac{1}{1-z}$	$z=1$ -ben pólus, máshol analitikus.
2.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$	$z=1$ -ben divergens, más $ z =1$ -re feltételesen konvergens.	$-\text{Ln}(1-z)$	$z=1$ elágazási pont, máshol analitikus.
3.) $\sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^n z^n$	semmilyen $ z =1$ esetén nem konvergens	$\frac{z}{(1+z)^2}$	$z=-1$ -ben pólus, máshol analitikus.
4.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$	minden $ z =1$ esetén abszolút konvergens	$1 + \frac{1-z}{z} \text{Ln}(1-z)$	$z=1$ elágazási pont, máshol analitikus.
5.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$	$z=\pm 1$ -ben divergens, más $ z =1$ -re feltételesen konvergens.	$\text{Arth } z \equiv \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{1+z}{1-z}$	$z=\pm 1$ elágazási pontok, máshol analitikus.
6.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n \cdot \Pi_n}$, (*)	minden $ z =1$ esetén abszolút konvergens	<i>nem folytatható el analitikusan sehova.</i>	$ z =1$ -re értelmes, de nem differenciálható.

Ami a konvergenciatulajdonságokat illeti: az 1. és 3. példákban $|z|=1$ -re a tagok *sorozata* nem tart nullához, úgyhogy ilyen z -kre a sor biztosan nem konvergens. A 4. példában viszont $|z|=1$ esetén a tagok abszolútértéke $\frac{1}{n(n+1)}$, ami összegezhető: a sor abszolút konvergens ilyen z -kre. Figyelemre méltó itt az is, hogy a körhatáron $z=1$ az egyetlen pont, ahol az elfolytatás nem analitikus (elágazási pontja van), de itt is véges a sorösszeg és az előállított függvény határértéke is (és ezek ugyanannyik). A 2. és az 5. példában $z=1$ -et beírva a sor divergens (mivel a *harmonikus sor* divergens; ld. például a B.2. függelék szakaszt), továbbá a tagok abszolútértékei ugyanezek minden $|z|=1$ esetén is, úgyhogy ilyen z -kre ezek a sorok biztosan nem abszolút konvergens.

• A 2. illetve az 5. példákban azt is állítottuk viszont, hogy ha $|z|=1$, de $z \neq 1$ (illetve $z \neq \pm 1$), akkor a kapott sor (noha nem abszolút, de) konvergens; ezekben és más hasonló (az együtthatókban „ílyesmi $\frac{1}{n}$ -eket tartalmazó”) esetekben ezt integrálással és a geometriai sort ismerve lehet belátni.

Kezdjük a 2. példával: jelöljük ki a körhatáron egy z -t, amire tehát $|z|=1$, de $z \neq 1$: legyen $z = e^{i\varphi}$, ahol $\varphi \in [-\pi, \pi]$, de $\varphi \neq 0$. A megadott sor véges részletösszegét felírhatjuk a deriváltjának a $z_0=0$ középponttól z -ig futó akármilyen úton, például az egyenes szakaszon vett integráljaként; rögtön paraméterezve a $t \in [0, z] \Leftrightarrow t = e^{i\varphi} u$, $u \in [0, 1]$ módon:

$$\sum_{n=1}^N \frac{z^n}{n} = \int_0^z dt \sum_{n=0}^{N-1} t^n = e^{i\varphi} \int_0^1 du \frac{1 - (ue^{i\varphi})^N}{1 - ue^{i\varphi}}, \quad \text{hiszen} \quad \frac{1}{n} z^n = \int_0^z dt t^{n-1}.$$

Kérdés: *létezik-e* ennek $N \rightarrow \infty$ határértéke. Fontos itt, hogy $z \neq 1$: gondoljuk ki (rajzzal), hogy biztosan van olyan $K > 0$ szám, amivel minden a $[0, z]$ szakaszon lévő t -nkre $|1-t| \geq K$. Továbbá $|1-t^N| \leq 2$ is teljesül: az integrandusaink abszolútértékét felülbecsülhetjük az integrálható $\frac{2}{K}$ -val.

A *Lebesgue-tételt* tudva létezik az $N \rightarrow \infty$ határérték, továbbá

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \int_0^z dt \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \int_0^z \frac{dt}{1-t} = -\text{Ln}(1-z).$$

Az 5. példában is hasonlóan haladhatunk: ugyanúgy paraméterezve a t -t a $[0, z]$ szakaszon

$$\sum_{n=0}^N \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^z dt \sum_{n=0}^N t^{2n} = e^{i\varphi} \int_0^1 du \frac{1 - (ue^{i\varphi})^{2N+2}}{1 - u^2 e^{2i\varphi}}, \quad (\text{C.6})$$

Itt az kell, hogy ha $z \neq \pm 1$, akkor $t \in [0, z]$ esetén $|1-t^2| > K$ valamilyen $K > 0$ számmal, továbbá hogy $|1-t^{2N}| \leq 2$ is teljesül. Ezért $z \neq \pm 1$ esetén itt is $\frac{2}{K}$ jó közös integrálható majoráns: a Lebesgue-tétel miatt létezik a keresett végtelen sorösszegünk, és annyi, mint a sorösszeg-integrandus integrálja:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^z dt \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} = \int_0^z \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{1+z}{1-z}. \quad (\text{C.7})$$

Figyeljük meg, hogy a fentebbi 2. és 5. sorösszegek, ahol csak léteznek a körhatáron, épp annyit adnak, mint amennyit a megadott analitikus elfolytatásuk felvesz ugyanabban a pontban.

- Két jól ismert esetben „learthatjuk” az imént bebizonyítottakat vagy teljesen hasonlókat:

<p>Legyen $f(z) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} - \dots$ Ennek konvergenciasugara $R=1$, és ha $z < 1$, akkor $f(z) = \text{arctg } z$. Tudva, hogy $\text{arctg } 1 = \frac{\pi}{4}$, vajon $z=1$-et beírva is igaz-e ez, azaz</p> $\frac{\pi}{4} \stackrel{?}{=} 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$	<p>Másik: $g(z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \dots$; ennek konvergenciasugara is $R=1$, és ha $z < 1$, akkor $g(z) = \ln(1+z)$. Vajon $z=1$-et beírva is igaz ez az összefüggés; azaz</p> $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \stackrel{?}{=} \ln 2.$
---	---

Az iménti (integrálás) gondolatmenetet ezekre a sorokra alkalmazva beláthatjuk, hogy ezek a (konvergenciahatáron lévő z -re vett) sorösszegek tényleg *léteznek*, és „mellesleg” éppen annyik, mint a hatványsorral definiált függvények ottani (határ)értékei: igazak a megpendített egyenlőségek.

- Egy másmilyen eset, amikor valahonnan *tudjuk*, hogy egy adott hatványsorba a konvergenciahatáron lévő z_1 -et írva a kapott összeg *létezik*, de azt még nem, hogy az egyenlő-e a konvergenciakörön *belül* definiált összefüggvény z_1 -beli határértékével. Ez általános esetben nem következne az eddigiekből, de egy *Niels Henrik Abel*-től származó tétel éppen ilyet mond:

Állítás: legyen a z_0 középső hatványsor konvergenciasugara $R > 0$, $R < \infty$, és z_1 olyan, hogy $|z_1 - z_0| = R$, és *létezik a sorösszeg z_1 -ben*. Ha z -vel z_1 -hez tartunk a körön belülről úgy, hogy a $z_1 - z_0$ és a $z_1 - z$ szakaszok bezárt szöge véges messze marad 90° -tól, akkor a sorösszefüggvény z_1 -beli határértéke a z_1 -beli sorösszeg. (C.9)

A z_1 -hez közelítés útjáról nem engedjük meg tehát, hogy „hozzásimuljon” a körhatárhoz;⁸⁹ a sugárirány például messzemenően jó. Ezzel a tétellel gondolkodva tehát a fenti (C.8)-beli számsorokról a következőket mondhatjuk. Ellenőrizni kell, hogy a számsorok konvergenssek: azok (de nem abszolút); az \ln -esről ld. a 77. lábjegyzetet; az ottani gondolatmenet az arctg -osra is működik. Ezek után viszont (például az arctg -osra végigmondva): mivel valós $|x| < 1$ -re $\text{arctg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$, másrészt az $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$ sorösszeg *létezik*, ezért ha x -szel 1-hez tartunk $x < 1$ felől, akkor $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \lim_{x \rightarrow 1} \text{arctg } x = \text{arctg } 1 = \frac{\pi}{4}$, mert arctg folytonos $x=1$ -ben; kész.

- **Kiegészítés:** következzen a (C.9) tétel bizonyítása. Elég a $z_0=0$ esettel foglalkozni: mindig „eltolhatjuk” az egészet $z_0=0$ -ba. Ha a $\sum_n a_n z^n$ hatványsor konvergenciasugara R , akkor az

⁸⁹Azért tűnik ez rögtön jó ötletnek, mert ugye ha a sor konvergencia z_1 -ben, akkor is bizonytalan, hogy a konvergenciakör határán hol konvergencia még: a legjobb a többi ponttól minél inkább „függetlennek” maradni.

$a'_n = a_n R^n$ -eket véve a $\sum_n a'_n z^n$ hatványsor konvergenciasugara 1, és az állítás pontosan akkor igaz az utóbbi esetben, amikor az előbbiben. Végül elég a $z_1=1$ esettel foglalkozni: ha z_1 máshol van a konvergenciakör (most már: az egységkör) határán, akkor ez ugyanaz, mintha a $\sum_n a'_n z_1^n z^n$ sort tekintenénk, és z -vel 1-hez tartanánk. Összefoglalva: elég a $z_0=0$, $R=1$ és $z_1=1$ esetre bizonyítani, ebből már következik általánosan. Utoljára az a_0 -ból levonhatjuk $\sum_n a_n$ -et, majd utólag a_0 -on keresztül „visszaadhatjuk” $\sum_n a_n$ -et. Az állítás tehát: a mondott ráközelítés-korlátozással

$$\text{ha a } \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ sorra } R=1, \text{ és } \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0, \text{ akkor } \lim_{z \rightarrow 1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) = 0.$$

Ha a z -vel 1-hez tartás módjára igaz a bizonyítandó (C.9) állításban tett kikötés, akkor

$$\begin{array}{l} \text{létezik olyan} \\ K \in \mathbb{R}^+, \text{ amire} \end{array} \quad \frac{|1-z|}{1-|z|} < K \quad \begin{array}{l} \text{a határátmenet során} \\ \text{szóba jövő összes } z\text{-re.} \end{array} \quad (\text{C.10})$$

Gondoljuk ezt végig (rajzzal)!⁹⁰ Tekintsük ezek után a következő átalakítást: egy véges N számra

$$\text{legyen } s_n \equiv \sum_{n=0}^N a_n, \quad \text{ezzel } a_n = s_n - s_{n-1};$$

ezt a hatványsor részletösszegébe írva

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_n z^n &= s_0 + (s_1 - s_0)z + (s_2 - s_1)z^2 + \dots + (s_N - s_{N-1})z^N = \\ &= s_0(1-z) + s_1z(1-z) + \dots + s_{N-1}z^{N-1}(1-z) + s_N z^N = (1-z) \sum_{n=0}^{N-1} s_n z^n + s_N z^N. \end{aligned}$$

Hogy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$, az éppen azt jelenti, hogy $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N = 0$, emiatt $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N z^N = 0$ is igaz minden rögzített $|z| < 1$ (azaz a konvergenciakörön belüli z) esetén. Emiatt

$$\begin{array}{l} \text{az előző egyenlőségből} \\ \text{minden } |z| < 1 \text{ esetén} \end{array} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n.$$

Legyen N_ε egy adott $\varepsilon > 0$ számhoz tartozó küszöbindex az s_n -ek nullához tartó sorozatában, azaz amire minden $n > N_\varepsilon$ -ra $|s_n| < \varepsilon$. Ekkor az N_ε -től végtelenig vett s -es összeget felülbecsülhetjük:

$$\left| \sum_{n=N_\varepsilon}^{\infty} s_n z^n \right| \leq \sum_{n=N_\varepsilon}^{\infty} |s_n| |z|^n \leq \varepsilon \sum_{n=N_\varepsilon}^{\infty} |z|^n = \varepsilon \frac{|z|^{N_\varepsilon}}{1-|z|} \leq \frac{\varepsilon}{1-|z|},$$

és a hatványsor z -beli értékét az alábbi módon írhatjuk, két részre bontva az összegzést N_ε -nál:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n &= (1-z) \sum_{n=0}^{N_\varepsilon-1} s_n z^n + (1-z) \sum_{n=N_\varepsilon}^{\infty} s_n z^n \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right| \leq |1-z| \cdot \left| \sum_{n=0}^{N_\varepsilon-1} s_n z^n \right| + \varepsilon \frac{|1-z|}{1-|z|}. \end{aligned}$$

⁹⁰Kis $|1-z|$ -k esetén ez a K körülbelül az $1/\cos \alpha$ értékek felső határa, ahol α az $1-z$ és a 0-ból 1-be menő szakasz szöge; a ráközelítés útjára tett korlátozás pont azt adja, hogy ezen felső határ véges (és nem tart végtelenhez).

Adott $\varepsilon > 0$ esetén az első tagban az N_ε tagú összeg polinom, ami folytonos: abszolútértéke a zárt egységkörlapon felveszi M_ε maximumértékét. A második tagban a fenti (C.10) becslést használva

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right| \leq |1-z| \cdot M_\varepsilon + K\varepsilon.$$

Ha ezek után z -vel olyan közel megyünk 1-hez, hogy $|1-z| < K\varepsilon/M_\varepsilon$, akkor azt kapjuk, hogy minden ilyen z -re már $\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right| \leq 2K\varepsilon$, ahol ugye $K \in \mathbb{R}^+$ fix. Mivel ezt minden $\varepsilon > 0$ -ra eljátszhatjuk, éppen arra jutunk, hogy a vizsgált fajta határértékre $\lim_{z \rightarrow 1} \sum_n a_n z^n = 0$, ami a bizonyítandó volt.

C.6. Kiegészítések a gamma-függvény tárgyalásához

• A 6.3. szakaszban a Stirling-formulával a végtelenből visszalépegetve azt találtuk, hogy

$$\ln \Gamma(x+1) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \left(x+m+\frac{1}{2}\right) \ln(x+m) - (x+m) - \sum_{k=1}^m \ln(x+k) \right\}.$$

Azt akarjuk itt tisztázni, hogy jogos-e inntől kezdve a deriválást és a határértékképzést felcserélni. A $H \equiv [x_0, x_1] \subset \mathbb{R}$ intervallumra korlátozódunk valamilyen adott $-1 < x_0 < 0$ és adott $x_1 < \infty$ értéket véve:⁹¹ $x \in H$ esetén a felírt határérték tényleg létezik (ez a Stirling-formulás közelítés lényege). Az első deriváltra pedig ugye azt kapnánk („bederiválva” a határértékbe), hogy

$$\frac{d}{dx} \ln \Gamma(x+1) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \ln(x+m) - \sum_{k=1}^m \frac{1}{x+k} \right\} \quad \Rightarrow \quad \gamma \equiv -\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \ln m \right\}.$$

Az így definiált γ tényleg létezik, mert az őt meghatározó sorozat adott m_1 és m_2 indexű tagjaira

$$\gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} a_m, \quad \text{ahol} \quad a_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \ln m \quad \Rightarrow \quad a_{m_2} - a_{m_1} = \sum_{k=m_1}^{m_2} \frac{1}{k} - \ln \frac{m_2}{m_1},$$

és felvázolva az $f(y) = \frac{1}{y}$ függvénygrafikont könnyű látni, hogy

$$\int_{m_1}^{m_2} dy \frac{1}{y} \leq \sum_{k=m_1}^{m_2} \frac{1}{k} \leq \frac{1}{m_1} + \int_{m_1}^{m_2} dy \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{m_2}{m_1} \leq \sum_{k=m_1}^{m_2} \frac{1}{k} \leq \frac{1}{m_1} + \ln \frac{m_2}{m_1}.$$

Vagyis $0 < a_{m_2} - a_{m_1} < \frac{1}{m_1}$, ami miatt az a_m -ek sorozata Cauchy-sorozat: elég nagy \mathcal{N}_ε -től kezdve már minden $m_1, m_2 > \mathcal{N}_\varepsilon$ -ra $|a_{m_2} - a_{m_1}| \leq \varepsilon$. Emiatt az a_m sorozat konvergens is, azaz létezik a γ -val kijelölt határérték. Őt is vizualizálhatjuk az $\frac{1}{y}$ függvénygrafikonon; ld. az alábbi 57. ábrán.

• A többedik deriváltakra azt kapnánk ugye a határérték mögé bederiválva, hogy

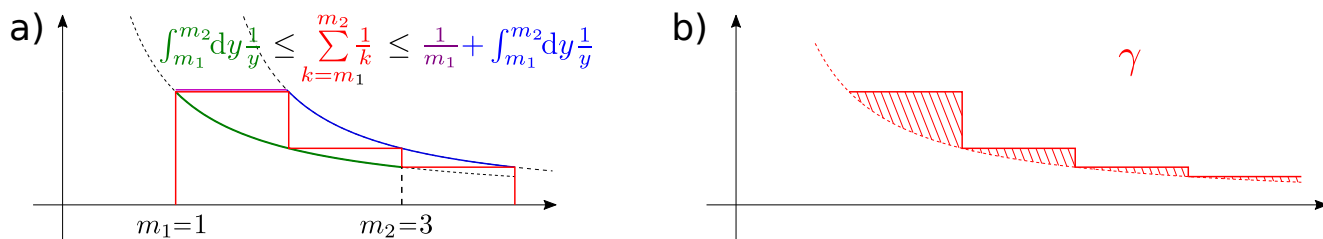
$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \ln \Gamma(x+1) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2}, & \frac{d^3}{dx^3} \ln \Gamma(x+1) &= -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^3}, \\ \dots & \frac{d^n}{dx^n} \ln \Gamma(x+1) &= (-1)^n (n-1)! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^n}. \end{aligned}$$

⁹¹ $x_0 < 0$ azért kell, hogy $x=0$ is a H belsejében legyen, azaz az $x=0$ -beli deriváltakat is kiértékelhessük (a sorfejtéshez), $x_0 > -1$ pedig hogy $\Gamma(x+1)$ -nek az $x=-1$ -beli pólusától biztonságosan messze maradjunk. Az x_1 végeessége csak azért kell, mert a használandó (B.32) tételben korlátos halmaz szerepel. Azonban mivel x_1 akármekkora lehet, x_0 pedig -1 -hez akármilyen közel lehet, végülis az egész $]-1, \infty]$ intervallumon rendben lesz a differenciálhatóság.

Ezen sorösszegek H -n egyenletes konvergenciáját szeretnénk tudni; a *Weierstrass-kritérium* (ld. B.3. függelék szakasz vége felé) fog kelleni. Megállapíthatjuk, hogy a H halmazunkban lévő x -ekre

$$x \in H\text{-ra ha } \frac{1}{|(x+k)^n|} \leq \frac{1}{|x_0+k|^n} \leq \begin{cases} \frac{1}{|x_0|^n}, & \text{ha } k=1, \\ \frac{1}{(k-1)^n}, & \text{ha } k>1, \end{cases} \quad \text{és utóbbi értékek összegezhethők } k\text{-ban } n \geq 2 \text{ esetén.}$$

A Weierstrass-kritérium miatt tehát az imént $n \geq 2$ -re $\frac{d^n}{dx^n} \Gamma(x+1)$ -re felírt sorok egyenletesen is konvergensek H -n. Ebből már következik (ld. az erről szóló (B.32) tételt a B.4. szakaszban), hogy mivel az n -edik deriváltfüggvényt megadó sor egyenletesen konvergens, és az $n-1$ -edik is legalább egy pontban konvergens (a többedikekre már tudjuk azt is, hogy egyenletesen is az az egész H -n, de az első deriváltat megadó sorozatra még csak azt, hogy az $x=0$ -ban biztos $-\gamma$ -hoz tart), ezért az $n-1$ -edik deriváltfüggvény is egyenletesen is konvergens H -n (még egyszer: ez most csak az első deriváltat megadó sorozatra újdonság), és az is igaz, hogy *a deriválást valóban megcserélhetjük a határértékképzéssel*. Ezt akartuk belátni: minden rendben van, amikor a gamma-függvény sorfejtését a Stirling-formulás visszalépegetős (határértékes) képlet deriválgatásával készítettük el.



57. ábra. a.) a γ létezésének levezetéséhez használt becsléshez segédlet; itt az ábrán $m_1=1$ -et véve. b.) a γ értéke egyenlő a bevonalkozott területek (végtelen) összegével; tudva, hogy $\ln m = \int_0^m dy \frac{1}{y}$.

* * *

• Tisztába tesszük a gamma-függvény Weierstrass-előállításának főszövegbeli levezetésénél elmaradt indoklásokat is (ld. a 6.4. szakaszban a (6.67) egyenlet környékén). A kiindulási képlet:

$$\psi(1+z) = (\ln \Gamma(1+z))' = -\gamma + z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+z)}, \quad \text{hacsak } z \notin \mathbb{Z}_0^-. \quad (\text{C.11})$$

Ha $z \in \mathbb{Z}_0^-$, akkor valamelyik nevező nulla. Ha viszont $z \notin \mathbb{Z}_0^-$, akkor mindegyik tag véges, és mondhatjuk például, hogy fix z -re véges sok k -t kivéve $k \geq 2|z|$, így $|k+z| \geq \frac{k}{2}$, még a z helyzete szempontjából „legrosszabb” $z \in \mathbb{R}^-$ esetben is. Emiatt tehát véges sok tagot kivéve $\frac{1}{|k(k+z)|} \leq \frac{2}{k^2}$; ezek összegezhethők, így a (C.11) sor is abszolút konvergens.

• Nyitva maradt a 6.4. szakaszban az is, hogy ez a (C.11) sorösszeg differenciálható függvényt ad meg.⁹² A határértékfüggvények differenciálhatóságára vonatkozó (B.32) tételt használnánk: egy adott $z_0 \notin \mathbb{Z}_0^-$ pont körül ki kell jelölni egy (kicsi, de) konvex korlátos nyílt halmazt, és ezen belátni *a vizsgált sor deriváltjának* egyenletes konvergenciáját. Minden megengedett $z_0 \notin \mathbb{Z}_0^-$ pont körül van olyan $r > 0$ sugarú $G_r(z_0)$ nyílt körlap, és lezártja, $B_r(z_0)$, amikre $0 < r < 1$, és ráadásul $B_r(z_0)$

⁹²Azért fontos ez, mert ezt a (C.11) sort, mely az ottani (6.67), ott valós $z \equiv x \in \mathbb{R}$ esetre vezettük le a Stirling-formulából, és a differenciálhatóságból következő analitikusság alapján mondtuk, hogy minden z -re érvényes.

sem tartalmaz \mathbb{Z}_0^- -beli számot (ez a \mathbb{Z}_0^- halmaz környékén plusz feltétel $0 < r < 1$ -hez képest). A vizsgált sor tagonkénti deriváltja:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+z)^2}; \quad \text{minden } z \in G_r(z_0) \text{ esetén például mondhatjuk, hogy ha } \frac{k}{2} > |z_0| + r, \text{ akkor } |k+z| \geq \frac{k}{2}.$$

Véges sok tagtól eltekintve tehát $\sup_{z \in G_r(z_0)} \frac{1}{|k+z|^2} \leq \frac{4}{k^2}$, és a kihagyott véges sok tag szupréma is véges (ehhez kellett, hogy $B_r(z_0)$ is elkerülje a problémás nempozitív egészeket). A tagok $G_r(z_0)$ -n vett szuprémaival tehát összegezhethetők: a már többször használt (B.31) *Weierstrass-kritérium* miatt a függvénysorunk (a $\psi(1+z)$ sorának tagonkénti deriváltja) egyenletesen is konvergens $G_r(z_0)$ -n. Emellett $\psi(1+z)$ sora maga is konvergens például z_0 -ban, így a (B.32) tételből már következik, hogy a $\psi(1+z)$ -t megadó sor összegfüggvénye $G_r(z_0)$ -n differenciálható, deriváltja a tagonkénti derivált sor, és hogy maga a $\psi(1+z)$ -t megadó sor is egyenletesen konvergens $G_r(z_0)$ -n.

• Most jön az, hogy primitív függvényt keresünk a $\psi(1+z)$ -t megadó (C.11) sorhoz:

$$\int dz \frac{z}{k(k+z)} = \int dz \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+z} \right) = \frac{z}{k} - \text{Ln}(k+z) + C_k, \quad (\text{C.12})$$

ahol kiírtuk a C_k (akár a k -tól függő) integrációs konstans: úgy kell a C_k -kat megválasztani, hogy ezeket a tagokat k -ban összegezhessük (ahogy végül szeretnénk). Ugye fix z -re sem a $\frac{z}{k}$ -k, sem $\text{Ln}(z+k)$ -k nem összegezhethetők; némi ráérzéssel kitalálhatjuk, hogy a $C_k = C_0 + \text{Ln } k$ választás lesz megfelelő, ahol C_0 még valamilyen „globális” (azaz k -tól is független) konstans érték lehet:

$$C_k = C_0 + \text{Ln } k \quad \Rightarrow \quad \int dz \frac{z}{k(k+z)} = C_0 + \frac{z}{k} - \text{Ln} \left(1 + \frac{z}{k} \right). \quad (\text{C.13})$$

Állítás: ezek fix z -re tényleg összegezhethetők k -ban, hacsak $z \neq -k$ valamilyen $k \in \mathbb{N}_0^+$ -ra, azaz hacsak $z \notin \mathbb{Z}_0^-$. Ez azért tűnik igaznak (és egyúttal segítheti visszamenőleg a C_k választására való „ráérzést”), mert hatványsorral gondolkodva $\frac{z}{k} - \text{Ln} \left(1 + \frac{z}{k} \right) \approx \frac{z^2}{2k^2}$, és utóbbiak összegezhethetők. Rendesen végiggondolva rendes bizonyítást kapunk: véges sok k -tól eltekintve $\frac{|z|}{k} < \alpha$, ahol $\alpha < 1$. Tényleg használhatjuk tehát a hatványsort, és durva becslésekkel haladhatunk:

$$\begin{aligned} \left| \frac{z}{k} - \text{Ln} \left(1 + \frac{z}{k} \right) \right| &= \left| \frac{z^2}{2k^2} - \frac{z^3}{3k^3} + \frac{z^4}{4k^4} - \frac{z^5}{5k^5} + \dots \right| \leq \\ &\leq \frac{|z|^2}{2k^2} \cdot \left| 1 - \frac{2z}{3k} \right| + \frac{|z|^4}{4k^4} \cdot \left| 1 - \frac{4z}{5k} \right| + \frac{|z|^6}{6k^6} \cdot \left| 1 - \frac{6z}{7k} \right| + \dots = (*) \end{aligned}$$

Itt legutóbb minden tagban $\left| 1 - \frac{n}{n+1} \frac{z}{k} \right| \leq 2$, azaz

$$(*) \leq \frac{|z|^2}{2k^2} (2 + 2 \frac{|z|^2}{2k^2} + 2 \frac{|z|^4}{3k^4} + \dots) \leq \frac{|z|^2}{k^2} (1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \dots) = \frac{|z|^2}{k^2} \frac{1}{1 - \alpha^2},$$

ezek pedig összegezhethetők k -ban. Így tehát a $\frac{z}{k} - \text{Ln} \left(1 + \frac{z}{k} \right)$ tagok is tényleg összegezhethetők.

A primitívfüggvény-kereséssel kapott sor tehát minden megengedett z_0 -ban összegezhethető, a derivált soráról pedig már fentebb beláttuk, hogy az ott kijelölt $G_r(z_0)$ körlapon egyenletesen konvergens: így itt is a függvénysorozatok differenciálhatóságáról szóló (B.32) tétel miatt a primitív függvények sorösszege tényleg egyenletesen konvergens $G_r(z_0)$ -n, összege differenciálható, és deriváltja tényleg az, amiből kiindultunk. Természetesen z_0 -t akárhova tehetjük: végülis mindenhol igaz az összes differenciálhatóságra tett következtetésünk. Valóban igaz tehát, hogy amint állított-

tuk a főszöveg (6.68) egyenletében (és aztán $\text{Ln } \Gamma(1+z)$ -ből megkaptuk $\Gamma(1+z)$ -t exponenciálissal), így kereshettünk primitív függvényt:

$$(\ln \Gamma(1+z))' = -\gamma + z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+z)} \Rightarrow \ln \Gamma(1+z) = -\gamma z + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z}{k} - \text{Ln} \left(1 + \frac{z}{k} \right) \right). \quad (\text{C.14})$$

Még annyi, hogy $C_0 = 0$ kellett, hogy egyetlen adott helyen, például $z=0$ -ban $\text{Ln } \Gamma(1+z)$ primitív függvényként kapott kifejezése tényleg a tudott $\text{Ln } \Gamma(1) = \ln 1 = 0$ értéket vegye fel.

* * *

• A komplex z -kre is érvényes Stirling-formula nyeregponthoz vezető integrálásos levezetésénél a 6.4. szakaszban odáig jutottunk, hogy az ottani (6.77) képlet szerint ha $s_1 \in \mathbb{R}^+$ és $\Re(z) > -1 + \varepsilon$, akkor

$$\Gamma(z+1) = \sqrt{z} \left(\frac{z}{e} \right)^z (\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2), \quad (\text{C.15})$$

ahol a kijelölt (már paraméterezett) integrálok ezek voltak:

$$\mathcal{I}_1 \equiv \int_{-s_1}^{\infty} ds e^{-\sqrt{z}s + z \text{Ln} \left[1 + \frac{s}{\sqrt{z}} \right]}, \quad \mathcal{I}_2 \equiv (\sqrt{z} - s_1) \int_0^1 du u^z e^{z(1-u) + \sqrt{z}s_1 u + z \text{Ln} \left(1 - \frac{s_1}{\sqrt{z}} \right)}. \quad (\text{C.16})$$

Az s_1 alsó integrálási határ még akármi lehetett; azt reméltük/reméljük a 6.4. szakaszban, hogy ha $|z| \rightarrow \infty$ közben $s_1 \rightarrow \infty$, akkor \mathcal{I}_1 a pontonkénti $e^{-s^2/2}$ határértékfüggvény integrálját, $\sqrt{2\pi}$ -t adja, a második \mathcal{I}_2 integrál pedig nullához tart. Itt befejezzük a bizonyítás ide tartozó, a főszövegben lehangzott maradékát; ez egyrészt „iszappakolós”, másrészt izgalmas gondolkodtató munka.⁹³

A \sqrt{z} kerül előtérbe: érdemes őt $re^{i\varphi}$ módon írni, ahol tehát $r \in \mathbb{R}^+$, és $|z| \rightarrow \infty$ egyenértékű azzal, hogy $r \rightarrow \infty$. Az s_1 határ többféle választása is jó lehet; $s_1 = \sqrt{|z|} \equiv r$ lesz kellemes. (Így tényleg $s_1 \rightarrow \infty$, ha $|z| \rightarrow \infty$.) Ha igaz, hogy végig $\Re(z) > -1 + \varepsilon$, akkor a gyökvonást (mint „legyezőfélbehajtást”) a \mathbb{C} síkon geometriailag követve leszűrhetjük, hogy bármilyen kicsi $\delta > 0$ esetén elég nagy r -től kezdve már $|\varphi| < \frac{\pi}{4} + \delta$, ezért elég ilyen φ -ket nézni. Ezen belül is a $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4} + \delta]$ esettel (a felső félsíkon lévő z -kkel) kezdjük. Fontos lesz, hogy ezen φ -kre $\cos \varphi$ monoton csökken, és a $\mathcal{C} \equiv \cos \left(\frac{\pi}{4} + \delta \right)$ érték egyenél kisebb pozitív: $0 < \mathcal{C} < 1$.

Az \mathcal{I}_1 integrálban ha találunk az integrandushoz integrálható majoránst egyszerre minden r -re és minden szóba jövő φ -re (hiszen φ akárhogyan változhat a megengedett tartományán belül, miközben $r \rightarrow \infty$), akkor a *Lebesgue-tétel* szerint \mathcal{I}_1 határértéke tényleg a pontonkénti $e^{-s^2/2}$ határértékfüggvény integrálja, $\sqrt{2\pi}$. Az integrandus abszolútértéke ebben a tagban

$$\left| e^{-\sqrt{z}s + z \text{Ln} \left[1 + \frac{s}{\sqrt{z}} \right]} \right| = e^{-h(s, \varphi, r)}, \quad \text{ahol (a } \xi \equiv \frac{s}{r} \text{ jelölést használva)}$$

$$h(s, \varphi, r) = r^2 \left[\xi \cos \varphi - \frac{1}{2} \cos(2\varphi) \ln(1 + 2\xi \cos \varphi + \xi^2) - \sin(2\varphi) \arctg \frac{\xi \sin \varphi}{1 + \xi \cos \varphi} \right]. \quad (\text{C.17})$$

Ha (kínunkban) a deriváltakat vizsgáljuk, akkor az s szerintiből kiderül, hogy

$$h(s, \varphi, r) = r \int_0^s dt t \frac{r + t \cos \varphi}{r^2 + 2rt \cos \varphi + t^2} \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial \varphi} = r \sin \varphi \int_0^s dt \frac{t^2 (r^2 - t^2)}{(r^2 + 2rt \cos \varphi + t^2)^2}. \quad (\text{C.18})$$

Ezen első alakban már kényelmesen becsülgethetünk; itt is (mint a valós $z \equiv x$ korábbi esetében is)

⁹³Nekem is az volt (itt jegyzetírás közben). Nem is azért írtam le, mintha meg kellene tanulni (pláne, hogy bizonyára másképp is lehetne csinálni), hanem hogy legyen támpontja annak, aki esetleg érdeklődve nekiáll.

érdeemes külön nézni az $s>0$ és az $s<0$ tartományokat. A φ -ben legpesszimistább lehetőséggel is

$$s > 0 \text{ esetén } h(s, \varphi, r) \geq r \int_0^s dt t \frac{r\mathcal{C}+t\mathcal{C}}{r^2+2rt+t^2} = \mathcal{C} \left[rs - r^2 \ln \left(1 + \frac{s}{r} \right) \right] \equiv \mathcal{C} \cdot H(s, r), \quad (\text{C.19})$$

eme $H(s, r)$ -ről pedig belátható, hogy fix s -re r -t növelve monoton nő.⁹⁴ Így tehát ha r -et például $r=1$ -től indítjuk, akkor minden előkerülő φ és r esetén

$$s > 0\text{-ra } h(s, \varphi, r) \geq \mathcal{C}H(s, r=1) \quad \Rightarrow \quad e^{-h(s, \varphi, r)} \leq e^{-\mathcal{C}H(s, r=1)} = (1+s)^{\mathcal{C}} e^{-\mathcal{C}s}, \quad (\text{C.20})$$

és ez utóbbi függvény integrálható $s \in \mathbb{R}^+$ -ra: itt készen vagyunk. $s<0$ -ra pedig (fix r esetén $-r \leq s \leq 0$ lehet!) az iménti (C.18) felírás második alakjában az integrandus a φ és t tartományaiból beláthatóan pozitív, de a felső határ a kisebb: így ekkor $\frac{dh}{d\varphi} \leq 0$, azaz $h(s, \varphi, r)$ csökken, ha φ nő. Vagyis φ -be $\frac{\pi}{4} + \delta$ -t ($\cos \varphi$ helyett \mathcal{C} -t) írva becsülhetünk, majd pedig az alapján, hogy $|s| \leq r$ és $t \leq |s|$, tehát $t \leq r$, arra jutunk, hogy

$$\begin{aligned} \text{ha } s < 0, \text{ akkor } h(s, \varphi, r) &\geq r \int_0^s dt t \frac{r+t\mathcal{C}}{r^2+2\mathcal{C}rt+t^2} \stackrel{t \rightarrow -t}{=} r \int_0^{|s|} dt t \frac{r-t\mathcal{C}}{r^2-2\mathcal{C}rt+t^2} \geq \\ &\geq r \int_0^{|s|} dt t \frac{r-r\mathcal{C}}{r^2+t^2} \geq \int_0^{|s|} dt t \frac{r^2(1-\mathcal{C})}{2r^2} = \frac{1-\mathcal{C}}{4} s^2 \quad \Rightarrow \quad e^{-h(s, \varphi, r)} \leq e^{-\frac{1-\mathcal{C}}{4} s^2} \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

minden előkerülő r -re és φ -re; a legutóbbi függvényalak pedig integrálható $s \in \mathbb{R}^-$ -ra.

• Találtunk tehát \mathcal{I}_1 -hez az egész $s \in \mathbb{R}$ -en megfelelő integrálható majoránst (két darabban): ezzel a taggal tehát készen vagyunk, \mathcal{I}_1 -ből valóban a szükséges $\sqrt{2\pi}$ származik. \mathcal{I}_2 vizsgálatához továbbra is $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4} + \delta]$; beírva $s_1=r$ -et és $\sqrt{z}=re^{i\varphi}$ -t az \mathcal{I}_2 kifejezésébe az derül ki, hogy

$$\begin{aligned} &\left| \exp \left(z(1-u) + \sqrt{z}s_1 u + z \text{Ln} \left(1 - \frac{s_1}{\sqrt{z}} \right) \right) \right| = \\ &= \exp \left(r^2 \left[\cos \varphi - (1-u)(\cos \varphi - \cos(2\varphi)) + \frac{\cos(2\varphi)}{2} \ln(2(1-\cos \varphi)) - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \sin(2\varphi) \right] \right) \leq \\ &\leq \exp \left(r^2 \left[\cos \varphi + \frac{1}{2} \cos(2\varphi) \ln(2(1-\cos \varphi)) - \sin(2\varphi) \arctg \frac{\sin \varphi}{1-\cos \varphi} \right] \right), \end{aligned}$$

ahol kihasználtuk, hogy a megengedett φ -kre $\cos(2\varphi) \leq \cos \varphi$. A legutóbbi alakban kapott exponens viszont éppen $-h(s=-r, \varphi, r)$ az előző pontbeli jelöléssel: megállapítottuk ott, hogy ilyen $s<0$ -k esetében ez a kitevő φ függvényében monoton nő, azaz a legpesszimistább becslés az, amikor $\varphi = \frac{\pi}{4} + \delta$ értéket írunk be. Viszont még ilyen φ -t beírva is negatív a kitevő.⁹⁵

$$\begin{aligned} &\text{Van tehát olyan } \lambda > 0, \text{ amivel minden előkerülő } \varphi\text{-re} \\ &\exp \left(r^2 \left[\cos \varphi + \frac{1}{2} \cos(2\varphi) \ln(2(1-\cos \varphi)) - \frac{\pi-\varphi}{2} \sin(2\varphi) \right] \right) \leq e^{-\lambda r^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Emiatt (még az előtte lévő szorzóval együtt is) az \mathcal{I}_2 integrandusa u -ban egyenletesen is nullához tart, akármilyen φ -ket érintve is tart z végtelenhez. Még az kell, hogy mivel $u \in [0, 1]$, $|u^z| \leq u^{\varepsilon-1}$ végig igaz, és utóbbi függvény integrálható (ezért kellett a $\Re(z) > -1 + \varepsilon$ kikötés): az előbb kapott exponenciális tényezőt felülbecslő bármilyen konstanssal szorozva $u^{\varepsilon-1}$ jó integrálható majoránsnak. Így újfent a *Lebesgue-tétel* miatt \mathcal{I}_2 is jól viselkedik: tényleg nullához tart.

⁹⁴Mert hogy $\frac{\partial H}{\partial r} = 2r \ln \left(1 + \frac{s}{r} \right) + \frac{s^2+2rs}{r+s}$, ami $s=0$ -ban nulla, és $\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial H}{\partial r} \right) = \left(\frac{s}{s+r} \right)^2 \geq 0$, úgyhogy $s>0$ -ra $\frac{\partial H}{\partial r} \geq 0$.

⁹⁵Életemben először itt igaziból nem ezzel a „rendes” függvényvizsgálattal kezdtem, hanem programmal ábrázoltam, ahonnan a „a vak is látja” a következtetést.

- Teljesen beláttuk tehát a Stirling-formulát a következő esetben:

$$\text{Ha végig } \Re(z) > -1 + \varepsilon, \text{ és } \Im(z) \geq 0, \text{ akkor } \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(z+1)} \sqrt{2\pi z} \left(\frac{z}{e}\right)^z = 1. \quad (\text{C.23})$$

Viszont a bal oldali függvényalak olyan, hogy ha z helyébe z^* -ot írunk, a függvényérték is konjugáltra változik: ha igaz a felírt határérték az $\Im(z) \geq 0$ esetben, akkor muszáj, hogy igaz legyen konjugált z -kre is, azaz az $\Im(z) \leq 0$ esetben is. Következtetés: a képletünk igaz $\Im(z) \leq 0, \Re(z) > -1 + \varepsilon$ esetén is. Innen továbbléphetünk $\Re(z) < 0$ -ra a reflexiós összefüggéssel (ld. a 6.4. szakasz végét).

* * *

- Az $\frac{1}{\Gamma(z)}$ Hankel-féle vonalintegrál-képletét (ld. a 6.4. szakaszban a (6.69) egyenletet és az 50. ábrát) beláttuk ott a $\Re(z) < 1$ esetre, más z -kre pedig a szokásos analitikussági érveléssel terjesztettük ki. Csak az maradt elvarratlanul, hogy az ott felírt vonalintegrál,

$$\mathcal{F}(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} dt e^t t^{-z} \quad \text{tényleg } z\text{-ben differenciálható függvényt ad meg.}$$

Ez a vonalintegrál ugye már jól meghatározott úgy is, hogy az útról csak „globális” jellemzőket rögzítünk (most azt, hogy: kerülje meg a $t \in \mathbb{R}_0^-$ vágást pozitív irányban $t=0$ -hoz nem túl közel menve, $\Re(t) = -\infty$ -ből jöve és oda is térve). A paraméteres integrál differenciálhatóságáról szóló (C.5) tétel alkalmazásához viszont érdemes specifikálni az utat: ezt megtehetjük, erre (is) jó a vonalintegrálok útfüggetlensége. Legkellemesebb talán a „vágásra ráhúzott” utat használni, ahogy a főszövegben is tettünk $\Re(z) < 1$ esetére. A lényeg: ha a $t=0$ elágazási pontra *nem* húzódunk rá, hanem meghagyjuk a véges r sugarú, $t = re^{i\varphi}$ módon paramétereizhető ívet, akkor minden z -re értelmes marad az integrál. Legyen tehát ez az út-specifikáció; beírva mindent és elvégezve a vágás száraitra való „ $\varepsilon \rightarrow 0$ ” ráhúzást valamint az egyszerűsítéseket a főszövegbeli tárgyaláshoz hasonlóan

$$\mathcal{F}(z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \int_r^\infty ds s^{-z} e^{-s} + \frac{r^{-z}}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi d\varphi e^{-iz\varphi} e^{re^{i\varphi}} \equiv \mathcal{F}_{\text{vágás}}(z) + \mathcal{F}_{\text{iv}}(z). \quad (\text{C.24})$$

Akármilyen z -t véve akörül egy kis környezet kell: minden ilyenén a második, \mathcal{F}_{iv} -beli integrál integrandusa abszolútértékben teljes mértékben korlátos, és véges szakaszra integrálunk: ebben teljesül a paraméteres integrál differenciálhatóságának feltétele. Az első $\mathcal{F}_{\text{vágás}}$ integráljában pedig pont ugyanúgy érvelhetünk, mint ahogy már a gamma-függvényt definiáló legeredetibb (6.2) integrál eredményének differenciálhatóságát beláttuk a 6.1. szakasz végén.

D. függelék: a Riemann-féle zéta-függvény

A Riemann-féle zéta-függvénnyel már találkoztunk a gamma-függvény sorfejtésénél a 6.3. szakaszban. A fizikában is előkerül időnként, a matematikában pedig lényegében egy külön tudományág (az *analitikus számelmélet*) foglalkozik vele. Itt egy ismerkedő „rárepülés” következik.

D.1. Definiáló sorok, integrálok

- Az elsődleges **definíció** (ezt használtuk $\text{Ln } \Gamma(1+z)$ sorához valós egész $s \equiv m > 1$ esetén):⁹⁶

$$\zeta(s) := \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \text{ha } s \in \mathbb{C} \text{ és } \Re(s) > 1. \quad (\text{D.1})$$

Ugye $|n^s| = n^{\Re(s)}$. Emiatt ha $\Re(s) \leq 0$, akkor az $\frac{1}{n^s}$ -ek *sorozata* nem tart nullához, így a (D.1) sor sem lehet összegezzhető. Ha viszont $\alpha \equiv \Re(s) > 1$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ létezik, mert $f(x) = x^{-\alpha}$ ilyenkor 1-től ∞ -ig integrálható és itt majorálja az $n^{-\alpha}$ módon csökkenő „lépcsős függvényt”, melynek \int_0^{∞} integrálja $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$. A felírt sor tehát abszolútértékben is összegezzhető, ha $\Re(s) > 1$.

Az $s=1$ helyen a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *harmonikus sort* kapnánk, ami divergens, ld. a B.2. szakaszbeli (B.15) egyenlet környékét. Valós $s \in \mathbb{R}$, $0 < s < 1$ esetén is divergens a sor, hiszen ilyenkor rosszabb a helyzet, mint $s=1$ -ben: tagonként $\frac{1}{n^s} = \left| \frac{1}{n^s} \right| \geq \frac{1}{n}$. Akármilyen $s \in \mathbb{C}$, $0 < \Re(s) \leq 1$ esetén ezek szerint a (D.1) sor nem lehet abszolút konvergens (mert akkor $\frac{1}{n^{\Re(s)}}$ is összegezzhető volna, de épp most láttuk, hogy ilyenkor nem az). A (D.1) sor *feltételesen konvergens* még lehetne, ha $0 < \Re(s) \leq 1$, és $s \notin \mathbb{R}$ (az n^{-s} -ek az abszolútérték lassabb csökkenése mellett is komplex s -ekre „feltekeredhetnének”, létezne összegük), de alább belátjuk, hogy *nem* ez a helyzet.

Összefoglalva: a (D.1) sor **abszolút konvergens, ha $\Re(s) > 1$, és divergens, ha $\Re(s) \leq 1$.**

- 2^s -nel osztva *páros*, majd az eredetiből kivonva *páratlan* számokat használó összegeket is írhatunk:

$$2^{-s}\zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \dots \Rightarrow (1 - 2^{-s})\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \dots, \quad (\text{D.2})$$

ahol a tagonkénti kivonás létjogosultsága ugye az abszolút konvergencián múlik; ld. a (B.17) tételt. Továbbmenve: az eredeti sorból *kétszer* kivonva a páros tagokat **váltakozó előjelű sort** kapunk.

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}. \quad (\text{D.3})$$

Abszolút konvergenciáról itt ugyanazt mondhatjuk, mint a (D.1) sorra (hiszen a tagok abszolútértékei ugyanazok): ez a (D.3) sor **abszolút konvergens, ha $\Re(s) > 1$, és divergens, ha $\Re(s) \leq 0$** , továbbá biztosan nem abszolút konvergens, ha $0 < \Re(s) \leq 1$. Itt azonban az derül ki (ld. alább), hogy ez a (D.3) váltakozó előjelű sorösszeg (**feltételesen**) **konvergens a $0 < \Re(s) \leq 1$ sávon**.

- Megelőlegezve ezt a $0 < \Re(s) \leq 1$ sávra mondott konvergenciát arra jutunk, hogy érvényes az

$$\text{alternatív definíció:} \quad \zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}, \quad \text{ha } \Re(s) > 0 \text{ és } s \neq 1. \quad (\text{D.4})$$

Kiemeltük $s=1$ -et: már láttuk, hogy $s=1$ -ben az első (D.1) sorösszeg a (divergens) harmonikus

⁹⁶Ezen $\zeta(s)$ komplex változóját z helyett szokásosan s -sel jelölik (Riemann-ig visszamenő hagyomány alapján).

sorösszeg; ez a váltakozó előjelű (D.3) sorösszeg pedig $\ln 2$ -t ad $s=1$ -ben (ahogy a C.5. szakaszban is láttuk), de az $1-2^{1-s}$ nevező értéke $s=1$ -ben 0, úgyhogy ez a (D.4) definíció sem értelmes $s=1$ -re. Ki is derül alább, hogy **elsőrendű pólus van $s=1$ -ben**.

A most látott (D.4) definíciós képletben az $1-2^{1-s}$ nevező komplex s -eket is megengedve nemcsak $s=1$ -ben nulla, hanem az $s_m = 1 + m \cdot \frac{2\pi i}{\ln 2}$ helyeken is (az \exp függvény képzetes irányú periodikussága miatt), ahol $m \in \mathbb{Z}$ akármilyen egész szám. Nemsokára azonban kiderül, hogy $\zeta(s)$ jól definiált és differenciálható minden ilyen s_m -ben is, ha $m \neq 0$: eszerint ezeken az s_m helyeken a (D.4)-beli váltakozó sorösszeg nullát kell, hogy adjon.⁹⁷ Ezt is tudva mondhatjuk, hogy a (D.4) alternatív definíció a $\Re(s) > 0$ félsíkon egyedül $s=1$ -ben nem értelmes.

• Érdeemes néhány fajta integrált bevenni a játékba. Már láttuk, hogy egyelőre $\Re(s) \leq 0$ szóba sem jön; egyelőre tehát **kössük ki, hogy $\Re(s) > 0$** . Egy ötlet: a gamma-függvényt is felidézve

$$n \in \mathbb{N}^+ \text{ esetén arra jutunk, hogy } \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{-nt} = \Gamma(s) \cdot \frac{1}{n^s}, \quad (\text{D.5})$$

és az $\frac{1}{n^s}$ ilyen felírását beírhatjuk a (D.1) illetve a (D.3) sorokba, majd egyszerűsíthetünk:

$$\Gamma(s) \left[\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots \right] \stackrel{?!}{=} \int_0^\infty dt t^{s-1} (e^{-t} + e^{-2t} + e^{-3t} + e^{-4t} + \dots) = \int_0^\infty dt t^{s-1} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}, \quad (\text{D.6})$$

$$\Gamma(s) \left[\frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \dots \right] \stackrel{?!}{=} \int_0^\infty dt t^{s-1} (e^{-t} - e^{-2t} + e^{-3t} - e^{-4t} + \dots) = \int_0^\infty dt t^{s-1} \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}. \quad (\text{D.7})$$

hiszen az integrandusban e^{-t} szempontjából geometriai sorokat kaptunk. Az alábbi (tényleg pont a kijelölt esetekben létező, ld. rögtön) **integrál-előállítások** adódtak tehát:⁹⁸

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}, \quad \text{ha } \Re(s) > 1, \text{ illetve} \quad (\text{D.8})$$

$$(1-2^{1-s})\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt \frac{t^{s-1}}{e^t + 1}, \quad \text{ha } \Re(s) > 0 \quad (\text{és } s=1\text{-ben a bal oldal } 0\infty). \quad (\text{D.9})$$

• Az integrandusok abszolútértékei $\frac{t^{\alpha-1}}{e^t-1}$ illetve $\frac{t^{\alpha-1}}{e^t+1}$, ahol $\alpha \equiv \Re(s)$: ezek $t \rightarrow \infty$ felé exponenciálisan csökkennek, minden $s \in \mathbb{C}$ esetén integrálhatók t -ben például $[1, \infty]$ -re. A $t=0$ környéke problémás integrálhatóság szempontjából.

A második (D.9) integrálban a nevezős rész folytonos $t=0$ körül, például $t \in [0, 1]$ -en, így vannak olyan $A_2 > 0$ és $B_2 > 0$ konstansok, amikkel minden $t \in [0, 1]$ esetén $A_2 \leq \frac{1}{e^t+1} \leq B_2$. Az integrandust $[0, 1]$ -en tehát alulbecsülhetjük $A_2 t^{\alpha-1}$ -gyel, és felülbecsülhetjük $B_2 t^{\alpha-1}$ -gyel. Ezek miatt (ismerve hatványfüggvények integrálhatóságát) pontosan $\alpha > 0$ esetén létezik a második (D.9) integrál.

Az első (D.8) integrálban az e^t-1 nevező $t \approx 0$ esetén $\approx t$; pontosabban: $\frac{t}{e^t-1}$ $t=0$ -ban véges 1 határértékű, úgyhogy ha őt $t=0$ -ban 1-nek értelmezzük, akkor $\frac{t}{e^t-1}$ folytonos $t \in [0, 1]$ -en; őrá igaz, hogy itt $0 < A_1 \leq \frac{t}{e^t-1} \leq B_1$. Az első integrandus abszolútértékét $t^{\alpha-2} \frac{t}{e^t-1}$ alakba írva tehát látható, hogy (az előzőhöz hasonlóan) őt $t \in [0, 1]$ esetén alulbecsülhetjük $A_1 t^{\alpha-2}$ -vel és felülbecsülhetjük $B_1 t^{\alpha-2}$ -vel, amiből adódik, hogy a (D.8) integrál pontosan $\alpha > 1$ esetén létezik.

• A (D.6) illetve (D.7) átalakításokban a $?!$ lépésben beírtuk $\frac{1}{n^s}$ azelőtti (D.5) előállítását és megcseréltük az összegzést az integrálással. Utóbbi indoklásához ugye kell egy integrálható majoráns

⁹⁷Érdekes viszont, hogy ezt közvetlenül a (D.3) sorösszezből belátni csak a XX. század közepe táján sikerült.

⁹⁸Ilyen integrálok kerülnek elő a statisztikus fizikában *elfajult Bose-* illetve *Fermi-gázok* vizsgálatakor.

minden véges részletösszeg abszolútértékéhez egyszerre. Az első (D.6) esetben (mivel a részletösszegek sorozata itt abszolútértékben monoton nő) itt ez maga a sorösszeg, azaz (D.8) integrandusa. A második (D.7) esetben pedig az első tag, $t^{\alpha-1}e^{-t}$ jó: semelyik részletösszeg-integrandus nem lesz ennél abszolútértékben nagyobb a $t \in [0, \infty]$ halmazon. A *Lebesgue-tétel* miatt tehát az összegzés és az integrálás megcserélhető.

Sőt: az is következményként adódik itt a Lebesgue-tételből, hogy a második (D.9) integrállal ekvivalens váltakozó előjelű (D.3) sorösszeg *tényleg konvergens*, ha $0 < \Re(s) \leq 1$, ahogy ígértük korábban (de ugye ez a konvergencia csak feltételes).

• **Kiegészítés:** az maradt még elvarratlan szál, hogy az eredeti (D.1) definiáló sor nem konvergens, ha $s \notin \mathbb{R}$, de $0 < \Re(s) \leq 1$ esetén: attól még lehetne az, hogy a vele *máshol* ekvivalens (D.8) integrál ilyen s -ekre nem létezik. Legyen tehát most $0 < \Re(s) \leq 1$ és $s \notin \mathbb{R}$, speciálisan: $s \neq 1$. Integrálokat vizsgálunk, de csak részben támaszkodhatunk a Lebesgue-tételre.⁹⁹ Írjunk fel az $\frac{1}{n^s}$ (D.5) kifejezésével egy *véges* részletösszeget. Sejthető, hogy a t^{s-1} tényező $t=0$ körüli integrálhatósága kap szerepet, ezért olyan átalakításokat teszünk, hogy minél inkább ez „domborodjon ki”:

$$\Gamma(s) \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} = \int_0^\infty dt t^{s-1} \frac{1-e^{-Nt}}{e^t-1} = \int_0^\alpha dt t^{s-1} \frac{1-e^{-Nt}}{e^t-1} + \int_\alpha^\infty dt t^{s-1} \frac{1-e^{-Nt}}{e^t-1} \quad (\text{D.10})$$

valamilyen $\alpha > 0$ értéknél kettévágva. A második \int_α^∞ darabnak létezik $N \rightarrow \infty$ határértéke, mert az abban szereplő integrandus pontonkénti határértékének abszolútértéke, $\frac{t^{\Re(s)-1}}{e^t-1}$ egy N -től független integrálható majoráns $a \in [\alpha, \infty]$ szakaszon. A maradék $t \in [0, \alpha]$ szakaszon a $\frac{t}{e^t-1}$ -et érdemes „leszedni”: ennek 1 a határértéke $t=0$ -ban, és lineárisan indul: van olyan $K > 0$, hogy $t \in [0, \alpha]$ esetén $|\frac{t}{e^t-1} - 1| \leq Kt$. Emiatt

$$\int_0^\alpha dt t^{s-1} \frac{1-e^{-Nt}}{e^t-1} = \int_0^\alpha dt t^{s-2} (1-e^{-Nt}) \left[\frac{t}{e^t-1} - 1 \right] + \int_0^\alpha dt t^{s-2} (1-e^{-Nt}). \quad (\text{D.11})$$

Ha $0 < \Re(s) \leq 1$, akkor az itteni első tagnak is van $N \rightarrow \infty$ határértéke, mert $t \in [0, \alpha]$ esetén $|1-e^{-Nt}| < 1$, így $|t^{s-2}(1-e^{-Nt})(\frac{t}{e^t-1}-1)| \leq t^{\Re(s)-2} \cdot Kt = Kt^{\Re(s)-1}$, és ez most integrálható majoráns. A második tag maradt: ebben tisztán látszik, hogy *tényleg* a t^{s-2} integrálhatósága dönt.

Több módon is lehet inentől haladni; a kedvencem egy plusz integrál bevezetése:

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha dt t^{s-2} (1-e^{-Nt}) &= \int_0^\alpha dt t^{s-2} \int_0^t dy N e^{-Ny} = \int_0^\alpha dt \int_0^t dy t^{s-2} N e^{-Ny} \stackrel{1.}{=} \\ &\stackrel{1.}{=} \int_0^\alpha dy \int_y^\alpha dt t^{s-2} N e^{-Ny} = \int_0^\alpha dy N e^{-Ny} \int_y^\alpha dt t^{s-2} \stackrel{2.}{=} \\ &\stackrel{2.}{=} \int_0^\alpha dy \frac{\alpha^{s-1} - y^{s-1}}{s-1} N e^{-Ny} \stackrel{3.}{=} \alpha^{s-1} \frac{1-e^{-N\alpha}}{s-1} - \frac{1}{N^{s-1}} \int_0^{N\alpha} dx \frac{x^{s-1} e^{-x}}{s-1}. \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

A trükkös lépés az 1.-gyel jelölt: miután bevezettünk az y -integrált $1-e^{-Nt}$ előállítására, kettős integrált ismertünk fel a t - s változóknban, amit átírtunk a másik sorrendbe.¹⁰⁰ A 2. kijelölt lépésben

⁹⁹Ugye ha van integrálható majoráns, akkor az integrálok határértéke létezik és egyenlő a határértékfüggvény integráljával. Viszont ha nincs integrálható majoráns, attól még létezhet az integrálok határértéke (ha nem is egyenlő a határértékfüggvény integráljával). Itt most nem ússzuk meg, hogy alaposabban vizsgáljuk az integráljainkat.

¹⁰⁰Az integrálás tartománya itt a t - y síkon egy háromszög: gondoljuk ki, hogy *tényleg* a felírt módon jelölhetjük ki a határokat a kétféle sorrendben. Kell persze a *Fubini-tétel*: itt véges N -re létezik maga a kétdimenziós integrál is (mert az eredeti sorrendi integrál abszolútértékben is létezik), így *tényleg* áttérhetünk a másik sorrendi integrálra.

elvégeztük a t -integrált, a 3.-ban pedig a maradék y -integrálból az egyiket, a másikban pedig $y = x/N$ -et helyettesítettünk. A kapott eredmény első tagjának van $N \rightarrow \infty$ határértéke, $\frac{\alpha^{s-1}}{s-1}$, és a második *integrálnak* is, méghozzá $\frac{\Gamma(s)}{s-1}$. Utóbbi tag előtt van a lényeg: $\frac{1}{N^{s-1}}$.

Sikerült nyakoncsípni: ennek pontosan csakis $\Re(s) > 1$ esetén van (nulla) határértéke; $\Re(s) < 1$ esetén $|\frac{1}{N^{s-1}}| \rightarrow \infty$, ha $N \rightarrow \infty$, az $\Re(s) = 1, \Im(s) \neq 0$ esetben pedig $|\frac{1}{N^{s-1}}| = 1$ marad, de N^{s-1} a komplex síkon „köröz”, nincs határértéke, ha $N \rightarrow \infty$. Készen vagyunk: az eredeti (D.1) sor feltételelesen sem konvergens $0 < \Re(s) \leq 1$ esetén.

D.2. Analitikus elfolytatás, reflexiós összefüggés

- Vegyük szemügyre még egyszer a (D.8)–(D.9) valós integrál-előállításokat:

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty dt \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}, \quad \text{ha } \Re(s) > 1, \text{ illetve} \tag{D.13}$$

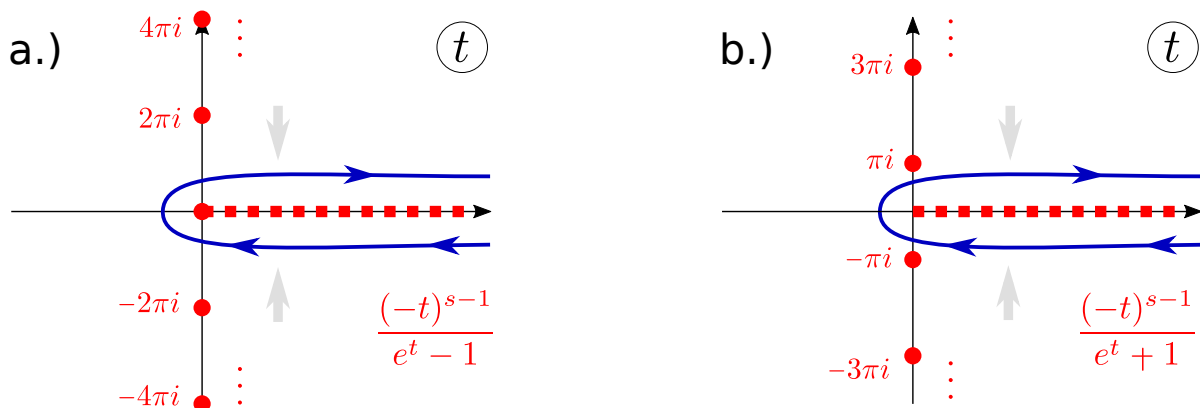
$$(1-2^{1-s})\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty dt \frac{t^{s-1}}{e^t + 1}, \quad \text{ha } \Re(s) > 0 \text{ és } s \neq 1. \tag{D.14}$$

Az s -re tett megszorítások itt ugye csakis a $t = 0$ körüli integrálhatóságon múltak. Áthidalhatjuk ezt, ha **komplex integrálokra** térünk át, amelyek elkerülik a problémás $t = 0$ pontot.

Állítás:
$$\frac{\zeta(s)}{\Gamma(1-s)} = \int_{\infty}^{(0-)} \frac{dt}{2\pi i} \frac{(-t)^{s-1}}{e^t - 1}, \quad \text{ha } \Re(s) > 1, \tag{D.15}$$

illetve
$$(1-2^{1-s})\frac{\zeta(s)}{\Gamma(1-s)} = \int_{\infty}^{(0-)} \frac{dt}{2\pi i} \frac{(-t)^{s-1}}{e^t + 1}, \quad \text{ha } \Re(s) > 0 \text{ és } s \neq 1. \tag{D.16}$$

Legyen először $s \notin \mathbb{Z}$: ekkor a felírt integrandusoknak a (most már komplex) t változó függvényében vágásai vannak a $t \in \mathbb{R}_0^+$ pozitív valós tengelyen; az út ezt elkerüli *negatív* irányban, $\Re(t) = \infty$ -ből jöve és visszamenve. Viszont *pólusok is vannak* ott, ahol $e^t = 1$ illetve $e^t = -1$: az első integrálban ezek a $t = n \cdot 2\pi i$ helyek (kivéve $t=0$ -t, ami elágazási pont), a másodikban pedig az $i\pi + n \cdot 2\pi i$ helyek (itt ugye persze $n \in \mathbb{Z}$ egész szám lehet). Ezek elsőrendű pólusok. Gondolhatjuk, hogy a (D.15)–(D.16) integrálok a vágásra húzással vezethetők vissza a valós (D.13)–(D.14) integrálokra: az útnak ehhez egyik pólust sem szabad megkerülnie.



58. ábra. a.) illetve b.): illusztráció a (D.15) illetve (D.16) komplex integrál-előállításához.

A vágásra ugye úgy húzzuk rá az utat, hogy a fölötte illetve alatta ε -nyival futó szakaszokat $t = x \pm i\varepsilon$ módon paraméterezzük, a $t=0$ pontot pedig egy r sugarú körívdarabbal kerüljük el: hamar kiderül, hogy éppen az s -re írt feltételek, (D.15)-nél $\Re(s) > 1$, (D.16)-nál $\Re(s) > 0$ teljesülése kell ahhoz, hogy a kis ív járuléka nullához tartson $r \rightarrow 0$ esetén. Tudva szokásosan, hogy $x \in \mathbb{R}^+$ és $\varepsilon \rightarrow 0$ esetén $(-x \mp i\varepsilon)^{s-1} \rightarrow x^{s-1} e^{\mp i\pi(s-1)} = -x^{s-1} e^{\mp i\pi s}$, arra jutunk, hogy a megfelelő s -ekre

$$\int_{\infty}^{(0-)} dt \frac{(-t)^{s-1}}{e^t - 1} = (e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}) \int_0^{\infty} dx \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \quad \text{és} \quad \int_{\infty}^{(0-)} dt \frac{(-t)^{s-1}}{e^t + 1} = (e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}) \int_0^{\infty} dx \frac{x^{s-1}}{e^x + 1}.$$

Mivel $e^{i\pi s} - e^{-i\pi s} = 2i \sin(\pi s)$ és $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$, összerakva kiderül, hogy a (D.15) illetve (D.16) integrálfelírások tényleg a valós (D.13)-mal illetve (D.14)-gyel ekvivalensek.

• Ha *nem* húzzuk rá az utakat $t=0$ -ra, akkor a (D.15) illetve (D.16) **komplex integrálok minden $s \in \mathbb{C}$ -re léteznek** (hiszen ekkor a $t=0$ környéke nem kelt zavart, és $\Re(t) \rightarrow \infty$ felé a nevezőbeli e^t -k biztosítják az integrálhatóságot t^{s-1} mellett is); sőt s -ben differenciálható függvényt állítanak elő (ami belátható ahhoz hasonlóan, ahogy a $\Gamma(z)$ Hankel-féle előállításáról a C.6. függelék szakaszban). A (D.15) illetve (D.16) integrálok tehát megadják $\zeta(s)$ **analitikus elfolytatását**: a korábbi sorok és valós integrálok $\Re(s) > 1$ -re illetve $\Re(s) > 0$ -ra működtek, de most $\zeta(s)$ a $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ halmazon értelmes differenciálható függvénné lépett elő (és ezt a kiterjesztést is $\zeta(s)$ -sel jelöljük).

$$\text{Tehát minden } s \in \mathbb{C} \text{ esetén} \quad \frac{\zeta(s)}{\Gamma(1-s)} = \int_{\infty}^{(0-)} dt \frac{(-t)^{s-1}}{2\pi i (e^t - 1)}, \quad (\text{D.17})$$

$$\text{és ugyanekkor az is igaz, hogy} \quad \frac{\zeta(s)}{\Gamma(1-s)} = \frac{1}{1-2^{1-s}} \int_{\infty}^{(0-)} dt \frac{(-t)^{s-1}}{2\pi i (e^t + 1)}. \quad (\text{D.18})$$

Megjegyzések:

1. Már korábban is láttuk, hogy a váltakozó előjelű soros (D.4) definíció bővebb halmazon ($s=1$ kivételével az egész $\Re(s) > 0$ felsíkon) működött, mint a csak $\Re(s) > 1$ esetén működő eredeti (D.1) sor: a (D.4)-gyel tehát lényegében az analitikus elfolytatás egy lépése történt az eredeti (D.1) definícióhoz képest.
2. Mivel (mint mondtuk) a felírt *integrálok* minden s -re értelmesek, csak ott lehet gond $\zeta(s)$ -sel, ahol $\Gamma(1-s)$ -nek (elsőrendű) pólusai vannak: ezek az $s = 1, 2, 3, 4, \dots$ stb. pozitív egész számok. Azonban $s = 2, 3, 4, \dots$ esetén $\zeta(s)$ már a legeredetibb (D.1) sor-definíció szerint is értelmes volt: eszerint tudhatjuk, hogy $s = 2, 3, 4, \dots$ -re a (D.17)-beli interál nullát kell, hogy adjon. (Ezt nemsokára másképp is belátjuk; amúgy akár nyilvánvaló is lehet már most is.)
3. Az is látszik, hogy **tényleg csakis $s=1$ -ben** nem értelmes $\zeta(s)$: **elsőrendű pólusa van** itt $\Gamma(1-s)$ miatt. Hogy itt *tényleg pólus van* (azaz $s=1$ -ben nem nulla a (D.17)-beli integrál), az a váltakozó előjelű soros (D.4) definícióból is látszik. Megkapjuk onnan a reziduomot is: a nevező deriváltja $\frac{d}{ds}(1-2^{1-s})|_{s=1} = 2^{1-s} \ln 2|_{s=1} = \ln 2$, a sorösszeg pedig $s=1$ -ben (ld. például a C.5. szakaszban) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \ln 2$. Tehát $\text{Res } \zeta(s)|_{s=1} = \frac{\ln 2}{\ln 2} = 1$.
4. Azt is látjuk most, amit a váltakozó előjeles (D.4) sor után „ígértünk”: $\zeta(s)$ értelmes az itt is előkerült $1-2^{1-s}$ nevező $s=1$ -en kívüli komplex zérushelyeiben, az $1 + n \cdot \frac{2\pi i}{\ln 2}$ helyeken is.

Figyelem: nehogy keverjük $\zeta(s)$ most kapott szerkezetét (meromorf, $s=1$ -ben egy elsőrendű pólus) azzal, ahogyan az őt előállító (a fenti jelölésben t -függő) integrandusok viselkednek a t -síkon!

• A $\zeta(s)$ tehát értelmes lett az egész $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ halmazon, de ha $\Re(s) \leq 0$, akkor őt egyelőre csak a (D.17)–(D.18) vonalintegrálokkal számíthatnánk ki. Közelhozza $\zeta(s)$ analitikus kiterjesztését az ezekből levezethető Riemann-féle

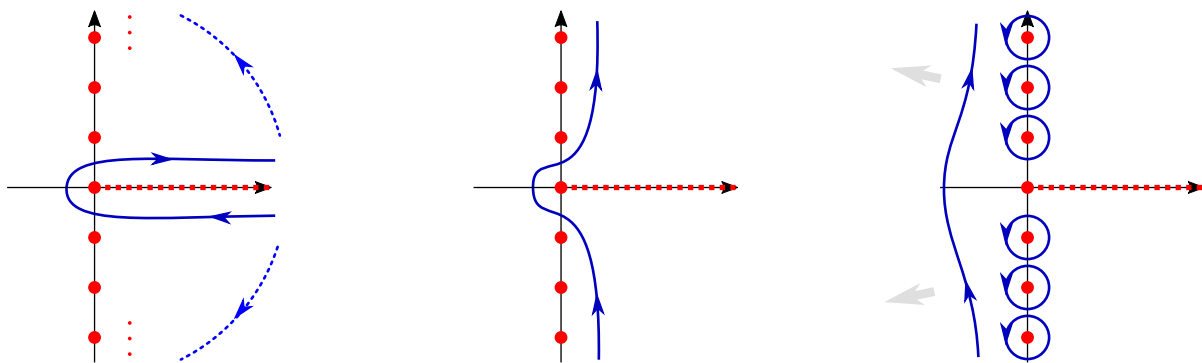
$$\text{reflexiós képlet:} \quad \zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s} \cos\left(\frac{\pi}{2}s\right) \Gamma(s) \zeta(s), \quad \forall s \in \mathbb{C}\text{-re.} \quad (\text{D.19})$$

Ez „szimmetrikus”: nem ad újat az $s \leftrightarrow 1-s$ cserével; ez még jobban látszik, ha a gamma-függvény (6.43) kétszerezős képletét és (6.23) reflexiós összefüggését ügyesen alkalmazva ilyen alakba írjuk:

$$\text{szimmetrikus(abb) alak:} \quad \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \pi^{-(1-s)/2} \zeta(1-s) = \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-s/2} \zeta(s). \quad (\text{D.20})$$

Mindkét alakban $s=0$ -ban vagy $s=1$ -ben az egyik oldalnak megszüntethető szingularitása van.

• A (D.17) vagy a (D.18) előállítás is jó a levezetéshez; vegyük mondjuk (D.17)-et, azaz vizsgáljuk az $\int_{\infty}^{(0-)} dt \frac{t^{s-1}}{e^t-1}$ vonalintegrált. A fenti 58. ábra talán sugallja az ötletet: „dobjuk át” az utat a meg nem került pólusokra!¹⁰¹ Érdeemes több lépésben kigondolni; az alábbi ábra szerint:



59. ábra. A $\zeta(s)$ iménti (D.19) reflexiós összefüggésének levezetéséhez használandó út-átalakítás.

Először úgy deformáljuk az utat, hogy hozzásimuljon a pólusokhoz (a képzetes t -tengelyhez). Ezt akkor tehetjük meg, ha az így bekerült (határesetben $R \rightarrow \infty$ sugarú, pontozva jelölt) negyedkör-ívekre nulla az integrál. Ennek tisztázásához ellenőrizzük, hogy az integrandus abszolútértéke

$$\begin{aligned} & \text{ha } t \in \mathbb{C} \text{ és} \\ & s \in \mathbb{C}, \text{ akkor} \end{aligned} \quad \left| \frac{t^{s-1}}{e^t-1} \right| = \frac{|t|^{\Re(s)-1} e^{-\arg t \cdot \Im(s)}}{\sqrt{e^{2\Re(t)} - 2e^{\Re(t)} \cos(\Im(t)) + 1}} \underbrace{\leq}_{\text{az íveken}} R^{\Re(s)-1} \frac{e^{\frac{\pi}{2}|\Im(s)|}}{e^{\Re(t)}-1}. \quad (\text{D.21})$$

A negyedkörök vége a t -síkon a képzetes tengely mellé kerülne: $\Im(t)$ így itt mindenféle értéket felvehet $R \rightarrow \infty$ során; a „legrosszabb” $\cos(\Im(t)) = 1$ eset is megvalósulhat, ezért csak ezzel becsülhettünk. A nevezővel együtt viszont így akkor kezelhető a tört, ha $\Re(t)$ egyelőre határozottan pozitív marad: $\Re(t) > \alpha$ valamilyen $\alpha > 0$ -val minden (egyre nagyobb) ív végén (azaz az egész átmozgatott út távolabbi részein). Az $|\arg t|$ így az ív-végeknél legfeljebb $\frac{\pi}{2}$, ezt is betettük. Ezekkel

$$\left| \int_{\text{ív}} dt \frac{t^{s-1}}{e^t-1} \right| \leq \frac{\pi}{2} R \cdot R^{\Re(s)-1} \frac{e^{\frac{\pi}{2}|\Im(s)|}}{e^{\alpha}-1} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}|\Im(s)|}}{e^{\alpha}-1} R^{\Re(s)}, \quad \begin{aligned} & \text{ez tényleg nullához tart} \\ & R \rightarrow \infty\text{-nél, ha } \Re(s) < 0. \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

¹⁰¹Hasonlót csináltunk az 5.2. szakasz legutolsó (ctg-es) példájában. Annak tehát, aki ezt a jegyzetet eddig végigszenvette, ez a mostani talán nem égbekiáltó új ötlet már. *Riemann* idejében (1859-ben) azonban az volt. . .

Érdemes tehát feltennünk egyelőre, hogy $\Re(s) < 0$: ekkor átmozgathatjuk az utat. Jön a pólusokra rádobás: ezek helye $t_n = n \cdot 2\pi i$, ahol $n \in \mathbb{Z}$ és $n \neq 0$, a reziduumaik pedig (mivel a nevező deriváltja nem nulla bennük, azaz elsőrendűek) $\text{Res} \frac{t^{s-1}}{e^t-1} \Big|_{t_n} = t_n^{s-1} e^{-t_n} = (n \cdot 2\pi i)^{s-1}$. A pólusokra rádobott utak járuléka tehát (a két részletet, $n < 0$ -t és $n > 0$ -t összevonva):

$$\begin{aligned} \sum_{t_n} \oint_{(t_n^+)} \frac{dt}{2\pi i} \frac{t^{s-1}}{e^t-1} &= \left[\sum_{n=-1}^{-\infty} + \sum_{n=1}^{\infty} \right] \text{Res} \left(\frac{t^{s-1}}{e^t-1} \right) \Big|_{t_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(2\pi n i)^{s-1} + (-2\pi n i)^{s-1} \right] = \\ &= (2\pi)^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} \left[i^{s-1} + (-i)^{s-1} \right] = (2\pi)^s \cdot \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}s\right) \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1}. \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

Ez utóbbi összeg $\zeta(s)$ legeredetibb definíciója alapján pont akkor létezik, ha $\Re(s) < 0$, pont ahogy most feltettük! Emiatt mondhatjuk, hogy a kapott járulékokat (mindet) levonva a képzetes tengely mellé simított utunkéból lényegében tényleg az történt, hogy az utat „átbugyborékolattuk a pólusok hálóján.” Az átvitt utat viszont elvihetjük $\Re(t) \rightarrow -\infty$ felé, amerre az integrandus abszolútértéke $\Re(s) < 0$ miatt csökken; az átjutott út járuléka így nulla, az eredeti integrálunkból csak a pólusok kapott járulécai maradtak. Összerakva a $\zeta(s)$ tényleges előállítását $\Re(s) < 0$ esetén tehát

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{\infty}^{(0^-)} dt \frac{(-t)^{s-1}}{e^t-1} = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} (2\pi)^s 2i \sin\left(\frac{\pi}{2}s\right) \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} = \\ &= \frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{-s}} \frac{\sin(\pi s)}{\pi} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}s\right)}{\sin(\pi s)} \zeta(1-s) = \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)} \frac{\zeta(1-s)}{2 \cos\left(\frac{\pi}{2}s\right)}, \end{aligned}$$

ahol még a gamma-függvény reflexiós összefüggését és a kétszeres szög szinuszának képletét is használtuk. Kész is a kívánt (D.19) bizonyítása. Nem baj, hogy $\Re(s) < 0$ kellett: ez elég bő halmaz; a (D.19) analitikus függvények egyenlőségét állítja: mindenhol működik.

• Láttuk, hogy $\zeta(s)$ -nek elsőrendű pólus van $s=1$ -ben 1 reziduummal, máshol pedig differenciálható: emiatt $s=1$ körül ∞ konvergenciasugarú Laurent-sorba fejthető; így szokták ezt írni:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \gamma_n}{n!} (s-1)^n; \quad (\text{D.24})$$

és a γ_n együtthatók neve: *Stieltjes-állandók*. Belátható, hogy $\gamma_0 = \gamma$, a gamma-függvénynél megismert *Euler-Mascheroni-állandó* (ld. a 6.3. szakaszban). Az $\frac{1}{s-1}$ -et kétoldali határértékkel (úgynevezett „főérték”-képzéssel) kiejtve tehát az adódik, hogy $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\zeta(1-\varepsilon) + \zeta(1+\varepsilon)] = 2\gamma$.

D.3. Speciális értékek, zérushelyek

A (D.19) reflexiós képlet még egyszer: $\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s} \cos\left(\frac{\pi}{2}s\right) \Gamma(s) \zeta(s)$; vigyázat, *használjuk*.

• A reflexiós képlet az $s = \frac{1}{2}$ helyen azt adja, hogy $\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = \zeta\left(\frac{1}{2}\right)$, azaz semmitmondó. Mindenesre

$$\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2-1}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots \right) \approx -1,4603 \quad (\text{D.25})$$

a (D.4) definíció alapján; ez ennyi, és kész. A fizikában előkerülnek a következő értékek is:

$$\zeta\left(\frac{3}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \dots \approx 2,612, \quad \zeta(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots \approx 1,202. \quad (\text{D.26})$$

A $\zeta(\frac{3}{2})$ értékkel például a *Bose-Einstein-kondenzáció*, a $\zeta(3)$ -mal pedig a hőmérsékleti sugárzás tárgyalásánál találkozhatunk. A $\zeta(3)$ értéknek külön neve van: *Apéry-állandó*; arról, aki bebizonyította, hogy ez irracionális szám.

• Próbáljuk meg kiszámítani $\zeta(0)$ -t; ehhez $s=1$ -et kellene írni a reflexiós képletbe. Ebben itt $\cos(\frac{\pi}{2}s)$ -nek egyszeres zérushelye van, azaz $s=1$ körül a deriváltból $\cos(\frac{\pi}{2}s) \approx -\frac{\pi}{2}(s-1)$; ezt $\zeta(s)$ $s=1$ körüli Laurent-sorával (a lényeg: 1 a reziduum) összetéve megszüntethetjük a reflexiós képlet jobb oldalán a szingularitást, véges $-\frac{1}{2}$ értéket kapva. Így leszűrtük tehát, hogy

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}. \quad \text{Huncutkodva: „1+1+1+1+1+... =” } \zeta(0) = -\frac{1}{2}. \quad (\text{D.27})$$

Az, hogy $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$, érvényes és igaz, nincs belekötnivaló. A végtelen sok 1 összege persze nem létezik; $\zeta(s)$ eredeti (D.1) definíciójának „abuzálásával”, $s=0$ -t beírva keletkezett. Ha majd valamikor (a fizikában előfordul ilyen!) *nagyon* szeretnénk a nem értelmes $1+1+1+1+\dots$ összeghez értelmes értéket rendelni, akkor ez a látott $-\frac{1}{2}$ egy lehetőség: a $\zeta(s)$ -et *máshol* megadó (D.1) sorösszegfüggvényt analitikusan elfolytattuk $s=0$ -ba is, és az elfolytatásnak itt értelmes $-\frac{1}{2}$ értéke lett. Ezen „módszer” neve: *zétafüggvény-regularizáció*, „sajnos” tényleg előkerül a fizikában.¹⁰²

• **Kitekintés:** a zéta-függvény az alábbi képlet miatt **összekapcsolódik a prímszámokkal**:¹⁰³

$$\Re(s) > 1 \text{ esetén } \zeta(s) = \frac{1}{1-\frac{1}{2^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{7^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{11^s}} \cdots = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-p_m^{-s}}, \quad (\text{D.28})$$

$$\text{logaritmussal: } \text{Ln } \zeta(s) = - \sum_{m=1}^{\infty} \text{Ln}(1-p_m^{-s}); \quad \text{itt } p_m \text{ az } m\text{-edik prímszám.} \quad (\text{D.29})$$

Ez utóbbi jobb oldali sorösszeg abszolút konvergens (tehát legalábbis: értelmes), ha $\Re(s) > 1$.¹⁰⁴ Emiatt (az Ln és az Exp folytonosságát tudva) az első (D.28) jobb oldalában szereplő végtelen szorzat is *értelmes* (konvergens egyre több tényező összeszorzására nézve). Ráadásul geometriai sorösszegek szorzatáról van szó:

$$\begin{aligned} \prod_{p \text{ prím}} \frac{1}{1-p^{-s}} &= \left[1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{(2^2)^s} + \frac{1}{(2^3)^s} + \dots \right] \cdot \left[1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{(3^2)^s} + \frac{1}{(3^3)^s} + \dots \right] \\ &\cdot \left[1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{(5^2)^s} + \frac{1}{(5^3)^s} + \dots \right] \cdot \left[1 + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{(7^2)^s} + \frac{1}{(7^3)^s} + \dots \right] \\ &\cdot \left[1 + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{(11^2)^s} + \frac{1}{(11^3)^s} + \dots \right] \cdot \left[1 + \frac{1}{13^s} + \frac{1}{(13^2)^s} + \frac{1}{(13^3)^s} + \dots \right] \cdot \dots \end{aligned}$$

Az abszolút konvergencia miatt elkezdhetünk tagonként szorozgatni. Végző soron minden végül kapott taghoz minden itt írt zárójelből pontosan egy tag választódik (majd összeszorzódnak), pél-

¹⁰²Míntha azt játszanánk, hogy mivel a $|z| < 1$ -re értelmes $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ függvény (a geometriai sorösszeg) analitikus elfolytatása $\frac{1}{1-z}$, és például $z=2$ -ben utóbbi értéke $\frac{1}{1-2} = -1$, azt íránk, hogy $1+2+4+8+16+32+\dots = -1$.

¹⁰³Ezt a képletet (valós $s > 1$ -re) már *Euler* felismerte. A zéta-függvény eddig látott tárgyalása jórészt *Riemann* érdeme; ő alapozta meg azt is a (D.28) képletből kiindulva, hogy a(z analitikusan elfolytatott) $\zeta(s)$ zérushelyei a prímszámok eloszlásához kapcsolódnak. A zéta-függvény tehát „híd” a komplex függvények és a számelmélet között.

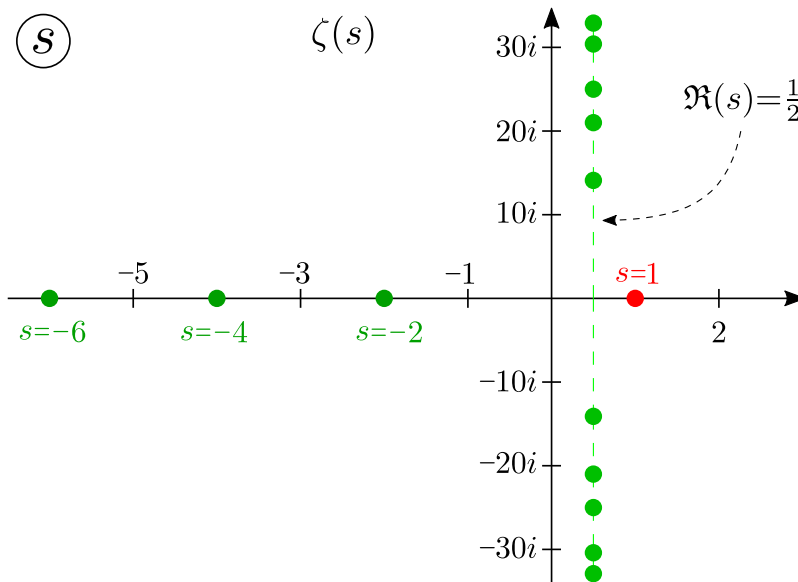
¹⁰⁴Ellenőrizzük, hogy az $\alpha \equiv \Re(s)$, $t \equiv \Im(s)$ jelöléssel $|\text{Ln}(1-p_m^{-s})| = \left| \frac{1}{2} \ln(1+p_m^{-2\alpha} - 2p_m^{-\alpha} \cos(t \ln p_m)) \right|$, és hogy emiatt $|\text{Ln}(1-p_m^{-s})| \leq |\ln(1-p_m^{-\alpha})|$, még az adott α -nál t -ben „legrosszabb” esetben is, amikor a \cos értéke 1. Mivel legalábbis $p_m^{-\alpha} \leq \frac{1}{2}$, az ln menetéből leszűrhetjük, hogy van olyan $K > 0$, amivel $|\ln(1-p_m^{-\alpha})| \leq K p_m^{-\alpha}$. Továbbá legalábbis $K p_m^{-\alpha} \leq K m^{-\alpha}$ is igaz, és utóbbiak $\alpha > 1$ esetén m -ben összegezhethők (éppen a $\zeta(s)$ -et megadó eredeti sorra gondolva). Összerakva az elejét és a végét: $\text{Ln}(1-p_m^{-s})$ -ek abszolútértékben összegezhethők, ha $\Re(s) > 1$.

dául rendre az első, a második, a harmadik, a második, majd onnantól az első tagokat választva $1 \cdot \frac{1}{3^s} \frac{1}{(5^2)^s} \frac{1}{7^s} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots = \frac{1}{(3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7)^s}$ értéket kapunk. A lényeg: a *számelmélet alaptétele* szerint minden $n \in \mathbb{N}^+$ pozitív egész szám pontosan egyféleképpen felírható prímtényezőik szorzataként, így (gondoljuk ki) a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ összegből pont minden $\frac{1}{n^s}$ -et egyszer és csak egyszer tényleg megkapunk itt az összeszorzásból. *Beláttuk tehát a (D.28) képletet.*

• Abból, hogy a prímszamos logaritmusos (D.29) képlet minden $\Re(s) > 1$ -re értelmes, az is következik, hogy ilyen s -ekre $\zeta(s) \neq 0$. A reflexiós képlettel átléphetünk a $\Re(s) > 1$ nyílt félsíkról a $\Re(s) < 0$ félsíkra: utóbbi halmazon pontosan olyan s -ekben kapunk zérushelyet, ahol a reflexiós képletben szereplő \cos nullát ad. Ezek konkrétan a páros negatív egész számok; ezek lesznek tehát a zéta-függvény úgynevezett „triviális” zérushelyei:

$$\zeta(s) = 0, \quad \text{ha } s = -2, -4, -6, -8, \dots \tag{D.30}$$

Fontos volt persze (mivel $s = 2n+1$ -ből léphettünk át $1-s = -2n$ -re), hogy $n \in \mathbb{N}^+$ -ra $\zeta(2n+1)$ értelmes és véges. $n=0$ -ra ugye ez nem igaz; $\zeta(0)$ nem is nulla (hanem $-\frac{1}{2}$; ld. fentebb).



60. ábra. Triviális és nemtriviális zérushelyek, valamint az $s=1$ -beli pólus, függőlegesen torzítva.

• Vannak $\zeta(s)$ -nek más zérushelyei is; ezek az úgynevezett **nemtriviális zérushelyek**: az előbbieknél alapján ők biztosan a $0 \leq \Re(s) \leq 1$ sávon (az úgynevezett *kritikus sávon*) fekszenek. *Van végtelen sok* ilyen zérushely; róluk szól a több, mint 160 éve eldöntetlen (és az egyik legnehezebb matematikai problémának tartott) **Riemann-sejtés**, miszerint az összes ilyen zérushely valós része $\frac{1}{2}$, azaz mindegyik a $\Re(s) = \frac{1}{2}$ egyenesen (az úgynevezett *kritikus vonalon*) fekszik. Az eddig numerikusan felderített (több milliárd) nem triviális zérushelyre mindre igaz ez.¹⁰⁵ Azonban ez nemhogy nem bizonyíték, hanem még csak nem is feltétlenül erős indikáció a sejtés szempontjából.

¹⁰⁵Zérushelyeket az s -síkon általában (a kritikus sávon is) numerikusan az *argumentum-elvvel* lehet keresni (ld. 5.5. szakaszt). Másrészt a reflexiós képlet (D.20) szimmetrikus változatából (tudva, hogy $\zeta(s^*) = (\zeta(s))^*$, és ugyanilyen igaz $\Gamma(\frac{s}{2})$ -re és $\pi^{-s/2}$ -re) kiderül, hogy a $\Gamma(\frac{s}{2})\pi^{-s/2}\zeta(s)$ függvény (amely pontosan ott nulla, ahol $\zeta(s)$ is az) *valós értékű*, ha $\Re(s) = \frac{1}{2}$. Így ezen függvény előjelváltását numerikusan vizsgálva zérushelyeket kereshetünk a kritikus vonalon. *Megjegyzés:* a Riemann-sejtés messzemenő számelméleti következményeket is hordoz; annyit már láttunk, hogy $\zeta(s)$ -nek legalábbis *valami* köze van a prímszámokhoz.

• Már láttuk az 5.2. szakasz végén illetve a $\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$ -vel kapcsolatban a 6.4. szakaszban a talán **legfontosabb speciális értékeket** (ezek előkerülnek a *hőmérsékleti sugárzás* vizsgálatokor):

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}, \quad (\text{D.31})$$

$$\zeta(4) = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90}. \quad (\text{D.32})$$

A reflexiós képletbe $s=2$ -t írva megkapjuk az alábbi speciális értéket is:

$$\zeta(-1) = 2(2\pi)^{-2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2\right) \Gamma(2) \zeta(2) \quad \Rightarrow \quad \zeta(-1) = -\frac{1}{12}. \quad (\text{D.33})$$

Ha $\zeta(s)$ eredeti (D.1) sorába lazán -1 -et írunk, akkor a fentebb $\zeta(0)$ -nál, a (D.27) egyenlet után mondott „zétafüggvény-regularizációs” értelemben itt „ $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = -\frac{1}{12}$ ” adódik.

• Általánosan is érdekesek lehetnek az $s \equiv n$, $n \in \mathbb{Z}$ **egész számokban** felvett értékek. Ilyenkor a (D.17) illetve (D.18) **komplex integrálokban** az integrandusban $(-t)^{s-1} = (-t)^{n-1}$: nincs vágás, csak (esetleg) pólus $t=0$ -ban, tehát ilyenkor (hasonlóan a gamma-függvény (6.69) Hankel-féle előállításához) **bezárhatjuk az utakat** $t=0$ körül. Kigobozva az előjeleket az adódik, hogy

$$n \in \mathbb{Z} \text{ esetén} \quad \frac{\zeta(n)}{\Gamma(1-n)} = (-1)^n \oint_{(0+)} \frac{dt}{2\pi i} \frac{t^{n-1}}{e^t - 1} = \frac{(-1)^n}{1-2^{1-n}} \oint_{(0+)} \frac{dt}{2\pi i} \frac{t^{n-1}}{e^t + 1}. \quad (\text{D.34})$$

1. Ha $n=1$, a második integrál nulla (mert az integrandus mindenhol differenciálható), az $1-2^{1-n}$ nevező is nulla, $\Gamma(0)$ pólusos, de $\zeta(1)$ is. Az első integrálból az $\frac{1}{e^t-1}$ $t=0$ -beli reziduumból kigondolhatóan $\frac{\zeta(1)}{\Gamma(0)} = -1$ adódna: $\frac{\zeta(s)}{\Gamma(1-s)}$ -nek $s=1$ -ben megszüntethető szingularitása van; ha megszüntetjük, -1 lesz az érték. (Idézzük fel, hogy $\text{Res } \Gamma(z)|_0 = 1$, azaz $\text{Res } \Gamma(1-s)|_0 = -1$, és $\text{Res } \zeta(s)|_1 = 1$; utóbbiak hányadosa tényleg -1 .) Mindenesetre $\zeta(s)$ -nek pólusa van $s=1$ -ben.
2. Ha $n=2, 3, 4, \dots$, akkor mindkét integrandus mindenhol differenciálható: a felírt integrálok nullák (ezt ígértük korábban is). Ilyenkor $\zeta(n)$ értékei véges számok, a nevezőbeli $\Gamma(1-n)$ pedig ∞ : ilyen $0=0$ értelemben igazak ekkor a felírt képleteink.
3. Végül $n=-m$, $m \in \mathbb{N}_0^+$ esetén $\Gamma(1+m) = m!$. Rögtön a hagyományosnak számító alakokat írjuk:

$$(-1)^m (m+1) \zeta(-m) = \frac{(m+1)!}{2\pi i} \oint_{(0+)} dt t^{-m-2} \frac{t}{e^t - 1} = \frac{-1}{2^{m+1}-1} \frac{(m+1)!}{2\pi i} \oint_{(0+)} dt t^{-m-2} \frac{t}{e^t + 1}. \quad (\text{D.35})$$

• Eme legutóbbi esetben felismerhetjük (a *Cauchy-féle integrálformulákat* tudva, ld. 4.2. szakaszt), hogy itt $m+1$ -edik deriváltak $t=0$ -beli értékei jöttek ki. $m \in \mathbb{N}_0^+$ esetén tehát

$$\zeta(-m) = \frac{(-1)^m}{m+1} B_{m+1}, \quad (\text{D.36})$$

ahol a bevezetett B_n -ek az úgynevezett **Bernoulli-számok**:

$$B_n \equiv \left[\frac{d^n}{dt^n} \frac{t}{e^t - 1} \right] \Big|_{t=0} = \frac{-1}{2^n - 1} \left[\frac{d^n}{dt^n} \frac{t}{e^t + 1} \right] \Big|_{t=0}. \quad (\text{D.37})$$

A Bernoulli-számok jól definiált racionális számok; sok jó tulajdonságuk van. Önmagában nem nyilvánvaló, de az eddigiekből az, hogy a kétféle felírt definíciójuk ekvivalens.

- *Tudva*, hogy $\zeta(-2n) = 0$, látható, hogy $B_3 = B_5 = B_7 = B_9 = \dots = 0$. Néhány többi érték:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad \dots \quad (\text{D.38})$$

A reflexiós képlettel, $m \rightarrow 1-2n$ -t írva a páros pozitív egészekre általánosan azt kapjuk, hogy

$$n \in \mathbb{N}^+ \text{-ra} \quad \zeta(2n) = \frac{(-1)^{n+1} (2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}. \quad (\text{D.39})$$

A látottak speciális eseteiként kiadódnak $\zeta(0)$, $\zeta(-1)$, $\zeta(2)$, $\zeta(4)$ értékei; tovább lépve például $\zeta(6)$ is π^6 és egy racionális szám szorzata. A $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, stb. értékekkel így „nem tudunk elbánni”.

- *Utolsó* pont: haladó gyakorlásként levezethetjük a **tangensfüggvény egész hatványsorát** $z=0$ körül, nemcsak az első néhány tagot. A módszer: az együtthatókat a Cauchy-integrálformulával felírva átdobjuk az utat a $\text{tg } z$ „sorban” lévő pólusaira; $\zeta(s)$ -szerű sorösszegre jutunk. Az eredmény:

$$\begin{aligned} \text{tg } z &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (1-2^{-2n}) \zeta(2n) \left(\frac{2z}{\pi}\right)^{2n-1} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} (2^{2n}-1) B_{2n}}{(-1)^{n+1} (2n)!} z^{2n-1} = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} + \dots; \end{aligned} \quad (\text{D.40})$$

Ugyanezt kapjuk akkor is, ha a gamma-függvénnyel kapcsolatban megismert, a $\cos(\frac{\pi}{2}z)$ -t megadó (6.57) képletbeli végtelen szorzat logaritmusát vesszük, majd az így kapott végtelen összeget tagonként deriváljuk és $z=0$ -ban kiértékelgetjük a tagokat. A tg sorába z helyébe iz -t helyettesítve majd i -vel osztva megkaphatjuk a th függvény hatványsorát is (ugye $\text{th } z = -i \cdot \text{tg } z$).

Az, hogy a tg és a th függvények $z_0=0$ körüli hatványsorának konvergenciasugara (az első pólusok helyéből leszűrhetően, mint láttuk) $\frac{\pi}{2}$, a felírt sorok alapján harmonizál azzal az egyszerű ténnyel, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta(n) = 1$.